arXiv:2303.05982v1 [math.AP] 10 Mar 2023

具有完全周期符号的伪微分算子

GIANLUCA GARELLO 和 Alessandro Mora NDO

ABSTRACT. 受 Boggiatto-Garello 最近发表于 J. Pseudo- Differ. Oper. Appl. 11 (2020), 93-117 的论文启发，该文将 Gabor 算子视为符号为 $p(x,\omega)$ 且关于两个变量均为周期的伪微分算子，我们研究具有完全周期符号并采用一般 τ 量子化的伪微分算子在一般时频不变空间上的连续性和可逆性。

关键词：Gabor 框架、调制空间、周期分布、伪微分算子。

2020 年数学主题分类。35S05，42C15，47B90。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 预备知识 2 2.1. 记号与基本工具 2 2.2. 时频平移 (tfs) 3 2.3. 调制空间 3 2.4. 周期分布 4 3. 周期符号伪微分算子 6 4. 连续性 8 4.1. 傅里叶乘子的情形 9 5. 可逆性 11 附录 A. 关于周期分布和环面上的分布 12 致谢 14 参考文献 14

1. INTRODUCTION.

考虑 Gabor 算子的形式表达式：$S f = \sum_{h,k\in\mathbb{Z}^d} (f, g_{h,k})_{L^2}\, g_{h,k}$，$g_{h,h}(t) = e^{2\pi i\beta k\cdot t} g(t-\alpha h)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$，以及采用 Kohn-Nirenberg 量化的伪微分算子的形式表达式：$a(x,D)\varphi(x) = \iint e^{2\pi i\omega\cdot(x-t)} a(x,\omega) f(t)\, dt\, d\omega$，其中 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，$a(x,\omega)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$，积分是在分布意义下进行的。在近期的工作 [2] 中证明了 $S = a(x,D)$，其中

$$a(x,\omega) = \sum_{h,k\in\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i(x-\alpha h)\cdot(\omega-\beta k)} g(x-\alpha h)\bar{\tilde{g}}(\omega-\beta k), \tag{1}$$

在 g、$\hat{g}$ 于无穷远处满足适当的衰减条件，且在 $L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ 中收敛的情况下。然后，利用 Calder´on - Vaillancourt 定理关于伪微分算子连续性的结果，见 [18], ，可以证明，当 $\alpha+\beta$ 小于一个适当的正常数 C_g 时，该常数仅取决于 g、$\hat{g}$ 在无穷远处的衰减以及它们的一些导数，Gabor 算子作为 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的有界线性算子是可逆的。众所周知，根据框架理论，Gabor系统 $\{g_{h,k}\}_{h,k\in\mathbb{Z}^d}$构成一个框架。

关于 Gabor 框架理论的文献十分丰富，这里我们仅列举专著 [6], [13], [15], [5]。此外，如何确定参数 α、β 的条件以获得 Gabor 框架，也是一个颇具挑战性的问题，参见例如 [10], [14] 及其中的参考文献。

现在注意到，式 (1) 中的符号是完全周期的：相对于空间变量 x，周期为 α；相对于 ω，周期为 β。基于上述种种原因，我们认为，研究具有完全周期符号的伪微分算子，以及它们在 L^2 或更一般函数空间中的连续性和可能的可逆性，具有一定意义。
关于与 x无关的符号，即傅里叶乘子，我们列举讨论周期情形的论文 [12], [20], 。

关于紧李群上的伪微分算子，相关文献则更为丰富，参见 Ruzhansky-Turunen 的经典著作 [25], ，其中将符号在 x 上周期、在 ω上离散（非周期）的情形作为特殊情况。此外，反过来的情形也值得关注，即符号在 x 上离散、在 ω上周期；此时相关算子称为“伪差分”算子，参见 [3], [19]。关于广义空间（例如调制空间）上的伪微分算子，请参阅以下论文 [27], [28], [8], [1], [22], [23], [4], [11], [7], [9]。

本文的结构如下：第 §2 节给出记号和定义；随后回顾关于一般可逆矩阵的周期分布及其傅里叶变换的一些基本事实。第 §3 节介绍一般 τ 量子化下的伪微分算子，并针对周期符号给出一个由时频平移算子的线性组合得到的表示公式。最后，我们分别在第 §4 节和第 §5 节中给出关于一般时频平移不变空间族的连续性和可逆性结果。附录 A 旨在介绍一些技术细节，以便比较 $\mathbb{R}^n$ 上的周期分布与 n 维环面 $\mathbb{T}^n$上的分布。

2. Preliminaries

2.1. 记号与基本工具。本文中我们将使用以下记号和工具：

- $\mathbb{R}^n_0=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\mathbb{Z}^n_0=\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$;
- $\langle x\rangle=\sqrt{1+|x|^2}$，其中 $|x|$ 是 $x\in\mathbb{R}^n$的欧几里得范数;
- $x\cdot\omega=\langle x,\omega\rangle=\sum_{j=1}^n x_j\omega_j$; $x,\omega\in\mathbb{R}^n$;
- $(f,g)=\int f(x)\overline{g(x)}\,dx$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的内积；• $\mathcal{F}f(\omega)=\hat{f}(\omega)=\int f(x)e^{-2\pi ix\cdot\omega}\,dx$ 是 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶变换，并可按众所周知的方式推广到 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$。

多项式权函数 v 是针对某个 $s \geq 0$ 定义的，具体如下：

$$v(z) = (1 + |z|^2)^{s/2}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n .$$

$m = m(z)$ 上的非负可测函数称为多项式适度（或缓增）权函数，如果存在一个正常数 C 使得

$$m(z_1 + z_2) \leq Cv(z_1)m(z_2) \quad \text{for all} \, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

有关权函数的其他细节，请参见 [13, §11.1]。
在下文中，我们将在许多情况下使用 $GL(2d)$ 中的矩阵

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

它定义了辛形式，参见 [13, §9.4],

$$[z_1, z_2] := \langle z_1, \mathcal{J} z_2 \rangle = x_2 \cdot \omega_1 - x_1 \cdot \omega_2 \quad , \quad z_1 = (x_1, \omega_1), \, z_2 = (x_2, \omega_2) \in \mathbb{R}^{2d}.$$

2.2. 时频平移（tfs）。对于 $z = (x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d}$，我们定义算子：

$$\begin{aligned} &T_x f(t) = f(t - x) && \text{（平移）；} \\ &M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega \cdot t} f(t) && \text{（调制），} \\ &\pi_z f = M_\omega T_x f && \text{（时频移位），} \end{aligned}$$

