arXiv:2303.06022v1 [math.NT] 10 Mar 2023

# 三角化簇、切空间与 Grothendieck-Springer 解消

SEGINUS MOWLAVI

摘要。根据 Breuil-Hellmann-Schraen 的工作，我们知道，三角化簇包含晶体伴随点，这些点由一对$w \preceq w_{\mathrm{sat}}$ 置换参数化，其中 $\preceq$ 为布鲁哈特序。我们首先在根系的魏尔群背景下，定义并研究置换对 $w' \preceq w$ 的一种组合性质。我们将满足该性质的对称为良好对（绝大多数对都属于此类），其余的则称为坏对。随后，对于满足 $w \preceq w_{\mathrm{sat}}$ 为良好对的（一般的）晶体伴随点，我们给出三角化簇切空间维数的精确公式。所用方法（由 Breuil-Hellmann-Schraen 提出）是先计算三角化簇的一个局部模型上相应的维数，该局部模型由格罗滕迪克同时解消构造而成。为此，我们证明了 Breuil-Hellmann-Schraen 的一个猜想：在任意分裂约化群的背景下，当两个胞腔由一对良好置换参数化时，描述了该局部模型上一个舒伯特胞腔的闭包与另一个舒伯特胞腔的交集。我们还针对一族无穷多个胞腔对（与坏对相关联）给出了该猜想的反例。

目录

1. 引言 2 2. 魏尔群中的一些组合学 7 2.1. 极小生成根子系 7 2.2. 对分裂约化群的诠释 10 2.3. 魏尔群中的元素对 11 2.4. $A$ 型系统与模式回避 13 3. 关于舒伯特型分解的猜想 16 3.1. 与 Springer解消相关的概形 17 3.2. 猜想陈述 18 3.3. 在三角化簇上的切空间中的应用 20 4. 良好对的情形 21 4.1. 预备知识：Levi子群与伴随作用 21 4.2. 定理 4.1 的证明 25 5. 当 $G$ =GL
$_n$ 31 时坏对的反例 5.1. 格拉斯曼流形、旗簇与舒伯特胞腔 31~ ~5.2. $X$ 与 $V_w$ 33的显式方程 5.3. 取扎里斯基闭包 36 附录 A. $\mathfrak{g}$ 40中的 Jordan 分解与轨道 参考文献 44

## 1. 引言

设 $k$ 是一个特征为零的域。在研究 Hellmann 的三角化簇 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 时， [8] Breuil-Hellmann-Schraen 引入了一个定义在 $k$ 上、与 $k$ 上的分裂约化群 $G$ 相关联的簇 $X$ 。该簇具有一个以 $G$的魏尔群 $W$ 为指标的分层$X = \coprod_{w\in W} V_w$ ，类似于旗簇的舒伯特分解。记 $V_w$为 $X$ 中局部闭子簇 $V_w$的扎里斯基闭包， [8] 的作者将三角化簇 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 在某些兴趣点处的切空间维数，与 $T_{X_w\text{的维数},x}$ 在特定点 $x \in X_w \cap V_{w'}$ 处的维数联系起来，其中 $w, w' \in W$ 满足 $w' \preceq w$ ，而 $\preceq$ 为布鲁哈特序。他们还提出了一个描述 $X_w\cap V_{w'}$的猜想；若该猜想成立，便可计算$T_{X_w\text{的维数},x}$。本文的研究对象正是这一猜想。

借助 Beilinson-Bernstein 对应，Ginsburg 的工作已证明了这一猜想某个变体的一个特例。将这个特例应用于 $G$ 的某些 Levi 子群后，我们得以将这一结果扩展为该猜想的许多情形的证明。

这些情形由对 $(w', w)$ 的一个组合条件刻画，我们称其为“良好对”。我们在根系的魏尔群背景下发展良好对的理论，并在此过程中建立了判定良好对的不同准则。我们还表明，良好对的集合与模式回避有关。

最后，通过明确写出在 $G =$GL$_{n/k}$ 情形下定义 $V_w$ 为拟射影簇的显式方程，我们给出了该猜想的一族反例。

现在我们将更详细地介绍我们的结果。

**魏尔群中的良好对。**设 $\Phi$ 为一个抽象根系；我们将其魏尔群记作 $W := W(\Phi)$。对于 $w \in W$，令 $\Gamma_w := \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{Z}(w(\alpha) - \alpha)$，令 $E_w := \Gamma_w \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$，最后令 $\Phi_w := \Phi \cap E_w$。我们称 $\Phi_w$ 为 $w$ 的最小生成根子系。它在约化群中有一个清晰的解释：

**命题 1**（命题 2.2.2）。设 $(G, T)$ 是域 $k$ 上特征为 *0* 的连通分裂约化代数群，其根系同构于 $\Phi$。则中心化子 $(C_G((T^w)^\circ) T)$ 是一个连通分裂约化群，其根系同构于 $\Phi_w$。

固定 $\Phi$ 的一个基 $I$ 后，可以得到长度函数 lg 以及 $W$ 上的布鲁哈特序 $\prec$。我们在第2节研究并在第 4 节中使用的核心概念如下：

**定义 2** (定义 2.3.1)。令 $(w_1, w_2) \in W$ 使得 $w_1 \preceq w_2$。如果存在根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Phi_{w_1 w_2^{-1}}$，它们生成一个递增序列 $w_1 \prec w_1 s_{\alpha_1} \prec \ldots \prec w_1 s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_r} = w_2$，则称 $(w_1, w_2)$ 为良好对；否则，称其为坏对。

在第2节.1中，我们建立了一些关于最小生成子系 $\Phi_w$ 的组合结果。在第2节.3中，我们证明了一个良好对判据，其动机是：对于任意 $w \in W$，子系 $\Phi_w$ 共轭于某个标准子系，即 由某个单根子集 $J \subseteq I$ 生成的根子系 $\Phi_J \subseteq \Phi$ 。更确切地说，对于 $J \subseteq I$，令 $W_J$ 为由 $\{s_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 生成的 $W$ 的子群，并令 $W^J$ 为 $W_J\backslash W$ 的最短长度代表元集合。那么，可以将 $\Phi_w = u^J(\Phi_J)$ 写成某个 $J \subseteq I$ 和 $u^J \in W^J$。判据如下：

**命题 3** (命题 2.3.7)。 设 $(w_1,\ w_2)\in W^2$。将 $\Phi_{w_2w_1^{-1}}=u^J(\Phi_J)$ 写成某个 $J\subseteq I$ 和 $u^J\in W^J$。那么存在 $v^J\in W^J$ 和 $w_{J,\ 1},\ w_{J,\ 2}\in W_J$，使得

$$w_1=u^Jw_{J,1}(v^J)^{-1},\quad w_2=u^Jw_{J,2}(v^J)^{-1},$$

并且，对 $(w_1,\ w_2)$ 是良好对，当且仅当 $w_{J,\ 1}\preceq w_{J,\ 2}$。

我们在§2.4中以最后一个判据的一个应用作结，该应用针对的是 $\Phi$ 属于某个 $A_{n-1}$ 型的特殊情形，其中 $n\in\mathbb{Z}_{>1}$，即 $W=\mathcal{S}_n$ 是对称群。其表述基于所谓的模式回避。这里，如果存在 $1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n$，使得$m$元组 $(w(i_1)\ldots,w(i_m))$ 与 $(f(1)\ldots,f(m))$ 的次序相同，我们就称置换 $w\in\mathcal{S}_n$ 含有模式 $f\in\mathcal{S}_m$；参见定义 2.4.8。事实上，这也可以在抽象根系的一般框架下表述，而且人们发现，舒伯特簇的光滑性等许多性质都是模式回避的具体体现；例如参见 [3, 第2节，§4]。我们证明，至少对于 $A$ 型根系而言，成为良好对同样是模式回避的一个具体体现：

**定理4** (定理 2.4.10)。 设 $w\in\mathcal{S}_n$。

(1) 对$(w',\ w)$ 对于任意 $w'\in\mathcal{S}_n$ 都是良好的，当且仅当 $w$ 避开四种模式 $[4231]$, $[42513]$, $[35142]$和 $[351624]$。(2) 对$(w,\ w'')$ 对于任意 $w''\in\mathcal{S}_n$ 都是良好的，当且仅当 $w$ 避开四种模式 $[1324]$, $[24153]$, $[31524]$和 $[426153]$。

将这些模式与判定舒伯特簇光滑性的模式联系起来，我们得到：若 $(w,w')\in(\mathcal{S}_n)^2$ 是一个坏对，则旗簇 $G/B$ 中的舒伯特簇 $\overline{BwB/B}$ 是奇异的（但不一定在点 $w'B\in\overline{BwB/B}$ 处）；见推论 2.4.11。

的猜想 [8]。 设 $G$ 是域 $k$上的连通分裂约化群， $T$ 是 $G$中的一个分裂极大环面， $B$ 是 $G$ 中包含 $T$ 的博雷尔子群， $U$ 是 $B$的幺幂子群。我们用 $\mathfrak{g}$、 $\mathfrak{t}$、 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{u}$ 分别表示它们的李代数，并以 $W:=N_G(T)/T$表示 $(G,T)$ 的魏尔群。对于 $w\in W$，我们在 $N_G(T)$ 中选取 $w$的一个提升，仍记作 $w$。我们有 $G/B$ 的舒伯特分解 $G/B=\coprod_{w\in W}BwB/B$，其由局部闭分层 $BwB/B$组成；其中，胞腔 $Bw'B/B$ 与 $BwB/B$ 的扎里斯基闭包 $\overline{BwB/B}$ 相交，当且仅当 $w'\preceq w$ 在 $W$上的布鲁哈特序下成立，此时 $Bw'B/B\subseteq\overline{BwB/B}$。

令 $G\times^B\mathfrak{g}$ 为 $G\times\mathfrak{g}$ 关于 $B$ 的右作用所得的商，该作用由 $(g,\psi)b=(gb,\mathrm{Ad}(b^{-1})\psi)$ 给出。我们定义态射 $q$: $G\times^B\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ 和 $\widetilde{\pi}$: $G\times^B\mathfrak{g}\longrightarrow G/B$，其定义分别为 $q(g,\psi)=\mathrm{Ad}(g)\psi$ 和 $\widetilde{\pi}(g,\psi)=gB$ ($q$ 称为格罗滕迪克的同时奇点解消)。接着定义代数簇 $X:=q^{-1}(\mathfrak{b})$。对于 $\sim\quad\sim\quad\sim w\in W$，我们考虑 $X$ 中的局部闭子簇 $V_w:=X\cap\widetilde{\pi}^{-1}(BwB/B)$，以及它在 $X$ 中的扎里斯基闭包 $X_w$；它们给出 $X$ 的胞腔分解。

当 $L$ 是定义在 $k$ 上的另一个分裂约化群时，我们在 $\sim\ \sim\ \sim q,\widetilde{\pi},X,V_w,X_w$（对于 $w\in W(L)$）上添加下标 $L$，表示将约化群 $L$ 替换为约化群 $G$ 后的相同定义。若未作特别说明，我们指的是 $G$。

与 $G/B$ 中的舒伯特胞腔类似，交集 $\widetilde{\ }\ w'\preceq w\ \widetilde{V}_{w'}\cap\widetilde{X}_w$ 不同之处在于，此时 $V_{w'}$ 不包含于 $X_w$。更准确地说，不难证明 $\widetilde{V}_{w'}\cap\widetilde{X}_w\subseteq\widetilde{V}_{w'}\cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}+\mathfrak{u})$（[8, 引理 2.3.4]），其中 $\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}\subseteq\mathfrak{t}$ 是由 $ww'^{-1}$ 固定的不动点闭子簇，而 Breuil-Hellmann-Schraen 猜想这实际上是一个等式：

**猜想5** （ [8]中的猜想 2.3.7）。设 $w, w' \in W$。若 $w' \preceq w$，则

$$\widetilde{V}_{w'} \cap \widetilde{X}_w = \widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}\left(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u}\right).$$

猜想5最初出现在对 Hellmann 引入的刚性解析三角化簇 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$的研究这一算术背景中，其中 $\bar{r}$ 是 Gal($\overline{K}/K$) 的模 $p$表示， $p$ 是素数， $K$ 是 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张~。更确切地说，Breuil-Hellmann-Schraen 在 [8] 中证明，簇 $X_w$是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 在晶体正则一般点处的局部模型，据此他们得以推导出关于 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 在这些点处局部几何的若干结论。

我们在第 5 节证明，猜想 5 实际上通常是错误的！尽管如此，我们在第 4 节证明了它在良好对的情形下成立：

**定理6 (**定理 4.1)。 设 $w, w' \in W$ 满足 $w' \preceq w$ ，且$(w', w)$ 是一个良好对。那么，对于所有由 $ww'^{-1}$ 固定的 $t \in \mathfrak{t}$ ，我们有

$$\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(t + \mathfrak{u}) \subseteq \widetilde{X}_w . \tag{1.1}$$

因此，$(w', w)$ 的猜想 *5* 成立。

回到 [8], Theorem 6 的动机，它有如下应用：

**推论7 (**定理 3.3.2). 设 $x \in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 是一个晶体正则一般点，$T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}),\, x}$ 是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 在 $x$ 处的切空间。设 $w_x, w$ 如第 *4* 节 [8, 第 4 节1] 中所述（$w_x$ 和 $w$ 是固定的一个 $A$ 型魏尔群乘积中的元素），并假设 $(w_x, w)$ 是一个良好对。那么

$$\dim_{k(x)} T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}),x} = \dim X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) - d_{ww_x^{-1}} + \dim_{\mathbb{Q}_p} T_{\overline{(BwB/B)},w_xB} - \lg(w_x) \tag{1.2}$$

其中， $k(x)$ 是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 在 $x$ 处的剩余域， $\overline{BwB/B}$ 是与 $w$ 相关联的舒伯特簇，并且关于整数 $d_{ww_x^{-1}}$，请参见定义 *2.1.1*。

在 [21], 中，我们在模提升猜想成立的假设下证明了推论7；这里我们不需要这一假设。有趣的是，尽管两篇文章采用的方法截然不同，它们证明的情形完全相同：良好对的概念表述有所不同（本文中如命题 2.3.7 所述，而 [21] 中如定义 2.3.1 所述），但二者等价。注意，已有结果表明，式 (1.2) 右侧是 $\dim^{k(x)} T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})}$ $_x$ 的上界（即使 $(w_x, w)$ 是坏对），见 [8, 命题 4.1.5(ii)]。我们不知道对于坏对，这个上界是否会变成严格上界（不过参见命题 3.3.3）。

在概述定理6的证明之前，我们指出，只需对所有“充分一般的”（闭）点 $t \in \mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$ 证明 (1.1)：参见命题 4.1.1 和引理 4.1.2。不失一般性，我们还可以假设 $k$ 代数闭；参见 §4.2。定理6的证明接下来分三步进行。

首先，由于 $(w', w)$ 是一个良好对，命题 3 给出了 $\Phi(G, T)$ 的单根子集 $J \subseteq I$ 以及元素 $u^J$, $v^J \in W^J$, $w_J, w'_J \in W_J$，使得 $w = u^J w_J (v^J)^{-1}$,$w' = u^J w'_J (v^J)^{-1}$ 且 $w'_J \preceq w_J$ 属于 $W_J$。令 $L$ 为 $G$ 的标准抛物子群 $P_J$ 的 Levi 子群，则根据命题 1 有 $L = C_G\big(((u^J)^{-1} T^{ww'^{-1}} u^J)^{\circ}\big)$。

在 [8, 第2节.4] 中，利用 Beilinson-Bernstein 局部化证明了，对于所有 $w' \preceq w$ ，$t = 0$ 均成立（即使对于坏对也是如此）。由于 $w'_J \preceq w_J$，我们可以将此结果应用于连通分裂约化群 $L$ ，其分裂极大环面为 $T$，博雷尔子群

$B_L := B \cap L$，幺幂子群为 $U := U \cap L$。对于任意 $t \in \mathfrak{t}_J = \mathrm{Ad}(u^J)^{-1}\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$，$\widetilde{\quad}$，通过 $t$ 平移，我们推出 $V_{L,\ w'_J} \cap q^{-1}(t+\mathfrak{u}_L) \subset X_{L,\ w_J}$。

其次，通过仔细分解 $G$ 对$\mathfrak{l}\cap\mathfrak{b}$中某些元素的伴随作用（其中 $\mathfrak{l}$是 $L$的李代数），我们证明：

命题 *8*（命题 *4.2.2*）。设 $u^J$、$v^J \in W^J$。可以定义一个态射$\iota_t$、$_{u^J}$、$_{v^J}$*:* $L \times^{L\cap B} \mathfrak{l}\cap\mathfrak{b} \longrightarrow G \times^B \mathfrak{b}$，其定义为 $\iota_t$、$_{u^J}$、$_{v^J}(l$、$\psi_L)) = \big(u^J l(v^J)^{-1}$、$Ad(v^J)\psi_L\big)$。对于任意充分一般的 $t \in Ad(u^J)^{-1}\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$ 以及任意 $w_J \in W_J$，该态射 $\iota_t$、$_{u^J}$、$_{v^J}$诱导出一个代数簇同构

$$\iota_{t,u^J,w_J,v^J} : \widetilde{V}_{L,w_J} \cap q_L^{-1}(t+\mathfrak{u}_L) \xrightarrow{\sim} \widetilde{V}_{u^J w_J (v^J)^{-1}} \cap q^{-1}\left(\mathrm{Ad}(u^J)(t+\mathfrak{u}_L)\right).$$

第三，利用 $\mathfrak{g}$中关于 Jordan 分解的标准结果（我们在附录 A 中给出了证明，因为在文献中未能找到完整的论述），我们证明：

**引理 9** (引理 4.2.3). 令 $t \in \mathrm{Ad}(u^J)^{-1}\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$ 充分一般，令 $u^J \in W^J$。则存在一个满射态射，其定义为

$$f : \begin{array}{ccc} U \times \left(\mathrm{Ad}(u^J)(t+\mathfrak{u}_L)\right) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u} \\ (u,x) & \longmapsto & \mathrm{Ad}(u)x\,. \end{array}$$

将引理 9 的满射态射 $f$ 与命题 8 的同构结合起来，可诱导出两个簇态射 $U \times \left(\widetilde{V}_{L,w_J} \cap q_L^{-1}(t+\mathfrak{u}_L)\right) \twoheadrightarrow \widetilde{V}_w \cap q^{-1}\left(\mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u}\right)$ 和 $U \times \widetilde{X}_{L,w_J} \longrightarrow \widetilde{X}_w$，它们构成如下交换图

$$\begin{array}{ccc} U \times \left(\widetilde{V}_{L,w'_J} \cap q_L^{-1}(t+\mathfrak{u}_L)\right) & \xrightarrow{\subseteq} & U \times \widetilde{X}_{L,w_J} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ & & \widetilde{X}_w \\ & & \big\downarrow \subseteq \\ \widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u}) & \xrightarrow{\subseteq} & \widetilde{X} \end{array}$$

其中，顶部的水平箭头由第一步给出。于是，左侧垂直箭头的满射性证明，底部水平箭头的像包含于 $\widetilde{\quad}$ $X_w$ 中，这正是陈述 (1.1)。

反例。 在最后的第 5 节中，我们给出 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ 射影簇 $X$ 和 $V_w$ 在 $G = \mathrm{GL}_{n/k}$ 情形下的显式方程和不等式。尽管我们没有簇 $X_w$ 的此类显式描述，但这已足以找到一族反例来反驳猜想 5。

我们利用 $G\widetilde{/B} \times \mathfrak{b}$中的子簇 $\{(gB,\psi) \in G/B \times \mathfrak{b} \mid$ 伴随作用$(g^{-1})\psi \in \mathfrak{b}\}$，见（5.5）；与商簇相比，这种描述更容易处理。事实上， $\mathfrak{b}$是一个仿射空间，而旗簇 $G/B$ 是一个十分清楚的对象。具体来说，$G/B$ 是由关联关系定义的格拉斯曼流形乘积的子簇；而且，已有众所周知的方程通过普吕克嵌入将格拉斯曼流形定义为射影空间中的子簇。因此， $G/B \times \mathfrak{b}$ 作为 $\prod_{d=1}^{n-1} \mathbb{P}(\bigwedge^d k^n) \times \mathbb{A}^{n(n+1)/2}$的子簇也是一个十分清楚的对象。详情见第 5.1 节。

接着，我们推导出一组就是引理 5.2.3。下一步是使用定义每个舒伯特胞腔 $BwB/B$ 内部的（不）等式

$\sim G/B$，以便找到一组$\{F_i = 0, G_j \neq 0\}_{i\in I,\ j\in J}$定义 $V_w$ 内部$\prod_{d=1}^{n-1}\mathbb{P}$（$\bigwedge^d k^n$）$\times\ \mathbb{A}^{n(n+1)/2}$的（不）等式。蛮力求解并不太困难；但挑战在于找到足够多的方程，从而希望这组方程$\{F_i = 0\}_{i\in I}$能够描述 $\widetilde{X}_w$的扎里斯基闭包，其中 $\widetilde{V}_w$位于 $\prod_{d=1}^{n-1}\mathbb{P}$（$\bigwedge^d k^n$）$\times\mathbb{A}^{n(n+1)/2}$内部。我们在命题 5.2.4 中得到的结果相当令人满意，因为猜想 5 等价于 $X_w$ 是闭子集 $\widetilde{\{F_i = 0\}_{i\in I}}$；参见命题 5.3.1。

另一方面，通过第 5.3 节中的技术性简化，我们找到了 $V_w$ 上满足的意外附加方程，从而改进了命题 5.2.4。因此，对于某一族对 $(w, w') \in (\mathcal{S}_n)^2,$，我们得到一个形式极其简单、在 $\widetilde{X}_w \cap \widetilde{V}_{w'}$ 上满足但在 $\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u})$ 上不满足的方程，进而得到以下结果：

**定理 10** (定理 5.3.7，注 5.3.8，注 5.3.9)。对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$，在 $\mathcal{S}_n$ 中存在一个坏对$(w,\ w')$，使得

$$\dim\left(\widetilde{X}_w \cap \widetilde{V}_{w'}\right) < \dim\left(\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u})\right).$$

特别地，猜想 *5* 是错误的。

据我们所知，判断猜想 5 对所有 坏对是否错误的问题仍未解决（我们知道这至少对 $\mathrm{GL}_4$ 和 $\mathrm{GL}_5$ 成立）。另一个值得进一步研究的方向是，准确估计 $\dim\left(\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u})\right) - \dim\left(\widetilde{X}_w \cap \widetilde{V}_{w'}\right)$之差。

记号。这里列出本文的一些主要记号。

在全文中，$k$ 是一个特征为零、代数闭包为 $k^{\mathrm{a}}$的域。我们用$(G,T)$表示定义在 $k$上的一个连通分裂约化代数群，$B$表示 $G$ 中包含 $T$ 的一个博雷尔子群，$U \subset B$ 表示 $B$中的幺幂元子群。

我们用 $\mathfrak{g}$ 表示 $G$的李代数，意即满足如下性质的定义在 $k$上的仿射概形：作为 $k$上的有限维向量空间，$\mathfrak{g}(k)$自然同构于 $G$ 在单位元 $e \in G$处的切空间 $T_eG$。类似地，$\mathfrak{t}$、$\mathfrak{b}$、$\mathfrak{u}$、$\mathfrak{u}_\alpha$分别是 $T$、$B$、$U$、$U_\alpha$的李代数（$\mathfrak{u}_\alpha$有时也记作 $\mathfrak{g}_\alpha$）。我们用 $\mathrm{Ad}: G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 和 $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 表示伴随表示。

我们将 $X(T) := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$记为 $T$的代数特征标群（视作一个 $\mathbb{Z}$-模），将 $\Phi \subset X(T)$记为$(G,T)$的根集，即满足特征子空间 $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(t)x = \alpha(t)x\ \forall t \in T\}$ 非零的 $\alpha \in X(T) \setminus \{0\}$ 的集合。对于任意根 $\alpha \in \Phi$，有 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ (见 [20, 定理 21.11(b)])。我们用$U_\alpha \subset G$ 表示 $\alpha$ 的根子群（见 [20, 21.10, 21.11]）；其李代数 $\mathfrak{u}_\alpha$ 满足$\mathfrak{u}_\alpha(k) = \mathfrak{g}_\alpha$。

接下来，我们用 $\Gamma \subseteq X(T)$ 表示由 $\Phi$ 生成的 $\mathbb{Z}$-子模，并令 $E := \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。然后，我们用 $I$ 表示由博雷尔子群 $B$ 确定的根系 $\Phi$ 的基，并用 $\Phi_+$ 表示由 $I$ 确定的正根集合。

我们用 $W := W(\Phi)$ 表示 $\Phi$ 的魏尔群。回忆一下，$W(G,T) := N_G(T)/T$是一个有限群，它自然地忠实作用于 $T$，因而也作用于 $X(T)$；这使得 $W(G,T)$ 作为 $X(T)$ 的自同构群，等于 $W$（见 [20, 推论 21.38]）。因此，我们作如下认同：$W = N_G(T)/T$。对于 $w \in W$，我们用 $\mathrm{Ad}(w)$ 表示 $T$ 上的共轭态射，其中 $\dot{w} \in N_G(T)$ 是任意一个提升 $w$ 的元素，即 $\mathrm{Ad}(w)t = \dot{w}t\dot{w}^{-1}$ 对于 $t \in T$。于是，$W$ 对 $\Phi$ 的作用可写为 $(w\alpha)(t) = \alpha(\mathrm{Ad}(w^{-1})t)$，其中 $\alpha \in \Phi$、$w \in W$ 且 $t \in T$。最后，$T^w := \{t \in T \mid \mathrm{Ad}(w)t = t\}$ 表示 $T$ 中在 $\mathrm{Ad}(w)$ 作用下的不变量子群，而 $(T^w)^\circ$ 表示其单位连通分支。

在第2节（第2.2节除外）中， $E$ 仅被定义为 $\mathbb{Q}$ 上的一个向量空间，而 $\Phi$ 则被定义为 $E$ 中的一个抽象根系，这些定义均独立于任何分裂约化群 $G$。在第 5 节中，我们将讨论范围限定在 $G = \mathrm{GL}^{n/k}$ 的情形，其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 为某个值；此时， $T$ 和 $B$ 分别取为对角矩阵子群和上三角矩阵子群。

从第3节起，我们讨论定义在 $k$ 上的代数簇，即定义在 $k$ 上的有限型既约分离概形。簇态射由其在 $k^{\mathrm{a}}$-点上的取值唯一确定，其“像”（更确切地说，即到目标子簇的满射性）可以通过闭点来检验（见 [27, 例 7.4.C]）。给定两个簇 $X_1$ 和 $X_2$，且它们都浸入到第三个簇 $X$ 中，我们记作

$$X_1 \cap X_2 \coloneqq (X_1 \times_X X_2)^{\mathrm{red}}$$

若无歧义。通过基变换，当 $X_2 \hookrightarrow X$ 是闭（分别为局部闭）时，自然映射 $X_1 \cap X_2 \longrightarrow X_1$ 是闭（分别为局部闭）浸入；对 $X_1 \cap X_2 \longrightarrow X_2$ 也同样如此。同样，给定一个簇态射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 以及一个闭（分别为局部闭）浸入 $Y' \hookrightarrow Y$，我们记作

$$f^{-1}(Y') \coloneqq (X \times_Y Y')^{\mathrm{red}},$$

以及 t 自然映射 $f^{-1}(Y') \longrightarrow X$ 是闭浸入（分别为局部闭浸入）.

