arXiv:2303.06062v1 [cs.SC] 21 Feb 2023

Jordan algebra in R

A Preprint

Robin K. S. Hankin*奥克兰理工大学 hankin.robin@gmail.com

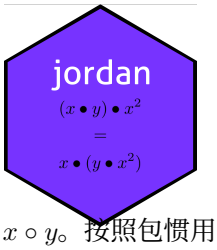
2023年3月13日

摘要

本文简要介绍 jordan 软件包，该软件包提供了处理不同类型约旦代数的功能。我对五类约旦代数的约旦恒等式进行了数值验证。该软件包可从 CRAN 下载：https://CRAN.R-project.org/package=stokes。

1 引言：约旦代数

约旦代数是在实数域上的非结合代数，其乘法为双线性运算，并满足以下恒等式：



$$xy = yx$$

$$(xy)(xx) = x(y(xx))$$

（第二个恒等式称为约旦恒等式）。在文献中，通常用并置表示乘法，但有时也会看到 $x \circ y$。按照包惯用法，乘法用星号表示，例如 x*y。按照 McCrimmon [1], ，约旦代数分为五类：

- **第1型**：实对称矩阵，类名为 real_symmetric_matrix，在包中缩写为 rsm
- **第2型**：复厄米矩阵，类名为 complex_herm_matrix，缩写为 chm
- **第3型**：四元数厄米矩阵，类名为 quaternion_herm_matrix，缩写为 qhm
- **4型**：阿尔伯特代数，即 3×3 厄米八元数矩阵组成的空间，类名为 class albert
- **第5型**：自旋因子，类名为 spin

（当然，前两种是下一种的特例）。jordan 软件包提供了使用自然的 R 惯用法操作 Jordan 对象的功能。所有这些类的对象都以矩阵形式存储，其中各列是约旦代数的元素。前四个类是基于矩阵的，因为其代数对象是对称矩阵或厄米矩阵（S4 类是 jordan_matrix）。第五类自旋因子则不是基于矩阵的。

2 基于矩阵的约当代数，类型 1、2、3

这四种基于矩阵的约当代数，其元素都是方阵。前三类分别是实数（对称）矩阵、复数（厄米）矩阵和四元数（厄米）矩阵；4型将在末尾单独讨论。从包惯用法的角度来看，类型 1、2 和 3 的行为完全相同。请看：

*工作；玩耍

```
> library(jordan)
> x <- rrsm()  # "Random Real Symmetric Matrix"
> y <- rrsm()
> z <- rrsm()
> x
```

实对称矩阵元素组成的向量

```
      [1]    [2]    [3][1,]-
  1.41 1.76-0.01[2,]   1.
  70-1.67 -0.41[3,]   0.57
  0.28 -0.75[4,] -0.34 -0.21 -
  0.23[5,]   0.16 1.18 1.63
.....................
[11,]   1.03 -0.02 1.81[12,]   1.
78 -0.43 2.14[13,]   0.31 -
0.42 1.12[14,]   0.01 -0.27 -
0.56[15,]   0.69 1.46 0.21
```

对象 x 是一个三元素向量，其中每个元素都是一列。每个元素对应一个 5×5对称矩阵（因为 rrsm() 默认具有 d=5 ，用于指定矩阵的大小）。因此，如行标记所示，每个元素有 $5 * (5 + 1)/2 = 15$ 个自由度。Jordan 对象与标量之间的加法和乘法定义如下：

```
> x*100
```

带有元素的实对称矩阵向量

```
      [1]   [2]   [3][1,]-
  141 176 -1[2,]   170-
  167 -41[3,]    57    28-
  75[4,]   -34 -21 -23
  [5,]    16   118   163

[11,]   103   -2 181
[12,]   178   -43 214
[13,]    31-42 112[14,]     1-
27 -56[15,]    69   146    21
```

```
> x + y*3
```

