信息论 I-MMSE 推广时频信号处理工具

Samah A. M. Ghane
m IEEE 高级会员

摘要—本文利用一种信息论与估计理论结果（称为 I-MMSE **[1]-[2]** ），证明该工具可以推广用于分析非平稳非高斯信号的时频信号处理工具。

索引词—有向图；估计理论；信息论；最小均方误差（MMSE）；互信息；维格纳分布（WD）。

I. 引言

平稳非高斯信号通常采用信号处理和统计学工具进行分析。偏度和峰度 [3] 用于分析时域信号。然而，对于非平稳信号，即频谱描述随时间变化的信号，则使用傅里叶变换（FT）。另一方面，傅里叶变换的局限性使得二维信号处理分析必须使用时频表示。短时频变换（STFT）[4] 和维格纳分布（WD）[5] 旨在描述随时间变化的频谱特性，而小波变换（WT）[6] 旨在提取信号的局部贡献。STFT 将信号视为准平稳信号，并通过对信号进行傅里叶变换来分析。时频表示旨在克服时间分辨率与频率分辨率之间的权衡。信号的维格纳分布‡（ ）定义如下：

$$\boldsymbol{W_x(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau} \tag{1}$$

其中，$x^*(t)$ 是复共轭的 $x(t)$ 的 j f ( )

文献 [1],[2] 已刻画了连续时间平稳高斯 [7] 和非高斯平稳信号因噪声污染或亚奈奎斯特采样而造成的信息损失量。然而，时频信号处理工具在刻画非平稳非高斯信号方面仍显不足。本文借助信息论和估计理论工具，表明时域中适用于平稳信号的这类工具可以推广为时频信号处理工具。我们将信息损失量刻画为关于信号和采样过程的最小均方误差的函数。此外，我们还展示了在存在多个信号或噪声时，刻画过程中互相关性的其他项，所有这些项均与时间和频率有关。

‡为便于利用结果，并且由于其与功率谱密度$\boldsymbol{W_x(t,f)}$的直接关系，我们给出了关于维格纳分布$\boldsymbol{S_x(f)}$的结果。

II. 定义

通信系统的非线性估计器为，

$$\boldsymbol{E[x(t)|y(t)]=\int_x x(t)p(x(t)|y(t))} \tag{2}$$

表示一个非平稳过程。然后，

$$\boldsymbol{E[(E[x(t)|y(t)])^2]=\int_t\int_x x^2p^2(x|y)dx\,dt}$$

$$\boldsymbol{=\int_t E_X[x^2p^2(x|y)]dt}$$

$$\boldsymbol{=\int_{-\infty}^{\infty} S_{X|Y}(f)df}$$

$$\boldsymbol{=\int_{-f_s/2}^{f_s/2} S_{X|Y}(f)df}$$

$$\boldsymbol{=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} W_{X|Y}(t,f)df} \tag{3}$$

(3) 其中，$X|Y(\ )$ 是条件功率谱密度，$X|Y(\ )$ 是条件维格纳分布（WD），也就是时频对应形式。该项表示在重构或估计过程之后仍然存在的采样所导致的信息损失量。

该过程在时域、频域和时频域的最小均方误差表示为，

$$\boldsymbol{mmse(t)=\int_{-\infty}^{\infty} E_X[(x(t)-E[x(t)|y(t)])^2]dt} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{mmse(f)=\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df-\int_{-f_s/2}^{f_s/2} S_{X|Y}(f)df} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{mmse(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_X(t,f)dtdf}$$

$$\boldsymbol{-\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} W_{X|Y}(t,f)df} \tag{6}$$

其中X 与式 (1) 中相同，而条件部分 [7] 为，

$$\iint W_{X|Y}(\ )\infty\ -\infty\ \int \sum S_X{}^2(f-fsk,t)\frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|H|^2(f-f}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_Y|H|}$$

$)(f-fsk,t)(f-fsk)$其中 (s) 为采样滤波器。

III. 时频 I-MMSE

下一节将介绍一种适用于所有时频信号处理工具的通用化方法，它囊括了在非平稳非高斯信号领域中，噪声污染、重构、估计，以及信号与其他信号混合所导致的相关性损失等所有术语。时频域中的 I-MMSE 是对 [1]-[2]，中所述内容以及 [8]-[13] 等其他论述的推广。

互信息与最小均方误差之间的联系，定义了互信息相对于随机参数的变化；这种变化刻画了传输、噪声污染、干扰，或相关与不相关信号混合过程中所遭遇的信息损失。该I-MMSE关系相对于信噪比定义如下：

$$\frac{dI(snr)}{dsnr} = \boldsymbol{mmse}(\boldsymbol{snr}) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{snr}) \qquad (7)$$

这可以改写为时频域中的形式：

$$\frac{dI_{x;y,snr}(t,f)}{dsnr} = \boldsymbol{mmse}_{x|y}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{\psi}_{x|y}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{f}) \qquad (8)$$

基于这一基本结果和上一节的分析，并考虑两个信号混合的情况1 2，我们将这一结果改写为时频域中的形式如下：

$$\frac{dI_{x_1,x_2;y,snr}(t,f)}{dsnr} = \boldsymbol{mmse}_{x_1|y}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{mmse}_{x_2|y}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{\psi}_{x_1x_2|y}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{f}) + \boldsymbol{\psi}_{x_2x_1|y}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{f}) \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{x_1,x_2;y,snr}(t,f)}{dsnr} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{x_1}(t,f)dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} \frac{W_{x_1x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1x_2}(t,f)W_{x_1}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1}(t,f)W_{x_1^*x_2^*}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{x_2}(t,f)dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} \frac{W_{x_2x_1}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_2x_1}(t,f)W_{x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_2}(t,f)W_{x_2^*x_1^*}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1}(t,f)W_{x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1}(t,f)W_{x_2^*x_1^*}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1x_2}(t,f)W_{x_2^*x_1^*}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1x_2}(t,f)W_{x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_2x_1}(t,f)W_{x_1}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_2x_1}(t,f)W_{x_2^*x_1^*}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_2x_1}(t,f)W_{x_1}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf
\end{aligned} \qquad (10)$$