并可适当推广到 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ 中的广义函数。
对于 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $z = (x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d}$，以下性质很容易推出：

$$\begin{aligned} &T_x M_\omega u = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x u, \\ &\mathcal{F}(T_x u) = M_{-x} \mathcal{F} u, && \mathcal{F}^{-1}(T_x u) = M_x \mathcal{F}^{-1} u, \\ &\mathcal{F}(M_\omega u) = T_\omega \mathcal{F} u, && \mathcal{F}^{-1}(M_\omega u) = T_{-\omega} \mathcal{F}^{-1} u, \\ &\mathcal{F}(\pi_z u) = e^{2\pi i x \cdot \omega} \pi_{\mathcal{J}^T z} \mathcal{F} u; && \mathcal{F}^{-1}(\pi_z u) = e^{2\pi i x \cdot \omega} \pi_{\mathcal{J} z} \mathcal{F}^{-1} u. \end{aligned} \tag{4}$$

2.3. 调制空间。

定义 2.1. 对于固定的非零函数 g，函数 f 关于 g 的短时傅里叶变换（或加博尔变换）定义为

$$V_g f(z) := (f, \pi_z g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-2\pi i \omega \cdot t} \overline{g(t - x)} dt, \quad \text{for } z = (x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d},$$

只要该积分有意义，也可以在弱分布意义下理解。

当 f、$g \in L^2$（$\mathbb{R}^d$）时，$V_g f$ 是定义在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的一致连续函数，$V_g f \in L^2$（$\mathbb{R}^{2d}$）且 $\|V_g f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$。例如参见 [13, §3]。

定义 2.2. 对于固定的 $g \in \mathcal{S}$（$\mathbb{R}^d$）$\setminus \{0\}$ 和 p、$q \in [1, +\infty]$，$m-$ 加权调制空间 $M^{p,}{}_m{}^q$（$\mathbb{R}^d$）由满足下述条件的所有缓增分布 $f \in \mathcal{S}'$（$\mathbb{R}^d$）构成

$$\|f\|_{M^{p,q}_m} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |V_g f(x, \omega)|^p m(x, \omega)^p dx \right)^{q/p} d\omega \right)^{1/q} < +\infty ,$$

（当 p 或 q 中至少有一个等于 $+\infty$时，需作相应修改。）

空间 $M^{p,\,q}_{\ m}$的定义不依赖于窗函数 g的选取；不同的窗函数 g 给出等价范数，而 $M^{p,\,q}_{\ m}$是一个巴拿赫空间。对于 $p=q$，我们记 $M^p_m := M^{p,\,p}_{\ m}$；当 $m(x,\omega) \equiv 1$ 时，我们写作 $M^{p,\,q}$。

有关调制空间的更多详情，请参见 [13, §6.1、§11]。

2.4. 周期分布。若广义函数 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 满足以下条件，则称其为周期分布（周期为 1）：

$$T_\kappa u = u \quad \text{for any } \kappa \in \mathbb{Z}^n.$$

注意，此时 u 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的一个缓增分布，因此可以考虑其傅里叶变换 $\hat{u}$。此外，可以证明

$$\hat{u} = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa(u)\delta_\kappa,$$

其中级数在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中收敛，

$$c_\kappa(u) := \langle u, \phi e^{-2\pi i\langle\cdot,\kappa\rangle}\rangle = \widehat{u\phi}(\kappa), \tag{5}$$

且 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \phi(x-\kappa) = 1. \tag{6}$$

详情请参见 H¨ormander [16, §7.2]。现在，直接应用傅里叶逆变换即可得到

$$u = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa(u) e^{2\pi i\langle\cdot,\kappa\rangle}, \tag{7}$$

其中在 $\mathcal{S}'$ and $c_\kappa(u)$ 中收敛，后者定义见式 (5)。

注意，一般的周期广义函数 u 可视为环面 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$上的广义函数，也就是说，它是 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ 上的连续线性泛函。下文中，$\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ 表示 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ 的拓扑对偶空间。因此，展开式 (7) 中的系数可视为 u 的傅里叶系数，即

$$c_\kappa(u) = \langle u, e^{-2\pi i\langle\cdot,\kappa\rangle}\rangle_{\mathbb{T}^n}, \tag{8}$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{T}^n}$ 表示 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ 与 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ 之间的对偶配对。与式 (8) 一致，对于 $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$，利用式 (6) 可得

$$c_\kappa(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)e^{-2\pi ix\cdot\kappa}\,dx = \int_{[0,1]^n} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\kappa}\,dx.$$

在附录 A 中，我们说明如何使上述在 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ 中的计算严谨，尤其参见式 (27)。

关于环面上的广义函数的详细讨论，可参见 M. Ruzhansky 和 V. Turunen 的著作 [25]。

现在以及全文中，考虑 $L = (a_{ij}) \in GL(n)$，即大小为 $n\times n$ 的可逆矩阵空间。

对于 $\mathbb{T}^n_L := \mathbb{R}^n/L\mathbb{Z}^n$，我们仍将 L-周期分布的集合，即满足对任意 $\kappa\in\mathbb{Z}^n$，$T_{L\kappa}u = u$ 均有 $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 的分布，与 $C^\infty(\mathbb{T}^n_L)$ 上的连续线性泛函空间 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n_L)$ 等同。注意，在这种情况下也有 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n_L)\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$。

对于任意 $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n_L)$，注意到 $v = u(L\cdot)$ 是一个 1-周期分布。应用

于是傅里叶展开 $v = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa(v) e^{2\pi i\langle\cdot,\ \kappa\rangle}$, $c_\kappa(v) = \langle v, e^{-2\pi i\langle\cdot,\ \kappa\rangle}\rangle_{\mathbb{T}^n}$, 我们得到

$$u = v(L^{-1}\cdot) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa(v) e^{2\pi i\langle k, L^{-1}\cdot\rangle} = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa(v) e^{2\pi i\langle L^{-T}k,\cdot\rangle},$$

其中 $L^{-T} := (L^{-1})^T$ 表示 L 的逆矩阵的转置, 且

$$c_\kappa(v) = \langle u(L\cdot), e^{-2\pi i\langle\kappa,\cdot\rangle}\rangle_{\mathbb{T}^n} = \frac{1}{|\det L|}\langle u, e^{-2\pi i\langle L^{-T}\kappa,\cdot\rangle}\rangle_{\mathbb{T}^n_L}.$$