带有元素的实对称矩阵向量

```
      [1]    [2]    [3][1,] -
  0.24 -2.65 -0.97[2,]-1.24 -
  4.19 0.61[3,]   2.82 -3.05 -
  0.66[4,]   0.62 0.96 5.08
  [5,]   0.37 -2.09 4.99
.....................
[11,]   5.56 -2.60 1.48[12,]   4.
75 -3.73 8.74[13,]   0.37 0.54 -
1.37[14,]   3.82 -0.81 3.07
[15,]   2.01 -0.76 2.55
```

```
> x + 100
```

实对称矩阵的向量，带有元素

```
          [1]      [2]      [3]
```

```
 [1,]  98.59101.76 99.99[2,] 101.
 70 98.33 99.59[3,] 100.57
 100.28 99.25[4,]  99.66 99.79
 99.77[5,] 100.16 101.18101.63

[11,] 101.03 99.98 101.81[12,] 101.
78 99.57 102.14[13,] 100.31 99.58
101.12[14,] 100.01 99.73 99.44
[15,] 100.69101.46 100.21
```

（最后一行是受 M + x 类比启发而来，其中 M 是矩阵，x 是标量）。Jordan 对象可以按以下规则相乘 $x \circ y = (xy + yx)/2$:

```
> x*y
```

```
实对称矩阵向量，元素为[1]       [2]       [3][1,]
0.39760 -0.47830 -1.42100[2,]  2.44290 0.55960
3.98550[3,]  2.09730 -1.98220 5.26770[4,]
0.45340 0.02920 -0.32840[5,]  1.07915 -0.68270 -
1.66305

[11,]-1.17490-0.58995 0.53450[12,]  4.
05200 0.73435 1.61260[13,]-0.40450
0.16130 4.87155[14,]  1.21355-1.21490
0.46040[15,]  3.64000-0.67600 3.06550
```

我们可以验证分配律成立:

```
> x*(y+z) - (x*y + x*z)
```

```
实对称矩阵向量，元素为[1]            [2]            [3]
[1,]-6.661338e-16 2.081668e-16 0.000000e+00[2,]  0.
000000e+00-4.440892e-16 0.000000e+00[3,]  0.000000e
+00  0.000000e+00-1.776357e-15[4,]-3.330669e-16
0.000000e+00  1.110223e-16[5,]-8.881784e-16 0.000000e
+00 -4.440892e-16
. . . . . .
[11,]  4.440892e-16 1.110223e-16 8.881784e-16[12,]  0.
000000e+00  0.000000e+00  0.000000e+00[13,]  0.000000e+00-
2.220446e-16 -8.881784e-16[14,]-4.440892e-16-2.220446e-16
0.000000e+00[15,]  0.000000e+00  0.000000e+00-1.776357e-15
```

（也就是说，在数值精度范围内为零）。此外，我们可以观察到，所得代数不满足结合律:

```
> LHS <- x*(y*z)
> RHS <- (x*y)*z
> LHS-RHS
```

```
实对称矩阵向量，其元素为
     [1]         [2]         [3][1,]  -3.9564130
  0.8402355 -2.4048880[2,]   3.9440350 -
  2.0422630-4.1022730[3,]   2.2380955 1.0996705 -
  8.9562500
```

```
 [4,]   1.4684547 0.8016225 1.1587312[5,]  -
 1.4314930 0.6700580 4.4210495
.....................................
[11,]   4.1317442 1.0128450-1.9271358[12,]   0.
5929205 0.2259248-1.4115125[13,]   0.8094577
0.7190828 6.6453095[14,]  -7.9400165
0.0537760-0.7245633[15,]   6.0556225 1.1611970
9.5536030
```

数值上表明 地， $x(yz) \neq (xy)z$。然而，约旦恒等式 $(xy)(xx) = x(y(xx))$ 成立：

```
> LHS <- (x*y)*(x*x)
> RHS <- x*(y*(x*x))
> LHS-RHS
```