致谢。 本文的研究成果是在作者于 Laboratoire de Mathématiques d’Orsay 攻读博士学位期间取得的。作者特别感谢其博士导师 Christophe Breuil 的指导，以及他为证明定理6提供的关键思路。作者感谢 Ariane Mézard 多次与其交流，这些交流启发了作者寻找猜想5的反例。作者还要感谢 Benjamin Schraen 和 Anne Moreau 的帮助，并感谢 Gabriel Dospinescu 和 Ruochuan Liu 仔细审阅作者的博士论文。

## 2. 魏尔群中的一些组合学

本节研究与魏尔群 $W(\Phi)$ 中某个元素相关联的根系 $\Phi$ 的特定子系。随后，我们在 $W(\Phi)$ 中定义良好对 和坏对 的概念。最后，我们明确描述类型为 $A$ 的系统的情形。

**2.1. 极小生成根子系。** 设 $E$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限维向量空间，且 $\Phi$ 是 $E$ 中的一个根系（见 [5, 第六章，第 1] 节）。将 $\Phi$ 的（有限）魏尔群记作 $W \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)$。对于一个根 $\alpha \in \Phi$，我们用 $s_\alpha \in W$ 表示与之关联的反射。

**定义 2.1.1。** 设 $w \in W$, $\Gamma_w$ 为由 $w(\alpha) - \alpha$ 对于 $\alpha \in \Phi$, $E_w \coloneqq \Gamma_w \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathrm{im}(w - \mathrm{id}_E)$ 和 $\Phi_w \coloneqq \Phi \cap E_w$ 生成的 $E$ 的 $\mathbb{Z}$-子模。我们称 $\Phi_w$ 为 $w$ 的最小生成（根）子系。我们还定义 $d_w \coloneqq \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}} \Gamma_w = \dim_{\mathbb{Q}} E_w$。

$\Phi$ 与 $E$的子空间 $E_w$ 的交集 $\Phi_w$ 是 $\Phi$中的一个根子系，也就是说，它是 $E$ 所生成子空间中的一个根系（参见 [5, 第六章第 1 节命题 4 的推论1]）。注意，这个子空间可能严格小于 $E_w$；不过，我们稍后将在推论 2.1.5 中看到，这种情况绝不会发生。因此，可以将 $\Phi_w$ 的魏尔群 $W(\Phi_w)$视为 $W$的一个子群，约定 $W(\emptyset) = \{1\}$。

**命题 2.1.2**。 设 $w \in W$。那么， $w$ 属于其极小生成子系的魏尔群 $W(\Phi_w)$。

证明。 任意根系都来自某个连通分裂约化群 $G$ 在 $\mathbb{Q}$上的作用（例如参见 [14, 第33.6节中的讨论）。因此，结论由下文推论 2.2.3 得出。□

我们在 $E$上赋予一个非退化对称双线性型 $(\cdot \mid \cdot)$，该型在$W$ 作用下不变（参见 [5, 第六章第1节的命题 3。1]）。于是每个根 $\alpha \in \Phi$ 都满足 $(\alpha \mid \alpha) \neq 0$，并且 $s_\alpha(x) = x - 2\frac{(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha$对所有 $x \in E$均成立。对于任意 $x \in E$，我们还注意到$x^\perp := \ker(\cdot \mid x)$ 是 $x$的正交子空间。

**引理 2.1.3**。 设 $w \in W$ 和 $x \in E$。那么 $x \in E_w$ 当且仅当$\ker(w-\mathrm{id}_E) \subseteq x^\perp$。

证明。 假设 $x \in E_w$；取 $y \in E$ 使得 $x = w(y) - y$。于是，对于所有 $z \in \ker(w - \mathrm{id}) = \ker(w^{-1} - \mathrm{id})$，我们有

$$(z \mid x) = (z \mid w(y) - y) = (z \mid w(y)) - (z \mid y) = (w^{-1}(z) - z \mid y) = 0$$

因此 $z \in x^\perp$。

反过来，假设 $\ker(w - \mathrm{id}) \subseteq x^\perp$。那么，线性形式 $(\cdot \mid x)$ 可经由 $E/\ker(w - \mathrm{id})$ 上的线性形式 $l$ 分解。映射 $w - \mathrm{id}$ 也可经由同构 $f\colon E/\ker(w-\mathrm{id}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(w - \mathrm{id})$ 分解。$\mathrm{im}(w-\mathrm{id})^\sim$ 上的线性形式 $l \circ f^{-1}$ 可任意延拓为 $E$ 上的线性形式 $l$。由于 $(\cdot \mid \cdot)$ 非退化，$^\sim$存在 $y \in E$ 使得 $l = (\cdot \mid y)$。于是，对于所有 $z \in E$，

$$(z \mid x) = (w(z) - z \mid y) = (w(z) \mid y) - (z \mid y) = (z \mid w^{-1}(y) - y)$$

因此，由非退化性可得， $x = w^{-1}(y) - y = (w - \mathrm{id})(-w^{-1}(y)) \in E_w$。 □

**命题 2.1.4**。 设 $w \in W$ 和 $\alpha \in \Phi$。设 $w'$ 为 $s_\alpha w$ 或 $w s_\alpha$。

(1) 若 $\alpha \notin \Phi_w$，则 $E_{w'} = \mathbb{Q}\alpha \oplus E_w$。特别地， $d_{w'} = d_w + 1$。(2)

若 $\alpha \in \Phi_w$，则 $E_w = \mathbb{Q}\alpha \oplus E_{w'}$。特别地， $d_{w'} = d_w - 1$。

证明。 假设 $w' = w s_\alpha$。利用分解 $E = \mathbb{Q}\alpha \oplus \alpha^\perp$，可写为

$$E_w = \mathbb{Q}(w(\alpha) - \alpha) + (w - \mathrm{id})\alpha^\perp \tag{2.1}$$

并且 $E_w = (w - \mathrm{id})\alpha^\perp$ 当且仅当 $\ker(w - \mathrm{id}) \not\subseteq \alpha^\perp$。根据引理 2.1.3，当且仅当 $\alpha \notin E_w$ 时，这一结论成立。同样，由于 $w'(\alpha) = -w(\alpha)$ 且 $w'|_{\alpha^\perp} = w|_{\alpha^\perp}$，

$$E_{w'} = \mathbb{Q}(w(\alpha) + \alpha) + (w - \mathrm{id})\alpha^\perp \tag{2.2}$$

且 $E_{w'} = (w - \mathrm{id})\alpha^\perp$ 当且仅当 $\alpha \notin E_{w'}$。

首先假设 $\alpha \notin \Phi_w$，或者等价地，假设 $\alpha \notin E_w$。那么

$$w(\alpha) - \alpha \in E_w = (w - \mathrm{id})\alpha^\perp \subseteq E_{w'}\,.$$

由于 $w(\alpha) + \alpha \in E_{w'}$，我们得到 $\alpha = \frac{1}{2}(w(\alpha) + \alpha) - \frac{1}{2}(w(\alpha) - \alpha) \in E_{w'}$。我们还由 (2.2) 知道 $E_w = (w - \mathrm{id})\alpha^\perp \subseteq E_{w'}$，并且 $\dim E_{w'} \leq \dim E_w + 1$。综上可得 $E_{w'} = \mathbb{Q}\alpha \oplus E_w$，因此 (1) 得证。

现在假设 $\alpha \in \Phi_w$，或等价地， $\alpha \in E_w$。取满足$\alpha = w(x) - x$的 $x \in E$。于是

$$(w(x) + x \mid \alpha) = (w(x) + x \mid w(x) - x) = (w(x) \mid w(x)) - (x \mid x) = 0$$

因此 $w(x)+x\in\alpha^\perp$，从而 $x=\frac{1}{2}(-\alpha+w(x)+x)\in-\frac{1}{2}\alpha+\alpha^\perp$。因此

$$2\alpha=2(w(x)-x)\in\alpha-w(\alpha)+(w-\mathrm{id})\alpha^\perp$$

可改写为 $w(\alpha)+\alpha\in(w-\mathrm{id})\alpha^\perp$。由 (2.2)，这意味着 $E_{w'}=(w-\mathrm{id})\alpha^\perp$，因此 $\alpha\notin E_{w'}$。与之前一样，利用 (2.1) 还可推出 $E_{w'}\subseteq E_w$ and $\dim E_w\leq\dim E_{w'}+1$。由此可得 $E_w=\mathbb{Q}\alpha\oplus E_{w'}$，于是 (2) 得证。

若 $w'=s_\alpha w$，则也可写作 $w'=ww^{-1}s_\alpha w=ws_{w^{-1}(\alpha)}$。由于 $\alpha\in\Phi_w$ 当且仅当 $w^{-1}(\alpha)\in\Phi_w$，对 $\Phi'_w$ 也同样如此，因此问题化归为前一种情形。□

设 $R:=\{s_\alpha\mid\alpha\in\Phi\}$ 为 $W$ 的反射集合，它生成作为群的 $W$。因此，我们可以将任意元素 $w\in W$ 看作字母表 $R$ 上的一个字（这种表示不唯一）；我们称此类字的最小长度为 在 $R$ 上的 $w$ 在 $R$ 上的 $w$ 的长度，并将任何长度最小的此类字称为 在 $R$ 上的 $w$ 的约化分解。命题 2.1.4 的以下推论利用 $R$ 上的约化分解来刻画极小生成子系统。

**推论 2.1.5.** 设 $w\in W$。

(1) $d_w$ 是 $w$ 在字母表 $R$上的长度。(2) 子系统 $\Phi_w$ 是满足以下条件的根 $\alpha\in\Phi$ 的集合：$s_\alpha$ 出现在 $w$ 在字母表 $R$上的约化分解中。(3) 子系统 $\Phi_w$ 张成 $E_w$ 这个向量空间。

证明。若 $w=1$，则所有结论均成立，因为 $E_w=\mathrm{im}(\mathrm{id}_E-\mathrm{id}_E)=\{0\}$。现在假设 $w\neq1$。

设 $w=s_{\alpha_r}\dots s_{\alpha_1}$ 是 $w$ 在 $R$上的一个分解，其中对所有 $1\leq i\leq r$都有 $\alpha_i\in\Phi$。由命题 2.1.4 可知，对所有 $1\leq i\leq d$都有 $d_{s_{\alpha_i}\dots s_{\alpha_1}}\leq d_{s_{\alpha_{i-1}}\dots s_{\alpha_1}}+1$，且等号成立当且仅当 $E_{s_{\alpha_i}\dots s_{\alpha_1}}=\mathbb{Q}\alpha_i\oplus E_{s_{\alpha_{i-1}}\dots s_{\alpha_1}}$。对 $i$进行归纳可得$d_w=d_{s_{\alpha_r}\dots s_{\alpha_1}}\leq r$，且等号成立当且仅当

$$E_w=\mathbb{Q}\alpha_r\oplus\dots\oplus\mathbb{Q}\alpha_1\,. \tag{2.3}$$

因此，只要证明 $\Phi_w$ 非空，并且对任意 $\alpha\in\Phi_w$，都存在一个包含 $s_\alpha$、长度为 $d_w$ 的 $w$ 在 $R$ 上的分解，这三个断言便得证。

$\Phi_w$ 非空是命题 2.1.2 的推论。现在取 $\alpha\in\Phi_w$。所需的分解可对 $d_w$ 作归纳得到：命题 2.1.4 蕴含 $d_{s_\alpha w}=d_w-1$；若 $s_\alpha w=s_{\alpha_r}\dots s_{\alpha_1}$是长度为$r$ 的分解：$=d_{s_\alpha w}$，则 $w=s_\alpha s_{\alpha_r}\dots s_{\alpha_1}$是长度为 $d_w$ 的分解。□

以下推论阐释了定义 2.1.1 中引入的“极小生成子系”这一术语。

**推论 2.1.6**。设 $w\in W$，且 $E'$ 是 $E$ 的一个子空间。设 $\Phi':=\Phi\cap E'$，它是 $E'$ 中的一个根系，其魏尔群为 $W(\Phi')\subseteq W$。那么 $w\in W(\Phi')$ 当且仅当$\Phi_w\subseteq\Phi'$，当且仅当 $E_w\subseteq E'$。

证明。蕴含关系 $E_w\subseteq E'\implies\Phi_w\subseteq\Phi'$ 只是定义的直接推论，而蕴含关系 $\Phi_w\subseteq\Phi'\implies w\in W(\Phi')$ 是命题 2.1.2。

现在假设 $w\in W(\Phi')$。令 $\Phi'_w$ 为 $\Phi'$ 中 $w$的极小生成子系，并令 $E'_w:=\mathrm{im}(w|_{E'}-\mathrm{id}_{E'})\subseteq E'\cap E_w$。由推论 2.1.5(1)应用于$\Phi'$可知，$w$ 在 $R':=\{s_\alpha\mid\alpha\in\Phi'\}$ 上有一个长度为 $\dim E'_w$ 的约化分解。由于$R'\subseteq R$，将同一结果应用于 $\Phi$ 可得 $\dim E'_w\geq\dim E_w$。因此，

包含链 $E'_w \subseteq E' \cap E_w \subseteq E_w$ 是一条等式链。特别地，$E' \cap E_w = E_w$；或者等价地，$E_w \subseteq E'$。□

固定 $I \subset \Phi$ 一个 $\Phi$的单根基，并将与这些单根对应的简单反射集合记为 $S := \{s_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq W$。它们在 $W$上定义了长度函数 lg。以下结果推广了 [6, 引理 2.7] ，该引理证明了根系 $\Phi$属于类型 $A$时的情形。

**推论 2.1.7.** 设 $w \in W$。那么

$$d_w \leq \lg(w)$$

等号成立当且仅当 $w$ 是由互不相同的简单反射构成的乘积。

证明。 设 $w = s_{\alpha_{\lg(w)}} \cdots s_{\alpha_1}$ 是 $w$ 在 $S$上的一个约化分解，其中对所有 $1 \leq i \leq \lg(w)$，都有 $\alpha_i \in I$。推论 2.1.5(1)及其证明给出 $d_w \leq \lg(w)$，等号成立当且仅当 $E_w = \mathbb{Q}\alpha_{\lg(w)} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}\alpha_1$（见 (2.3)）。因此，在等号成立的情况下，$\alpha_i$ 必须互不相同。

反过来，假设 $w$ 是若干互不相同的简单反射的乘积。写作 $w = s_{\alpha_r} \ldots s_{\alpha_1}$，其中 $\alpha_i$是 $1 \leq i \leq r$的互不相同的元素；那么根据定义， $r \geq \lg(w)$。此外，由于 $I$的元素线性无关，和 $\mathbb{Q}\alpha_r + \ldots + \mathbb{Q}\alpha_1$ 是直和。推论 2.1.5 的证明表明 $r = d_w$；因此 $d_w \geq \lg(w)$，于是两者相等。□

2.2. **分裂约化群的诠释**。 对于 $\Phi$ 这一根系，以及由其导出 $\Phi$的连通分裂约化群 $(G, T)$，我们用 Levi 群来诠释 $w \in W(\Phi)$ 的极小生成子系 $\Phi_w \subseteq \Phi$ 。我们沿用引言中的记号。

我们先回顾一个经典引理。

**引理 2.2.1**。 设 $N \geq 1$ 是一个整数， $M$ 是一个配备了群 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$的线性作用的 $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-模。那么 $H^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, M) = 0$。

证明。 $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-模 $H^1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, M)$ 被 $N$ 消灭（参见 [22, §VII.7，命题6]），因此它必定为 0。□

**命题 2.2.2**。 对于 $w \in W$，中心化子 $(C_G((T^w)^\circ)\ T)$ 是一个连通分裂约化群，其根系是 $w$ 的极小生成子系 $\Phi_w$ 。

证明。 $(T^w)^\circ$ 是 $T$ 的子环面（参见 [20, 注记 12.29]中的讨论；注意$T^w$ 在特征零下总是约化的），因此根据 [20, 推论 17.59]， $C_G((T^w)^\circ)$是连通的分裂约化群。注意它总是包含 $T$，因此$(C_G((T^w)^\circ)\ T)$是分裂约化群。

设 $\alpha \in \Phi$ 是 $(G, T)$ 的一个根。特征子空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的维数为 1，因此 $\alpha$ 是 $(C_G((T^w)^\circ)\ T)$ 的根，当且仅当 $\mathfrak{g}_\alpha$ 属于 $C_G((T^w)^\circ)$ 的李群。由 [20, Thm. 21.11(c)]，我们由此得到

$$\Phi' := \Phi\left(C_G((T^w)^\circ), T\right) = \left\{\alpha \in \Phi \;\middle|\; \alpha|_{(T^w)^\circ} = 1\right\}.$$

令 $N$ 为 $W$ 中 $w$ 的序。代数簇态射 $T \longrightarrow T, t \longmapsto \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{Ad}(w^{-k})t$ 的像是连通的（因为 $T$ 是连通的），且包含于 $T^w$ 中。因此，对所有 $t \in T$，有 $\prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{Ad}(w^{-k})t \in (T^w)^\circ$。于是，对于 $\alpha \in \Phi'$ 和 $t \in T$，我们有

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} w^k \alpha\right)(t) = \alpha\left(\prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{Ad}(w^{-k})t\right) = 1$$

因此 $(\sum_{k=0}^{N-1} w^k)\alpha = 0$。反过来，若 $\alpha \in \ker(\sum_{k=0}^{N-1} w^k)$，则对于所有 $t \in (T^w)^\circ$，

$$\alpha(t^N) = \alpha\left(\prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{Ad}(w^{-k})t\right) = 1$$

因此，由于环面上的特征标群 $(T^w)^\circ$ 没有挠元，我们必有 $\alpha(t) = 1$。于是 $\alpha|_{(T^w)^\circ} = 1$。因此 $\Phi' = \Phi \cap \ker(\sum_{k=0}^{N-1} w^k)$。由于$H^1(\langle w\rangle, E) = 0$ 根据引理 2.2，我们有 $\Phi' = \Phi \cap \mathrm{im}(w - \mathrm{id}_E) = \Phi_{w^\circ}$ □

**推论 2.2.3.** 设 $w \in W$。那么 $w \in W(\Phi_w)$。

证明。将 $w$ 视为 $N_G(T)/T$中的一个元素，我们有 $w \in C_G((T^w)^\circ)/T$，因此实际上 $w \in N_{C_G((T^w)^\circ)}(T)/T = W(C_G((T^w)^\circ)\ T) = W(\Phi_w)$，其中最后一个等号来自命题 2.2.2。□

2.3. **魏尔群中的元素对**。固定一组单根基 $I \subset \Phi$，并将其生成的正根子集记为 $\Phi_+$。将与这些单根对应的简单反射集合记为 $S := \{s_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq W$。它们在 $W$ 上定义长度函数 lg 和布鲁哈特序 $\preceq$。

**定义 2.3.1**。设 $(w_1, w_2) \in W^2$，使得 $w_1 \preceq w_2$。令 $\Phi_{w_1 w_2^{-1}} \subseteq \Phi$ 为 $w_1 w_2^{-1}$的极小生成子系。若存在一个由 $\Phi_{w_1 w_2^{-1}}$中的根组成的序列 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$，使得 $w_2 = s_{\alpha_r} s_{\alpha_{r-1}} \ldots s_{\alpha_1} w_1$，且对每个 $1 \le i \le r$，关系 $s_{\alpha_i} \ldots s_{\alpha_1} w_1 \succ s_{\alpha_{i-1}} \ldots s_{\alpha_1} w_1$ 成立，则称 $(w_1, w_2)$ 是一个良好对。若不存在这样的序列，则称 $(w_1, w_2)$ 是一个坏对。

注记 2.3.2。 $R = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ 的反射集合可以改写为$R = \bigcup_{w\in W} wSw^{-1}$。另一方面，利用推论 2.1.5 的 (2)，可以看出， $R$ 的子集 $\left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \Phi_{w_1 w_2^{-1}} \right\}$ 是指在字母表 $R$上 $w$ 的某个约化分解中出现的反射集合。因此，良好对的概念是考克斯特系统 $(W, S)$ 的内在属性。

设 $w_0 \in W$ 是布鲁哈特序下的最大元素。利用 $w \mapsto ww_0$和 $w \mapsto w_0 w$ 是布鲁哈特序下 $W$ 的反自同构这一事实，可以容易地证明以下结果。

**命题 2.3.3**。设 $(w_1, w_2) \in W^2$。那么，$(w_1, w_2)$ 是良好对（分别是坏对），当且仅当$(w_2 w_0, w_1 w_0)$ 是良好对（分别是坏对）。类似地，$(w_1, w_2)$是良好对（分别是坏对），当且仅当$(w_0 w_2, w_0 w_1)$ 是良好对（分别是坏对）。

**命题 2.3.4**。设 $w_1$， $w_2 \in W$ 满足 $w_1 \preceq w_2$。则

$$d_{w_2 w_1^{-1}} \le \lg(w_2) - \lg(w_1)$$

并且若取等号，则对$(w_1,\ w_2)$ 是良好的。

证明。根据 $W$ 中的链性质（见 [4, 定理 2.2.6]），存在一个由大小为 $r = \lg(w_2) - \lg(w_1)$ 的根序列 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$，其中这些根属于 $\Phi$，且满足 $w_2 = s_{\alpha_r} s_{\alpha_{r-1}} \ldots s_{\alpha_1} w_1$；并且对于每个 $1 \le i \le r$，都有 $\lg(s_{\alpha_i} \ldots s_{\alpha_1} w_1) = \lg(s_{\alpha_{i-1}} \ldots s_{\alpha_1} w_1) + 1$（因此自动有 $s_{\alpha_i} \ldots s_{\alpha_1} w_1 \succ s_{\alpha_{i-1}} \ldots s_{\alpha_1} w_1$）。于是， $w_2 w_1^{-1} = s_{\alpha_r} s_{\alpha_{r-1}} \ldots s_{\alpha_1}$是 $w_2 w_1^{-1}$在 $R$ 上的分解：$= \{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$。推论 2.1.5(1) 随即推出 $d_{w_2 w_1^{-1}} \le r = \lg(w_2) - \lg(w_1)$。若取等号，则推论 2.1.5(2) 给出对所有 $1 \le i \le r$ 都有 $\alpha_i \in \Phi_{w_2 w_1^{-1}}$，这意味着 $(w_1, w_2)$ 是一个良好对。□

设 $J \subseteq I$ 是一组单根。我们将与 $J$ 中元素对应的简单反射集合记为 $S_J$:
$= \{s_\alpha \mid \alpha \in J\}$，并将它所张成的 $W$ 的子群记为 $W_J := \langle s \mid s \in S_J \rangle$。注意， $W_J = W(\Phi_J)$, 其中 $\Phi_J$ 是由 $J$ 生成的 $\Phi$ 的根子系，并且 $W_J$ 上的布鲁哈特序与 $W$ 上布鲁哈特序的限制相同。我们还记 $W^J := \{w \in W \mid ws \succ w \ \forall s \in S_J\}$。已知 $W^J$ 是左陪集代表元 $W/W_J$ 的最短长度代表元集合，并且对于所有 $w \in W$，分解 $w = w^J w_J$ 满足 $w^J \in W^J$ 且 $w_J \in W_J$，从而有 $\lg(w) = \lg(w^J) + \lg(w_J)$（见 [4, 第2节.4]）。

**引理 2.3.5.** 设 $J \subseteq I$ 是单根的一个子集， $u^J$ 和 $v^J$ 是 $W^J$的元素， $w_J$是 $W_J$的一个元素， $s \in W_J$是一个反射，即 是$\bigcup_{w \in W_J} wS_J w^{-1}$的一个元素。那么， $sw_J \succ w_J$当且仅当 $u^J s w_J (v^J)^{-1} \succ u^J w_J (v^J)^{-1}$。

证明。 设 $R := \{wSw^{-1} \mid w \in W\}$ 是 $W$ 的反射集合，并考虑映射

$$\eta\colon \begin{array}{ccc} W \times R & \longrightarrow & \{-1,1\} \\ (w,t) & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{if } tw \succ w \\ -1 & \text{if } tw \prec w \end{cases} \end{array}$$

（参见 [4] 的定理 1.4.3 及其证明）。因此，我们的目标是证明

$$\eta(u^J w_J (v^J)^{-1}, u^J s (u^J)^{-1}) = \eta(w_J, s).$$

对于任意 $w \in W$、 $t \in R$和 $\varepsilon \in \{-1,1\}$，定义

$$\pi_w(t,\varepsilon) := (wtw^{-1}, \varepsilon\eta(w^{-1},t)) \in R \times \{-1,1\}\,.$$

这定义了一个映射 $\pi$，它从 $W$ 映到从 $R \times \{-1,1\}$到其自身的双射所构成的有限群，并且 $\pi$ 是一个群同态（同上，定理 1.3.2(i)）。因此，对于任意 $v$、 $w \in W$和 $t \in R$，我们可以写作 $\pi_{w^{-1}v^{-1}}(t,1) = \pi_{w^{-1}}(\pi_{v^{-1}}(t,1))$，并得到公式

$$\eta(vw,t) = \eta(v,t)\eta(w, v^{-1}tv)\,.$$

首先将此公式应用于 $v = u^J$, $w = w_J (v^J)^{-1}$和 $t = u^J s (u^J)^{-1}$:

$$\eta(u^J w_J (v^J)^{-1}, u^J s (u^J)^{-1}) = \eta(u^J, u^J s (u^J)^{-1}) \eta(w_J (v^J)^{-1}, s)\,. \tag{2.4}$$

现在，由于 $u^J \in W^J$和 $w_J^{-1}, s \in W_J$，并利用 $w \mapsto w^{-1}$保持 $W$上的长度这一事实，我们有

$$\begin{aligned} \lg(sw_J(v^J)^{-1}) &= \lg(v^J w_J^{-1} s) = \lg(v^J) + \lg(w_J^{-1} s) = \lg(v^J) + \lg(sw_J) \\ \lg(w_J(v^J)^{-1}) &= \lg(v^J w_J^{-1}) = \lg(v^J) + \lg(w_J^{-1}) = \lg(v^J) + \lg(w_J) \end{aligned}$$

由此可推出 $\eta(w_J (v^J)^{-1}, s) = \eta(w_J, s)$。类似地， $u^J \in W^J$和 $s \in W_J$，因此

$$\lg(u^J s (u^J)^{-1} u^J) = \lg(u^J s) = \lg(u^J) + \lg(s) > \lg(u^J)\,,$$

这意味着 $\eta(u^J, u^J s (u^J)^{-1}) = 1$。根据 (2.4)，证明完毕。 □

**引理 2.3.6**。 设 $w \in W$。存在 $u \in W$和 $J \subseteq I$，使得 $\Phi_w = u(\Phi_J)$。

证明。 给定 $\Phi_w$的任意固定基 $J'$，存在一个包含 $J'$的 $\Phi$的基 $I'$（参见 [5, 第六章] §1.8 中的命题 24）。集合 $I$ 和 $I'$ 属于同一个 $W$-轨道（参见同上§1.5 中的注 4），因此我们得到 $u \in W$，使得 $I' = u(I)$ 且$J := u^{-1}(J')$ 是我们要找的 $I$ 的子集。□

以下命题提供了一种直接判断给定的对是否良好的方法。

**命题 2.3.7**。 令 $(w_1,\ w_2) \in W^2$。令 $\Phi_{w_1w_2^{-1}} \subseteq \Phi$ 为 $w_1w_2^{-1}$的极小生成子系，并令 $J \subseteq I$ 满足 $\Phi_{w_1w_2^{-1}}$ 属于根子系 $\Phi_J \subseteq \Phi$ 的 $W$-轨道（见引理 *2.3.6*）。于是我们可以写成

$$w_1 = u^J w_{J,1}(v^J)^{-1}, \quad w_2 = u^J w_{J,2}(v^J)^{-1}$$

对于某个 $u^J,\ v^J \in W^J$和 $w_{J,\ 1},\ w_{J,\ 2} \in W_J$。 $w_1$和 $w_2$的这种分解，以及 $J$的选择，可能并不唯一。此外，对于 $w_1$ 和 $w_2$的任意一种此类（或等价地，任何此类）分解，我们有 $w_{J,\ 1} \preceq w_{J,\ 2}$ 当且仅当对$(w_1,\ w_2)$ 是良好的。