因此, 对于任意 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n_L)$, 我们得到傅里叶展开

$$u = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_{\kappa,L}(u) e^{2\pi i\langle L^{-T}k,\cdot\rangle}, \tag{9}$$

其傅里叶系数为

$$c_{\kappa,L}(u) := c_\kappa(u(L\cdot)) = \frac{1}{|\det L|}\langle u, e^{-2\pi i\langle L^{-T}\kappa,\cdot\rangle}\rangle_{\mathbb{T}^n_L}. \tag{10}$$

为简洁起见, 以下记 $c_\kappa(u) = c_{\kappa,L}(u)$。
考虑 $L^p(\mathbb{T}^n_L)$, $1 \le p < \infty$, 即定义在 $\mathbb{R}^n$ 上满足 $\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n_L)} = \int_{L[0,1]^n} |f(x)|^p\, dx < \infty$ 的可测 L-周期函数集合; 定义 $L^\infty(\mathbb{T}^n_L)$时作相应的显然修改。

那么, 对于 $f \in L^1(\mathbb{T}^1_L)$, 有如下结论:

$$f(x) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa(f) e^{2\pi i L^{-T}\kappa\cdot x} \tag{11}$$

在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中收敛, 并且

$$c_\kappa(f) = \frac{1}{|\det L|}\int_{L[0,1]^n} e^{2\pi i L^{-T}\kappa\cdot x} f(x)\, dx \tag{12}$$

注 1. 用格 $\Lambda = L\mathbb{Z}^n$ 表示 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n_L)$ 的傅里叶展开可能会很有用:

$$u = \sum_{\mu\in\Lambda^\perp} \hat{u}(\mu) e^{2\pi i\langle\mu,\cdot\rangle},$$

with

$$\hat{u}(\mu) := \frac{1}{\mathrm{vol}(\Lambda)}\langle u, e^{-2\pi i\langle\mu,\cdot\rangle}\rangle_{\mathbb{T}^n_L}.$$

这里, $\Lambda^\perp := L^{-T}\mathbb{Z}^n$ 和 $\mathrm{vol}(\Lambda) := |\det L| = \mathrm{meas}\,(L[0,1]^n)$ 分别称为 Λ 的对偶格和体积。

例 1. 对于 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_j > 0$, 考虑对角矩阵 $A \in GL(n)$ 及其逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix} \tag{13}$$

并为 $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ 引入以下记号，$\alpha k := A\kappa = (\alpha_1 k_1, .. ., \alpha_n k_n)$;$\frac{\kappa}{\alpha}$:
$= A^{-1}k = \left(\frac{\kappa_1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\kappa_n}{\alpha_n}\right)$, $\prod \alpha := \prod_{j=1}^{n} \alpha_j$。现在考虑一个 A 周期函数 f，它满足 $\int_0^{\alpha_1} \cdots \int_0^{\alpha_n} |f(x)|\, dx_1 \ldots dx_n < +\infty$，则可直接由 (11)、(12) 得到

$$f(x) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} c_k(f) e^{2\pi i \frac{k}{\alpha} \cdot x},$$

其中

$$c_k(f) = \frac{1}{\prod \alpha} \int_0^{\alpha_1} \cdots \int_0^{\alpha_n} f(x) e^{-2\pi i \frac{\kappa}{\alpha} \cdot x}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

3. Pseudodifferential Operators with periodic symbol

我们称以符号 $p(z) = p(x, \omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ 为 τ 伪微分算子 $0 \le \tau \le 1$，该算子从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 映射到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$，定义如下:

$$\mathrm{Op}_\tau(p)u(x) := \int_{\mathbb{R}^d_\omega} \int_{\mathbb{R}^d_y} e^{2\pi i (x-y)\cdot\omega} p\left((1-\tau)x + \tau y, \omega\right) u(y)\, dy\, d\omega, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

形式积分必须在分布意义下理解。关于伪微分算子的定义与发展，请参阅基础文献 [26], [17]。

对于 I，分别表示维数为 $d \times d$ 的单位矩阵和零矩阵，我们引入以下 $d \times 2d$ 矩阵

$$I_1 = (I, 0), \quad I_2 = (0, I)$$

命题 3.1。考虑 $p \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{2d}_L)$、 $L \in GL(2d)$。那么对于任意 $0 \le \tau \le 1$和 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 我们可以写成

$$\mathrm{Op}_\tau(p)u = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) e^{2\pi i \tau \langle I_2 L^{-T}\kappa\, ,\, I_1 L^{-T}\kappa \rangle} \pi_{\mathcal{J} L^{-T}\kappa} u, \tag{14}$$

其中， $c_\kappa(p)$ 是式 (10) 中定义的傅里叶系数，而 $\mathcal{J}$ 是式 (3) 中引入的矩阵。

证明。利用式 (9)、(10)，我们对符号 p 进行傅里叶展开

$$p = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) e^{2\pi i \langle L^{-T}\kappa, \cdot \rangle}$$

其在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ 中收敛。那么对于任意 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，我们得到

$$\mathrm{Op}_\tau(p)u(x) = \iint e^{2\pi i (x-y)\cdot\omega} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) e^{2\pi i L^{-T}\kappa \cdot ((1-\tau)x + \tau y, \omega)} u(y)\, dy\, d\omega.$$

考虑如下分解

$$L^{-T} = \begin{pmatrix} I_1 L^{-T} \\ I_2 L^{-T} \end{pmatrix},$$

我们得到

$$L^{-T}\kappa \cdot ((1-\tau)x + \tau y, \omega) = I_1 L^{-T}\kappa \cdot ((1-\tau)x + \tau y) + I_2 L^{-T}\kappa \cdot \omega.$$