带有实数元素的实对称矩阵向量

```
     [1]           [2]           [3][1,]-1.776357e-15 -
 4.440892e-15 -8.881784e-16[2,]  0.000000e+00  1.
 776357e-15-3.552714e-15[3,]  7.105427e-15 -1.776357e-15
 0.000000e+00[4,]  0.000000e+00-2.220446e-16 -1.332268e-15
 [5,]-1.776357e-15 -8.881784e-16 -3.552714e-15

.............................................
[11,]  4.440892e-16 0.000000e+00-1.776357e-15[12,]  7.105427e-15 -
8.881784e-16 0.000000e+00[13,]-1.332268e-15 6.661338e-16
1.421085e-14[14,]  1.776357e-15 -1.776357e-15-1.776357e-15
[15,]  0.000000e+00  2.220446e-16 7.105427e-15
```

（这些元素为零 在数值精度范围内）。如果我们希望直接处理矩阵本身，可以使用 as 将单个元素强制转换y 进行强制转换。 1matrix（）：

```
> M1 <- as.1matrix(x[1])
> (M2 <- as.1matrix(x[2]))
```

```
    [,1]  [,2]  [,3]  [,4]  [,5]
[1,]  1.76-1.67 -0.21 1.64-0.02[2,]-1.67
 0.28 1.18 1.19-0.43[3,]-0.21
 1.18-1.36-0.46-0.42[4,]  1.64 1.19 -0.46
 1.57-0.27[5,]-0.02-0.43-0.42-0.27 1.46
```

（在上面的式子中，可以看出矩阵确实是对称的）。我们可以验证乘法规则确实得到了正确应用：

```
> (M1 %*% M2 + M2 %*% M1)/2 - as.1matrix(x[1]*x[2])
```

```
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    0    0    0    0    0
[2,]    0    0    0    0    0
[3,]    0    0    0    0    0
[4,]    0    0    0    0    0
[5,]    0    0    0    0    0
```

还可以验证，对称性在 Jordan 运算下得以保持：

```
> jj <- as.1matrix(x[1]*x[2])
> jj-t(jj)
```

```
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    0    0    0    0    0
```

```
[2,]    0    0    0    0    0
[3,]    0    0    0    0    0
[4,]    0    0    0    0    0
[5,]    0    0    0    0    0
```

其他基于矩阵的约旦代数也类似，只是在强制转换的细节上有所不同。以四元数矩阵为例：

```
> as.1matrix(rqhm(n=1,d=2))
```

```
   [1,1] [2,1] [1,2] [2,2]
实部 1.26 0.81 0.81 1.53 虚部
0.00 1.50 -1.50 0.00 j 0.00
0.08 -0.08 0.00 k 0.00-1.05
1.05 0.00[,1] [,2]
[1,]    1    3[2,]    2    4
```

上面可以看到使用了 onion 包的矩阵功能。注意该矩阵是厄米矩阵（元素 `[1,2]`和 `[2,1]` 互为共轭；元素 `[1,1]` 和 `[2,2]` 是纯实数）。验证约旦恒等式的方法与上面几乎相同：

```
> x <- rqhm()
> y <- rqhm()
> (x*y)*(x*x) - x*(y*(x*x))
```

```
带有元素的四元数厄米矩阵向量
     [1]             [2]             [3][1,]  0.000000e+00-
  1.421085e-14 -1.421085e-14[2,]  0.000000e+00  0.000000e
  +00  0.000000e+00[3,]  7.105427e-15 5.329071e-15
  1.421085e-14[4,]  1.421085e-14 0.000000e+00-1.421085e-14
  [5,]  7.105427e-15 2.842171e-14-3.552714e-15

. . . . . .
[41,]-3.552714e-15 -7.105427e-15 7.105427e-15[42,]  7.
105427e-15 -1.421085e-14-3.552714e-15[43,]-3.552714e-15 -
7.105427e-15 1.776357e-15[44,]-1.776357e-15 0.000000e+00  7.
105427e-15[45,]  0.000000e+00  0.000000e+00  8.881784e-15
```