证明。 取满足 $\Phi_{w_1w_2^{-1}} = u(\Phi_J)$ 的 $u \in W$。令 $u^J \in W^J$ 为 $uW_J$ 的代表元，则 $\Phi_{w_1w_2^{-1}} = u^J(\Phi_J)$。由命题 2.1.2 可知， $w_1w_2^{-1} \in W(\Phi_{w_1w_2^{-1}}) = u^J W_J (u^J)^{-1}$。因此，陪集 $w_1^{-1}u^J W_J$ 和 $w_2^{-1}u^J W_J$ 相同。令 $v^J \in W^J$ 为该陪集的代表元；于是我们有 $W_J$ 中的元素$w_{J,\ 1}$ 和 $w_{J,\ 2}$ ，使得 $w_1^{-1}u^J = v^J w_{J1}^{-1}$ , 且 $w_2^{-1}u^J = v^J w_{J2}^{-1}$ , , 即 $w_1 = u^J w_{J,\ 1}(v^J)^{-1}, w_2 = u^J w_{J,\ 2}(v^J)^{-1}$。

现在假设 $w_{J,1} \preceq w_{J,2}$。于是，根据 $W_J$ 中的链性质（参见 [4, 定理 2.2.6]），存在 $\Phi_J$ 中的根序列 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$，满足 $w_{J,2} = s_{\alpha_r} s_{\alpha_{r-1}} \ldots s_{\alpha_1} w_{J,1}$，使得对每个 $1 \le i \le r$ 都有 $s_{\alpha_i} \ldots s_{\alpha_1} w_1 \succ s_{\alpha_{i-1}} \ldots s_{\alpha_1} w_{J,1}$。令每个 $i$ 对应 $\beta_i = u^J(\alpha_i) \in u^J(\Phi_J) = \Phi_{w_1w_2^{-1}}$，则 $s_{\beta_i} = u^J s_{\alpha_i} (u^J)^{-1}$，并且我们有

$$w_2 = u^J w_{J,2}(v^J)^{-1} = s_{\beta_r} \ldots s_{\beta_1} u^J w_{J,1}(v^J)^{-1} = s_{\beta_r} \ldots s_{\beta_1} w_1,$$

并且对每个 $i$，由引理 2.3.5 可得关系:

$$s_{\beta_i} \ldots s_{\beta_1} w_1 = u^J s_{\alpha_i} \ldots s_{\alpha_1} w_{J,1}(v^J)^{-1} \succ u^J s_{\alpha_{i-1}} \ldots s_{\alpha_1} w_{J,1}(v^J)^{-1} = s_{\beta_{i-1}} \ldots s_{\beta_1} w_1.$$

由于这条链特别蕴含 $w_1 \preceq w_2$，我们已经证明了对 $(w_1, w_2)$ 成为良好对的所有条件。反过来，逆向执行上述所有步骤并利用引理 2.3.5，可知若 $(w_1, w_2)$ 是良好对，则 $w_{J,1} \preceq w_{J,2}$。□

## 2.4. 型 $A$ 系统与模式回避。

我们对类型为 $A$ 的根系的极小生成子系（命题 2.4.1）和良好对（命题 2.4.5 和推论 2.4.7）给出具体描述。

设 $n > 1$ 为整数，$(e_i)_{1 \le i \le n}$ 为 $\mathbb{Q}^n$ 的标准基，且 $\Phi = \{e_i - e_j \mid 1 \le i, j \le n\ ,\ i \ne j\} \subset \mathbb{Q}^n$ 为类型 $A_{n-1}$ 的根系。$\Phi$ 的魏尔群是对称群 $\mathcal{S}_n$，它在 $\mathbb{Q}^n$ 上以及在 $\Phi$ 上的作用由 $w(e_i) = e_{w(i)}$（其中 $w \in \mathcal{S}_n$ 且 $1 \le i \le n$）给出。我们将任意 $w \in \mathcal{S}_n$ 写作 $[w(1) \ldots, w(n)]$。给定一个满足 $i \ne j$ 的根 $\alpha = e_i - e_j$，相应的反射 $s_\alpha = (i, j)$ 定义为 $s_\alpha(i) = j,\ s_\alpha(j) = i, s_\alpha(k) = k\ \forall\ k \ne i, j$。我们记标准基为 $I$: $= \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \le i \le n-1\}$。它生成正根集合 $\Phi_+ := \{e_i - e_j \mid 1 \le i < j \le n\}$，简单反射的集合为 $S = \{[1 \ldots (i-1)(i+1)i(i+2)\ \ldots n] \mid 1 \le i \le n-1\}$。

**命题 2.4.1.** 设 $w \in \mathcal{S}_n$。将 $\coprod_{1 \le k \le r} \Omega_k$ 记为 $\{1, \ldots, n\}$ 在 $w$ 的作用下划分成的轨道。对于 $1 \le k \le r$，令

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^n &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ f_k\colon\ (x_i)_{1 \le i \le n} &\longmapsto \sum_{i \in \Omega_k} x_i. \end{aligned}$$

那么 $E_w = \bigcap_{1 \le k \le r} \ker(f_k)$ 和 $\Phi_w = \bigcup_{1 \le k \le r} \{e_i - e_j \mid i, j \in \Omega_k\ ,\ i \ne j\}$。

证明。 $E_w \subseteq \bigcap_{1\le k\le r}\ker(f_k)$的包含显然成立。反过来，命题 2.2.2 给出 $\bigcup_{1\le k\le r}\{e_i - e_j \mid i,j \in \Omega_k,\ i \neq j\} = \Phi(C_{\mathrm{GL}_n}((T^w)^\circ)) = \Phi_w$，因此$\bigcap_{1\le k\le r}\ker(f_k)$ $\subseteq E_w$，这是通过取生成的 $\mathbb{Q}$-向量空间得到的。□

**定义 2.4.2.** 令 $d$ 为满足 $1 \le d \le n$的整数。我们在 $\{1,\dots,n\}$ 的所有大小为 $d$ 的子集上定义如下偏序：对于任意这样的子集 $A$和$A'$，当且仅当对于所有 $1 \le m \le n$，$|A \cap \{1,\dots,m\}| \ge |A' \cap \{1,\dots,m\}|$时，我们称 $A \preceq A'$。等价地，当且仅当对于所有 $1 \le m \le n$，$|A \cap \{m,\dots,n\}| \le |A' \cap \{m,\dots,n\}|$时，$A \preceq A'$。

关系 $A \preceq A'$ 可以具体地表示如下：若 $A = \{a_1 < \ldots < a_d\}$ 且 $A' = \{a'_1 < \ldots < a'_d\}$，则当且仅当对于所有 $k \in \{1,\dots,d\}$，$a_k \le a'_k$时，$A \preceq A'$。

**定义 2.4.3**。 设 $w \in \mathcal{S}_n$。对于 $1 \le i,j \le n$，我们记作

$$w[i,j] \coloneqq |w(\{1,\dots,i\}) \cap \{j,\dots,n\}| \,.$$

对于 $\{1,\dots,n\}$ 的子集 $\Sigma$，我们记作

$$w[i,j]_\Sigma \coloneqq |w(\{1,\dots,i\}) \cap \{j,\dots,n\} \cap \Sigma| \,.$$

例 2.4.4。 对于任意 $w, w' \in \mathcal{S}_n$，当且仅当对所有 $1 \le i,j \le n$ 都有 $w' \preceq w$ 时，$w'[i,j] \le w[i,j]$成立（例如参见 [4, 定理 2.1.5]）。等价地，当且仅当对所有 $1 \le d \le n$ 都有 $w' \preceq w$ 时，$\{w(1)\dots,w(d)\} \preceq \{w'(1)\dots,w'(d)\}$。

下面的命题是将命题 2.3.7 应用于类型 $A_{n-1}$ 的结果。

**命题 2.4.5**。 设 $w_1, w_2$ 是 $\mathcal{S}_n$ 的元素。那么，对 $(w_1,w_2)$ 这一对而言，当且仅当对于 $\mathcal{S}_n$ 在 $\{1,\dots,n\}$ 上作用于 $w_1w_2^{-1}$ 所得到的任意轨道Ω 以及任意$1 \le d \le n$，都有 $\Omega \cap w_1(\{1,\dots,d\}) \succeq \Omega \cap w_2(\{1,\dots,d\})$（作为 $\{1,\dots,n\}$ 的子集，意义见定义 *2.4.2*），该对才是良好的。等价地，对 $(w_1,w_2)$ 这一对而言，当且仅当对于 $w_1w_2^{-1}$ 的任意轨道Ω 以及任意 $1 \le i,j \le n$，都有 $w_1[i,j]_\Omega \le w_2[i,j]_\Omega$，该对才是良好的。

证明。 这是命题 2.3.7 和例 2.4.4 的推论。 □

这一结果提供了一种通过扁平化直观识别良好对和坏对的方法，下面我们给出定义。

**定义 2.4.6**。 设 $m,n$ 为整数，满足 $0 < m \le n$，且令 $\Sigma = \{i_1 < \ldots < i_m\}$为 $\{1,\dots,n\}$的子集。我们定义扁平化映射 $\mathrm{fl}_\Sigma$：$\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_m$如下。对于任意 $w \in \mathcal{S}_n$，我们将 $\mathrm{fl}_\Sigma(w)$ 取为唯一的 $f \in \mathcal{S}_m$，使得 $(w(i_1)\dots,w(i_m))$ 与 $(f(1)\dots,f(m))$ 的相对顺序相同。这意味着，$w \in \mathcal{S}_n$可以通过 $\Sigma$ 扁平化为 $f \in \mathcal{S}_m$，当且仅当对于任意 $1 \le k < l \le m$，$w(i_k) < w(i_l)$ 当且仅当 $f(k) < f(l)$。

**推论 2.4.7.** 设 $w_1, w_2 \in \mathcal{S}_n$。那么，对 $(w_1,w_2)$ 是良好对，当且仅当对于 $w_1^{-1}w_2$ 的任意轨道 Ω，都有 $\mathrm{fl}_\Omega(w_1) \preceq \mathrm{fl}_\Omega(w_2)$。

证明. 这是命题 2.4.5 和例 2.4.4 的推论）。 □

现在我们给出一个判据，将良好对与 $A$ 型根系的模式回避联系起来。

**定义 2.4.8**。 设 $m,n \le 1$ 为整数。对于 $w \in \mathcal{S}_n$ 和 $f \in \mathcal{S}_m$，当且仅当 $w$ 可扁平化为 $f$（通过某个大小为$m$的 $\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\}$）时，我们称$w$ 具有模式 $f$。即，存在一个扁平化映射 $\mathrm{fl}_\Sigma$: $\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_m$（见定义 2.4.6），使得$f = \mathrm{fl}_\Sigma(w)$。

例 2.4.9。若 $f = [3412] \in \mathcal{S}_4$（分别地，$f = [4231]$），则置换 $w \in \mathcal{S}_n$具有模式 $f$ 当且仅当存在 $1 \le a < b < c < d \le n$ 使得$w(c) < w(d) < w(a) < w(b)$（分别地，$w(d) < w(b) < w(c) < w(a)$）。

**定理 2.4.10.** 设 $w \in \mathcal{S}_n$。

(1) 存在 $w' \in \mathcal{S}_n$，使得当且仅当 $w$ 具有四种模式 $[4231], [42513], [35142]$ 或 $[351624]$ 中至少一种时，$(w', w)$ 是一个坏对。(2) 存在 $w'' \in \mathcal{S}_n$，使得当且仅当 $w$ 具有四种模式 $[1324], [24153], [31524]$ 或 $[426153]$ 中至少一种时，$(w, w'')$ 是一个坏对。

证明。由命题 2.3.3 可知，第二个陈述等价于第一个陈述。此外，如果 $w$ 具有四种模式 $[4231], [42513], [35142]$ 和 $[351624]$, 中的一种，那么利用推论 2.4.7 以及 $([1324], [4231])$、$([13245], [42513])$、$([12435], [35142])$、$([124356], [351624])$ 是坏对这一事实，我们可以轻易构造出一个 $w'$，使得 $(w', w)$ 是一个坏对。因此，我们只需证明，对于任意坏对 $(w', w)$，置换$w$ 具有四种模式中的一种。

设 $(w', w)$ 是这样一个坏对。由推论 2.4.7，存在一个$ww'^{-1}$ 的轨道 $\Omega$，以及 $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$，使得 $w[i, j]_\Omega < w'[i, j]_\Omega$；在证明余下部分中，我们固定这样一个 $\Omega$，并令 $\Sigma = \{1, \dots, n\} \setminus \Omega$。我们的策略是利用这一事实，找出 $w_1$ 的绘图图上的模式。证明中的各个部分如图1所示。

第一步是将图划分为若干区域。首先考虑具有如下性质的最小 $i_1$：存在某个 $j$ 使得 $w[i_1, j]_\Omega < w'[i_1, j]_\Omega$。接着取满足 $w[i_1, j_1]_\Omega < w'[i_1, j_1]_\Omega$的最大$j_1$，以及满足 $w[i_1, j_2]_\Omega <w'[i_1, j_2]_\Omega$的最小 $j_2$。最后取满足 $w[i_2, j_2]_\Omega < w'[i_2, j_2]_\Omega$的最大 $i_2$。

第二步是在 $w$的图上确定至多六个兴趣点。存在 $A = (i_A, j_A)$，使得 $i_A \le i_1$, $j_A \ge j_1$ 和 $w(i_A) = j_A \in \Sigma$。事实上，$w[i_1, j_1] = w[i_1, j_1]_\Omega + w[i_1, j_1]_\Sigma$，类似地有 $w'$，因此 $w[i_1, j_1]_\Sigma > w'[i_1, j_1]_\Sigma$，特别是 $w[i_1, j_1]_\Sigma \ge 1$。类似地，存在 $F = (i_F, j_F)$，使得$i_F > i_2$，$j_F < j_2$和 $w(i_F) = j_F \in \Sigma$。事实上，$w[i_2, j_2]_\Sigma > w'[i_2, j_2]_\Sigma$，因此满足 $j = w(i)$ 的点 $(i, j)$ 严格多于（分别严格少于）满足 $j = w'(i)$ 的点 $\in \{1, \dots, i_2\} \times \{1, \dots, j_2 - 1\}$（分别 $\in \{i_2+1, \dots, n\} \times \{1, \dots, j_2-1\}$）。还分别定义 $B = (i_B, j_B)$、$C = (i_C, j_C)$、$D = (i_D, j_D)$、$E = (i_E, j_E)$，定义方式为 $i_B = w^{-1}(j_2 - 1)$ 和 $j_B = j_2 - 1$；$i_C = i_1$和 $j_C = w(i_1)$；$i_D = i_2 + 1$和 $j_D = w(i_2 + 1)$；$i_E = w^{-1}(j_1)$ 和 $j_E = j_1$。注意，确实有 $A, B, C, D, E, F \in \{(i, j) \mid w(i) = j\}$。

根据 $i_1, j_1, i_2, j_2$ 的定义，有 $w(i_1)\ j_1, w(i_2 + 1)\ j_2 - 1 \in \Omega$：例如，$w(i_1) \notin \Omega$ 蕴含 $w[i_1 - 1, j_1]_\Omega = w[i_1, j_1]_\Omega$ 和 $w'[i_1 - 1, j_1]_\Omega = w'[i_1, j_1]_\Omega$，这与 $i_1$的极小性矛盾。于是，根据 $j_2, j_1, i_2$ 和 $j_1$ 的定义，我们分别推得 $i_B \le i_1, j_C < j_2, j_D \ge j_2, i_E > i_1$：例如，$i_B > i_1$ 蕴含 $w[i_1, j_2 - 1]_\Omega = w[i_1, j_2]_\Omega < w'[i_1, j_2]_\Omega \le w'[i_1, j_2 - 1]_\Omega$，这与 $j_2$的极小性矛盾。此外，$i_A < i_1$ 和 $j_A > j_1$，因为我们已知 $i_A \le i_1$ 和 $j_A \ge j_1$，且 $A \in w^{-1}(\Sigma) \times \Sigma$，而 $(i, j) \in w^{-1}(\Omega) \times \Omega$。类似地，$i_F > i_2 + 1$ 和 $j_F > j_2 + 1$。

注意，点集 $\{A\}$、$\{B, C\}$、$\{D, E\}$、$\{F\}$ 分别位于由 $i_1$ 和 $j_2$划分的不同象限中。因此，在这六个点之间，可能出现的相等关系只有 $B = C$ 和 $D = E$。还要注意，由于这些点都在 $w$的图上，除非其中两点相等，否则它们的两个坐标都各不相同。

第三步也是最后一步，是根据这些点的相对位置进行分类。

情形*1*：$j_D > j_A$ 和 $i_E > i_F$：</style}必然有 $D \ne E$，因为 $j_D > j_A = j_E$。

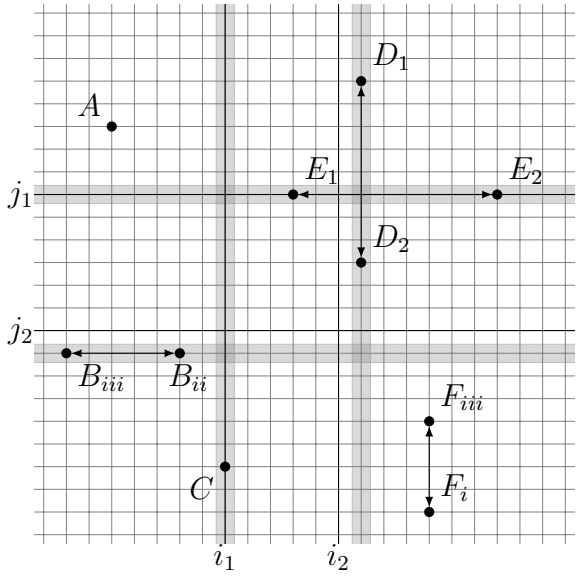


图1. 黑点位于图 $j = w(i)$ 上；给定点的不同可能位置由箭头连接。灰色带对应于 $w^{-1}(\Omega)$ 中的 $i$ 坐标，或 $\Omega$ 中的 $j$ 坐标。

情形1.i: $j_F < j_C$: $ACDFE$给出模式 $[42513]$；也就是说，$w$通过 $\{i_A, i_C, i_D, i_F, i_E\}$展平为$[42513]$。情形1.ii: $i_B > i_A$: $ABDFE$ 给出模式 $[42513]$。情形1.iii: $j_F > j_C$ 和 $i_B < i_A$: 在这种情形下，$B \neq C$，因为 $i_B < i_A < i_1 = i_C$，而$BACDFE$ 给出模式 $[351624]$。情形2: $j_D < j_A$或 $i_E < i_F$: 于是，在情形 $j_D < j_A$中的 $D$，或在情形 $i_E < i_F$中的 $E$，相对于另外四个点具有相同的相对位置：也就是说，沿着 $i$轴位于 $C$ 和 $F$ 之间，并且沿着$j$轴位于 $B$ 和 $A$ 之间。因此，我们只需假设 $j_D < j_A$。情形2.i: $j_F < j_C$: $ACDF$给出模式 $[4231]$。情形2.ii: $i_B > i_A$: $ABDF$ 给出模式 $[4231]$。情形2.iii: $j_F > j_C$ 和 $i_B < i_A$: 与情形1.iii一样，我们有 $B \neq C$；而在这里，$BACDF$给出模式 $[35142]$。□

**推论2.4.11**。设 $w, w' \in \mathcal{S}_n$，且 $(w', w)$ 是一个坏对。那么舒伯特簇 $\overline{BwB/B}$ 是奇异的（其中 $B$ 是上三角矩阵子群，且 $W = \mathcal{S}_n$ 中的每个元素都可以提升到 $G$）。

证明。由于模式 $[42513], [35142]$ 和 $[351624]$都包含模式 $[3412]$,，这直接由定理 2.4.10 和 $[18,$ 定理 $1]$得出。□

注记 2.4.12. 给定 $\mathcal{S}_n$ 中的一个坏对 $(w', w)$，点 $w'B/B$ 不一定属于 $\overline{BwB/B}$ 的奇异轨迹。例如，当 $n = 4$ 时，$([1324], [4231])$ 是一个坏对，但点 $[1324]B/B$ 在 $\overline{B[4231]B/B}$ 中是光滑的；事实上，$\overline{B[4231]B/B}$ 的奇异轨迹是 $\overline{B[2143]B/B}$ （见 $[18,$ §3]）。

## 3. 关于舒伯特型分解的一个猜想

我们回顾 $[8],$ 的猜想 2.3.7；本文主要研究的正是这一猜想。

**3.1. 一个与 Springer 解消相关的概形。** 我们回顾与分裂约化群 $G$ 相关的既约概形 $X$ 的构造，该概形配备了类似于舒伯特分解的分层。

首先回顾旗簇 $G/B$上的舒伯特分解。设 $w \in W$and $\dot{w} \in N_G(T)(k)$ 是任意一个提升 $w$的闭点。 $B$ 在 $G$ 上的左作用通过乘法在 $G/B$上诱导出一个作用，记 $\dot{w}B/B$在此作用下的轨道为 $BwB/B$ 。那么 $BwB/B$ 是 $G/B$ 的一个光滑局部闭子簇，称为舒伯特胞腔，并且有如下分解

$$G/B = \coprod_{w\in W} BwB/B \tag{3.1}$$

（见 [20, 定理 21.73]）。胞腔 $BwB/B$ 在 $B$的左作用下保持不变，因此它们的扎里斯基闭包 $\overline{BwB/B}$ 也保持不变，并且该作用在 $BwB/B$上传递。因此，闭胞腔 $\overline{BwB/B}$ 与胞腔 $Bw'B/B$ 相交，当且仅当 $Bw'B/B \subseteq \overline{BwB/B}$；这又当且仅当布鲁哈特序中的 $w' \preceq w$ （见 [1, 定理 2.11]）。因此，(3.1) 给出了 $G/B$的一个良好分层，并且对于所有 $w \in W$，我们有一个更一般的局部闭分层分解

$$\overline{BwB/B} = \coprod_{w'\preceq w} Bw'B/B\,.$$

可以在 $G/B \times G/B$ 上得到类似的分层：考虑同构

$$f\colon \begin{array}{ccc} G\times^B G/B & \xrightarrow{\sim} & G/B\times G/B \\ (g_1, g_2B) & \longmapsto & (g_1B, g_1g_2B) \end{array} \tag{3.2}$$

其中 $G\times^B G/B$ 是 $G\times G/B$ 对右 $B$ 作用的商，该作用由 $(g_1,g_2B)b := (g_1b, b^{-1}g_2B)$ 定义（见 [23, 第3节.7]）。对于 $w \in W$，右 $B$ 作用保持 $G\times(BwB/B)$ 不变，因此我们可以写成

$$U_w := f(G\times^B (BwB/B)) \subseteq G/B\times G/B\,.$$

等价地， $U_w$ 是 $(B/B, \dot{w}B/B)$ 在 $G/B\times G/B$ 上由对角左乘给出的左 $G$ 作用下的轨道。于是 $G/B\times G/B = \coprod_{w\in W} U_w$ ，并且对任意 $w\in W$，局部闭分层的分解

$$\overline{U_w} = \coprod_{w'\preceq w} U_{w'}$$

是 $G/B$ 中类似结果的推论。

与 [8], 中一样，令 $X$ 为如下代数簇：

$$X := \left\{(g_1B, g_2B, \psi) \in G/B\times G/B\times \mathfrak{g} \;\middle|\; \mathrm{Ad}(g_1^{-1})\psi \in \mathfrak{b}\,,\, \mathrm{Ad}(g_2^{-1})\psi \in \mathfrak{b}\right\}\,.$$

将复合 $X \hookrightarrow G/B\times G/B\times\mathfrak{b} \twoheadrightarrow G/B\times G/B$ 记为 $\pi$。对于 $w\in W$，定义

$$V_w := \pi^{-1}(U_w) \subset X\,, \quad X_w := \overline{V_w}\,.$$

注意， $V_w$ 在 $X_w$ 中是开集，但在 $X$中不是，因为它只是局部闭的。我们还定义了两个态射

$$\kappa_1\colon \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathfrak{t} \\ (g_1B, g_2B, \psi) & \longmapsto & \overline{\mathrm{Ad}(g_1^{-1})\psi} \end{array}, \quad \kappa_2\colon \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathfrak{t} \\ (g_1B, g_2B, \psi) & \longmapsto & \overline{\mathrm{Ad}(g_2^{-1})\psi} \end{array}$$

其中 $\overline{\mathrm{Ad}(g_1^{-1})\psi}$（分别为 $\overline{\mathrm{Ad}(g_2^{-1})\psi}$）表示 $\mathrm{Ad}(g_1^{-1})\psi$（分别为 $\mathrm{Ad}(g_2^{-1})\psi$）在投影 $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{b}/\mathfrak{u} = \mathfrak{t}$下的像。

我们有 $G$ 在 $G/B \times G/B$ 上的对角左乘左作用，以及 $G$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用。这给出 $G/B \times G/B \times \mathfrak{g}$ 上的对角作用，由 $g \cdot (g_1B, g_2B, \psi) = (gg_1B, gg_2B, \mathrm{Ad}(g)\psi)$ 给出。对于此作用，$X$ 是稳定的，并且 $\pi\colon X \longrightarrow G/B \times G/B$ 是 $G$-等变的。因此，对于任意给定的 $w \in W$，它在 $V_w$ 上诱导出一个作用。

关于 $w \in W$ 的胞腔分解 $\overline{U_w} = \coprod_{w' \preceq w} U_{w'}$ 意味着，除非 $w' \preceq w$，否则 $X_w \cap V_{w'} = \emptyset$；并且（在集合论意义上）

$$X_w = \coprod_{w' \preceq w} X_w \cap V_{w'}\,.$$

3.2. **猜想陈述**。

**猜想 3.2.1**（[8] 的猜想 2.3.7）. 令 $w, w' \in W$ 使得 $w' \preceq w$。那么

$$X_w \cap V_{w'} = V_{w'} \cap {\kappa_1}^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}})$$

作为 $X$ 的约化闭子概形。

该猜想的一个推论是下面的命题，这一命题在[8, 注记 2.5.4] 中有所提及，$w = w_0$ 至少在是 $W$ 中长度最大的元素时成立。这里我们给出一般情形的证明。

命题 *3.2.2.* 设 $w, w' \in W$ 和 $x = (\pi(x), 0) \in G/B \times G/B \times \mathfrak{b}$ 是 $X_w \cap V_{w'}$ 的一个闭点。设 $T_{X_w,x}$（分别为 $T_{\overline{U_w},\pi(x)}$）是 $X_w$ 在 $x$ 处（分别是 $\overline{U_w}$ 在 $\pi(x)$ 处）的切空间，它是一个以 $X_w$ 在 $x$ 处的剩余域 $k(x)$（分别以 $\overline{U_w}$ 在 $\pi(x)$ 处的剩余域 $k(\pi(x))$）为域的向量空间。若猜想 *3.2.1* 对 $(w', w)$ 成立，则

$$\dim_{k(x)} T_{X_w,x} = \dim_{k(\pi(x))} T_{\overline{U_w},\pi(x)} + \dim_{k(x)} \mathfrak{t}^{ww'^{-1}}(k(x)) + \lg(w'w_0)\,. \tag{3.3}$$