为简化记号，令 $L_j^{-T} = I_j L^{-T}$, $j = 1, 2$。于是，根据 $\mathcal{S}'$ 中的收敛性以及分布意义下的形式积分，可得

$$\mathrm{Op}_\tau(p)u(x) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) \iint e^{2\pi i(x-y)\cdot\omega} \quad e^{2\pi i L_1^{-T}\kappa\cdot((1-\tau)x+\tau y)}\times$$

$$\times e^{2\pi i L_2^{-T}\kappa\cdot\omega} u(y)\, dy\, d\omega =$$

$$= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) \int e^{2\pi i x\cdot\omega} e^{2\pi i L_2^{-T}\kappa\cdot\omega} \int e^{-2\pi i y\cdot\omega} e^{2\pi i L_1^{-T}\kappa\cdot((1-\tau)x+\tau y)} u(y)\, dy\, d\omega =$$

$$= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) e^{2\pi i L_1^{-T}\kappa\cdot((1-\tau)x)} \int e^{2\pi i\left(x+L_2^{-T}\kappa\right)\cdot\omega} \int e^{-2\pi i\left(\omega-\tau L_1^{-T}\kappa\right)\cdot y} u(y)\, dy\, d\omega =$$

$$= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) e^{2\pi i(1-\tau)L_1^{-T}\kappa\cdot x} \int e^{2\pi i\left(x+L_2^{-T}\kappa\right)\cdot\omega} \hat{u}\left(\omega - \tau L_1^{-T}\kappa\right)\, d\omega =$$

$$= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) e^{2\pi i(1-\tau)L_1^{-T}\kappa\cdot x} \int e^{2\pi i\left(x+L_2^{-T}\kappa\right)\cdot\omega} T_{\tau L_1^{-T}\kappa}\hat{u}(\omega)\, d\omega =$$

$$= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) e^{2\pi i(1-\tau)L_1^{-T}\kappa\cdot x} \int e^{2\pi i\left(x+L_2^{-T}\kappa\right)\cdot\omega} \widehat{M_{\tau L_1^{-T}\kappa}u}(\omega)\, d\omega =$$

$$= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) e^{2\pi i(1-\tau)L_1^{-T}\kappa\cdot x} \left(M_{\tau L_1^{-T}\kappa}u\right)\left(x + L_2^{-T}\kappa\right) =$$

$$= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) e^{2\pi i(1-\tau)L_1^{-T}\kappa\cdot x}\, T_{-L_2^{-T}\kappa} M_{\tau L_1^{-T}\kappa}u(x) =$$

$$= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} c_\kappa(p) M_{(1-\tau)L_1^{-T}\kappa} T_{-L_2^{-T}\kappa} M_{\tau L_1^{-T}\kappa}u(x).$$

证明最后指出，由于 (4),

$$M_{(1-\tau)L_1^{-T}\kappa} T_{-L_2^{-T}\kappa} M_{\tau L_1^{-T}\kappa} =$$

$$= e^{-2\pi i\langle -L_2^{-T}\kappa, \tau L_1^{-T}\kappa\rangle} M_{(1-\tau)L_1^{-T}\kappa} M_{\tau L_1^{-T}\kappa} T_{-L_2^{-T}\kappa} =$$

$$= e^{2\pi i\tau\langle L_2^{-T}\kappa, L_1^{-T}\kappa\rangle} M_{L_1^{-T}\kappa} T_{-L_2^{-T}\kappa} = e^{2\pi i\tau\langle L_2^{-T}\kappa, L_1^{-T}\kappa\rangle} \pi_{\mathcal{J}L^{-T}\kappa}.$$

□

注释 2. 考虑 $\mu = L^{-T}\kappa \in \Lambda^\perp$。根据 (14)，伪微分算子 Op_τ 可用格点记法表示

$$\mathrm{Op}_\tau(p) = \sum_{\mu\in\Lambda^\perp} \hat{p}(\mu) e^{2\pi i\tau\langle I_2\mu, I_1\mu\rangle} \pi_{\mathcal{J}\mu}. \tag{15}$$

例 2. 设 $a = (a_1, \dots a_d)$、 $b = (b_1, \dots, b_d)$ 是 $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^d$ 中的两个向量。使用例 1 中的记号，我们称符号 $p \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ 是 ab-周期的

如果对于任意 $\kappa=(h,k)\in\mathbb{Z}^{2d}$, $p(\cdot+ah,\cdot+bk)=p(\cdot,\cdot)$。考虑矩阵

$$L=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix},$$

其中 A,B 是按 (13) 定义的对角矩阵，显然可以证明 $I_1L^{-T}\kappa=\frac{h}{a}$ 和 $I_2L^{-T}\kappa=\frac{k}{b}$。那么对于任意 $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

$$\pi_{\mathcal{J}L^{-\tau}\kappa}u=M_{\frac{h}{a}}T_{-\frac{k}{b}}u=e^{2\pi i\langle\frac{h}{a},\cdot\rangle}u(\cdot+\frac{k}{b}).$$

因此，对于任意 $0\le\tau\le1$，我们有

$$\mathrm{Op}_\tau p(u)=\sum_{(h,k)\in\mathbb{Z}^{2d}}c_{h,k}(p)e^{2\pi i\tau\langle\frac{h}{a},\frac{k}{b}\rangle}e^{2\pi i\langle\frac{h}{a},\cdot\rangle}u(\cdot+\frac{k}{b}),$$

在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 中收敛，且 $c_{h,\ k}(p)$ 由形式积分定义

$$c_{h,k}(p)=\frac{1}{|\prod ab|}\int_0^{a_1}\!\!\cdots\int_0^{a_d}\int_0^{b_1}\!\!\cdots\int_0^{b_d}p(x,\omega)e^{-2\pi i\left(\frac{h}{a}\cdot x+\frac{k}{b}\cdot\omega\right)}\,dx\,d\omega\ .$$

4. Continuity

如果某个多项式权函数 v 满足 $C>0$，则称巴拿赫空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow X\hookrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$（其中 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 在 X 中稠密）具有时频平移不变性（下文简称 tfs 不变性）。

$$\|\pi_zu\|_X\le Cv(z)\|u\|_X,\quad u\in X,\quad z\in\mathbb{R}^{2d}. \tag{16}$$

例 3. • 加权调制空间 $m-M^{p,q}_m(\mathbb{R}^d)$, $p,q\in[1,+\infty]$ *are time frequency shifts invariant, see* [13, Th 11 3 5].