如上所示，差异非常小。

3 自旋因子，类型5

前四种类型的约旦代数都是基于矩阵的，其元素分别为实数、复数、四元数或八元数。

第五种类型——自旋因子，从包惯用法的角度来看略有不同。从数学上说，其元素形式为 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$，加法和乘法定义如下：

$$\alpha(a, \mathbf{a}) = (\alpha a, \alpha \mathbf{a})$$

$$(a, \mathbf{a}) + (b, \mathbf{b}) = (a + b, \mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$(a, \mathbf{a}) \times (b, \mathbf{b}) = (ab + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, a\mathbf{b} + b\mathbf{a})$$

其中 a，b，$\alpha \in \mathbb{R}$，且 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$。这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的内积（默认情况下，我们有$\langle (x_1, \ldots\ldots, x_n), (y_1, \ldots\ldots, y_n) \rangle = \sum x_i y_i$，但可在包中进行配置）。
因此，如果我们有 $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ 自旋因子元素，那么显然 $\mathcal{IJ} = \mathcal{JI}$ 和 $\mathcal{I}(\mathcal{J} + \mathcal{K}) = \mathcal{IJ} + \mathcal{IK}$。约旦恒等式不那么容易看出，但我们可以通过数值计算验证所有恒等式：

```
> I <- rspin()
> J <- rspin()
> K <- rspin()
> I
```

自旋对象向量，其分量为
[1] [2] [3]r
0.49 0.38-2.13[1] 0.41 -
0.48 -0.99[2]-0.21 -0.86 -
0.62[3]-0.25 -0.41 -1.01[4]-
2.48 1.86 -0.65[5]-0.02 -
0.10 -1.17

```
> I*J - J*I   # commutative:
```

自旋对象向量，其分量为
[1] [2] [3]r 0
0 0[1] 0 0 0
[2] 0 0 0
[3] 0 0 0
[4] 0 0 0
[5] 0 0 0

```
> I*(J+K) - (I*J + I*K)  # distributive:
```

V向量 o f spin objects w ith entri
es[1] [2] [3]r 2.220446e-16
3.330669e-16 0.000000e+00[1] 1.110223e-16 0.000000e
+00 1.110223e-16[2] 0.000000e+00 2.220446e-16
0.000000e+00[3] 0.000000e+00-1.110223e-16 0.000000e
+00[4] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00[5] -
1.110223e-16 0.000000e+00-2.220446e-16

```
> I*(J*K) - (I*J)*K  # not associative:
```

s 的向量 p in ob j ects with entries
[1] [2] [3]r 8.881784e-16
0.000000 0.000000[1] -2.814170e-01-3.279000 -
1.032597[2] 1.222649e+00-0.163754 -5.508214
[3] -1.216666e+00-0.511667 2.281628[4]-
3.774480e+00 1.286646 1.430624[5] 1.
619257e+00-0.956662 -3.466692

```
> (I*J)*(I*I) - I*(J*(I*I))  # Obeys the Jordan identity
```

含有条目的自旋对象向量[1] [2] [3]
r -3.552714e-15 -8.881784e-16 0.000000e+00[1] 0.
000000e+00 0.000000e+00 8.881784e-16[2] 0.000000e
+00 0.000000e+00 0.000000e+00[3] -1.110223e-16
0.000000e+00 0.000000e+00

[4] 0.000000e+00 8.881784e-16 3.552714e-15[5] -
2.220446e-16 -2.220446e-16 0.000000e+00

4 阿尔伯特代数，4型

4型约旦代数对应于 3×3 以八元数为元素的厄米矩阵。这是该软件包中的 class albert 类。请注意，4 阶或更高阶的八元数厄米矩阵不满足约旦恒等式，因此不是约旦代数：onion 包的示例文档中有对此事实的数值演示。我们可以使用 class albert 软件包验证 3×3 八元数厄米矩阵的约旦恒等式：

```
> x <- ralbert()
> y <- ralbert()
> x
```