证明。由于 $G$ 在 $U_{w'}$ 上的作用是传递的，且 $\pi$ 是 $G$-等变的，我们可以假设 $\pi(x) = (B, w'B)$（特别地，剩余域 $k(x)$ 是 $k$）。考虑复合 $X_w \hookrightarrow X \hookrightarrow G/B \times G/B \times \mathfrak{g}$；它分解为经过一个闭浸入 $\iota := X_w \hookrightarrow \overline{U_w} \times \mathfrak{g}$。由于 $\pi(x) = (B, w'B)$，[8, 命题 2.5.3] 的证明表明，微分 $\mathrm{d}_x\iota\colon T_{X_w,x} \hookrightarrow T_{\overline{U_w},\pi(x)} \oplus T_{\mathfrak{g},0} = T_{\overline{U_w},\pi(x)} \oplus \mathfrak{g}(k)$ 可经由一个 $k$-向量空间的单射分解

$$\mathrm{d}_x\iota\colon T_{X_w,x} \hookrightarrow T_{\overline{U_w},\pi(x)} \oplus \mathfrak{t}^{ww'^{-1}}(k) \oplus (\mathfrak{u}(k) \cap \mathrm{Ad}(w')\mathfrak{u}(k))\,. \tag{3.4}$$

假设猜想 3.2.1 成立，我们希望证明此映射的满射性；然后比较维数即可得到所需的等式 (3.3)。

考虑由 $(g_1B, g_2B) \longmapsto (g_1B, g_2B, 0)$ 给出的闭浸入 $G/B \times G/B \hookrightarrow X$。它在 $\overline{U_w}$ 上的限制经由一个闭浸入 $\iota_1 := \overline{U_w} \hookrightarrow X_w$ 分解。由于 $\iota \circ \iota_1$ 是由 $u \longrightarrow (u, 0)$ 给出的闭浸入 $\overline{U_w} \longrightarrow \overline{U_w} \times \mathfrak{g}$，复合 $\mathrm{d}_x\iota \circ \mathrm{d}^{\pi(x)}\iota_1$ 就是包含 $T_{\overline{U_w},\ \pi(x)} \hookrightarrow T_{\overline{U_w},\ \pi(x)} \oplus \mathfrak{g}(k)$。因此，在 (3.4) 中，右侧的第一项包含于 $\mathrm{d}_x\iota$ 的像中。

现在，根据 [8, 命题 2.2.1]，我们知道 $\pi\colon V_{w'} \longrightarrow U_{w'}$ 是一个几何向量丛，而 $X$ 中 $\pi(x)$ 的纤维为

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = (B, w'B) \times (\mathfrak{t} \oplus (\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(w')\mathfrak{u})) \hookrightarrow U_{w'} \times \mathfrak{g} \hookrightarrow G/B \times G/B \times \mathfrak{g}\,. \tag{3.5}$$

取 $Y := (B, w'B) \times (\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} \oplus (\mathfrak{u} \cap \text{伴随作用}(w')\mathfrak{u}))$。约化概形的闭浸入 $Y \hookrightarrow X$ 经由 $Y \hookrightarrow V_{w'}$ 和 $Y \hookrightarrow \kappa_1^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}})$ 分解。这给出了一个闭浸入

$$Y \hookrightarrow \left(V_{w'} \times_X {\kappa_1}^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}})\right)^{\mathrm{red}} = V_{w'} \cap {\kappa_1}^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}})\,.$$

[8] 的猜想 3.2.1给出了一个闭浸入 $V_{w'} \cap {\kappa_1}^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}) \hookrightarrow X_w$。复合 $\iota_2$: $= Y \hookrightarrow X_w$满足： $\iota \circ \iota_2$是 $Y \hookrightarrow U_{w'} \times \mathfrak{g} \hookrightarrow \overline{U_w} \times \mathfrak{g}$的复合。因此，根据 $Y$的定义，微分 $\mathrm{d}_x\iota \circ \mathrm{d}_x\iota_2$ 与投影$T_{\overline{U_w}\times\mathfrak{g},x} \twoheadrightarrow T_{\mathfrak{g},0}$ 复合后的像为 $\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} \oplus (\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(w')\mathfrak{u})$。这给出了（3.4）的第二和第三个直和项。□

我们现在用一个比 $X$稍简单的概形来表述一个与猜想 3.2.1等价的猜想。回顾 [23, 第 4 节7] 或 [15, 第 VI 节8] *Grothendieck* 同时奇点消解

$$q\colon \begin{array}{ccc} G \times^B \mathfrak{b} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (g, \psi) & \longmapsto & \mathrm{Ad}(g)\psi \end{array} \tag{3.6}$$

其中 $G \times^B \mathfrak{b}$ 是 $G \times \mathfrak{b}$ 关于右侧 $B$ 作用的商，该作用由 $(g, \psi)b := (gb, \text{伴随作用}(b^{-1})\psi)$ 给出。还有一个映射 $\widetilde{\pi}\colon G \times^B \mathfrak{b} \longrightarrow G/B$，由 $\widetilde{\pi}(g, \psi) = gB$ 给出。

定义，对于 $w \in W$:

$$\widetilde{X} := q^{-1}(\mathfrak{b})\,, \quad \widetilde{V}_w := \widetilde{X} \cap \widetilde{\pi}^{-1}(BwB/B)\,, \quad \widetilde{X}_w := \overline{\widetilde{V}_w}\,.$$

~ ~ ~至于 $X$，对于任意 $w \in W$，我们有分解 $X_w = \coprod_{w' \preceq w} X_w \cap V_{w'}$，而~ ~$X_w \cap V_{w'} \neq \emptyset$ 蕴含 $w' \preceq w$。

**猜想 3.2.3** (Breuil-Hellmann-Schraen)。设 $w$，$w' \in W$。若 $w' \preceq w$，则局部闭浸入 $\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u}) \hookrightarrow \widetilde{X}$ 可分解为一个局部闭浸入

$$\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u}) \hookrightarrow \widetilde{X}_w \hookrightarrow \widetilde{X}\,.$$

**命题 3.2.4.** 猜想 *3.2.1* 与猜想 *3.2.3* 等价。

证明。 我们有一个同构

$$G \times^B \widetilde{X} \xrightarrow{\sim} X, \quad (g_1, (g_2, \psi)) \longmapsto (g_1B, g_1g_2B, \mathrm{Ad}(g_1g_2)\psi) \tag{3.7}$$

~其中 $B$通过 $(g_1, (g_2, \psi))b := (g_1b, (b^{-1}g_2, \psi))$ 在 $G \times X$上从右侧作用。这个同构与 $\kappa_1$（从右侧）以及 $(g_1, (g_2, \psi)) \mapsto_{\sim} q(g_2, \psi) \in \mathfrak{b}$ 与 $\mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{b}/\mathfrak{u} = \mathfrak{t}$（从左侧）的复合相容，将 $G \times^B V_{w'}$ 与 $V_{w'}$ 对应，并将 $G \times^B X_w$ 与 $X_w$对应。因此，所有内容都可以从 $X$ 转换到 $X$。所以，猜想 3.2.3 等价于存在一个局部闭浸入 $V_{w'} \cap \kappa_1^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}) \hookrightarrow X_w \cap V_{w'}$；而 [8, 引理 2.3.4] 表明它必定是一个同构。□

利用猜想 3.2.3 的表述，我们在第 4 节证明，猜想 3.2.1 对良好对（定义 2.3.1 意义下）成立；并在第 5 节给出反例，说明它在一般情形下（对于坏对）并不成立。

**3.3. 在三角化簇上切空间的应用。** 我们回顾最初由 Breuil-Hellmann-Schraen [8] 引入簇 $X$ 的背景；他们的研究动机来自 $p$-进 Hodge 理论中的三角化簇 。

设 $p$ 为素数， $K$、$L$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，满足 $\Sigma := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, L)$ 有 $[K : \mathbb{Q}_p]$ 个元素。设 $K_0$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 在 $K$中的最大非分歧扩张。记 $\mathcal{G}_K$ 为 $K$ 的绝对伽罗瓦群， $k_L$ 为 $L$的剩余域。固定一个整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和一个连续表示 $\bar{r}\colon \mathcal{G}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k_L)$。令 $G$ 为定义在 $L$上的分裂约化群 $G := \left(\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}_p} G'_K\right) \times_{\mathbb{Q}_p} L \simeq \prod_{\tau\in\Sigma} G'_L$， $T := \prod_{\tau\in\Sigma} T'_L$ 且 $B := \prod_{\tau\in\Sigma} B'_L$，其中 $G'$ 是定义在 $\mathbb{Q}_p$上的分裂约化群 $\mathrm{GL}_n$， $T'$ 是 $G'$ 中由对角矩阵构成的极大环面， $B'$ 是 $G'$ 中由上三角矩阵构成的博雷尔子群。注意，$G$的魏尔群为 $(\mathcal{S}_n)^{\Sigma}$。

令 $R^{\square}_{\bar{r}}$ 为 Mazur [19, §1.2] 和 Kisin [16] 构造的 $\bar{r}$ 的带框架变形环。取其形式谱 $\mathrm{Spf}(R^{\square}_{\bar{r}})$，再应用 Berthelot 的刚化函子 [2, §0.2]，得到一个定义在 $L$ 上的刚性解析空间 $\mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}} := \mathrm{Spf}(R^{\square}_{\bar{r}})^{\mathrm{rig}}$ 。令 $\curvearrowleft\mathcal{T}_L := K^{\times} \times_{\mathbb{Q}_p} L$ 为定义在 $L$ 上、参数化 $K^{\times}$ 的连续特征的刚性解析空间。对于任意 $\mathbf{k} = (k_\tau) \in \mathbb{Z}^{\Sigma}$，记特征$z \longmapsto \prod_{\tau\in\Sigma} \tau(z)^{k_\tau}$ 为 $z^{\mathbf{k}} \in \mathcal{T}_L(L)$，并记以$|p|_K = p^{-[K:\mathbb{Q}_p]}$为归一化的 $p$-进绝对值为 $|z|_K \in \mathcal{T}_L(L)$。若特征 $\underline{\delta} = (\delta_i) \in \mathcal{T}_L^n$ 满足对所有 $1 \le i \ne j \le n$，特征 $\delta_i\delta_j^{-1}$ 都不具有 $z^{-\mathbf{k}}$ 或 $N_{K/\mathbb{Q}_p}(z)z^{\mathbf{k}}|z|_K$ 的形式（其中 $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\Sigma}_{\ge 0}$，且$N_{K/\mathbb{Q}_p}$为范数映射），则称其为正则特征。我们用 $\mathcal{T}^n\mathrm{reg} \subset \mathcal{T}_L^n$ 表示正则特征构成的子集，它是扎里斯基开集。

**定义 3.3.1。** 令 $U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 为点 $x = (r, \underline{\delta}) \in \mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}} \times \mathcal{T}^n{}_{\mathrm{reg}}$ 的集合，使得表示 $r\colon \mathcal{G}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k(x))$ 按照 Colmez 的定义，带有参数 $\underline{\delta}\colon (K^{\times})^n \longrightarrow k(x)^{\times}$ 是三角化的（参见例如 [8, 定义 3.3.8]）。三角化簇$X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 定义为 $U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 在 $\mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}} \times \mathcal{T}_L^n$ 中的扎里斯基闭包。

$U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 的几何性质已得到充分理解： $U^{\square}{}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 的 Zariski 稠密且 Zariski 开子集，而 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 是光滑的，维数为 $n^2 + [K\colon \mathbb{Q}_p]\frac{n(n+1)}{2}$；参见 [7, 定理 2.6]。特别地， $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 也是等维的，维数为 $n^2 + [K\colon \mathbb{Q}_p]\frac{n(n+1)}{2}$。

现在令 $x = (r,\underline{\delta}) \in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 为一个晶体点，也就是说，它是一个满足 $r$ 按照 Fontaine [9] 的意义为晶体表示的点。回忆一下，存在一个与 $r$ 正则关联的 $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \simeq \prod_{\tau\in\Sigma} L$ 上的模 $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(r)$，并带有一个（规范的）递减滤过 $\mathrm{Fil}^{\bullet}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(r)$；对于每个 $\tau \in \Sigma$，恰有 $n$ 个整数 $h$，使得 $\mathrm{Fil}^{-h}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(r) \otimes_{K,\tau} L \ne \mathrm{Fil}^{-h+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(r) \otimes_{K,\tau} L$（计重数），称为 $r$ 的 $\tau$-Hodge-Tate权重，记作 $h_{\tau,1} \le \ldots \le h_{\tau,n}$。还需回忆，存在一个与 $r$ 正则关联的 $K_0 \otimes L$-模 $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(r)$，并带有一个规范端同态 $\varphi$，它相对于 $K_0$ 的 Frobenius 是半线性的。我们假设 $r$ 按照 [8], 的意义是一般的，这意味着对于每个 $\tau \in \Sigma$， $r$ 的 $\tau$-Hodge-Tate权重互不相同，并且对于线性化Frobenius $\Phi := \varphi^{[K_0:\mathbb{Q}_p]}$ 在 $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(r)$ 上的任意两个特征值 $\varphi, \varphi'$（计重数），都有 $\varphi/\varphi' \notin \{1, p^{[K_0:\mathbb{Q}_p]}\}$。

由 [6, 引理2.1], 可知， $\underline{\delta}$ 由以下数据确定：(i) $\Phi$ 的特征值的一种排列$\underline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$；(ii) 对每个 $\tau \in \Sigma$，一个属于 $\mathcal{S}_n$的置换$w_\tau$ 。更确切地说，可以写成 $\underline{\delta} = z^{w(\mathbf{h})}\mathrm{unr}(\underline{\varphi})$，其中特征标 $\mathrm{unr}(\underline{\varphi}) = (\mathrm{unr}(\varphi_i))_i$ 属于$(K^{\times})^n$，其定义为 $\mathrm{unr}(\varphi_i)|_{\mathcal{O}_K^{\times}} = 1$，且 $\mathrm{unr}(\varphi_i)(\varpi) = \varphi_i$，其中

$K$的一个一致化元 $\varpi$，并且 $w := (w_\tau) \in (\mathcal{S}_n)^\Sigma$ 以及 $w(\mathbf{h}) := \left(h_{\tau,\ w_\tau^{-1}(i)}\right)_{\tau,\ i} \in (\mathbb{Z}^n)^\Sigma$。此外，存在唯一的 $w_{\mathrm{sat}} \in (\mathcal{S}_n)^\Sigma$，使得点 $x_{\mathrm{sat}} := \left(r, z^{w_{\mathrm{sat}}(\mathbf{h})}\,\mathrm{unr}(\underline{\varphi})\right) \in \mathfrak{X}_{\bar r}^{\square} \times \mathcal{T}_L^n$属于 $U_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar r)$。

Breuil-Hellmann-Schraen 已证明，在某个点 $x_{\mathrm{pdR}} \in X_w \cap V_{w_{\mathrm{sat}}}$ 处，$X_w$ 是 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar r)$ 在点 $x$ 处的一个局部模型，更多细节请参见 [8, 定理 1.6]。由此，他们发现，与 $x = (r, \underline{\delta}) \in X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar r)$ 相关联的对 $(w_{\mathrm{sat}}, w) \in \left((\mathcal{S}_n)^\Sigma\right)^2$，如上所述，满足 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma$ 上的乘积 Bruhat 序的 $w_{\mathrm{sat}} \preceq w$（同上，定理 1.8）。他们还给出了 $\dim T_{X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar r)\, x}$ 的一个上界（同上，命题 4.1.5(ii)）。猜想 3.2.1 有如下推论：

**定理 3.3.2**。若猜想 *3.2.1* 对这一对 $(w_{\mathrm{sat}} \preceq w)$成立，则

$$\dim_{k(x)} T_{X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar r)\, x} = \text{维数}\, X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar r) - d_{w w_{\mathrm{sat}}^{-1}} + \text{维数}_{\mathbb{Q}_p} T_{\overline{(BwB/B)}, w_{\mathrm{sat}} B} - \lg(w_{\mathrm{sat}}) \tag{3.8}$$

其中 $k(x)$ 是 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar r)$ 在 $x$ 处的剩余域。

证明。由 (3.2) 以及 §3.1 中 $U_w$ 的定义可得 $\dim_{\mathbb{Q}_p} T_{\overline{(BwB/B)}, w_{\mathrm{sat}} B} = \dim_{\mathbb{Q}_p} T_{\overline{U_w}, (B, w_{\mathrm{sat}} B)} - [K\colon \mathbb{Q}_p]\frac{n(n-1)}{2} = \dim_{\mathbb{Q}_p} T_{\overline{U_w}, \pi(x_{\mathrm{pdR}})} - [K\colon \mathbb{Q}_p]\frac{n(n-1)}{2}$。因此，(3.8) 是命题 3.2.2 和 [8, 命题 4.1.5] 的证明的推论。□

我们将在下文第 4 节证明：如果按照定义 2.3.1 的意义，$(w_{\mathrm{sat}}, w)$ 是 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma = \Phi(G, T)$ 中的良好对，那么定理 3.3.2 的假设（因此也包括 (3.8)）总是成立。下面的结果给出了一个非常有限的逆命题。

**命题 3.3.3.** 若 $(3.8)$ 成立，且 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar r)$ 在 $x$ 处光滑，则 $(w_{\mathrm{sat}}, w)$ 是 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma$ 中的良好对，并且 $(BwB/B)$ 在 $\overline{w_{\mathrm{sat}} B}$ 处光滑。

证明。由于 $\dim \overline{(BwB/B)} = \lg(w)$，这直接由命题 2.3.4 得出。□

## 4. The case of good pairs

本节致力于证明以下定理。

**定理 4.1.** 设 $(w', w)$ 按照定义 *2.3.1* 的意义，是 $W$ 中的一个良好对。那么，猜想 *3.2.1* 和猜想 *3.2.3* 对这一对 $(w', w)$均成立，即局部$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$闭浸入 $V_{w'} \hookrightarrow X$ 诱导

$$\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{w w'^{-1}} + \mathfrak{u}) \hookrightarrow \widetilde{X}_w\,. \tag{4.1}$$

**4.1. 预备知识：Levi 子群与伴随作用**。我们将建立若干关于 Levi 子群和导出伴随作用的技术引理，这些引理将在定理 4.1 的证明中用到。

设 $J \subseteq I$ 是 $G$ 的单根子集，记 $\Phi_J \subseteq \Phi$ 为由 $J$ 生成的根子系，并将 $T_J := \left(\bigcap_{\alpha \in \Phi_J} (\ker\ \alpha)\right)^\circ \subseteq T$ 记为 $T$ 的最大子环面，使得对所有 $\alpha \in \Phi_J$（或等价地，对 $\alpha \in J$），都有 $\alpha(T_J) = 1$。它确实是一个环面，因为它是约化的（特征为 0）且连通的可对角化群；参见 [20, 记号 12.29] 中的讨论。

令 $L := C_G(T_J)$ 为与 $J$ 相关联的 $G$ 的标准 Levi 子群。根据 [20, 命题 21.90]，$L$ 是一个连通约化群，其极大环面为 $T$，根系为 $\Phi_J$。因此，$L = \langle T、\ U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_J \rangle$，也就是说，$L$ 是由 $T$ 以及 $\alpha \in \Phi_J$ 的 $U_\alpha$ 生成的 $G$ 子群。记 $U_L := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_J \cap \Phi_+ \rangle$ 为 $L \cap B$ 的幺幂根基，并分别用 $\mathfrak{t}_J$、$\mathfrak{l}$、$\mathfrak{u}_L$ 表示 $T_J$、$L$、$U_L$ 的李代数。

对于一个根 $\alpha\colon T \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，考虑其微分 $\mathrm{d}_e\alpha\colon \mathfrak{t} \longrightarrow k$；我们可以将其视为 $\mathrm{Lie}(\alpha)$，其中 Lie 是从 $k$ 上的代数群到 $k$ 上的李代数的李代数函子。由于 Lie 与有限极限相容，特别是与核和纤维积相容（见 [20, 10.14]），因此我们有

$$\mathfrak{t}_J = \bigcap_{\alpha\in\Phi_J} (\ker \mathrm{d}_e\alpha)\,.$$

**命题 4.1.1.** 存在仿射概形 $\mathfrak{t}_J$ 的一个 *Zariski* 稠密开子概形 $\mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}$，使得对于任意闭点 $t \in \mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}$：

(1) $L = C_G(t)^\circ \coloneqq \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)t = t\}^\circ$;
(2) $\mathfrak{l} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(t) \coloneqq \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,t] = 0\}$.

证明。对于任意闭点 $t \in \mathfrak{t}$，中心化子 $C_G(t)$ 包含 $T$，且被 $T$ 规范化，因此单位连通分支 $C_G(t)^\circ$ 也满足同样的性质，因为 $T$ 是连通的。由命题 [20, 21.66]，我们得到

$$C_G(t)^\circ = \langle T, U_\alpha \mid \alpha \in \Phi,\, U_\alpha \subseteq C_G(t)^\circ\rangle = \langle T, U_\alpha \mid \alpha \in \Phi,\, U_\alpha \subseteq C_G(t)\rangle \tag{4.2}$$

因为每个 $U_\alpha$ 都是连通的。

设 $\alpha \in \Phi$ 是一个根，且 $t \in \mathfrak{t}(k^{\mathrm{a}})$ 是一个 $k^{\mathrm{a}}$-点，使得 $U_\alpha \subseteq C_G(t)$。那么态射

$$\phi\colon U_\alpha \longrightarrow \mathfrak{g}\,, \quad u \longmapsto \mathrm{Ad}(u)t$$

是常值的，因此其微分

$$\mathrm{d}_e\colon \mathfrak{u}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{g}\,, \quad u_\alpha \longmapsto \mathrm{ad}(u_\alpha)t$$

为零。但对任意 $u_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha(k^{\mathrm{a}})$，都有 $\mathrm{ad}(u_\alpha)t = [u_\alpha, t] = -\mathrm{d}_e\alpha(t)u_\alpha$。这表明 $\mathrm{d}_e\alpha(t) = 0$，因此 $t \in \ker \mathrm{d}_e\alpha$。

现在令 $\alpha \in \Phi\backslash\Phi_J$。由于 $\Phi_J$是 $L$的根系，必有 $U_\alpha \not\subseteq L = C_G(T_J)$。因此存在 $u_\alpha \in U_\alpha(k^{\mathrm{a}})$ 和 $t \in T_J(k^{\mathrm{a}})$，使得 $u_\alpha t \neq t u_\alpha$，这意味着$u_\alpha \neq t u_\alpha t^{-1}$。这表明 $\alpha(t) \neq 1$ (见 [20, 21.19])。因此 $\ker(\alpha) \cap T_J \neq T_J$。应用李函子（它保持有限极限），可得 $\ker(\mathrm{d}_e\alpha) \cap \mathfrak{t}_J \neq \mathfrak{t}_J$，所以 $\mathfrak{t}_J \setminus (\ker(\mathrm{d}_e\alpha) \cap \mathfrak{t}_J)$ 在 $\mathfrak{t}_J$ 中非空，因而是稠密开集。由此我们定义

$$\mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}} \coloneqq \mathfrak{t}_J \setminus \left( \bigcup_{\alpha\in\Phi\setminus\Phi_J} \ker(\mathrm{d}_e\alpha) \cap \mathfrak{t}_J \right) = \bigcap_{\alpha\in\Phi\setminus\Phi_J} (\mathfrak{t}_J \setminus (\ker(\mathrm{d}_e\alpha) \cap \mathfrak{t}_J))$$

它在 $\mathfrak{t}_J$ 中是稠密开集。

现在，固定一个闭点 $t \in \mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}$。对于任意根 $\alpha \in \Phi$，前面的讨论表明，$U_\alpha \subseteq C_G(t)$ 蕴含 $\alpha \in \Phi_J$。由 (4.2)，我们有

$$C_G(t) \subseteq \langle T, U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_J\rangle = L\,.$$

对于任意 $t \in \mathfrak{t}_J$，逆命题 $L = C_G(T_J) \subseteq C_G(t)$ 都成立，因此 (1) 得证 .