• 加权勒贝格空间 $m-L^p_m(\mathbb{R}^d)$ 和 $m-$加权傅里叶-勒贝格空间 $\mathcal{F}L^p_m(\mathbb{R}^d)$ 分别定义为 $\mathbb{R}^d$ 中使范数 $\|f\|_{L^p_m}:=\|m(\cdot,\omega_0)f\|_{L^p}$和 $\|f\|_{\mathcal{F}L^p_m}=\|m(x_0,\cdot)\hat{}f\|_{L^p}$ 有限的可测函数集和缓增分布集，其中 $(x_0,\omega_0)\in\mathbb{R}^{2d}$ 可任意取值。（ $L^p_m(\mathbb{R}^d)$ 和 $\mathcal{F}L^p_m(\mathbb{R}^d)$ 中的等价范数对应于 (x_0,ω_0) 的不同选择。见 [23, 注 1。1]）对于 $z=(x,\omega)\in\mathbb{R}^{2d}$，假设 $(x_0,\omega_0)=(0,0)$，并使用 (2)，我们计算得：

$$\begin{aligned}\|\pi_zf\|^p_{L^p}=\|M_\omega T_xf\|^p_{L^p_m}&=\textstyle\int m(t,0)^p|f(t-x)|^p\,dt=\int m(t+x,0)^p|f(t)|^p\,dt\\&\le C^pv(x,0)^p\textstyle\int m(t,0)^p|f(t)|^p\,dt=C^pv(x,0)^p\|f\|^p_{L^p_m}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\|\pi_zf\|^p_{\mathcal{F}L^p_m}=\|M_\omega T_xf\|^p_{\mathcal{F}L^p_m}=\textstyle\int m(0,t)^p|\widehat{M_\omega T_xf}(t)|^p\,dt\\&=\textstyle\int m(0,t)^p|T_\omega M_{-x}\hat{f}(t)|^p\,dt=\int m(0,t)^p|\hat{f}(t-\omega)|^p\,dt\\&\le C^pv(0,\omega)^p\textstyle\int m(0,t)^p|\hat{f}(t)|^p\,dt=C^pv(0,\omega)^p\|f\|^p_{\mathcal{F}L^p_m}.\end{aligned}$$

那么，对于任意$p\in[1,+\infty]$，$L^p_m(\mathbb{R}^d)$ 和 $\mathcal{F}L^P_m(\mathbb{R}^d)$ 都是时频平移不变的。

在这两个例子中，正数 C 由公式 (2) 直接得到，且仅取决于权函数 m。

定理 4.1. 设 X 是一个时频移不变空间，$L \in GL(2d), p \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{2d}_L)$。假设由公式 (10) 定义的傅里叶系数 $c_\kappa(p)$ 满足：

$$\|c_\kappa(p)\|_{\ell^1_{L,v}} := \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} v\left(\mathcal{J}L^{-T}\kappa\right)|c_\kappa(p)| < +\infty. \tag{17}$$

那么，对于任意 $\tau \in [0,1]$，算子 $\mathrm{Op}_\tau(p)$ 在 X 上有界，且

$$\|\mathrm{Op}_\tau(p)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C\|c_\kappa(p)\|_{\ell^1_{L,v}},$$

其中 C 是 (16) 中的常数。

用格点术语（见 (15)），我们可以写成

$$\|c_\kappa(p)\|_{\ell^1_{L,v}} = \sum_{\mu=\in\Lambda^\perp} |\hat{p}(\mu)|v(\mathcal{J}\mu) := \|\hat{p}(\mu)\|_{\ell^1_v},$$

其中 $\mu = L^{-T}\kappa$，$\kappa \in \mathbb{Z}^{2d}$。

证明。利用命题 3.1，并结合时频移不变性 (16)，我们得到对于 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|\mathrm{Op}_\tau(p)u\|_X \le \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} |c_\kappa(p)|\|\pi_{\mathcal{J}L^{-T}\kappa}u\|_X \le C\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^{2d}} |c_\kappa(p)|v(\mathcal{J}L^{-T}\kappa)\|u\|_X,$$

其中 C 是式 (16) 中的常数。证明可由 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 在 X 中的稠密性得到。□

4.1. 傅里叶乘子的情形。现在假设符号与 x 无关，即考虑傅里叶乘子 $\sigma = \sigma(\omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$，$P-$ 周期，且满足 $P \in GL(d)$，也就是说

$$T_{Pk}\sigma = \sigma\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^d\,.$$

在这种情况下，相关的伪微分算子作为从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 的线性有界算子，可表示为

$$\sigma(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\sigma\hat{u})\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,. \tag{18}$$

将 σ 的傅里叶展开代入式 (18)

$$\sigma(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k(\sigma)e^{2\pi i P^{-T}k\cdot\omega}\,, \tag{19}$$

其中级数在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 中收敛，我们计算得

$$\sigma(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\sigma\hat{u}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k(\sigma)T_{-P^{-T}k}u\,, \quad \text{for any } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,, \tag{20}$$

级数在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 中收敛；在式 (18)、(19) 中，$c_k(\sigma)$ 通常表示 σ 的傅里叶系数。

下面的结果表明，对于傅里叶乘子算子，定理 4.1 中给出的有界性充分条件也是必要的，即 $\sigma(D)$ 可以扩展为加权勒贝格空间 $L^1_v(\mathbb{R}^d)$ 上的线性有界算子，其中 $v = v(x)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的多项式权函数。

命题 4.1. 设 $\sigma = \sigma(\omega) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 对于 $P \in GL(d)$ 是 P–周期的。若假设 $\sigma(D)$ 可扩展为 $L^1_v(\mathbb{R}^d)$ 上的有界算子，即

$$\|\sigma(D)u\|_{L^1_v} \leq C\|u\|_{L^1_v}\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,,$$

对于某个常数 $C > 0$，则

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} v\left(P^{-T}k\right)|c_k(\sigma)| < +\infty. \tag{21}$$

证明。只需在一个支撑于紧集 $\mathcal{P}_0$ 上的非负连续函数 $\tilde{u} \in L^1_v(\mathbb{R}^d)$ 上计算 $\sigma(D)$：$= P^{-T}([0,1]^d)$，使得 $\|u\|_{L^1_v} = 1$ [1]。于是，函数 $T_{-P^T k}\tilde{u}$ 将支撑于 $\mathcal{P}_k$：对于所有 $k \in \mathbb{Z}^d$，$= \mathcal{P}_0 - P^{-T}k$。由于集合族 $\{\mathcal{P}_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 构成了 $\mathbb{R}^d$ 的一个覆盖，并且 $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{P}_h$ 的勒贝格测度为零，每当 $k \neq h$ 时，我们得到

$$\|\sigma(D)\tilde{u}\|_{L^1_v} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{\mathcal{P}_k} v(x)|\sigma(D)\tilde{u}(x)|dx\,.$$

甚至显然，对于每个 k，在集合 $\mathcal{P}_k$ 的内部，$\tilde{u}$ 使得 $\sigma(D)$ 化为 $c_k(\sigma)T_{-P^{-T}k}\tilde{u}$；因此，通过变量替换以及 v 的次可乘性，我们得到

$$\|\sigma(D)\tilde{u}\|_{L^1_v} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k(\sigma)|\int_{\mathcal{P}_k} v(x)|\tilde{u}(x+P^{-T}k)|dx$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k(\sigma)|\int_{\mathcal{P}_0} v(y-P^{-T}k))|\tilde{u}(y)|dy \geq \frac{1}{K}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_k(\sigma)|v(P^{-T}k)\,,$$