这一结果将单输入和多个输入输出系统的 I-MMSE 恒等式 [1]-[2]推广为时频域中的 I-MMSE。该结果还推广了维格纳分布 [5]，加入了若干项，明确说明非高斯、非平稳混合中存在的信息损失，即采样和估计的影响，以及由多个输入造成的干扰或污染的影响；这与互信息或 Kullback–Leibler 距离 [14] 的定义相符，后者表示两个分布之间的距离。混合信号的维格纳分布等于两个输入各自的维格纳分布之和，减去它们互相关的实部。然而，当输入之间存在互相关，且输入为复数时，上述表达式给出了所有正项和负项。如果输入为实数，

$$\begin{aligned}
&\frac{dI_{x_1,x_2;y,snr}(t,f)}{dsnr} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{x_1}(t,f)dtd \\
&- \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{x_2}(t,f)dtdf - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} \frac{W_{x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \\
&- 2Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} \frac{W_{x_1x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf\right\} \\
&- 4Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1x_2}(t,f)W_{x_1}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf\right\} \\
&- 4Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1x_2}(t,f)W_{x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf\right\} \\
&- 2Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} \frac{W_{x_1}(t,f)W_{x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf\right\} \\
&-2Re\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{\left(W_{x_2x_1}(t,f)\right)^2}{W_y(t,f)}dtdf\right\}
\end{aligned} \qquad (11)$$

在独立性假设下，也就是说不存在相关性时，其余项均为零。该方程可简化为 1st, 2nd, 6th, 7th, 11th和15th ，如下所示，

$$\frac{dI_{x_1,x_2;y,snr}(t,f)}{dsnr} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{x_1}(t,f)dtdf - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_1}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{x_2}(t,f)dtdf - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-f_s/2}^{f_s/2} \frac{W_{x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} \frac{W_{x_1}(t,f)W_{x_2}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} \frac{W_{x_2}(t,f)W_{x_1}(t,f)}{W_y(t,f)}dtdf \quad (12)$$

另请注意，维格纳分布是实数，但输入可能不是实数，因此我们没有对某些项进行简化，以体现其复数部分。尤其是，与正态分布不同，维格纳分布可能为负值，而这实际上有时会使干扰项发挥有益作用。

结论

本文推导了一个时频 I-MMSE 版本。通过考虑受类似信号污染的非平稳非高斯信号的估计与重构，该版本有助于推广维格纳分布等时频信号处理工具。该结果将高斯信号和平稳输入作为特例涵盖在内。

参考文献

[1] S. A. M. Ghanem，《多用户 I-MMSE》，可在 ArXiv 获取，2015。[2] S. A. M. Ghanem，《K 用户高斯信道的广义 I-MMSE》，可在 ArXiv 获取，2016。[3] J. Antoni，《谱峭度：一种用于表征非平稳信号的实用工具》，《机械系统与信号处理》，20，2006。[4] L. R. Rabiner 和 R. W. Schafer，《语音信号的数字处理》，恩格尔伍德克利夫斯，普伦蒂斯·霍尔信号处理丛书，第 250 页，1978。[5] T. A. C. M. Classen 和 W. F. G. Mechklenbruaker，《维格纳分布——时频信号处理工具》，第 1 部分：连续时间信号，《飞利浦研究杂志》，第 35 卷，第 217–250 页，1980。[6] A. Grossman 和 J. Morlet，《将 Hardy 函数分解为形状恒定的平方可积小波》，《SIAM 数学分析杂志》，第 15 卷，第 723–736 页，1984。[7] A. Kipnis、A. J. Goldsmith、Y. C. Eldar、T. Weissman，《次奈奎斯特采样高斯源的失真率函数》，《IEEE 信息论汇刊》，第 62 卷，第 1 期，1 月，2016。[8] S. A. M. Ghanem，《网络编码：信息论与估计理论之间的联系》，IEEE Wireless，第 17 届 IEEE 无线、移动和多媒体网络世界国际研讨会（WoWMoM），2016 年 6 月。[9] D. Guo、S. Shamai 和 S. Verdú，《高斯信道中的互信息与最小均方误差》，《IEEE 信息论汇刊》，第 51 卷，第 4 期，第 1261–1282 页，2005 年 4 月。[10] D. P. Palomar 和 S. Verdú，《线性向量高斯信道中的互信息梯度》，《IEEE 信息论汇刊》，第 52 卷，第 1 期，第 141–154 页，2006 年 1 月。

[11] S. A. M. Ghanem，《具有任意输入的多址高斯信道：最优预编码与功率分配》，IEEE无线通信与信号处理国际会议（WCSP），2012 年 10 月。[12] S. A. M. Ghanem，《具有任意输入的多址高斯信道：最优预编码与功率分配》，可在 ArXiv 获取，2014。[13] S. A. M. Ghanem，《多用户高斯信道中的互信息与最小均方误差》，受邀发表于 IEEE MMTC电子快报，专题为无线与移动通信及网络的最新进展，2015 年 1 月。[14] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，《信息论要义》，第 2 版。纽约：Wiley，2006。