结论 (2) 是 (1) 和 [20,命题 17.76] 的推论。 □

下面的引理阐明了命题 4.1.1 的重要性。

**引理 4.1.2.** 设 $\mathfrak{t}' \subseteq \mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$ 是 *Zariski* 稠密子概形。那么（在 $k$ 上的）代数簇

$$\widetilde{V}(w', \mathfrak{t}') \coloneqq \widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}' + \mathfrak{u})$$

是.....的稠密子簇

$$\widetilde{V}(w', \mathfrak{t}^{ww'^{-1}}) \coloneqq \widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u})\,.$$

证明。 回忆态射 $\widetilde{\pi}\colon G\times^B\mathfrak{b}\longrightarrow G/B$，它限制为两个态射

$$\widetilde{\pi}_1\colon q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}+\mathfrak{u})\longrightarrow G/B\ ,\quad \widetilde{\pi}'_1\colon q^{-1}(\mathfrak{t}'+\mathfrak{u})\longrightarrow G/B\,.$$

那么， $\widetilde{V}(w',\mathfrak{t}^{ww'^{-1}})$（分别地， $\widetilde{V}(w',\mathfrak{t}')$）就是 $\widetilde{\pi}_1$（分别地， $\widetilde{\pi}'_1$）在 $Bw'B/B$上方的纤维。因此，只需检验 $Bw'B/B$的闭点上方的纤维的稠密性：设 $gB\in Bw'B/B\subset G/B$ 满足 $g\in G$，我们要证明 $\widetilde{\pi}_1'^{-1}(gB)$在 $\widetilde{\pi}_1^{-1}(gB)$中稠密。现在， $B$ 在 $G\times\mathfrak{b}$ 上的左作用由 $b(g,\psi)=(bg,\psi)$ 给出，并在$G\times^B\mathfrak{b}$上诱导出一个左作用。该作用保持 $q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}+\mathfrak{u})$和 $q^{-1}(\mathfrak{t}'+\mathfrak{u})$不变，因为对于任意 $b\in B(k^{\mathrm{a}})$和 $t\in\mathfrak{t}(k^{\mathrm{a}})$， $\mathrm{Ad}(b)$都保持$t+\mathfrak{u}$ 不变。此外，该作用在 $\widetilde{\pi}_1$ 的纤维集合上诱导出一个作用，并且该作用在如下意义下是连续的：对于任意 $b\in B$ 和 $gB\in G/B$，我们有一个代数簇同构 $\widetilde{\pi}_1^{-1}(gB)\longrightarrow\widetilde{\pi}_1^{-1}(bgB)\ \ x\longmapsto bx$；对 $\widetilde{\pi}'_1$也同样如此。此外，该作用在纤维上的作用显然在 $Bw'B/B$各点处的纤维子集上是传递的。

因此，只需考虑在 $w'B\in G/B$ 处的纤维：我们要验证 $\widetilde{\pi}_1'^{-1}(ww'B)$ 在 $\widetilde{\pi}_1^{-1}(w'B)$ 中稠密。结合 [8, 命题 2.2.1]中的公式 (3.5) 与同构 (3.7)，得到

$$\widetilde{\pi}_1'^{-1}(ww'B)=\left\{(w',\psi)\in G\times^B\mathfrak{b}\;\middle|\;\psi\in\mathfrak{t}'\oplus(\mathfrak{u}\cap\mathrm{Ad}(w')\mathfrak{u})\right\}$$

and

$$\widetilde{\pi}_1^{-1}(ww'B)=\left\{(w',\psi)\in G\times^B\mathfrak{b}\;\middle|\;\psi\in\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}\oplus(\mathfrak{u}\cap\mathrm{Ad}(w')\mathfrak{u})\right\}\,,$$

由此可轻易推出所需的稠密性结论。 □

我们引入与 $J$ 相关的其他对象。令 $P:=P_J=\langle U_\alpha\mid\alpha\in\Phi_J\cup\Phi_+\rangle$ 为与 $J$ 相关的抛物子群，令 $U_P:=\langle U_\alpha\mid\alpha\in\Phi_+\setminus\Phi_J\rangle$ 为 $P$ 的幺幂根基。记 $W_J:=W(\Phi_J)\subseteq W$ 为 $\Phi_J$ 的魏尔群；因此， $W_J=N_L(T)/T$ 也是 $L$ 的魏尔群。记 $W^J\subset W$ 为满足以下条件的 $w\in W$ 的集合：对所有 $\alpha\in\Phi_J$，均有 $ws_\alpha\succ w$，即 $w(\alpha)\in\Phi_+$ 对所有 $\alpha\in\Phi_J\cap\Phi_+$ 均成立。约化群 $L$ 是 $P$ 的 Levi 因子，并且有分解 $P=LU_P$（见 [20,定理 21.91]）。另请回顾第2节.3中的分解 $W=W^JW_J$。

**引理 4.1.3.** 设 $l\in L$和 $w^J\in W^J$满足 $w^Jl(w^J)^{-1}\in B$。则 $l\in L\cap B$ .

证明。 由 $L$中的布鲁哈分解，设 $w_J\in W_J$ 满足 $l\in(L\cap B)w_J(L\cap B)$。假设 $w^J\in W^J$ 可改写为 $w^J(L\cap B)(w^J)^{-1}\subseteq B$。因此我们有 $w^Jl(w^J)^{-1}\in Bw^Jw_J(w^J)^{-1}B$。 $G$中的布鲁哈分解以及我们的假设进而给出 $w^Jw_J(w^J)^{-1}=1$，即 $w_J=1$，故 $l\in B$。□

**引理 4.1.4.** 设 $t\in\mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}(k^{\mathrm{a}})$ 是一个 $k^{\mathrm{a}}$-点。设 $w^J\in W^J$、 $u_P\in U_P(k^{\mathrm{a}})$、 $l\in L(k^{\mathrm{a}})$ 和 $x\in\mathfrak{u}_L(k^{\mathrm{a}})$ 满足伴随作用$(w^Ju_Pl)(t+x)\in\mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})$。则伴随作用$(l)x\in\mathfrak{u}_L(k^{\mathrm{a}})$。

证明。 由于 $U_P$ 是 $P$ 的正规子群， $L$ 通过共轭作用于 $P$（分别通过伴随作用作用于 $P$ 的李代数）会保持 $U_P$（分别保持 $\mathfrak{u}_P$）不变。此外， $U_P$ 通过共轭作用于 $B$，在 $B/U_P$ 上诱导出平凡作用，因此在 $\mathfrak{b}/\mathfrak{u}_P(k^{\mathrm{a}})$ 上也诱导出平凡作用。因此，令 $u'_P:=l^{-1}u_Pl\in U_P(k^{\mathrm{a}})$，利用 $t+x\in\mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})$，我们有：

$$y:=\mathrm{Ad}(u'_P)(t+x)-(t+x)\in\mathfrak{u}_P(k^{\mathrm{a}})\,.$$

因此，令 $z:=\mathrm{Ad}(l)y\in\mathfrak{u}_P(k^{\mathrm{a}})$，利用 $\mathrm{Ad}(l)t=t$，我们有：

$$\mathrm{Ad}(w^Ju_Pl)(t+x)=\mathrm{Ad}(w^Jlu'_P)(t+x)=\mathrm{Ad}(w^J)(t+\mathrm{Ad}(l)x+z)$$

根据假设，它属于 $\mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})=\mathfrak{t}(k^{\mathrm{a}})\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Phi_+}\mathfrak{u}_\alpha(k^{\mathrm{a}})$。

现在我们有伴随作用$(l)x \in \bigoplus_{\alpha\in\Phi_J} \mathfrak{u}_\alpha(k^{\mathrm{a}})$ 和 $z \in \mathfrak{u}_P(k^{\mathrm{a}}) \subset \bigoplus_{\alpha\in\Phi\setminus\Phi_J} \mathfrak{u}_\alpha(k^{\mathrm{a}})$，因此伴随作用$(w^J)$ 伴随作用$(l)x$ 以及伴随作用$(w^J)z$在直和 $\bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{u}_\alpha(k^{\mathrm{a}})$ 中的分量彼此不相交。因此，对于 $\alpha \notin \Phi_+$，它们各自在 $\mathfrak{u}_\alpha(k^{\mathrm{a}})$ 中都不能有非零分量，所以

$$\mathrm{Ad}(w^J)\,\mathrm{Ad}(l)x \in \mathfrak{u}(k^{\mathrm{a}})\,.$$

然而， $w^J \in W^J$ 将 $\Phi_J$ 中的负根映到 $\Phi$ 中的负根。由于 $\mathrm{Ad}(l)x \in \bigoplus_{\alpha\in\Phi_J} \mathfrak{u}_\alpha(k^{\mathrm{a}})$，这必然意味着 $\mathrm{Ad}(l)x \in \bigoplus_{\alpha\in\Phi_J\cap\Phi_+} \mathfrak{u}_\alpha(k^{\mathrm{a}}) = \mathfrak{u}_L(k^{\mathrm{a}})$。□

**引理 4.1.5.** 在引理 *4.1.4* 的设定下，我们有 $w^J u_P (w^J)^{-1} \in U(k^{\mathrm{a}})$。

证明。 我们知道 $\mathrm{Ad}(l)x \in \mathfrak{u}_L(k^{\mathrm{a}})$，并且 $\mathrm{Ad}(l)t = t$，因此如有必要，用 $\mathrm{Ad}(l)x$ 替换 $x$ 后，可以假设 $\mathrm{Ad}(w^J u_P)(t+x) \in \mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})$。

将 $\Phi_+ \setminus (\Phi_J \cap \Phi_+)$ 划分为两个集合

$$\Phi_1 \coloneqq \left\{\alpha \in \Phi_+ \setminus (\Phi_J \cap \Phi_+) \;\middle|\; w^J(\alpha) > 0\right\}\,,$$
$$\Phi_2 \coloneqq \left\{\alpha \in \Phi_+ \setminus (\Phi_J \cap \Phi_+) \;\middle|\; w^J(\alpha) < 0\right\}$$

并在 $\Phi_2$ 上取一个全序 $\prec$，使得当 $\alpha > \beta$ 时 $\alpha \preceq \beta$（其中 $\alpha$、$\beta \in \Phi_2$）（回想一下，根据定义，当且仅当 $\alpha - \beta$ 属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-张成的 $I$ 时， $\alpha > \beta$）。那么，对于 $\Phi_1$ 上的任意全序，都存在一个仿射概形之间的同构

$$\begin{array}{ccc} \left(\prod_{\alpha\in\Phi_1} U_\alpha\right) \times \left(\prod_{\alpha\in\Phi_2} U_\alpha\right) & \xrightarrow{\sim} & U_P \\ \left(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_{|\Phi_1|+|\Phi_2|}}\right) & \longmapsto & u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_{|\Phi_1|+|\Phi_2|}} \end{array};$$

这可通过将 [20, 定理 21.68]应用于 $U$ 和 $U_L$，并利用 Levi 分解 $U = U_L U_P$得出。令 $u_{P,1}$ 为 $u_P$在 $\prod_{\alpha\in\Phi_1} U_\alpha(k^{\mathrm{a}})$中的分量；根据 $\Phi_1$的定义，我们有 $w^J u_{P,1}(w^J)^{-1} \in U(k^{\mathrm{a}})$。特别地，

$$\mathrm{Ad}\left(w^J u_{P,1}^{-1} u_P\right)(t+x) = \mathrm{Ad}\left(\left(w^J u_{P,1}(w^J)^{-1}\right)^{-1}\right)\mathrm{Ad}\left(w^J u_P\right)(t+x) \in \mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})\,.$$

这意味着，将 $u_P$ 替换为 $u_P^{-1}{}_{,1} u_P$，既不会改变我们的假设，也不会改变我们的目标。

因此，我们可以假设 $u_P = \prod_{\alpha\in\Phi_2} u_\alpha$ ，其中 $u_\alpha \in U_\alpha(k^{\mathrm{a}})$ 唯一确定。另记 $x = \sum_{\beta\in\Phi_J\cap\Phi_+} x_\beta$，其中 $x_\beta \in \mathfrak{u}_\beta(k^{\mathrm{a}})$ 唯一确定。固定一个 $\alpha \in \Phi_2$。对于任意根 $\beta \in \Phi_J \cap \Phi_+$，我们有 $\alpha + \beta \neq 0$（因为二者都是正根），所以 [24, 命题 8.2.3] 推出

$$\mathrm{Ad}(u_\alpha)x_\beta - x_\beta \in \bigoplus_{i,j>0} \mathfrak{u}_{i\alpha+j\beta}(k^{\mathrm{a}})\,.$$

对于 $\alpha = \beta$，情况也确实如此，因为伴随作用$(u_\alpha)x_\alpha - x_\alpha = 0$。对于 $i$的 $i\alpha + j\beta > \alpha$ $j > 0$，我们可以对 $x_\beta$ 求和，得到

$$\mathrm{Ad}(u_\alpha)x - x \in \bigoplus_{\gamma>\alpha} \mathfrak{u}_\gamma(k^{\mathrm{a}})\,. \tag{4.3}$$

现在假设 $u_P \neq 1$；将 $u_P = u_{\alpha_r} u_{\alpha_{r-1}} \ldots u_{\alpha_0}$写成 $\mathfrak{u}_{\alpha_i}$中唯一确定的 $r \geq 0$和 $u_{\alpha_i} \neq 1$ 。请记住，$\Phi_2$ 上的序（尤其）不允许 $i > 0$为 $\alpha_0 > \alpha_i$。应用 (4.3)，对每个 $1 \leq i \leq r$，我们得到

$$\mathrm{Ad}(u_{\alpha_i})\,\mathrm{Ad}(u_{\alpha_{i-1}} \ldots u_{\alpha_0})x - \mathrm{Ad}(u_{\alpha_{i-1}} \ldots u_{\alpha_0})x \in \bigoplus_{\gamma>\alpha_i} u_\gamma(k^{\mathrm{a}})$$

并对 $i$求和，得到

$$\mathrm{Ad}(u_P)x - x \in \bigoplus_{\gamma>\alpha_r} \mathfrak{u}_\gamma(k^{\mathrm{a}}) \oplus \ldots \oplus \bigoplus_{\gamma>\alpha_0} \mathfrak{u}_\gamma(k^{\mathrm{a}}) \subseteq \bigoplus_{\gamma\neq\alpha_0} \mathfrak{u}_\gamma(k^{\mathrm{a}})\,. \tag{4.4}$$

由于 $(u_{\alpha_0} t' u_{\alpha_0}^{-1})t'^{-1} = u_{\alpha_0}(t' u_{\alpha_0}^{-1} t'^{-1}) \in U_{\alpha_0}(k^{\mathrm{a}})$ 对于 $t' \in T(k^{\mathrm{a}})$，我们有 $\mathrm{Ad}(u_{\alpha_0})t - t \in \mathfrak{u}_{\alpha_0}(k^{\mathrm{a}})$，它非零，因为根据命题 4.1.1(2)，$u_{\alpha_0} \notin \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(t)(k^{\mathrm{a}})$。再次反复应用 (4.3)，并如 (4.4) 那样求和，得到

$$\mathrm{Ad}(u_P)t - t \in (\mathfrak{u}_{\alpha_0}(k^{\mathrm{a}}) \setminus \{0\}) \oplus \bigoplus_{\gamma\neq\alpha_0} \mathfrak{u}_\gamma(k^{\mathrm{a}})\,. \tag{4.5}$$

由于 $x \in \mathfrak{u}_L(k^{\mathrm{a}})$，我们尤其显然有 $t + x \in \mathfrak{t}(k^{\mathrm{a}}) \oplus \bigoplus_{\gamma\neq\alpha_0} \mathfrak{u}_\gamma(k^{\mathrm{a}})$。结合 (4.4) 和 (4.5)，可知 $\mathrm{Ad}(u_P)(t + x)$ 在 $\mathfrak{u}_{\alpha_0}(k^{\mathrm{a}})$ 中有一个非零分量。因此，$\mathrm{Ad}(w^J)(u_P)(t + x)$ 在 $\mathfrak{u}_{w^J(\alpha_0)}(k^{\mathrm{a}})$ 中有一个非零分量。这与假设 $\mathrm{Ad}(w^J)(u_P)(t + x) \in \mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})$ 矛盾，因为 $\alpha_0 \in \Phi_2$意味着 $w^J(\alpha_0) < 0$。综上，$u_P = 1$，因此我们的断言成立。□

引理 4.1.4 和 4.1.5 可以很好地概括如下：

**引理 *4.1.6.*** *设 $t \in \mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}(k^{\mathrm{a}})$、$w^J \in W^J$、$u_P \in U_P(k^{\mathrm{a}})$、$l \in L(k^{\mathrm{a}})$ 和 $x \in \mathfrak{u}_L(k^{\mathrm{a}})$。那么，$\mathrm{Ad}(w^J u_P l)(t + x) \in \mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})$ 当且仅当 $w^J u_P (w^J)^{-1} \in U(k^{\mathrm{a}})$ 且 $\mathrm{Ad}(l)x \in \mathfrak{u}_L(k^{\mathrm{a}})$。*

证明。“仅当”方向由前面两个引理直接得出。对于“如果”方向，假设 $w^J u_P (w^J)^{-1} \in U(k^{\mathrm{a}})$ 且 $\mathrm{Ad}(l)x \in \mathfrak{u}_L(k^{\mathrm{a}})$。那么，由于 $w^J \in W^J$，我们有 $\mathrm{Ad}(w^J)\,\mathrm{Ad}(l)x \in \mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})$，因此 $\mathrm{Ad}(w^J l)(t + x) = \mathrm{Ad}(w^J)(t + \mathrm{Ad}(l)x) \in \mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})$，于是 $\mathrm{Ad}(w^J u_P (w^J)^{-1})\,\mathrm{Ad}(w^J l)(t + x) \in \mathfrak{b}(k^{\mathrm{a}})$，这正是我们要证明的。□

**4.2. 定理 4.1 的证明。** 本部分是定理 4.1 证明的核心。在开始证明之前，我们先就基变换到代数闭包 $k^{\mathrm{a}}$ 作以下两点观察。

1. 若 $S$ 是 $k$ 上的概形，则 $(S_{k^{\mathrm{a}}})^{\mathrm{red}} = (S^{\mathrm{red}})_{k^{\mathrm{a}}}$；事实上，$(S^{\mathrm{red}})_{k^{\mathrm{a}}}$ 由[25, 引理 020I], 可知是约化的，因此满足定义 $(S_{k^{\mathrm{a}}})^{\mathrm{red}}$ 的泛性质。因此，我们对簇的交和簇态射的逆像所作的定义与基变换相容。特别地，从 $k^{\mathrm{a}}$ 上带有博雷尔子群 $B_{k^{\mathrm{a}}}$ 及相应李代数 $\mathfrak{g}_{k^{\mathrm{a}}}$ 和 $\mathfrak{b}_{k^{\mathrm{a}}}$ 的约化群 $G_{k^{\mathrm{a}}}$ 出发，可以定义态射 $q_{k^{\mathrm{a}}}$: $G_{k^{\mathrm{a}}} \times^{B_{k^{\mathrm{a}}}} \mathfrak{b}_{k^{\mathrm{a}}} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}_{k^{\mathrm{a}}}}$ $\widetilde{\phantom{x}}$ $\widetilde{\phantom{x}}$ 以及簇 $X_{k^{\mathrm{a}}}$、$V_{w,\,k^{\mathrm{a}}}$ 和 $X_{w,\,k^{\mathrm{a}}}$，其中 $w \in W$；其方式与 $k$ 上的分裂约化群 $G$ 类似。我们很容易看出，这些构造与基变换相容，并且对于任意 $w' \in W$，都存在自然同构

$$\widetilde{V}_{w',k^{\mathrm{a}}} \cap q_{k^{\mathrm{a}}}^{-1}(\mathfrak{t}_{k^{\mathrm{a}}}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u}_{k^{\mathrm{a}}}) \xrightarrow{\sim} \left(\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u})\right) \times_k k^{\mathrm{a}}.$$

2. 若 $Z \hookrightarrow S$ 是 $k$-概形的闭浸入，则 $S' \longrightarrow S$的 $k$-概形态射可经由 $Z$ 分解，当且仅当基变换 $S'_{k^{\mathrm{a}}} \longrightarrow S_{k^{\mathrm{a}}}$可经由 $Z_{k^{\mathrm{a}}}$分解。事实上，只需对仿射概形验证这一点，即验证若 $I$ 是 $k$-代数 $A$的一个理想，则任意 $k$-代数态射 $A \longrightarrow B$ 可经由 $A/I$ 分解，当且仅当标量扩张$A \otimes_k k^{\mathrm{a}} \longrightarrow B \otimes_k k^{\mathrm{a}}$ 可经由（$A/I$）$\otimes_k k^{\mathrm{a}} =$（$A \otimes_k k^{\mathrm{a}}$）/（$I \otimes_k k^{\mathrm{a}}$）分解。

因此，在第 4 节的其余部分，我们可以并且确实假设 $k$ 是代数闭的。特别地，任意 $k$-概形 $S$ 的闭点集合与 $S$的 $k$-点集合 $S$（$k$）自然双射。

我们采用以下记号。设 $L$ 是 $G$ 的标准抛物子群 $P$ 的 Levi 子群（即 满足 $B \subseteq P$）；存在 $J \subseteq I$ 使得 $P = P_J$。由于 $L$ 是 $G$ 的连通约化闭子群，且 $L \cap B$ 是 $\sim L$ 的博雷尔子群，因此可以定义 $q_L$： $L \times^{L\cap B} \mathfrak{l} \cap \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{l}$ 和 $X_L$，其定义方式与 $G$ 相同；此外，对于任意 $w \in W_J$，还可以定义 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$、$V_{L,\ w}$ 和 $X_{L,\ w}$。默认情况下，这些对象均假定是对 $G$ 定义的，除非 $L$ 写在下标中。

证明预览。 定理 4.1 可表述如下：对于 $W$ 中所有良好对 $(w', w)$ 以及闭点 $t \in \mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$，我们有如下包含关系

$$\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(t + \mathfrak{u}) \hookrightarrow \widetilde{X}_w\,. \tag{4.6}$$

(4.6) 的证明将分四步进行。

第一步是 [8] 的一个结果，该结果指出，当 $t = 0$ 时，(4.6) 成立，而不论 $(w', w)$ 是否为良好对。随后，我们将此结果应用于 $G$ 的 Levi 子群 $C_G((T^{ww'^{-1}})^\circ)$ 的一个共轭子群 $L$，从而得到包含关系 $\widetilde{V}_{L,\ w'_L} \cap q_L^{-1}(\mathfrak{u}_L) \hookrightarrow \widetilde{X}_{L,\ w_L}$，其中任意 $w'_L, w_L$ 都属于 $L$ 的魏尔群。这一点尤为重要，因为当某个适当的闭点 $t \in \mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$ 被$L$中心化时，我们便可以据此进行平移；因此，事实上，对于这样的 $t$，有 $\widetilde{V}_{L,\ w'_L} \cap q_L^{-1}(t + \mathfrak{u}_L) \hookrightarrow \widetilde{X}_{L,\ w_L}$。

第二步确立了 $X_L$ 与 $X$ 之间的联系。更准确地说，我们构造了 $\widetilde{V}_{L,\ w_L} \cap q_L^{-1}(\mathfrak{u}_L)$（或者等价地，根据上一段，对于任意被 $L$ 中心化且与某个$t \in \mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$共轭的 $t'$，有 $\widetilde{V}_{L,\ w_L} \cap q_L^{-1}(t' + \mathfrak{u}_L)$）与 $\widetilde{V}_w \cap q^{-1}(t + \mathfrak{u})$ 的一个闭子簇之间的同构，其中某个 $w_L$ 属于 $L$ 和 $w \in W$ 的魏尔群 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$。我们暂且将 $V'_w$ 称为 $V_w \cap q^{-1}(t + \mathfrak{u})$ 的这个子簇。

第三步弥合了从 $\widetilde{V}'_w$ 到 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{V}_w \cap q^{-1}(t + \mathfrak{u})$上的作用，使得所有轨道都与 $V'_w$相交。

第四步也是最后一步，将前几步整合为一个证明：对于某个给定的（$w' \preceq w$），良对条件使我们能够找到$G$ 的一个标准 Levi 子群 $L$，以及 $L$的魏尔群中由元素组成的一个有序对（$w'_L \preceq w_L$），从而第二步和第三步可以将问题化归到第一步的情形。

*步骤 1*。

**定理 4.2.1** （Beilinson-Bernstein、Ginsburg）。设 $w$， $w' \in W$ 使得 $w' \preceq w$。$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$那么，局部闭浸入 $V_{w'} \hookrightarrow X$ 诱导出 $V_{w'} \cap q^{-1}$（$\mathfrak{u}$） $\hookrightarrow X_w$。

证明。 由命题 3.2.4 的证明可知，该定理等价于对所有 $w' \preceq w$， $V_{w'} \cap \kappa_1^{-1}(0) \hookrightarrow X_w$。这一陈述是 Beilinson-Bernstein 对应（见 [13, 第11]节）和 Ginsburg 的一个结果的推论；完整论证见 [8, 第2节4] （尤其参见 [8, 定理 2.4.7] 的证明）。□

*步骤 2*。

**命题 4.2.2**。 设 $t \in \mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}$ 是一个闭点，并设 $u^J$， $v^J \in W^J$。

（1）存在一个态射 $\iota_{t,\ u^J,\ v^J}$，其定义为

$$\iota_{t,u^J,v^J}\colon \begin{array}{ccc} L\times^{L\cap B}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{b} & \longrightarrow & G\times^B\mathfrak{b} \\ (l,\psi_L) & \longmapsto & \left(u^Jl(v^J)^{-1},\mathrm{Ad}(v^J)(t+\psi_L)\right)\end{array}$$

且它是一个闭浸入。

(2) 闭浸入 $\iota_{t,u^J,v^J}$ 对任意 $w_J\in W_J$ 诱导出一个同构

$$\iota_{t,u^J,w_J,v^J}\colon \widetilde{V}_{L,w_J}\cap q_L^{-1}(\mathfrak{u}_L)\xrightarrow{\sim}\widetilde{V}_{u^Jw_J(v^J)^{-1}}\cap q^{-1}\left(\mathrm{Ad}(u^J)(t+\mathfrak{u}_L)\right)\ .$$

证明。我们首先证明陈述 (1)。我们先验证 $\iota_{t,u^J,v^J}$ 是良定义的。令 $b\in L\cap B$。由于 $L\cap B=T\prod_{\alpha\in\Phi_J\cap\Phi_+}U_\alpha$ 和 $v^J\in W^J$，我们有

$$b':=v^Jb(v^J)^{-1}\in B\,.$$

因此，对于任意 $l\in L$ 和 $\psi_L\in\mathfrak{l}\cap\mathfrak{b}$，我们有

$$\left(u^Jlb(v^J)^{-1},\mathrm{Ad}(v^J)(t+\mathrm{Ad}(b)\psi_L)\right)=\left(u^Jl(v^J)^{-1}b',\mathrm{Ad}(b')\,\mathrm{Ad}(v^J)(t+\psi_L)\right)$$

（注意，$b$ 将 $t$ 固定为 $b\in L$），这表明 $\iota_{t,u^J,v^J}$ 是良定义的。

现在我们来验证 $\iota_{t,u^J,v^J}$ 是一个闭浸入。首先考虑态射

$$\begin{array}{ccc} L\times\mathfrak{l}\cap\mathfrak{b} & \longrightarrow & (u^JL(v^J)^{-1}B)/B\times\mathfrak{l} \\ (l,\psi_L) & \longmapsto & (u^Jl(v^J)^{-1}B,\mathrm{Ad}(l)\psi_L)\end{array}\ . \tag{4.7}$$

由 $u^Jlb(v^J)^{-1}=u^Jl(v^J)^{-1}b'$，我们知道，对于任意 $b\in L\cap B$ 以及 $(l,\psi_L)\in L\times\mathfrak{l}\cap\mathfrak{b}$，$(l,\psi_L)$ 和 $(lb,$ 伴随作用$(b^{-1})\psi_L)$ 在 (4.7) 下的像相同。反过来，假设 $(l,\psi_L)$ 和 $(l',\psi'_L)$ 的像相同。这意味着

$$\mathrm{Ad}(l)\psi_L=\mathrm{Ad}(l')\psi'_L$$

并且存在 $b\in B$ 使得

$$u^Jl(v^J)^{-1}=u^Jl'(v^J)^{-1}b\,.$$

记 $b'=l'^{-1}l$。那么 $v^Jb'(v^J)^{-1}=b$，因此根据引理 4.1.3，$b'\in L\cap B$。我们还有 $l=l'b'$，所以 $\psi_L=$ 伴随作用$(b'^{-1})\psi'_L$ 且 $(l,\psi_L)=(l',\psi'_L)$ 属于 $L\times^{L\cap B}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{b}$。因此，根据商空间 $L\times^{L\cap B}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{b}$ 的定义，态射 (4.7) 分解为

$$f_L\colon \begin{array}{ccc} L\times^{L\cap B}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{b} & \longrightarrow & \left(u^JL(v^J)^{-1}B\right)/B\times\mathfrak{l} \\ (l,\psi_L) & \longmapsto & \left(u^Jl(v^J)^{-1}B,\mathrm{Ad}(l)\psi_L\right)\end{array}\ .$$

连同态射

$$f_G\colon \begin{array}{ccc} G\times^B\mathfrak{b} & \longrightarrow & G/B\times\mathfrak{g} \\ (g,\psi) & \longmapsto & (gB,\mathrm{Ad}(g)\psi)\end{array}\ ,$$

态射 $\iota_{t,\ u^J,\ v^J}$ 以及闭浸入

$$\iota\colon \begin{array}{ccc} (u^JL(v^J)^{-1}B)/B\times\mathfrak{l} & \hookrightarrow & G/B\times\mathfrak{g} \\ (gB,\psi_L) & \longmapsto & \left(gB,\mathrm{Ad}(u^J)(t+\psi_L)\right)\end{array},$$

我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} L\times^{L\cap B}\mathfrak{l}\cap\mathfrak{b} & \xrightarrow{\iota_{t,u^J,v^J}} & G\times^B\mathfrak{b} \\ \downarrow{\scriptstyle f_L} & & \downarrow{\scriptstyle f_G} \\ (u^JL(v^J)^{-1}B)/B\times\mathfrak{l} & \xhookrightarrow{\iota} & G/B\times\mathfrak{g}\,.\end{array} \tag{4.8}$$

该图是一个笛卡尔方形。事实上，设 $(g,\psi) \in G \times^B \mathfrak{b}$ 满足 $(gB$, 伴随作用$(g)\psi)$ 属于 $\iota$ 的像。然后，在必要时修改 $(g,\psi) \in G \times \mathfrak{b}$（使其在 $G \times^B \mathfrak{b}$ 中的像保持不变），存在 $l \in L$使得 $g = u^J l(v^J)^{-1}$，且 $\psi_L \in \mathfrak{l}$使得 伴随作用$(g)\psi =$伴随作用$(u^J l(v^J)^{-1})\psi =$伴随作用$(u^J)(t+\psi_L)$。由最后这个等式可得

$$\psi = \mathrm{Ad}(v^J l^{-1})(t+\psi_L) = \mathrm{Ad}(v^J)(t + \mathrm{Ad}(l^{-1})\psi_L)$$