其中 $K > 0$ 仅取决于 P 和 v。 □

注 3. 结合命题 4.1 和定理 4.1 可知，对于傅里叶乘子，条件 (21) 实际上等价于在任意按 (16) 定义的 tfs 不变巴拿赫空间中的连续性；由于傅里叶乘子具有结构 (20)，只需空间具有平移不变性即可。

相反，对于在时频移不变空间中具有依赖于 x 的符号的周期性伪微分算子的连续性，条件 (17) 已不再必要。取如下形式的符号 $p(x,\omega) = \nu(x)\sigma(\omega)$，其中 ν 是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中的一个函数，且其傅里叶系数序列 $\{c_k(\nu)\} \notin \ell^1(\mathbb{Z})$ 和 $\sigma(\omega)$ 满足 (21)，便可轻易证明这一点。例如，我们可以取 $\nu(x) = 1$ （当 $0 \leq x < 1/2$ 时），以及 $\nu(x) = 0$ （当 $1/2 \leq x < 1$ 时），并按周期性重复。可以直接验证，只要 $1 \leq p < +\infty$，伪微分算子 $p(x,D)$ 就将 $L^p_v(\mathbb{R})$ 连续地映射到自身。另一方面，我们立即计算得

$$\sum_{(h,k)\in\mathbb{Z}^2} v(k)|c_{(h,k)}(p)| = \sum_{h\in\mathbb{Z}}|c_h(\nu)|\sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)|c_k(\sigma)| = +\infty.$$

[1]这样的函数 u 可定义为 $\tilde{u}(x) := |\det P|^{\psi(P^T x)\,v(x)}$，其中 ψ 是任意一个支撑于单位立方体 $Q = [0,1]^d$ 上的非负光滑函数，满足 $\int \psi(z)dz = 1$。

5. Invertibility

为了研究伪微分算子的可逆性条件，我们将利用巴拿赫代数中冯·诺依曼级数的众所周知的性质，参见 [24], 中的以下表述。

命题 5.1. 设 $x \in \mathcal{A}$，其中 $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ 是复数域上的巴拿赫代数，具有乘法单位元 e。若存在 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 使得 $\|e - cx\| < 1$，则 x 在 $\mathcal{A}$ 中可逆，且

$$x^{-1} = c \sum_{n=0}^{\infty} (e - cx)^n.$$

定理 5.1. 设 X 是时频移不变空间，$L \in GL(2d)$，$p \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{2d}_L)$。假设傅里叶系数 $c_\kappa(p)$、$\kappa \in \mathbb{Z}^{2d}$满足

$$c_0(p) \neq 0 \quad and \quad \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^{2d}_0} |c_\kappa(p)| v\left(\pi_{\mathcal{J}L^{-T}}\kappa\right) < \frac{|c_0(p)|}{C}, \tag{22}$$

其中 C 是式 (16) 中的常数。那么对任意 $0 \leq \tau \leq 1$

i) 算子 $\mathrm{Op}_\tau(p)$ 在 $\mathcal{L}(X)$ 中可逆；

ii) 逆算子在 $\mathcal{L}(X)$ 中的范数满足以下估计

$$\|(\mathrm{Op}_\tau(p))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{(1 + Cv(0))\,|c_0(p)| - C\|c_k(p)\|_{\ell^1_{L,m}}}.$$

注意，根据前面的估计，$\mathrm{Op}_\tau(p)$ 的可逆性与量子化 τ 无关。

证明。我们的目标是对任意$0 \leq \tau \leq 1$以及 c 适当的非零常数，估计算子范数 $\|I - c\,\mathrm{Op}_\tau(p)\|_{\mathcal{L}(X)}$。考虑傅里叶系数的定义 (10)。由于单色信号 $e^{-2\pi i\langle L^{-T}\kappa, x\rangle}$是$L$-周期的，因此容易得到 $c_0(1) = 1$ 和 $c_\kappa(1) = 0$，当 $\kappa \in \mathbb{Z}^{2d}_0$ 时。因此$c_\kappa(1 - cp) = -cc_\kappa(p)$，当 $\kappa \neq 0$ 时，并且 $c_0(1 - cp) = 1 - c\,c_0(p)$。假设$\langle p, 1\rangle_{\mathbb{T}^{2d}_L} \neq 0$，于是 $c_0(p) = \underbrace{\langle p, 1\rangle_{\mathbb{T}^{2d}_L}}_{\in \mathbb{Z}} \det L \neq 0$，并令$c = c_0^{-1}(p)$，算子$I - c_0^{-1}(p)\mathrm{Op}_\tau(p)$ 的符号具有以下傅里叶系数

$$c_\kappa\left(1 - \frac{p}{c_0(p)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{when } \kappa = 0 \\ -\frac{c_\kappa(p)}{c_0(p)} & \text{when } \kappa \neq 0\,. \end{cases}$$

因此，以下估计可直接由定理 4.1 得出，

$$\begin{aligned} \|I - \tfrac{1}{c_0(p)}\mathrm{Op}_\tau(p)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C\|c_k(1 - \tfrac{p}{c_0(p)})\|_{\ell^1_{L,m}} = \\ &= \tfrac{C}{|c_0(p)|} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^{2d}_0} |c_\kappa(p)| v\left(\mathcal{J}L^{-T}\kappa\right), \end{aligned} \tag{23}$$

其中 C 是式 (16) 中的常数。因此，i) 可直接由命题 5.1 得出。

由假设 (22)、估计 (23) 和命题 5.1 可知，逆算子 $(\mathrm{Op}_\tau(p))^{-1}$ 可以展开为 Neumann 级数

$$(\mathrm{Op}_\tau(p))^{-1} = \frac{1}{c_0(p)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(I - \frac{1}{c_0(p)}\mathrm{Op}_\tau(p)\right)^n,$$

然后再次利用 (23)，可得

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{Op}_\tau(p))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \tfrac{1}{|c_0(p)|}\sum_{n=0}^{+\infty}\|I-\tfrac{1}{c_0(p)}\mathrm{Op}_\tau(p)\|^n_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leq \tfrac{1}{|c_0(p)|}\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{C^n}{|c_0(p)|^n}\left(\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}_0^{2d}}|c_k(p)|v\left(\mathcal{J}L^{-T}\kappa\right)\right)^n\\ &\leq \tfrac{1}{|c_0(p)|}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tfrac{C}{|c_0(p)|}(\|c_\kappa(p)\|_{\ell^1_{L,m}}-|c_0(p)|v(0))\right)^n\\ &\leq \tfrac{1}{|c_0(p)|}\frac{1}{1-\frac{C}{|c_0(p)|}\left(\|c_\kappa(p)\|_{\ell^1_{L,m}}-|c_0(p)|v(0)\right)}\\ &= \frac{1}{(1+Cv(0))\,|c_0(p)|-C\|c_k(p)\|_{\ell^1_{L,m}}},\end{aligned}$$

这就证明了 ii)。 □

Appendix A. On periodic distributions and distributions on the torus

本节将简要回顾一些关于 $\mathbb{R}^n$ 中的周期分布空间（见第 2.4 节）与环面 $\mathbb{T}^n_L:=\mathbb{R}^n/L\mathbb{Z}^n$ 上的分布空间$\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n_L)$ 之间比较的已知事实，以证明本文中一直默认的上述空间的等同是合理的。回想一下， $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n_L)$ 是函数空间 $C^\infty(\mathbb{T}^n_L)$ 上连续线性泛函所构成的空间（后者赋有其自然的 Fr´echet 空间拓扑）。如第 2.4 节所述，关于环面上的分布的详细研究，可参见 Ruzhansky - Turunen[25] 。

至于其余部分，这里汇集的结果主要是将 H¨ormander [16, 第 7.2] 节中确立的一些结果明确表述出来。

众所周知，环面 $\mathbb{T}^n_L$ 上的函数可以自然地与 $\mathbb{R}^n$中的 $L-$周期函数对应起来。下文将说明如何将同样的对应关系推广到 $\mathbb{R}^n$中的所有 $L-$周期分布。按照惯例，可以通过对偶论证将这一对应关系推广到分布。尽管以下论证适用于 $L-$周期情形，且可采用任意可逆矩阵 $L\in GL(n)$，但为简便起见，我们将仅讨论 $L=I_n$ 单位矩阵的情形，从而得到 $1-$周期函数和分布。

首先考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $1-$周期可测函数 $f=f(x)$，满足$f\in L^1([0,1]^n)$；当然，这样的函数 f 是 $\mathbb{R}^n$中的一个 $1-$周期缓增分布。另一方面，将其（按惯例）视为环面 $\mathbb{T}^n$上的可积函数时， f 定义了 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$中的一个元素，其对测试函数 $\psi\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$的作用由下式给出

$$\langle f,\psi\rangle_{\mathbb{T}^n}:=\int_{[0,1]^n}f(x)\psi(x)dx\,;$$

为避免混淆，以下均用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{T}^n}$ 表示 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ 与 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ 之间的对偶配对，而用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 与 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 之间的对偶对。

将 f 与任意函数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 进行配对，我们计算得

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\int_{[0,1]^n+\kappa} f(x)\varphi(x)dx \\ &= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\int_{[0,1]^n} f(y+\kappa)\varphi(y+\kappa)dy = \int_{[0,1]^n}\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} f(y+\kappa)\varphi(y+\kappa)dy \\ &= \int_{[0,1]^n} f(y)\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\varphi(y+\kappa)dy\,,\end{aligned} \tag{24}$$

其中用到了勒贝格积分的可数可加性、用于交换求和与积分次序的富比尼定理，以及 f 的周期性。函数

$$\varphi_{\mathrm{per}}(x) := \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\varphi(x+\kappa)\,,\quad x\in\mathbb{R}^n\,,$$

它出现在（24）式的最后一行，是一个 1–周期 C^∞函数，可以自然地识别为 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$中的一个（唯一）元素；我们称之为 φ的 1–周期化。容易验证，映射 $\varphi \mapsto \varphi_{\mathrm{per}}$ 作为从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$到 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$的（线性）算子是连续的（因此从 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$到 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$也连续）。所以，上述计算自然地给出了定义线性映射 $\mathcal{T}$的方法：将空间 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$映射到 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$中由 1–周期分布（它们自动也是缓增分布）构成的子空间，只需令$U \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$

$$\langle \mathcal{T}(U), \varphi\rangle := \langle U, \varphi_{\mathrm{per}}\rangle_{\mathbb{T}^n}\,,\quad \forall\,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{25}$$

容易验证， $\mathcal{T}$从 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ 连续映射到 $\mathbb{R}^n$中的 1–周期分布。此外，由 (24) 可知，$\mathcal{T}(U)$ 可自然地约化为 $\mathbb{R}^n$ 中与函数 $U \in L^1(\mathbb{T}^n)$ 对应的 1–周期缓增分布。

$\mathcal{T}$ 可逆这一点稍微不那么显然，因此它实际上定义了一个同构。注意到每个函数 $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ 都可以看作至少一个函数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的 1–周期化，即 $\psi = \varphi_{\mathrm{per}}$，便可证明这一点。为此，考虑一个满足 (6) 的函数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，并令

$$\varphi := \phi\psi\,, \tag{26}$$

对任意函数 $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$（将其与 $\mathbb{R}^n$中的 1–周期 C^∞–对应函数相认同）。当然，上述定义的 φ 属于 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，因此它在$\mathbb{R}^n$中快速衰减；此外，结合 (6) 及 ψ的周期性，可得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$

$$\varphi_{\mathrm{per}}(x) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\varphi(x+\kappa) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\phi(x+\kappa)\psi(x+\kappa) = \psi(x)\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\phi(x+\kappa) = \psi(x)\,,$$

这表明 ψ 实际上是 φ 的 1–周期化。由此，我们可以为任意周期分布 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 关联一个定义在 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ 上的线性泛函 U，其定义为对每个 $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$

$$\langle U, \psi\rangle_{\mathbb{T}^n} := \langle u, \varphi\rangle\,, \tag{27}$$

其中 $\varphi = \varphi(x)$ 是与 ψ 相关联的 $\mathbb{R}^n$ 中快速衰减（实际上是紧支撑光滑）函数，如式 (26) 所示。为了使 U 的定义前后一致，我们必须证明它与 φ 无关。请注意，由于

根据式 (5)，任何函数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，其 $1-$ 周期化由 $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ 给出，都满足以下条件：

$$\hat{\varphi}(\kappa) = c_\kappa(\psi)\,, \quad \forall\, \kappa \in \mathbb{Z}^n\,.$$