且 $\mathrm{Ad}(l^{-1})\psi_L \in \mathfrak{l} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi_J} \mathfrak{u}_\alpha$。此外，$v^J \in W^J$ 蕴含

$$\mathrm{Ad}(v^J)\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Phi_J\cap\Phi_-} \mathfrak{u}_\alpha\Big) \subseteq \bigoplus_{\alpha\in\Phi_-} \mathfrak{u}_\alpha\,,$$

因此，由于 $\mathrm{Ad}(v^J)\,\mathrm{Ad}(l^{-1})\psi_L = \psi - \mathrm{Ad}(v^J l^{-1})t \in \mathfrak{b}$，我们必然有

$$\mathrm{Ad}(l^{-1})\psi_L \in \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi_J\cap\Phi_+} \mathfrak{u}_\alpha = \mathfrak{l}\cap\mathfrak{b}\,.$$

这给出 $(g,\psi) = \iota_{t,\ u^J,\ v^J}\big(l,\ \mathrm{Ad}(l^{-1})\psi_L\big)$，正如我们所希望的。由于图表 (4.8) 是笛卡尔图表，且 $\iota$ 是闭浸入，因此根据基变换，$\iota_{t,\ u^J,\ v^J}$ 也是闭浸入。

至于断言 (2)，我们已根据 $u^J \in W^J$ 得出了包含关系 $u^J(L\cap B)(u^J)^{-1} \subseteq B$，对 $v^J$ 也同样如此。由此我们很容易看出，$\iota_{t,\ u^J,\ v^J}$ 限制后是代数簇之间的闭浸入

$$\widetilde{V}_{L,w_J} \cap q_L^{-1}(\mathfrak{u}_L) \hookrightarrow \widetilde{V}_{u^J w_J (v^J)^{-1}} \cap q^{-1}\left(\mathrm{Ad}(u^J)(t+\mathfrak{u}_L)\right)$$

我们希望它是一个同构。为此，令 $(g,\psi) \in q^{-1}\left(\mathrm{Ad}(u^J)(t+\mathfrak{u}_L)\right)$。我们知道

$$G = \coprod_{\substack{w^J\in W^J\\ w_J\in W_J}} Bw^J w_J B = \coprod_{w^J\in W^J} Bw^J P = \coprod_{w^J\in W^J} Bw^J U_P L\,,$$

其中，第一个等式来自 $G$的布鲁哈分解，第二个等式来自 $P = P_J$ 的布鲁哈分解，第三个等式来自 $P$的 Levi 分解（关于后两者，参见 [20, 定理 21.91]）。因此，存在 $b \in B$、$w^J \in W^J$、$u_P \in U_P$和 $l \in L$，使得 $g^{-1}u^J = bw^J u_P l$。如有必要，更改 $(g,\psi)$ 在 $G \times \mathfrak{b}$中的提升，我们可以假设 $b = 1$；根据假设，存在 $x \in \mathfrak{u}_L$，使得

$$(g,\psi) = \left(u^J l^{-1} u_P^{-1}(w^J)^{-1}, \mathrm{Ad}(w^J u_P l)(t+x)\right)\,.$$

由于 $\psi \in \mathfrak{b}$，引理 4.1.6 推出 $w^J u_P (w^J)^{-1} \in U \subset B$，并且

$$\psi_L := \mathrm{Ad}(l)x \in \mathfrak{u}_L\,,$$

因此我们实际上在 $G \times^B \mathfrak{b}$ 中有

$$(g,\psi) = \left(u^J l^{-1}(w^J)^{-1}, \mathrm{Ad}(w^J l)(t+x)\right) = \left(u^J l^{-1}(w^J)^{-1}, \mathrm{Ad}(w^J)(t+\psi_L)\right)\,. \tag{4.9}$$

最后，对于某个 $w'_J \in W_J$，有 $l^{-1} \in (L\cap B)w'_J(L\cap B)$，因此照常得到 $g = u^J l^{-1}(w^J)^{-1} \in Bu^J w'_J (w^J)^{-1} B$。如果再加上条件 $(g,\psi) \in \widetilde{V}_{u^J w_J (v^J)^{-1}}$，或者等价地，$g \in Bu^J w_J (v^J)^{-1} B$，那么我们有 $w'_J (w^J)^{-1} = w_J (v^J)^{-1}$。这迫使 $w'_J = w_J$ 和 $w^J = v^J$，因此 (4.9) 转化为

$$(g,\psi) = \iota_{t,u^J,v^J}(l^{-1},\psi_L)$$

~与 $(l^{-1},\ \psi_L) \in V_{L,\ w_J}$。至此，命题 4.2.2 的证明完成。 □

步骤 *3*。 下面引理的证明使用了关于 Jordan 分解的标准结果，可见下文附录 A。

**引理 4.2.3**。 设 $t \in \mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}$ 是一个闭点，且设 $u^J \in W^J$。那么存在一个满射态射，由下式给出

$$f\colon \begin{array}{ccc} U \times \big(\mathrm{Ad}(u^J)(t+\mathfrak{u}_L)\big) & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & \mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u} \\ (u,x) & \longmapsto & \mathrm{Ad}(u)x\,. \end{array}$$

证明。 映射 $f$ 的存在直接来自如下事实：当 $u \in U$ 时，$\mathrm{Ad}(u)$ 将任意 $t' \in \mathfrak{t}$ 送至 $t'+\mathfrak{u}$。因此，我们只需证明满射性

令 $y \in \mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u}$，并考虑其在 $\mathfrak{g}$ 中的 Jordan 分解 $y = y_{\mathrm{s}} + y_{\mathrm{n}}$（见定理 A.2）。由命题 A.9，存在 $g \in G$ 使得

$$y_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{Ad}(u^J)t\,.$$

我们使用如下分解

$$G = \coprod_{w^J \in W^J} Bw^JP = \coprod_{w^J \in W^J} UTw^JP = \coprod_{w^J \in W^J} Uw^JU_PL\,.$$

设 $u \in U$、$w^J \in W^J$ 和 $u_P \in U_P$ 满足 $gu^J \in uw^Ju_PL$。由 $t$ 被 $L$ 中心化这一事实可得：

$$y_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ad}(uw^Ju_P)t\,.$$

现在，由命题 A.9(1)，我们有

$$y_{\mathrm{n}} \in \mathfrak{u}, \quad y_{\mathrm{s}} \in y+\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{b}\,. \tag{4.10}$$

因此，$\mathrm{Ad}(w^Ju_P)t = \mathrm{Ad}(u^{-1})y_{\mathrm{s}} \in \mathfrak{b}$，所以由引理 4.1.5 可知 $w^Ju_P(w^J)^{-1} \in U$。令 $u' := uw^Ju_P(w^J)^{-1} \in U$。现在我们可以写成

$$y_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ad}(u'w^J)t \in \mathrm{Ad}(w^J)t+\mathfrak{u}\,. \tag{4.11}$$

此外，由 (4.10) 和关于 $y$ 的假设可得 $y_{\mathrm{s}} \in \mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u}$。结合 (4.11)，我们推得

$$\mathrm{Ad}(w^J)t = \mathrm{Ad}(u^J)t\,,$$

因此 $(u^J)^{-1}w^J \in C_G(t)$。若 $(u^J)^{-1}w^J \notin W_J$，则存在 $\alpha \in \Phi_J$ 使得$\beta := (u^J)^{-1}w^J(\alpha) \notin \Phi_J$。由于 $U_\alpha \subseteq C_G(t)$，我们有

$$U_\beta = (u^J)^{-1}w^JU_\alpha(w^J)^{-1}u^J \subseteq C_G(t)$$

所以 $U_\beta \subseteq C_G(t)^\circ = L$，因为 $U_\beta$ 是连通的；这与 $\beta$ 不是 $L$ 的根矛盾。因此 $(u^J)^{-1}w^J \in W_J$，由此可推得 $w^J = u^J$，因为 $W^J$ 是 $W/W_J$ 的一组代表元。

此外，交换关系 $[y_{\mathrm{s}}, y_{\mathrm{n}}] = 0$ 连同 $y_{\mathrm{s}} =$伴随作用$(u'w^J)t$（见 (4.11)）以及命题 4.1.1(2) 推出 $y_{\mathrm{n}} \in$伴随作用$(u'w^J)\mathfrak{l}$。由于 $y_{\mathrm{n}} \in \mathfrak{u}$ 和 $w^J \in W^J$，我们必然得到 $y_{\mathrm{n}} \in$ 伴随作用$(u'w^J)\mathfrak{u}_L$。因此，

$$y = y_{\mathrm{s}} + y_{\mathrm{n}} \in \mathrm{Ad}(u'w^J)(t+\mathfrak{u}_L) = \mathrm{Ad}(u')\,\mathrm{Ad}(u^J)(t+\mathfrak{u}_L)$$

由此证明得证。 □

**命题 4.2.4.** 设 $t \in \mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}$ 为一个闭点，设 $u^J$，$v^J \in W^J$ 并设 $w_J \in W_J$。记 $w := u^Jw_J(v^J)^{-1}$。那么存在一个代数簇满射态射

$$\mu_{t,u^J,w_J,v^J}\colon \begin{array}{ccc} U \times \left(\widetilde{V}_{L,w_J} \cap q_L^{-1}(\mathfrak{u}_L)\right) & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & \widetilde{V}_w \cap q^{-1}\left(\mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u}\right) \\ (u,(l,\psi_L)) & \longmapsto & \left(uu^Jl(v^J)^{-1}B, \mathrm{Ad}(v^J)(t+\psi_L)\right). \end{array}$$

证明。 请记住，代数簇态射的满射性可以通过检查闭点来判断（[27, 练习 7.4.C]）。该代数簇态射

$$\begin{array}{ccc} U \times q^{-1}(\mathrm{Ad}(u^J)(t+\mathfrak{u}_L)) & \longrightarrow & q^{-1}(\mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u}) \\ (u,(g,x)) & \longmapsto & (ug,x) \end{array} \tag{4.12}$$

根据引理 4.2.3，它是满射。由于 $U \subseteq B$，对于任意的 $u \in U$ 和$g \in G$，当且仅当 $ug \in BwB$ 时，我们有 $g \in BwB$ 。因此，(4.12) 诱导出一个满射代数簇态射

$$\begin{array}{ccc} U \times \left(\widetilde{V}_w \cap q^{-1}\left(\mathrm{Ad}(u^J)(t+\mathfrak{u}_L)\right)\right) & \longrightarrow & \widetilde{V}_w \cap q^{-1}\left(\mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u}\right) \\ (u,(g,x)) & \longmapsto & (ug,x) \end{array}.$$

与命题 4.2.2(2) 中的双射态射 $\mathrm{id} \times \iota_{t,\ u^J,\ w_J,\ v^J}$ 复合，得到所需的态射 $\mu_{t,\ u^J,\ w_J,\ v^J}$。证明至此完成。□

步骤 *4*。 现在我们证明定理 4.1。

设 $\Phi$ 是 $G$ 的根系，其基为 $I$，而 $\Phi_{ww'^{-1}} \subseteq \Phi$ 是 $ww'^{-1}$ 的极小生成子系，其含义见定义 2.1.1。根据命题 2.2.2，它是 Levi 子群 $C_G((T^{ww'^{-1}})^\circ)$ 的根系。命题 2.3.7 给出了根的基 $I$ 的一个子集 $J$，以及满足以下条件的元素 $u^J$、$v^J \in W^J$、 $w'_J$、$w_J \in W$

$$w = u^J w_J (v^J)^{-1}, \quad w' = u^J w'_J (v^J)^{-1}, \quad w'_J \preceq w_J$$

并且使得 $u^J L (u^J)^{-1} = C_G((T^{ww'^{-1}})^\circ)$，其中 $L := L_J$ 是与 $J$ 相关联的标准 Levi 子群。于是 $L = C_G((T^{w_J(w'_J)^{-1}})^\circ)$，其中 $(T^{w_J(w'_J)^{-1}})^\circ = T_J$ 和 $\mathfrak{t}^{w_J(w'_J)^{-1}} = \mathfrak{t}_J$（采用第 4.1 节的记号）。

簇 $\mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}$ 在 $\mathfrak{t}_J = \mathfrak{t}^{w_J(w'_J)^{-1}}$ 中 Zariski 稠密，因此 $\mathrm{Ad}(u^J)\mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}$ 在 $\mathrm{Ad}(u^J)\mathfrak{t}_J = \mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$ 中 Zariski 稠密。根据引理 4.1.2，我们因此只需证明$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $V_{w'} \hookrightarrow X$ 诱导

$$\widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathrm{Ad}(u^J)t+\mathfrak{u}) \hookrightarrow \widetilde{X}_w$$

对所有闭点 $t \in \mathfrak{t}_J^{\mathrm{gen}}$ 都成立。下文固定一个这样的 $t$。

闭 浸入 $\iota_{t,u^J,v^J}$ 将命题 4.2.2 的闭浸入限制为

$$\iota_{t,u^J,v^J} \colon \widetilde{X}_L = q_L^{-1}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{b}) \hookrightarrow \widetilde{X} = q^{-1}(\mathfrak{b}).$$

事实上，我们需要验证对于所有满足 $\mathrm{Ad}(l)\psi_L \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{b}$ 的 $(l, \psi_L) \in L \times (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{b})$，都有 $\mathrm{Ad}(u^J)\ \mathrm{Ad}(l)\ \psi_L \in \mathfrak{b}$，这成立是因为 $u^J \in W^J$ 意味着 $\mathrm{Ad}(u^J)(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$。同理，我们还可以进一步限制为

$$\iota_{t,u^J,v^J} \colon \widetilde{V}_{L,w_J} \hookrightarrow \widetilde{V}_w$$

因为 $u^J \in W^J$ 意味着 $u^J(L \cap B)(u^J)^{-1} \subseteq B$， $v^J$ 的情形也类似。取$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$的扎里斯基闭包，得到一个闭浸入 $\iota_{t,\ u^J,\ v^J} \colon X_{L,\ w_J} \hookrightarrow X_w$。此外，还有一个态射

$$\begin{array}{ccc} U \times \widetilde{X}_w & \longrightarrow & \widetilde{X}_w \\ (u,(g,x)) & \longmapsto & (ug,x) \end{array}$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，它与 $\mathrm{id} \times \iota_{t,\ u^J,\ v^J} \colon U \times X_{L,\ w_J} \longrightarrow U \times X_w$ 复合后，给出一个态射

$$\bar{\mu}_{t,u^J,w_J,v^J} \colon U \times \widetilde{X}_{L,w_J} \longrightarrow \widetilde{X}_w$$

它可以通过类似于命题 4.2.4 中满射态射$\mu_{t,u^J,w_J,v^J}$ 的公式来定义。

我们还有一个显然的局部闭浸入

$$\varphi_G\colon \widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathrm{Ad}(u^J)t + \mathfrak{u}) \hookrightarrow \widetilde{X}$$

以及一个不那么显然的局部闭浸入

$$\varphi_L\colon \widetilde{V}_{L,w'_J} \cap q_L^{-1}(\mathfrak{u}_L) \hookrightarrow \widetilde{X}_{L,w_J}$$

由定理 4.2.1 应用于约化群 $L$ 并结合良对条件 $w'_J \preceq w_J$给出。

所有这些态射都构成了一个定义在 $k$ 上的代数簇交换图

$$\begin{array}{ccc} U \times \left(\widetilde{V}_{L,w'_J} \cap q_L^{-1}(\mathfrak{u}_L)\right) & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\varphi_L} & U \times \widetilde{X}_{L,w_J} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{t,u^J,w'_J,v^J}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{\mu}_{t,u^J,w_J,v^J}} \\ & & \widetilde{X}_w \\ & & \Big\downarrow \\ \widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathrm{Ad}(u^J)t + \mathfrak{u}) & \xrightarrow{\varphi_G} & \widetilde{X} \end{array}$$

其中，左侧映射的满射性 $\mu_{t,u^J,w'_J,v^J}$ （命题 4.2.4）证明了底部映射的$\widetilde{}$像 $\varphi_G$ 落在 $X_w$中。这就完成了定理 4.1 的证明。

## 5. Counter-examples for bad pairs when $G = \mathrm{GL}_n$

在第 4 节中，我们证明了良好对情形下的猜想 3.2.1。本节探讨分裂约化群 $G = \mathbf{GL}^{n/k}$ 的坏对情形，其中 $n \geq 1$，且 $k$ 是任意特征零域。从现在起， $G = \mathbf{GL}^{n/k}$ 表示 $G$ 中的上三角矩阵子群， $T$ 表示 $G$ 中的对角矩阵子群， $U$ 表示 $G$ 中对角坐标均为 1 的上三角矩阵子群，而 $W = \mathcal{S}_n$ 表示 $G$ 的魏尔群。

**5.1. 格拉斯曼流形、旗簇与舒伯特胞腔。** 我们从计算视角回顾一些关于旗簇及其舒伯特胞腔分解的众所周知的事实，并为本节余下部分设定记号。

**定义 5.1.1。** 对于 $1 \leq d \leq n$， $k$ 上的 $d$-平面$n$-空间中的格拉斯曼流形 是由 $k^n$中维数为 $d$ 的线性子空间组成的集合。记作 $\mathbf{Gr}_{d,n/k}$。

对于 $V \in \mathbf{Gr}_{d,n/k}$，设 $(v_1, \ldots, v_d)$ 是 $V$ 的一组基。那么 $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ 是 $\bigwedge^d k^n$ 的非零元素。若选择另一组基，这个外积会乘上一个因子（即一组基在另一组基下的行列式）；因此， $\bigwedge^d k^n$ 中由 $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ 张成的直线是 $\mathbb{P}(\bigwedge^d k^n)$中定义良好的元素。还可以根据以下性质从这条直线恢复 $V$：向量 $v$ 属于 $V$，当且仅当$v \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_d = 0$ 属于 $\bigwedge^{d+1} k^n$。

**定义 5.1.2。**这个普吕克嵌入是映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_{d,n/k} &\longrightarrow \mathbb{P}\Big(\bigwedge^d k^n\Big) \\ \langle v_1, \ldots, v_d\rangle &\longmapsto k \cdot (v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) \end{aligned}$$

其中（$v_1, \ldots, v_d$）是 $k^n$ 中任意一个线性无关族。

注记 5.1.3。 下文的命题 5.1.5 与定义 5.1.2 之前的讨论表明，格拉斯曼流形是一个射影簇，而普吕克嵌入是一个闭浸入。

我们将任意点 $x \in \mathbb{P}(\bigwedge^d k^n)$ 写作

$$x = [x_{i_1 \dots i_d}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n}$$

使用 $\bigwedge^d k^n$ 沿标准基 $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d})_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n}$ 的射影坐标，其中 $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ 是 $k^n$ 的标准基。对于介于 1 和 $n$ 之间的整数序列 $(i_1, \dots, i_d)$，有时使用变量 $x_{i_1 \dots i_d}$ 会比较方便；它们满足关系 $x_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(d)}} = \operatorname{sgn}(\sigma) x_{i_1 \dots i_d}$，其中 $\sigma \in \mathcal{S}_d$ 和 $x_{i_1, \dots, i_d} = 0$ 为任意值，只要存在 $1 \leq k < l \leq d$ 使得 $i_k = i_l$。

**定义 5.1.4**。 $\mathrm{Gr}_{d,n/k}$ 中一点的 普吕克坐标 是其在普吕克嵌入下的像的射影坐标 $[x_{i_1 \dots i_d}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n}$。

设 $(v_1, \dots, v_d)$ 是 $k^n$ 中的一个线性无关族，对于任意 $1 \leq j \leq d$，将 $v_j$ 沿标准基的坐标写为 $(v_{ij})_{1 \leq i \leq n}$。那么，张成空间 $\langle v_1, \dots, v_d \rangle$ 的普吕克坐标 $x_{i_1 \dots i_d}$ 可计算为矩阵 $(v_{ij})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n}$ 取行 $i_1, \dots, i_d$ 和列 $1, \dots, d$ 所得到的秩为 $d$ 的子式。

**命题 5.1.5**。 普吕克坐标满足以下二次关系，称为维数为 $d$ 的普吕克关系：

$$\sum_{k=1}^{d+1} (-1)^k x_{i_1 \dots i_{d-1} j_k} x_{j_1 \dots \widehat{j_k} \dots j_{d+1}} = 0 \tag{5.1}$$

其中，$(i_1, \dots, i_{d-1})$ 和 $(j_1, \dots, j_{d+1})$ 是任意递增的指标序列，$\widehat{\ }$ 记号 $j$ 表示省略指标 $j$。这些关系精确地定义了 $\mathbb{P}(\bigwedge^d k^n)$ 中来自格拉斯曼流形的点。

证明。 例如参见 [17, 定理 1] 或 [10, §9.1 引理 1]。 □

与命题 5.1.5 类似，可以表达一个子空间包含于 $k^n$ 的另一个子空间中的性质。

**命题 5.1.6**。 设 $1 \leq d < d' \leq n$ 为两个整数。满足 $V \subset V'$ 的对的集合 $(V,\ V') \in \mathrm{Gr}_{d,\ n/k} \times \mathrm{Gr}_{d',\ n/k}$ 可与点集等同

$$\left( [x_{i_1, \dots, i_d}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n}, [x'_{i_1, \dots, i_{d'}}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d'} \leq n} \right) \in \mathbb{P}\left( \bigwedge^d k^n \right) \times \mathbb{P}\left( \bigwedge^{d'} k^n \right)$$

这些点同时满足两组普吕克关系以及以下附加的二次关系：

$$\sum_{k=1}^{d'+1} (-1)^k x_{i_1 \dots i_{d-1} j_k} x'_{j_1 \dots \widehat{j_k} \dots j_{d'+1}} = 0 \tag{5.2}$$

其中，$(i_1, \dots\dots, i_{d-1})$ 和 $(j_1, \dots\dots, j_{d'+1})$ 是任意递增的指标序列。这些关系称为维数为 $(d,\ d')$ 的关联关系。

证明。 参见 [10, §9.1 引理 2]。 □

**定义5.1.7**。 $k^n$ 中的旗 是由 $k^n$ 的真子空间组成的严格递增序列（$V_1, \dots, V_{n-1}$）。$k$ 上的旗簇 是所有旗的集合，记作 $\mathrm{Flag}_{n/k}$。

存在一个显然的映射 $\mathrm{Flag}_{n/k} \hookrightarrow \prod_{d=1}^{n-1} \mathrm{Gr}_{d,n/k}$，它与普吕克嵌入的乘积复合后，给出嵌入

$$\mathrm{Flag}_{n/k} \hookrightarrow \prod_{d=1}^{n-1} \mathbb{P}\Big(\bigwedge^d k^n\Big). \tag{5.3}$$

这将旗簇实现为 $\prod_{d=1}^{n-1}\mathbb{P}(\bigwedge^d k^n)$ 中由普吕克关系和关联关系定义的射影子簇（注意，塞格雷嵌入[25, Lemma 01WD] 确实使 $\prod_{d=1}^{n-1}\mathbb{P}(\bigwedge^d k^n)$ 成为射影簇）。

我们以标准方式将 $\mathrm{Flag}_{n/k}$ 与代数群 $G/B$ 等同。与 §3.1 的第一段一样，我们有分解 $G/B = \coprod_{w\in\mathcal{S}_n} BwB/B$。以下结果众所周知（例如参见 [10,§10.5 Exercise 11]）：

**命题 5.1.8**。胞腔 $BwB/B$ 是 $G/B$ 中满足以下关于普吕克坐标的方程的点的集合，对所有 $d \in \{1,\dots,n-1\}$均成立：

$$x_{w(1)\dots w(d)} \neq 0 \quad \textit{and} \quad x_{i_1\dots i_d} = 0 \quad \textit{if} \quad \{i_1,\dots,i_d\} \not\preceq \{w(1),\dots,w(d)\} \tag{5.4}$$

其中 $\preceq$ 是定义 *2.4.2* 中定义的序。

~~5.2. **和的显式方程**。我们将第3.2节的代数~~簇 $X$ 和 $V_w$ 描述为由显式方程定义的射影空间中的局部闭子簇。

考虑态射

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{b} &\longrightarrow G/B \times \mathfrak{g} \\ (g,\psi) &\longmapsto (gB, \mathrm{Ad}(g)\psi). \end{aligned}$$

它诱导一个单射 $G \times^B \mathfrak{b} \hookrightarrow G/B \times \mathfrak{g}$，其限制给出同构

$$\widetilde{X} \xrightarrow{\sim} \big\{(gB,\psi) \in G/B \times \mathfrak{b} \;\big|\; \mathrm{Ad}(g^{-1})\psi \in \mathfrak{b}\big\} \tag{5.5}$$

~~在 $X$ 与 $G/B\times\mathfrak{b}$的一个闭子簇之间。从现在起，我们将此同构~~(5.5)作为 $X$的定义。这样一来，第3.2节中同样引入的映射 $\widetilde{\pi}\colon\ X \longrightarrow G/B$和 $q\colon\ X \longrightarrow \mathfrak{b}$，分别就是到第一和第二坐标的投影。对于 $w \in \mathcal{S}_n$，我们有胞腔

$$\widetilde{V}_w = \Big\{(gB,\psi) \in \widetilde{X} \;\Big|\; g \in BwB/B\Big\}$$

~~及其扎里斯基闭包 $X_w$，它们给出胞腔分解$X = \coprod_{w\in\mathcal{S}_n} V_w$。

点（$gB$，$\psi$）$\in X$ 由旗 $gB$ 的射影坐标$x_{i_1\dots i_d}$ 确定；根据（5.3），该旗位于 $\prod_{d=1}^{n-1}\mathbb{P}$（$\bigwedge^d k^n$）中；它还由 $\psi$的矩阵系数给出的仿射坐标（$u_{ij}$）$_{i\le j}$确定。有时我们用 $t_i$ 代替 $u_{ii}$。我们将$\psi$ 视为 $k^n$ 上的端同态 $u$ 的矩阵，该矩阵相对于标准基（$u$为上三角矩阵）书写。我们将 $g$视为旗（$V_1$，...，$V_{n-1}$），因此 $V_d$是 $g$的前 $d$ 列所张成的空间。

**引理 5.2.1**。假设 $u$ 是一个同构。当且仅当对于每个 $1 \le d \le n-1$，点 $x_d = (x_{i_1\dots i_d})_{i_1<\dots<i_d} \in k^{\binom{n}{d}}$ 与下列对象共线时，$\mathrm{Ad}(g^{-1})\psi \in \mathfrak{b}$

$$u(x_d) \coloneqq \left(\sum_{j_1<\dots<j_d} \Delta^{j_1\dots j_d}_{i_1\dots i_d}(u)\, x_{j_1\dots j_d}\right)_{i_1<\dots<i_d} \in k^{\binom{n}{d}}$$

其中， $\Delta_{i_1\dots i_d}^{j_1\dots j_d}(u)$ 是与行 $i_1,\dots,i_d$ 和列 $j_1,\dots,j_d$ 对应的 $u$ 的子式。这相当于 $\binom{n}{d}\left(\binom{n}{d}-1\right)/2$ 个方程。

证明。 伴随作用 $g^{-1}\psi$ 是 $u$ 关于由 $g$ 的列给出的基的矩阵。当且仅当每个 $V_d$ 都在 $u$ 作用下保持稳定时，它是上三角的。由于 $u$ 是同构，$u(V_d)$ 的维数为 $d$ ，因此我们可以考虑其普吕克坐标：具体来说，我们要求 $u(V_d)$ 和 $V_d$ 在普吕克嵌入下于 $\bigwedge^d k^n$ 中有相同的像。 $V_d$ 的像是由向量张成的直线

$$x_d = \sum_{i_1<\dots<i_d} x_{i_1\dots i_d} e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_d} \quad \in \bigwedge^d k^n$$

快速计算可得， $u(V_d)$ 的像是由以下向量张成的直线

$$u(x_d) = \sum_{i_1<\dots<i_d}\left(\sum_{j_1<\dots<j_d}\Delta_{i_1\dots i_d}^{j_1\dots j_d}(u)x_{j_1\dots j_d}\right)e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_d} \quad \in \bigwedge^d k^n\,. \qquad \square$$

注记 5.2.2。 注意，由于 $u$ 是上三角的，对于定义 2.4.2 中的偏序，除非 $\{i_1,\dots,i_d\}\preceq\{j_1,\dots,j_d\}$，否则有 $\Delta_{i_1\dots i_d}^{j_1\dots j_d}(u)=0$ 。还要注意，$\Delta_{i_1\dots i_d}^{i_1\dots i_d}(u)=t_{i_1}\dots t_{i_d}$。

**引理 5.2.3.** 令 $A$ 为以 $(gB/B,\psi)$ 的坐标为元的多项式环，即 $A=\mathbb{Z}[x_{i_1\dots i_d},u_{kl},t_m]_{1\le d<n,\,1\le i_1<\dots<i_d\le n,\,1\le k<l\le n,\,1\le m\le n}$。令 $\lambda$ 为一个不定元。

(1) 沿用引理 *5.2.1* 的记号。条件

(5.6) $x_d=(x_{i_1\dots i_d})_{i_1<\dots<i_d}$ 与.....共线

$$(u+\lambda\,\mathrm{id})(x_d)=\left(\sum_{j_1<\dots<j_d}\Delta_{i_1\dots i_d}^{j_1\dots j_d}(u+\lambda\,\mathrm{id})x_{j_1\dots j_d}\right)_{i_1<\dots<i_d}$$

可转化为关于 $A$ 的 $d\binom{n}{d}\left(\binom{n}{d}-1\right)/2$ 个方程。

~(2) 关于 $1\le d\le n-1$ 的所有这些 $A$ 个方程的集合定义了 $G/B\times\mathfrak{b}$ 内部的 $X$。

证明。 对于所有 $i_1<\dots<i_d$ 和 $j_1<\dots<j_d$， $\Delta_{i_1\dots i_d}^{j_1\dots j_d}(u+\lambda\,\mathrm{id})$ 关于 $\lambda$ 的次数至多为 $d-1$，除非 $(j_1,\dots,j_d)=(i_1,\dots,i_d)$，此时次数为 $d$，首项为 $\lambda^d$。因此，$\sum_{j_1<\dots<j_d}\Delta_{i_1\dots i_d}^{j_1\dots j_d}(u+\lambda\,\mathrm{id})x_{j_1\dots j_d}$ 在 $\lambda$ 中的次数为 $d$，首项为 $x_{i_1\dots i_d}\lambda^d$。所以， $A[\lambda]$ 中表达条件 (5.6) 的 $\binom{n}{d}\left(\binom{n}{d}-1\right)/2$ 个“叉积”方程关于 $\lambda$ 的次数为 $d-1$。这就证明了 (1)。

~至于 (2)，定义 $X$ 的方程表达的是条件 伴随作用 $(g^{-1})\psi\in\mathfrak{b}$。这等价于说

$$\mathrm{Ad}(g^{-1})(\psi+\lambda\,\mathrm{id})\in\mathfrak{b}$$

对所有 $\lambda\in k$ 均成立。必要时扩大 $k$，我们可以假设它是代数闭的，尤其是无限的。因此存在一个 $\lambda\in k$，使得 $\psi+\lambda\mathrm{id}$ 可逆。应用引理 5.2.1，我们的条件等价于对任意这样的 $\lambda$，式 (5.6) 成立。注意，式 (5.6) 对 $\lambda$ 的任意取值仍然成立。事实上，如果 $(u+\lambda)(V_d)$ 的维数为 $<d$，那么 $(u+\lambda)(\sum x_{i_1\dots i_d}e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_d})=0$，即 $(u+\lambda)(V_d)$ 的普吕克坐标为

零。特别地，它们组成的向量与$V_d$的普吕克坐标向量共线。

最后，$g^{-1}$伴随作用$\psi \in \mathfrak{b}$ 当且仅当对所有 $\lambda \in k$，(5.6) 都成立。由于 $k$ 是代数闭的， $A[\lambda]$ 中的相应多项式恒等于零。□

**命题 5.2.4**。 设 $w \in \mathcal{S}_n$。固定一个整数 $1 \le d \le n-1$，令 $A$ 为环 $\mathbb{Z}[x_{i_1\ldots i_d}, u_{kl}, t_m]_{1\le i_1<\ldots<i_d\le n,\ 1\le k<l\le n,\ 1\le m\le n}$，令 $\lambda$为不定元。对于一个序列 $1 \le i_1 < \ldots < i_d \le n$，令 $P_{w,\ i_1\ldots i_d} \in A[\lambda]$ 为多项式

$$P_{w,i_1\ldots i_d}(\lambda) := \sum_{j_1<\ldots<j_d} \Delta^{j_1\ldots j_d}_{i_1\ldots i_d}(u+\lambda\,\mathrm{id})x_{j_1\ldots j_d} - \left(\prod_{k=1}^{d}(t_{w(k)}+\lambda)\right)x_{i_1\ldots i_d}$$

对于 $0 \le s \le d-1$，令 $P_{w,\ i_1\ldots i_d,\ s} \in A$ 为满足下列条件的唯一齐次多项式

$$P_{w,i_1\ldots i_d}(\lambda) = \sum_{s=0}^{d-1} P_{w,i_1\ldots i_d,s}\lambda^s\,.$$

于是，利用 $G/B$ 上的普吕克坐标 $(x_{i_1\ldots i_d})_{1\le d<n,\ 1\le i_1<\ldots<i_d\le n}$ 以及 $\mathfrak{b} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{t}$ 上的仿射~坐标 $(u_{kl},\ t_m)_{1\le k<l\le n,\ 1\le m\le n}$，子簇 $V_w$ 由以下条件定义：

- *the Plücker relations in dimension d, given in Proposition 5.1.5, for each* $1 \le d \le n-1$
- *the incidence relations in dimension* $(d, d+1)$*, given in Proposition 5.1.6, for each* $1 \le d \le n-2$
- *the equations for* $(x_{i_1\ldots i_d})_{1\le d<n,\,1\le i_1<\ldots<i_d\le n}$ *to be in the cell* $BwB/B$ *of* $G/B$*, given in Proposition 5.1.8*
- *the equations* $P_{w,i_1\ldots i_d,s} = 0$ *for all* $1 \le d \le n-1$, $1 \le i_1 < \ldots < i_d \le n$ *and* $0 \le s \le d-1$.

~证明。 引理 5.2.3 给出了 $X$ 作为 $G/B \times \mathfrak{b}$ 的子簇的描述，它由 $\sum_{d=1}^{n-1} d\binom{n}{d}\left(\binom{n}{d}-1\right)/2$ 个方程定义（这些方程不一定相互独立）。要找出 $V_w$的方程，我们再加上命题 5.1.8 给出的方程。

现在，对于 $\{j_1,\ldots,j_d\} \not\preceq \{w$ 的 (1) . . . ,$d(\}$ ) 以及 $\Delta^{j_1\ldots j_d}_{w\ 1}{}_{()\ldots w(d)}(u+\lambda\,\mathrm{id})$，有 $\{j_1,\ldots,j_d\} \not\succeq \{w$ 的 (1) . . . ,$d(\})$。因此，向量 $(u+\lambda\mathrm{id})(x)$ 的第 $(w(1)\ldots,d)$ 项，按 (5.6) 所示，为

$$\left(\prod_{k=1}^{d}(t_{w(k)}+\lambda)\right)x_{w(1)\ldots w(d)}\,.$$

已知 $x_{w(1)\ldots w(d)} \neq 0$ 且对于 $\{j_1,\ldots,j_d\} \not\preceq \{w(1)\ldots,w(d)\}$有 $x_{j_1\ldots j_d} = 0$，共线条件 (5.6) 约化为以下方程：

$$\left(\prod_{k=1}^{d}(t_{w(k)}+\lambda)\right)x_{i_1\ldots i_d} = \sum_{j_1<\ldots<j_d} \Delta^{j_1\ldots j_d}_{i_1\ldots i_d}(u+\lambda\,\mathrm{id})x_{j_1\ldots j_d}$$

其中 $i_1 < \ldots < i_d$ 是任意严格递增的指标序列。这些就是前面所述的方程。□

注记 5.2.5。 我们还看到，对于每个 $w \in \mathcal{S}_n$、 $1 \le d \le n-1$ 和 $1 \le i_1 < \ldots < i_d \le n$，多项式 $P_{w,\ i_1\ldots i_d}$都是若干项之和

$$a_{j_1\ldots j_d}x_{j_1\ldots j_d}, \quad \{j_1,\ldots,j_d\} \succeq \{i_1,\ldots,i_d\}\,,$$

其中 $a_{j_1\dots j_d}$ 是 $\mathbb{Z}[u_{kl}, t_m, \lambda]_{1\le k<l\le n,\ 1\le m\le n}$ 的一个元素。此外，特定的“首项系数” $a_{i_1\dots i_d}$ 等于 $\prod_{k=1}^{d}(t_{i_k}+\lambda) - \prod_{k=1}^{d}(t_{w(k)}+\lambda)$。特别地，对于$\{i_1,\dots,i_d\} \succeq \{w(1)\dots,w(d)\}$，多项式 $P_{w,\ i_1\dots i_d}$ 属于由 $\{j_1,\dots,j_d\} \succ \{w(1)\dots,w(d)\}$对应的 $x_{j_1\dots j_d}$ 生成的理想；根据命题 5.1.8，这些多项式在 $G/B$ 的胞腔 $BwB/B$ 上全都为零。因此，相应的方程在 $V_w$ 上是恒等成立的。

5.3. **取扎里斯基闭包**。对于 $w \in \mathcal{S}_n$，令 $X'_w$ 表示$\prod_{d=1}^{n-1}\mathbb{P}(\bigwedge^d k^n) \times \mathbb{A}^{n(n+1)/2}$ 的子簇，其坐标环为 $A := \mathbb{Z}[x_{j_1\dots j_d}, u_{kl}, t_m]$，由命题 5.2.4 中列出的所有方程（不等式 $x_{w(1)\dots w(d)} \neq 0$ （针对$1 \le d \le n-1$）除外）定义。因此，它是满足方程$P_{w,\ i_1\dots i_d,\ s} = 0$ （对所有 $1 \le d \le n-1$、 $1 \le i_1 < \dots < i_d \le n$ 和 $0 \le s \le d-1$均成立）的 $G/B \times \mathfrak{b}$ 的子簇。特别要注意，根据命题 5.2.4， $X'_w$ 包含 $V_w$ ，且是扎里斯基闭集。因此 $X_w \subseteq X'_w$。

**命题 5.3.1**。设 $w$， $w' \in \mathcal{S}_n$ 使得 $w' \preceq w$。那么，作为 $k$ 上的代数簇，

$$\widetilde{X}'_w \cap \widetilde{V}_{w'} = \widetilde{V}_{w'} \cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u})\,.$$

证明。设 $(gB/B, \psi) \in G/B \times \mathfrak{b}$ 是交集 $X'_w \cap V_{w'}$中的一个点。其坐标 $(x_{j_1\dots j_d}, u_{kl}, t_m)$ 特别满足 $P_{w,i_1\dots i_d}(\lambda) = 0$属于 $k[\lambda]$，对任意$\{i_1,\dots,i_d\}$ 以及 $x_{i_1,\dots,i_d} = 0$，若 $\{i_1,\dots,i_d\} \not\preceq \{w'(1)\dots,w'(d)\}$。在这些后续条件下，$P_{w,w'(1)\dots w'(d)}(\lambda)$ 中几乎所有项都变为零，而方程$P_{w,w'(1)\dots w'(d)}(\lambda) = 0$ 变为

$$\left(\prod_{k=1}^{d}(t_{w'(k)}+\lambda) - \prod_{k=1}^{d}(t_{w(k)}+\lambda)\right) x_{w'(1)\dots w'(d)} = 0$$

在 $\widetilde{X}'_w$ 上。由于我们还有 $x_{w'(1)\dots w'(d)} \neq 0$，因此作为 $k[\lambda]$ 中的多项式，必有 $\prod_{k=1}^{d}(t_{w'(k)}+\lambda) = \prod_{k=1}^{d}(t_{w(k)}+\lambda)$。

此外，根据定义，对所有 $\{i_1,\dots,i_d\}$，都有

$$P_{w,i_1\dots i_d}(\lambda) - P_{w',i_1\dots i_d}(\lambda) = \prod_{k=1}^{d}(t_{w(k)}+\lambda) - \prod_{k=1}^{d}(t_{w'(k)}+\lambda)$$

在 $A[\lambda]$ 中。因此，对于 $\widetilde{X}'_w$ 上的所有 $s$ 和 $\{i_1,\dots,i_d\}$，$P_{w,\ i_1\dots i_d,\ s}$ 与 $P_{w',\ i_1\dots i_d,\ s}$ 相等。因此， $\widetilde{X}'_w \cap \widetilde{V}_{w'}$ 是 $\widetilde{V}_{w'}$ 中满足以下条件的子簇：对所有 $1 \le d \le n-1$， $\prod_{k=1}^{d}(t_{w'(k)}+\lambda) = \prod_{k=1}^{d}(t_{w(k)}+\lambda)$。这最后一个关于 $k[\lambda]$ 的多项式等式意味着，对于所有$1 \le d \le n-1$，多重集 $\{t_{w'(1)}\ \dots,\ t_{w'(d)}\}$ 和 $\{t_{w(1)},\dots,t_{w(d)}\}$ 相等。对 $d$ 作递归可知，这等价于对所有 $1 \le k \le d$，$t_{w'(k)} = t_{w(k)}$。对于 $d = n-1$，这等价于 $(gB/B, \psi) \in q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u})$。□

在命题 5.3.1 中用 $X_w$ 替换 $X'_w$，便可得到猜想 3.2.3。不过，我们将在定理 5.3.7 中看到，这并非总是成立。

寻找猜想 3.2.3 的反例，策略是利用在 $V_w$ 上成立的不等式 $x_{w(1)\dots w(d)} \neq 0$，通过“消去”非零因子，简化在 $V_w$ 上成立的其他方程。这样我们得到一个在 $V_w$上成立、因而在 $X_w$ 上也成立的方程，但它未必在 $X'_w$ 上成立。以下两个引理讨论的就是这一问题。完成这一步后，将该方程视为定义在 $V_{w'}$ 上的方程，便得到一个条件；事实证明，这个条件比单纯属于 $q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}} + \mathfrak{u})$ 的限制严格得多。

**引理 5.3.2.** 设 $w \in \mathcal{S}_n$、 $q \in \{1, \dots, n-2\}$ 和 $b \in \{w(1) \dots, w(q+1)\}$；记$\{w(1) \dots, w(q+1)\} = \{i_1, \dots, i_q, b\}$。设 $\{j_1, \dots, j_q\}$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 的一个子集，且不含 $b$。假设对于任意满足 $j_l < b$ 的 $1 \le l \le q$ ，都有$j_l \in \{w(1) \dots, w(q+1)\}$。那么，对于任意 $a \in \{1, \dots, n\}$，方程

$$x_{i_1 \dots i_q a} x_{j_1 \dots j_q b} = \pm x_{i_1 \dots i_q b} x_{j_1 \dots j_q a}$$

~在 $V_w$ 上对某种符号选择成立。

证明。 考虑维数为 $q+1$、指标为 $\{i_1, \dots, i_q\}$ 和$\sim\{j_1, \dots, j_q, a, b\}$ 的普吕克关系（见命题 5.1.6），它在 $V_w$上成立。忽略符号后，其形式为

$$\pm x_{i_1 \dots i_q a} x_{j_1 \dots j_q b} \pm x_{i_1 \dots i_q b} x_{j_1 \dots j_q a} + \sum_{1 \le l \le q} \pm x_{i_1 \dots i_q k_l} x_{j_1 \dots \hat{j_l} \dots j_q a b} = 0 \,. \tag{5.7}$$

令 $1 \le l \le q$。若 $j_l < b$，则由指标冗余可知，我们的假设蕴含 $x_{i_1 \dots i_q j_l} = 0$ 。否则，我们有 $j_l > b$，因此 $\{i_1, \dots, i_q, j_l\} \succ \{i_1, \dots, i_q, b\} =\sim\{w(1) \dots, w(q+1)\}$，于是根据命题 5.1.8， $x_{i_1 \dots i_q j_l} = 0$ 在 $V_w$ 上成立。消去 (5.7) 中所有这些零变量，即得到所需方程。□

**引理 5.3.3.** 沿用引理 *5.3.2* 中的记号和假设。进一步假设 $\{j_1, \dots, j_q, a\} \preceq \{i_1, \dots, i_q, b\}$。那么方程

$$\sum_{\{j_1, \dots, j_q\} \preceq \{k_1, \dots, k_q\} \preceq \{i_1, \dots, i_q\}} \pm \Delta^{k_1 \dots k_q b}_{j_1 \dots j_q b}(u + \lambda \,\mathrm{id}) x_{k_1 \dots k_q a} - \left( \prod_{i=1}^{p+1} (t_{w(i)} + \lambda) \right) x_{j_1 \dots j_q a} = 0 \tag{5.8}$$

~对某个符号选择，在 $V_w$ 上成立。

证明。我们可以假设序列 $(i_l)_{1 \le l \le q}$ 和 $(j_l)_{1 \le l \le q}$ 按递增顺序排列。取满足 $j_r < b < j_{r+1}$ 的 $1 \le r \le q$ （必要时令 $j_{q+1} = \infty$ ）。那么，根据 $a > b$ 还是 $a \le b$， $\{j_1, \dots, j_q, a\}$ 中小于或等于 $b$ 的元素有 $r$ 个或 $r+1$ 个。由于 $\{j_1, \dots, j_q, a\} \preceq \{i_1, \dots, i_q, b\}$，这意味着 $\{i_1, \dots, i_q, b\}$ 中小于或等于 $b$ 的元素至多有 $r+1$ 个。然而，引理 5.3.2 的假设意味着 $\{j_1, \dots, j_r, b\} \subseteq \{i_1, \dots, i_q, b\}$。因此，$j_1, \dots, j_r$ 必定是 $\{i_1, \dots, i_q\}$ 中最小的 $r$ 个元素，故对所有 $l \le r$，都有 $i_l = j_l$。

特别地，我们有 $\{j_1, \dots, j_q, b\} \preceq \{i_1, \dots, i_q, b\}$，而介于这两者之间的任意整数集合都具有 $\{k_1, \dots, k_q, b\}$ 的形式，其中 $k_l = i_l$ 对于 $l \le r$ 成立，且 $k_l > b$ 对于 $l > r$ 成立。因此，我们可以应用引理 5.3.2，将 $\{j_1, \dots, j_q\}$ 替换为 $\{k_1, \dots, k_q\}$；这将得到（相差一个符号），

$$x_{i_1 \dots i_q a} x_{k_1 \dots k_q b} = \pm x_{i_1 \dots i_q b} x_{k_1 \dots k_q a} \,. \tag{5.9}$$

现在，沿用命题 5.2.4 的记号，我们将方程$P_{w,\ j_1 \dots j_q b}(\lambda) = 0$ （在 $A[\lambda]$ 中）乘以 $x_{i_1 \dots i_q a}$。根据注 5.2.5 中的讨论，所得方程只含有 $x_{k_1 \dots k_q b} x_{i_1 \dots i_q a}$ 中关于 $\{j_1, \dots, j_q\} \preceq \{k_1, \dots, k_q\}$ 的项。此外，由于~命题 5.1.8， $x_{k_1 \dots k_q b}$仅在 $V_w$ 上对 $\{k_1, \dots, k_q\} \preceq \{i_1, \dots, i_q\}$ 非零。

经过这些简化后，我们在 $V_w$ 上得到方程

$$\sum_{\{j_1,\dots,j_q\}\preceq\{k_1,\dots,k_q\}\preceq\{i_1,\dots,i_q\}} \Delta^{k_1\dots k_q b}_{j_1\dots j_q b}(u+\lambda\,\mathrm{id})x_{k_1\dots k_q b}x_{i_1\dots i_q a} - \left(\prod_{i=1}^{q+1}(t_{w(i)}+\lambda)\right)x_{j_1\dots j_q b}x_{i_1\dots i_q a}=0\,.$$

利用方程 (5.9)，我们得到

$$\sum_{\{j_1,\dots,j_q\}\preceq\{k_1,\dots,k_q\}\preceq\{i_1,\dots,i_q\}} \pm\Delta^{k_1\dots k_q b}_{j_1\dots j_q b}(u+\lambda\,\mathrm{id})x_{k_1\dots k_q a}x_{i_1\dots i_q b} - \left(\prod_{i=1}^{q+1}(t_{w(i)}+\lambda)\right)x_{j_1\dots j_q a}x_{i_1\dots i_q b}=0$$

经过因式分解并用 $x_{i_1\dots i_q b}$ 化简后（该化简是有效的，因为 $x_{i_1\dots i_q b}=x_{w(1)\dots w(q+1)}\neq 0$ 在 $V_w$ 上），得到所需的方程。□

**命题 5.3.4.** 设 $w,w'\in\mathcal{S}_n$，其中 $w'\preceq w$。假设存在整数$a<b$和 $q\in\{1,\dots,n-2\}$，使得：

– $a\notin\{w(1)\dots,w(q+1)\}$ 和 $a\in\{w'(1)\dots,w'(q+1)\}$, – $b\in\{w(1)\dots,w(q+1)\}$ 和 $b\notin\{w'(1)\dots,w'(q+1)\}$, – 对任意满足 $i\neq a$ 和 $i<b$ 的 $i\in\{w'(1)\dots,w'(q+1)\}$，有 $i\in\{w(1)\dots,w(q+1)\}$. 则方程 $t_a=t_b$ 在 $X_w\cap V_{w'}$ 上成立。

例 5.3.5。 取 $n=4$, $w=[4231]$ 和 $w'=[1324]$。则 $q=1$ 和 $(a,b)=(1,2)$ 满足命题 5.3.4 的条件，因此 $X_w\cap V_{w'}$ 满足 $t_1=t_2$。这比 $X'_w\cap V_{w'}$ 的情形更强；根据命题 5.3.1，后者仅满足 $t_1=t_4$ 和$t_2=t_3$（定义 $\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$ 的方程）。也可以取 $(a,b)=(3,4)$；这给出在 $X_w\cap V_{w'}$ 上的方程 $t_3=t_4$，它等价于已经得到的 $t_1=t_2$，因为 $t_1=t_4$ 和 $t_2=t_3$ 成立。

证明。 写作 $\{j_1,\dots,j_q\}=\{w'(1)\dots,w'(q+1)\}\setminus\{a\}$；于是满足引理 5.3.2 的假设。由应用于 $w'\preceq w$ 的例 2.4.4，我们还得到$\{j_1,\dots,j_q,a\}\preceq\{i_1,\dots,i_q,b\}$。因此可以应用引理 5.3.3，得到

$$\sum_{\{j_1,\dots,j_q\}\preceq\{k_1,\dots,k_q\}\preceq\{i_1,\dots,i_q\}} \pm\Delta^{k_1\dots k_q b}_{j_1\dots j_q b}(u+\lambda\,\mathrm{id})x_{k_1\dots k_q a} - \left(\prod_{i=1}^{p+1}(t_{w(i)}+\lambda)\right)x_{j_1\dots j_q a}=0$$

该式在 $V_w$ 上成立，因此在扎里斯基闭包 $X_w$ 上也成立。

现在考虑这个方程在 $V_{w'}$ 上的情形。根据命题 5.1.8，对于 $\{k_1,\dots,k_q\}\succ\{j_1,\dots,j_q\}$，所有变量 $x_{k_1\dots k_q a}$ 在 $V_{w'}$ 上均为零，因此该式化简为一项：

$$\left(\Delta^{j_1\dots j_q b}_{j_1\dots j_q b}(u+\lambda\,\mathrm{id})-\prod_{i=1}^{p+1}(t_{w(i)}+\lambda)\right)x_{j_1\dots j_q a}=0\,.$$

再次，对于 $V_{w'}$，我们可以通过 $x_{j_1\dots j_q a}=x_{w'(1)\dots w'(q+1)}\neq 0$ 来简化。此外，由于 $u$ 是上三角的，因此有 $\Delta^{j_1\dots j_q b}_{j_1\dots j_q b}(u+\lambda\,\mathrm{id})=(t_b+\lambda)\prod_{l=1}^{p}(t_{j_l}+\lambda)=\frac{t_b+\lambda}{t_a+\lambda}\prod_{i=1}^{p+1}(t_{w'(i)}+\lambda)$，所以

方程变为

$$\frac{t_b+\lambda}{t_a+\lambda}\prod_{i=1}^{p+1}(t_{w'(i)}+\lambda)=\prod_{i=1}^{p+1}(t_{w(i)}+\lambda)\,.$$

我们还从命题 5.3.1 的证明中知道 $\prod_{i=1}^{p+1}(t_{w'(i)}+\lambda)=\prod_{i=1}^{p+1}(t_{w(i)}+\lambda)$；因此最终得到 $t_a+\lambda=t_b+\lambda$，这意味着 $t_a=t_b$。□

注记 5.3.6. 将命题 5.3.4 中关于 $a,b$ 的最后一个条件替换为以下变体时，同样的结论仍然成立：对于任意满足 $j>a$的 $j\in\{w(1)\dots,w(q+1)\}\setminus\{b\}$，我们都有 $j\in\{w'(1)\dots,w'(q+1)\}$。证明过程几乎完全相同，区别在于，在引理 5.3.2 的证明中，对于方程 (5.7)，我们不使用指标为 $\{i_1,\dots,i_q\}$ 和 $\{k_1,\dots,k_q,a,b\}$ 的普吕克关系，而改用指标为 $\{k_1,\dots,k_q\}$ 和 $\{i_1,\dots,i_q,a,b\}$的普吕克关系。

**定理 5.3.7**。设 $w,w'\in\mathcal{S}$ 满足 $w'\preceq w$。假设存在如命题 *5.3.4* 中所述的 $a$, $b$，使得 $a$ 和 $b$ 在 $ww'^{-1}$ 下不属于同一轨道。那么，对于对 $(w,w')$，猜想 *3.2.1* 不成立，即：

$$\widetilde{V}_{w'}\cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}+\mathfrak{u})\not\subseteq\widetilde{X}_w\,.$$

证明。考虑任意点 $x=(x_{i_1\dots i_d},t_i,u_{ij})\in\prod_{d=1}^{n-1}\mathbb{P}(\bigwedge^d k^n)\times\mathbb{A}^{n(n+1)/2}$，其中对于 $1\le d\le n-1$和 $1\le i_1<\dots<i_d<n$，$x_{i_1\dots i_d}\neq 0$当且仅当 $\{i_1,\dots,i_d\}=\{w'(1)\dots,w'(d)\}$，并且对于所有 $1\le i<j\le n$，都有 $u_{ij}=0$。容易验证，$x\in V_{w'}$；这既可由命题 5.2.4 的方程得出，也可由以下事实得出：这样的点 $x$ 对应于 $(gB/B,\psi)\in G/B\times\mathfrak{b}$，其中 $g$ 是一个可逆矩阵，除位置 $(w'(j),j)$（$1\le j\le n$）外，其余位置均为零，并且 $\psi\in\mathfrak{t}$。