因此，利用傅里叶展开 (7)，我们得到

$$\langle u, \varphi\rangle = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa \langle e^{2\pi i\langle\cdot,\kappa\rangle}, \varphi\rangle = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa \hat{\varphi}(\kappa) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa c_\kappa(\psi)\,.$$

这表明上述 U 的定义是一致的；线性泛函 U 在 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$上的连续性也很容易得到，因此 $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$。

由 (27) 定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的 $1-$周期分布上的映射 $u \mapsto U$，给出了一个连续线性算子，它将 $\mathbb{R}^n$ 中的 $1-$周期（温和）分布空间映射到 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$；该算子实际上是此前引入的算子 $\mathcal{T}$的逆，见 (25)。这等价地表明，$\mathcal{T}$ 是一个同构；借助该同构，可以将 $\mathbb{R}^n$ 中的 $1-$周期分布视为 $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$的元素，反之亦然。

因此，$1-$周期分布 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$可以视为 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$上的连续线性泛函；特别是，这使得对 $C^\infty(\mathbb{T}^n)$中的$1-$周期光滑函数（例如 $e^{-2\pi i\langle\kappa,\cdot\rangle}$，其中 $\kappa \in \mathbb{Z}^n$）检验 u 成为严格的表述，同时也明确解释了关于 u的傅里叶系数的公式 (8)。

Acknowledgments

A. MORANDO 的研究部分得到了意大利大学与研究部 PRIN 项目 20204NT8W4 的资助。

G. GARELLO 获得了都灵大学地方研究基金的资助。

References

[1] P. Boggiatto、G. De Donno 和 A. Oliaro, *Time-Frequency representations of Wigner type and pseudo-differential operators* **362** **9**, 2010 4955 4981 , 《美国数学会汇刊》 n. ( ), –。[2] P. Boggiatto、G. Garello, *Pseudo-differential operators and existence of Gabor frames*, 《伪微分算子与应用杂志》11 (2020), 93-117。[3] L. N. A. Botchway、P. G. Kibiti、M. Ruzhansky, *Difference equations and pseudo-differential operators on $\mathbb{Z}^n$* **278** **11** 2020 108473, 41 , 《泛函分析杂志》( ), ( ), 。[4] M. Cappiello、J. Toft, *Pseudo-differential operators in a Gelfand-Shilov setting*, 《数学通讯》 290(5-6), (2017), 738–755。[5] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birk¨auser, 波士顿 MA 2016。[6] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall 信号处理丛书, 新泽西州, 1995。[7] E. Cordero、L. D'Elia、S. I. Trapasso, *Norm estimates for τ-pseudodifferential operators in Wiener amalgam and modulation spaces* **471** **1** **2** 2019 541 563 , 《数学分析及其应用杂志》(-), ( ), –。[8] E. Cordero、F. Nicola, *Pseudodifferential operators on L^p Wiener amalgam and modulation spaces* , , 《国际数学研究通知》( ), ( ), –。[9] E. Cordero、F. Nicola、S. I. Trapasso, *Almost diagonalization of τ-pseudodifferential operators with symbols in Wiener amalgam and modulation spaces* , 《傅里叶分析及其应用杂志》25(4), (2019), 1927–1957。[10] X.R. Dai、Q. Sun, *The abc-problem for Gabor Systems*, 《美国数学会回忆录》244 no. 1152 (2016), ix-99。[11] L. D'Elia、S. I. Trapasso, *Boundedness of pseudodifferential operators with symbols in Wiener amalgam spaces on modulation spaces* **9** **4** 2018 , 《伪微分算子与应用杂志》( ), ( ), 881–890。[12] K. de Leeuw, *On L_p multipliers*, 《数学年刊》81 (1965), 364-479。[13] K. Gr¨ochenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birk¨auser, 波士顿 2001。[14] K. Gr¨ochenig、S. Koppensteiner, *Gabor frames: characterizations and coarse structure,New trends in applied harmonic analysis. Vol. 2—harmonic analysis, geometric measure theory, and applications* ¨ 2019, 93 120 , 《应用与数值调和分析》, Birkhauser/Springer, 沙姆, -。[15] C. Heil, *A Basis Theory Primer*, Birkh¨auser, 波士顿, 2011。

[16] L. H¨ormander, *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 1990 。施普林格出版社，柏林，。[17] L. H¨ormander, *The analysis of linear partial differential operators. III*, volume 274 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 1994 。施普林格出版社，柏林，。[18] I. L. Hwang, *The L^2 boundedness of pseudodifferential operators*，《美国数学会汇刊》302 n.1(1987)，55-76。[19] V. Kumar、S. S. Mondal，符号演算与 M椭圆性，关于 $\mathbb{Z}^n$上的伪微分算子，arXiv:2111.10224。[20] S. Igari, *Functions of L^p-multipliers*, Tohoku Math. J. 21 (2)，(1969)，304-320。[21] D. Labate, *Pseudodifferential operators on modulation spaces*，《数学分析及其应用杂志》262 n.1 (2001)，242-255。[22] S. Pilipovi´c、N. Teofanov、J. Toft，*Micro-local analysis with Fourier Lebesgue spaces. Part II* **1 3** 2010 341 376，《伪微分算子与应用杂志》( ) ( )，-。[23] S. Pilipovi´c、N. Teofanov、J. Toft，*Micro-local analysis with Fourier Lebesgue spaces. Part I* **17 3** 2011 374 407，《傅里叶分析及其应用杂志》，( ) ( )，–。[24] W. Rudin。 *Real and complex analysis*，第三版，McGraw-Hill Book Co.，纽约，1987。[25] M. Ruzhansky、V. Turunen *Pseudo-differential Operators and Symmetries*，Birk¨auser- Verlag，巴塞尔，2010。[26] M.A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*，施普林格出版社，柏林，1987。[27] J. Toft, *Continuity properties for modulation spaces with applications to pseudo-differential calculus I.* **207 2** 2004 399 429 ，《泛函分析杂志》( ), ( ) –。[28] J. Toft, *Continuity properties for modulation spaces with applications to pseudo-differential calculus II.* 2004 73 106 , Ann. Global Anal. Geom. 26，( )，–。

Mathematics Department, University of Turin, via Carlo Alberto 10, I-10123 Torino, Italy. (ORCID: 0000-0002-8636-2998)*Email address*: gianluca.garello@unito.it

DICATAM, University of Brescia, via Valotti 9, I-25133 Brescia, Italy. (ORCID: 0000-0002-6800-7490)*Email address*: alessandro.morando@unibs.it