当 $a$ 和 $b$ 不在 $ww'^{-1}$作用下的同一轨道中时，可以令 $\psi=(t_1,\dots,t_n)\in\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}$且 $t_a\neq t_b$。这给出 $x\in q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}+\mathfrak{u})$，而命题5.3.4 强制要求 $x\notin X_w\cap V_{w'}$，因此 $x\notin X_w$。□

注记 5.3.8。在定理 5.3.7 的情形下，实际上我们有一个严格的包含

$$\widetilde{X}_w\cap\widetilde{V}_{w'}\subsetneq\widetilde{V}_{w'}\cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}+\mathfrak{u})$$

因为（非严格）包含关系已为人所知（见命题 5.3.1 或命题 3.2.4 的证明）。我们也知道 $\widetilde{V}_{w'}\cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}+\mathfrak{u})$ 是不可约的：通过一个类似于命题 3.2.4 证明的论证，这一陈述等价于将 $V_{w'}$（定义于 §3.1）替换为 $V_{w'}$所得的类似陈述，而根据引理 2.3.5]，该陈述 [8,成立。因此，$X_w\cap V_{w'}$ 是若干不可约分支的并集，这些分支的维数严格小于 $\widetilde{V}_{w'}\cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}+\mathfrak{u})$ 的维数，于是

$$\dim\left(\widetilde{X}_w\cap\widetilde{V}_{w'}\right)<\dim\left(\widetilde{V}_{w'}\cap q^{-1}(\mathfrak{t}^{ww'^{-1}}+\mathfrak{u})\right)\,.$$

注记 5.3.9。满足定理 5.3.7条件的最简单例子是存在 $1\le i<j<k<l\le n$ 和 $1\le a<b<c<d\le n$，使得：

(1) $(w(i)\ w(j)\ w(k)\ w(l))=(d,b,c,a)$。(2) $(w'(i)\ w'(j)\ w'(k)\ w'(l))=(a,c,b,d)$。(3) 对所有 $m\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j,k,l\}$，$w(m)=w'(m)$。

最小的此类例子是 $(w,w')$ 是针对 $n=4$ 的第一个坏对（见定理 2.4.10）。事实上，$n\le 5$ 的所有值得关注的情形（例如，$(w,w')$ 是一个坏对的情形，见下文引理 5.3.10）都满足定理 5.3.7 的条件。

对于 $n = 6$，有少数几种情形既不满足这些条件，也不满足注记 5.3.6 中变体的条件，例如 $w =$ (16)(25) 且 $w' =$ (34) 时（使用对称群 $\mathcal{S}_6$ 元素的循环记号）。在这个特定情形中，定理 5.3.7 的证明思路并不适用。事实上，在 $G/B$ 中定义舒伯特胞腔 $BwB/B$ 的方程只有 $x_6 \neq 0$, $x_{56} \neq 0$, $x_{356} \neq 0$, $x_{3456} \neq 0$,$x_{23456} \neq 0$ 和 $x_{456} = 0$。由于 $x_{456}$ 是唯一的零变量，关于$BwB/B$，只有两项非零的普吕克关系和关联关系数量太少（正如方程 (5.7) 得出引理 5.3.2 那样）。此外，这些为数不多的关系无法用于得到在 $V_w$（因而也在 $X_w$）上成立、且在 $V_{w'}$ 上并非平凡的新的方程 $\tilde{}$（如命题 5.3.4 的方程 $t_a = t_b \tilde{}$ 那样），因为在 $V_{w'}$ 上，除 $x_1, x_{12}, x_{123}, x_{124}, x_{1234}$, $x_{12345}$ 外的所有普吕克坐标都为零。关于这一对，猜想 3.2.1 是否成立仍不得而知。

最后，以下引理证实定理 5.3.7 与定理 4.1 彼此一致。

**引理 5.3.10.** 设$(w', w) \in W$ 满足定理 *5.3.7* 的条件。则根据第*2*节的意义，它是一个坏对。对于注记 *5.3.6* 中的条件，也有相同结论。

证明。 如果对 $(w, w')$ 满足定理 5.3.7 的条件，包括 $a$ 和 $b$ 在 $ww'^{-1}$作用下不属于同一轨道这一条件，那么根据第2节的意义，它是一个坏对。事实上，设 Ω 为 $b$ 在 $ww'^{-1}$作用下的轨道。由假设， $a \notin \Omega$，因此命题 5.3.4 的最后一个条件蕴含

$$(\Omega \cap w(\{1, \dots, q+1\})) \cap \{1, \dots, b\} \supsetneq (\Omega \cap w'(\{1, \dots, q+1\})) \cap \{1, \dots, b\}$$

不等号源于左边有 $b$ 而右边没有。因此，$\Omega \cap w(\{1, \dots, q+1\}) \supseteq \Omega \cap w'(\{1, \dots, q+1\})$ 不成立（参见定义 2.4.2 中的第二种刻画），所以根据命题 2.4.5, 对 $(w, w')$ 是坏对。

在注记 5.3.6 的情形下，令 Ω 为 $a$ 在 $ww'^{-1}$ 下的轨道。同样，$b \notin \Omega$，因此注记 5.3.6 中阐明的条件意味着

$$(\Omega \cap w(\{1, \dots, q+1\})) \cap \{a, \dots, n\} \subsetneq (\Omega \cap w'(\{1, \dots, q+1\})) \cap \{a, \dots, n\}$$

由此得到 $|(\Omega \cap w(\{1, \dots, q+1\})) \cap \{a, \dots, n\}| < |(\Omega \cap w'(\{1, \dots, q+1\})) \cap \{a, \dots, n\}|$，或者等价地，$|(\Omega \cap w(\{1, \dots, q+1\})) \cap \{1, \dots, a-1\}| > |(\Omega \cap w'(\{1, \dots, q+1\})) \cap \{1, \dots, a-1\}|$。与之前一样，这意味着 $\Omega \cap w(\{1, \dots, q+1\}) \supseteq \Omega \cap w'(\{1, \dots, q+1\})$ 不成立，因此 $(w, w')$ 是一个坏对。□

## 附录 A. $\mathfrak{g}$中的 Jordan 分解与轨道

这里我们回顾李代数中 Jordan 分解的一些众所周知的结果。注意，下文的命题 A.9 在 §4.2 中会用到。我们感谢 Anne Moreau 提供证明；我们未能在文献中找到完全准确的证明。

以下，$k$ 是一个特征零的代数闭域（因此，代数簇上方的 $k$ 上的 $k$-点与闭点相同）。例如，将李代数视为 $k$-概形（如我们在 §4 中所做）或 $k$-向量空间，并无区别。

**定义 A.1**。 设 $G$ 是定义在 $k$ 上的代数群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。若闭点 $x \in \mathfrak{g}$ 满足以下性质，则称其为半单 （分别称为幂零）。对于

任意代数群态射 $\phi\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$，若其诱导出 $\mathrm{d}\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$，其中$V$ 是定义在 $k$ 上的有限维向量空间，则端同态 $\mathrm{d}\phi(x) \in \mathfrak{gl}(V) \simeq \mathrm{End}(V)$ 可对角化（分别为幂零）。

**定理 A.2** (Jordan 分解)。(1) 设 $G$ 是定义在 $k$上的代数群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。对于任意闭点 $x \in \mathfrak{g}$，存在唯一的一对$(x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}}) \in \mathfrak{g}^2$，其中 $x_{\mathrm{s}}$是半单的，$x_{\mathrm{n}}$是幂零的，且满足 $[x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}}] = 0$和$x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$。我们称之为 $x$的Jordan 分解 。

(2) ***Jordan*** 分解具有函子性：对于任意定义在 $k$ 上的代数群之间的态射 $\phi\colon G \longrightarrow H$，其诱导出$\mathrm{d}\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$，以及任意闭点 $x \in \mathfrak{g}$，我们有

$$\mathrm{d}\phi(x_{\mathrm{s}}) = (\mathrm{d}\phi(x))_{\mathrm{s}}, \quad \mathrm{d}\phi(x_{\mathrm{n}}) = (\mathrm{d}\phi(x))_{\mathrm{n}}\,.$$

证明。函子性 Jordan 分解的存在性是 [26] 中 23.6.2、23.6.3 和 23.6.4 的综合结果。(1) 中的唯一性由以下事实得到：对于任意代数群 $G$，存在一个有限维向量空间 $V$，以及一个代数群态射 $\phi\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$，使得 $\mathrm{d}\phi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是单射（参见上述文献中的 22.1.5 和 24.4.1）。□

**命题 A.3.** 设 $G$ 是定义在 $k$上的连通约化群，$\mathfrak{g}$ 是 $G$ 的李代数，$\mathfrak{z}$ 是 $\mathfrak{g}$的中心。存在如下的 $k$-向量空间分解

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z} \tag{A.1}$$

并且对任意闭点 $x \in \mathfrak{g}$，以下条件等价：

(i) $x$ 是半单的（分别为幂零的）。(ii) $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是半单的（分别为 $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是幂零的，且 $x$ 在 $\mathfrak{z}$ 中的分量（见(A.1)）为0）。(iii) 对于任意有限维表示 $\sigma\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$，端同态$\sigma(x) \in \mathfrak{gl}(V) \simeq \mathrm{End}(V)$ 可对角化（分别为幂零的）。

证明. 分解 (A.1) 见 [26] 的 27.2.2 和 20.5.5。注意，$\mathfrak{z} = 0$ 当且仅当 $G$ 是半单的（参见该书第 20.1.2 和 20.5.4 节）。蕴含 (iii) $\Longrightarrow$ (i) 是定义的直接推论。现在证明 (i) $\Longrightarrow$ (ii)。由于 $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathrm{Ad}: G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 的微分（参见该书第 23.5.5 节），我们只需证明以下结论（其余部分由定义可得）：若 $x \in \mathfrak{g}$ 按 (A.1) 分解为 $x = y + z$，且 $x$ 是幂零的，则 $z = 0$。由于 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是导出群 $(G, G)$ 的李代数（参见该书第 27.2.3 节），我们可以考虑 $y$ 在 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$中的 Jordan 分解 $y = y_{\mathrm{s}} + y_{\mathrm{n}}$。将定理 A.2(2) 应用于包含 $(G, G) \hookrightarrow G$，可知 $y_{\mathrm{s}}$（分别为 $y_{\mathrm{n}}$）在 $\mathfrak{g}$中是半单的（分别为幂零的）。由于 $z$在 $\mathfrak{g}$ 中是半单的（参见该书第 27.2.2(ii) 节），且与所有元素交换，因此 $y_{\mathrm{s}} + z$是半单的，并且 $x = (y_{\mathrm{s}} + z) + y_{\mathrm{n}}$是 $x$的 Jordan 分解。由唯一性，$y_{\mathrm{s}} + z = 0$，故 $z = 0$。至此，(i) $\Longrightarrow$ (ii) 得证。最后，(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 由该书第 20.5.7 和 20.5.8 节推出（注意，该书对半单元素和幂零元素的定义与我们的定义不同）。□

**引理 A.4.** 设 $G$ 是域 $k$上的半单代数群，其李代数 $\mathfrak{g}$为半单李代数。设 $\mathfrak{h}$，$\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数。那么存在一个闭点 $g \in G$，使得 $\mathfrak{h}' = $伴随作用 $_G(g)\mathfrak{h}$。

证明。 我们完全按照 [26, 29.2.3(ii)] 中的做法进行。首先回顾 *loc. cit* 第 19.1.1 节中的记号。对于闭点 $x \in \mathfrak{g}$，记

$$\mathfrak{g}^0(x) \coloneqq \cap_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \ker((\operatorname{ad} x)^n)$$

并且我们称 $x$ 为一般的，如果 $\dim \mathfrak{g}^0(x)$（即 0 作为 $\operatorname{ad}(x)$ 的特征多项式之根的重数）在所有 $x \in \mathfrak{g}$ 中最小。称 $\mathfrak{g}_{\mathrm{gen}}$为一般元素的集合；它是 $\mathfrak{g}$的一个扎里斯基开子集，因为特征多项式的系数是 $x \in \mathfrak{g}$中的多项式表达式。根据*loc. cit.* 中的 29.2.3(i)， $\mathfrak{g}$ 的李子代数是嘉当子代数，当且仅当它具有某个 $x \in \mathfrak{g}_{\mathrm{gen}}$对应的 $\mathfrak{g}^0(x)$ 形式。因此，选取 $x \in \mathfrak{g}_{\mathrm{gen}}$ 使得 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$。考虑态射

$$\theta\colon \begin{array}{ccc} G \times \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (g, y) & \longmapsto & \operatorname{Ad}(g)y \end{array}$$

who在点 $(e, x)$ 处的微分 $\in G \times \mathfrak{h}$ ($e$ 是 $G$中的单位元) i s

$$\mathrm{d}\theta_{(e,x)}\colon \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (z, y) & \longmapsto & [z, x] + y \end{array}$$

（参见*loc. cit.*中的 29.1.4(i) 和 23.5.5）。根据定义， $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$ 是 $\mathfrak{g}$的一个子空间，在 $\operatorname{ad}(x)$ 作用下保持不变，而 $\operatorname{ad}(x)$ 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上诱导一个自同构。因此，如*loc. cit.*中的 29.2.1 所述，$\mathrm{d}\theta_{(e,x)}$ 是满射，所以根据*loc. cit.*中的 16.5.7， $\theta$ 是支配的；根据*loc. cit.*中的 15.4.2，像 $\operatorname{Ad}(G)\mathfrak{h}$ 包含 $\mathfrak{g}$的一个开稠密子集。由于 $\operatorname{Ad}(G)\mathfrak{h}'$也同样如此，我们有 $\mathfrak{g}$

$$\operatorname{Ad}(G)\mathfrak{h} \cap \operatorname{Ad}(G)\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{gen}} \neq \emptyset\,.$$

因此，存在 $t \in \mathfrak{g}_{\mathrm{gen}}$ 和 $g, g' \in G$ ，使得 $\operatorname{Ad}(g)t \in \mathfrak{h}$ 且 $\operatorname{Ad}(g')t \in \mathfrak{h}'$。由于 $\operatorname{Ad}(g)t$ 和 $\operatorname{Ad}(g')t$ 也都是一般的，同上。中的 19.8.5 给出

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\operatorname{Ad}(g)t)\,, \quad \mathfrak{h}' = \mathfrak{g}^0(\operatorname{Ad}(g')t)$$

于是 $\mathfrak{h}' = \operatorname{Ad}(g'g^{-1})\mathfrak{h}$。 □

对于任意域上的任意向量空间 $V$，记其对偶空间为 $V^*$，记 $S(V)$ 为 $V$ 的对称代数，记 $S^n(V)$ 为 $S(V)$ 中次数为 $n$ 的齐次分量（其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）。回顾一下，若 $V$ 是有限维的，则 $S(V^*)$ 可解释为 $V$上的多项式函数代数。

设 $\mathfrak{g}$ 为半单李代数， $\mathfrak{g}$ 对自身的伴随作用在 $S(\mathfrak{g}^*)$ 上诱导出一个作用。于是我们可以考虑在此作用下的不变量代数 $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$。类似地，给定 $\mathfrak{g}$中的一个卡当子代数 $\mathfrak{h}$，魏尔群 $W$ （$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$）作用于 $\mathfrak{h}$ （见 [26, §19.8]），因此我们也可以考虑 $S(\mathfrak{h}^*)^W$。

**定理 A.5**。 设 $\mathfrak{g}$ 是定义在 $k$上的半单李代数， $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的卡当子代数， $W$ 是与根系 ($\mathfrak{g}$， $\mathfrak{h}$)相关联的魏尔群。

(1) 限制态射 $S(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow S(\mathfrak{h}^*)$ 诱导出一个满射 $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow S(\mathfrak{h}^*)^W$。(2)对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，向量空间 $S^n(\mathfrak{g}^*)$ 由形如$x \longmapsto \operatorname{tr}(\sigma(x)^n)$的函数张成，其中 $\sigma$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 $k$上的有限维表示。

证明。这是 [26, 31.2.6]。 □

**引理 A.6**。设 $\mathfrak{g}$ 是域 $k$ 上的半单李代数， $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的卡当子代数， $W$ 是与$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$相关的根系的魏尔群。设 $x,y\in\mathfrak{h}$ 是闭点，且对于所有 $f\in S(\mathfrak{h}^*)^W$，都有 $f(x)=f(y)$。那么，对于 $\mathfrak{h}$上的 $W$ 作用， $x$ 和 $y$ 属于同一轨道。

证明。 这是 [26, 34.2.1]。 □

**命题 A.7**。 设 $G$ 是定义在 $k$ 上的半单代数群，其李代数为$\mathfrak{g}$，设 $x,y\in\mathfrak{g}$ 是半单元素。假设对于 $\mathfrak{g}$ 的每个有限维表示 $\sigma$ 以及所有 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有$\mathrm{tr}(\sigma(x)^n)=\mathrm{tr}(\sigma(y)^n)$。那么， $x$ 和 $y$ 在 $G$ 通过伴随作用于 $\mathfrak{g}$ 所产生的同一轨道上。

证明。 根据 [26, 20.6.3(ii)] ，我们知道 $x$ 和 $y$ 分别包含在 $\mathfrak{g}$的某个嘉当子代数中。根据引理 A.4，我们可以假设 $x$ 和 $y$ 位于同一个嘉当子代数 $\mathfrak{h}$中。设 $W$ 为与$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$的根系相关联的魏尔群。由定理 A.5 和引理 A.6 可知， $x$ 和 $y$ 在 $W$ 作用于 $\mathfrak{h}$所产生的同一轨道上。

存在 $T$ 的一个极大环面 $G$，使得 $\mathfrak{h}$ 是 $T$ 的李代数（见*loc. cit.*中的 29.2.5 以及 [14, 26.2.A]）。魏尔群 $W(G,T)=N_G(T)/T$ 在 $T$ 上的作用通过微分诱导出 $\mathfrak{h}$ 的一个作用；这将 $W(G,T)$与$W=W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$等同。因此， $W$与 $N_G(T)/T$同构，而$w\in N_G(T)/T$在 $\mathfrak{h}$ 上的相应作用由 $N_G(T)$中 $w$ 的一个提升通过伴随作用给出。因此，存在一个元素 $n\in N_G(T)\subset G$，使得 $x=\mathrm{Ad}_G(n)y$。□

**引理 A.8**。 设 $\mathfrak{g}$是域 $k$上的半单李代数，设 $\sigma\colon\ \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$是一个有限维表示，并设 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。

(1) 设 $x\in\mathfrak{g}$ 是一个闭点，其 *Jordan* 分解为 $x=x_{\mathrm{s}}+x_{\mathrm{n}}$。那么$\mathrm{tr}(\sigma(x)^n)=\mathrm{tr}(\sigma(x_{\mathrm{s}})^n)$。(2) 设 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个博雷尔子代数，设 $x$， $t\in\mathfrak{b}$ 是闭点，且 $x-t$ 是幂零的。那么$\mathrm{tr}(\sigma(x)^n)=\mathrm{tr}(\sigma(t)^n)$。

证明。断言 (1) 是 [26, 34.2.3]。至于 (2)，注意到由半单性$\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$可知，因此 $\sigma(\mathfrak{b})$是 $\mathfrak{sl}(V)=[\mathfrak{gl}(V)\ \mathfrak{gl}(V)]$的可解子代数。于是 $\sigma(\mathfrak{b})$包含于 $\mathfrak{sl}(V)$中的一个博雷尔子代数 $\mathfrak{b}'$。利用该文中的 29.4.7，可找到 $V$ 的一个基，使得 $\mathfrak{b}'$ 是 $\mathfrak{sl}(V)$中的上三角矩阵集合。由于 $x-t$是幂零的，根据命题 A.3，矩阵 $\sigma(x)-\sigma(t)$是幂零的，且属于 $\mathfrak{b}'$，因此是严格上三角矩阵。因此， $\sigma(x)$和 $\sigma(t)$在 $\mathfrak{b}'$中是对角线相同的上三角矩阵。于是 $\sigma(x)^n$ 和 $\sigma(t)^n$也如此，因此它们在 $V$ 上的迹相同。□

**命题 A.9**。 设 $G$ 是 $k$ 上的连通约化群，具有极大环面$T$ 和包含 $T$ 的博雷尔子群 $B$；设 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{t}$ 和 $\mathfrak{b}$ 分别是它们的李代数。设 $x\in\mathfrak{b}$ 是一个闭点，其 *Jordan* 分解为 $x=x_{\mathrm{s}}+x_{\mathrm{n}}$。

(1) </style}这些分量和 属于 。(2) 设 $t\in\mathfrak{t}$和 $u\in\mathfrak{b}$ 满足条件，其中 $u$ 是幂零的，且 $x=t+u\ \in\mathfrak{b}$。那么存在 $g\in(G,G)$ 使得 $x_{\mathrm{s}}=$ 伴随作用$_G(g)t$。

证明。包含关系 $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{g}$ 是包含关系 $B\subset G$的微分，因此由定理 A.2(2)，将 $x$ 视为 $\mathfrak{b}$ 的元素时，其 Jordan 分解与将 $x$视为 $\mathfrak{g}$的元素时的 Jordan 分解相同。这就证明了 (1)。

对于 (2)，分解 (A.1) 给出 $x=y+z$ with $y\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ and $z\in\mathfrak{z}$。命题 A.3 给出 $u\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，因此对于某个半单元素 $s\in$，有 $t=s+z$

$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$。由于 $\mathfrak{z}$ 是 $G$ 的中心 $Z(G)$ 的李代数（参见 [26, 24.4.2(ii)]），且 $Z(G) \subset T \subset B$（参见 [14, 26.2.A]），我们有 $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{t} \subset \mathfrak{b}$，因此 $y = x - z \in \mathfrak{b}$ 和 $s = t - z \in \mathfrak{b}$，从而 $y, s \in \mathfrak{b}' := \mathfrak{b} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$。

注意，由于 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' \oplus \mathfrak{z}$，因此 $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{b}$。设 $\mathfrak{b}'_1$ 是 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的一个可解李子代数，包含 $\mathfrak{b}'$ 和 $\mathfrak{b}_1 := \mathfrak{b}'_1 \oplus \mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{g}$。那么 $\mathfrak{b}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个李子代数，包含 $\mathfrak{b}$，并且由于 $[\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1] = [\mathfrak{b}'_1,\mathfrak{b}'_1]$，它是可解的。因此 $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}$，且 $\mathfrak{b}'_1 = \mathfrak{b}'$。这表明 $\mathfrak{b}'$ 是 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的一个博雷尔子代数。因此，由于 $y = x - z = t + u - z = s + u$，我们可以将引理 A.8 和命题 A.7 应用于半单群 $(G, G)$ 以及其李代数 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 中的元素 $y$、$s$（参见 [26, 27.2.3]）。这给出 $g \in (G, G) \subset G$，使得

$$y_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ad}_{(G,G)}(g)s = \mathrm{Ad}_G(g)s\,.$$

由命题 A.3 的证明可知，$x_{\mathrm{s}} = y_{\mathrm{s}} + z$。由于 $g$ 的共轭作用在 $Z(G)$ 上是恒等映射，其微分 $\mathrm{Ad}_G(g)$ 在 $\mathfrak{z}$ 上是平凡的，因此

$$x_{\mathrm{s}} = y_{\mathrm{s}} + z = \mathrm{Ad}_G(g)(s + z) = \mathrm{Ad}_G(g)t$$

这就完成了证明。 □

## 参考文献

1. Iosif N. Bernstein、Israel M. Gel'fand 和 Sergei I. Gel'fand，《$G/P$空间的舒伯特胞腔与上同调》，《俄罗斯数学调查》**28** (1973), no. 3, 1. 2. Pierre Berthelot，《刚性上同调与带紧支撑的刚性上同调，第一部分》，Prépublication IRMAR **96-03**(1996). 3. Sara Billey 和 Alexander Postnikov，《通过根子系中的模式判定舒伯特簇的光滑性》，Advances in Applied Mathematics **34** (2005), no. 3, 447–466. 4. Anders Bjorner 和 Francesco Brenti，《考克斯特群组合学》，Graduate Texts in Mathematics, vol. 231, Springer, 2006. 5. Nicolas Bourbaki，《李群与李代数：第4—6章》，Springer-Verlag, 2002. 6. Christophe Breuil、Eugen Hellmann 和 Benjamin Schraen，《特征簇上的光滑性与经典性》，Inventiones mathematicae**209** (2017), no. 1, 197–274. 7.，《三角化簇的模解释》，Mathematische Annalen **367**(2017), no. 3-4, 1587–1645. 8.，《三角化簇的一个局部模型及其应用》，Publications mathématiques de l'IHÉS **130** (2019), no. 1, 299–412. 9. Jean-Marc Fontaine，《半稳定的 $p$-进表示》，Astérisque **223** (1994), 113–184. 10. William Fulton，《杨表：及其在表示论与几何中的应用》，London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, 1997. 11. Victor Ginsburg，《$\mathfrak{G}$-模、斯普林格表示与双变陈类》，Advances in Mathematics **61** (1986), no. 1, 1–48. 12. Eugen Hellmann，《三角化表示族与有限斜率空间》，arXiv:1202.4408 (2012). 13. Ryoshi Hotta、Kiyoshi Takeuchi 和 Toshiyuki Tanisaki，《$D$-模、反常层与表示论》，Progress in Mathematics, vol. 236, Birkhäuser, 2008. 14. James E. Humphreys，《线性代数群》，Graduate Texts in Mathematics, vol. 21, Springer-Verlag, 1975. 15. Reinhardt Kiehl 和 Rainer Weissauer，《韦伊猜想、反常层与 $\ell$-进傅里叶变换》，Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, vol. 42, Springer-Verlag, 2001. 16. Mark Kisin，《有限平坦群概形的模空间与模性》，Annals of Mathematics **170**(2009), no. 3, 1085–1180. 17. Steven L. Kleiman 和 Dan Laksov，《舒伯特演算》，The American Mathematical Monthly**79** (1972), no. 10, 1061–1082.

18. Venkatramani Lakshmibai 和 Bhaskhar Sandhya，《Sl($n$)/$B$中舒伯特簇光滑性的判据》，Proceedings of the 印度科学院 - Mathematical Sciences **100**(1990), no. 1, 45–52. 19. Barry Mazur，《伽罗瓦表示的变形》，$\mathbb{Q}$上的伽罗瓦群，数学科学研究所出版物，vol. 16, Springer-Verlag, 1989, pp. 385–437. 20. James S. Milne，《代数群：域上有限型群概形理论》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 170, Cambridge University Press, 2017. 21. Seginus Mowlavi，《伴随点处三角化簇上的切空间》，arXiv:2303.05472, preprint (2023). 22. Jean-Pierre Serre，《局部域》，Graduate Texts in Mathematics, vol. 67, Springer, 1979. 23. Peter Slodowy，《简单奇点与简单代数群》，Lecture Notes in Mathematics, vol. 815, Springer-Verlag, 1980. 24. Tonny A. Springer，《线性代数群，第二版》，Progress in Mathematics, vol. 9, Birkhäuser, 1998. 25. Stacks 项目作者，《Stacks 项目》，https://stacks.math.columbia.edu, 2018. 26. Patrice Tauvel 和 Rupert W.T. Yu，《李代数与代数群》，Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2006. 27. Ravi Vakil，《渐升之海：代数几何基础》，http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/, November 18, 2017.

巴黎-萨克雷大学，法国国家科学研究中心，Laboratoire de mathématiques d’Orsay，91405，法国奥赛