阿尔伯特矩阵向量 带有元素
[1] [2] [3]d1 1.54
0.03 -0.82 d2 -1.48-0.65 -0.74
d3 -0.19 0.31 0.24
Re(o1)-0.40 0.39 0.34 i(o1)
0.05 0.84 0.33 j(o1)-1.31 -
0.11-0.15 k(o1)-2.09 -1.05
0.08 l(o1)-0.60 1.28-1.46
il(o1)-0.94 1.69 -1.82 jl(o1)
1.30-0.49 -2.73 kl(o1)
2.42-0.65 0.50
Re(o2)-1.08-0.40 0.53
i(o2)-1.41 0.87 0.57 j(o2) 0.84 -
0.60-0.58 k(o2)-0.75 0.47
0.95 l(o2)-0.62 0.84-0.67
il(o2)-1.18 0.46 0.36
jl(o2)-0.15 0.97 0.94
kl(o2)-0.69-2.45 -0.81 Re(o3)
0.78-0.58 0.25 i(o3)-1.12 -
0.33-1.70 j(o3)-0.29 0.35 0.16
k(o3) 1.68 0.18-0.06 l(o3)
0.92 0.84 0.62 il(o3)-0.25
0.01 0.05 jl(o3)-0.43 0.68
2.27 kl(o3)-0.69 2.60 -1.46

```
> (x*y)*(x*x)-x*(y*(x*x)) # Jordan identity:
```

Vector of Albert matrices w ith entri
es[1] [2] [3]d1 1.509903e-14
7.105427e-15 8.881784e-15 d2 -2.842171e-14
1.421085e-14-7.105427e-15 d3 -7.105427e-15
1.776357e-15-7.105427e-15 Re(o1) 1.509903e-14 -1.065814e-14
0.000000e+00i(o1) 7.105427e-15 3.552714e-15 -5.329071e-15
j(o1) 7.105427e-15 -1.776357e-15 0.000000e+00k(o1)
0.000000e+00 1.421085e-14 0.000000e+00l(o1) 7.105427e-15
0.000000e+00 0.000000e+00il(o1) 0.000000e+00-1.421085e-14 -
3.552714e-15 jl(o1) 0.000000e+00 1.421085e-14 0.000000e+00

kl(o1) 2.842171e-14 -8.881784e-16 0.000000e+00
Re(o2)-2.131628e-14 -7.105427e-15 0.000000e+00
i(o2)-7.105427e-15 1.776357e-15-2.220446e-15 j(o2) 3.552714e-15
3.552714e-15-7.105427e-15 k(o2) 0.000000e+00 7.
105427e-15-7.105427e-15 l(o2)
1.421085e-14-7.105427e-15-7.105427e-15 il(o2)-1.421085e-14
1.421085e-14-6.217249e-15 jl(o2)-7.105427e-15 -3.552714e-15
3.552714e-15 kl(o2)-1.421085e-14 -1.065814e-14 3.552714e-15
Re(o3) 7.105427e-15 0.000000e+00-3.552714e-15
i(o3)-2.842171e-14 5.329071e-15 0.000000e+00j(o3) 0.000000e
+00 4.440892e-16 0.000000e+00k(o3) 0.000000e+00-
7.105427e-15-3.552714e-15 l(o3) 0.000000e+00-1.421085e-14
0.000000e+00il(o3) 1.421085e-14 1.065814e-14 8.881784e-15
jl(o3)-2.842171e-14 1.065814e-14 0.000000e+00
kl(o3)-1.421085e-14 7.105427e-15-7.105427e-15

5 特殊恒等式

1963年，C. M. Glennie 发现了一对特殊约旦代数满足、但阿尔伯特代数不满足的恒等式。定义

$$U_x(y) = 2x(xy) - (xx)y$$

$$\{x, y, z\} = 2(x(yz) + (xy)z - (xz)y)$$

(it 可以证明雅各布森恒等式 $U_{U_x\,(y)} = U_x U_y U_x$ 成立），Glennie 恒等式是 e

$$H_8(x, y, z) = H_8(y, x, z) \qquad H_9(x, y, z) = H_9(y, x, z)$$

（详情请参见 McCrimmon 2004年），其中

$$H_8(x, y, z) = \{U_x U_y(z), z, xy\} - U_x U_y U_z(xy)$$

and

$$H_9(x, y, z) = 2U_x(z)U_{y,x}U_z(yy) - U_x U_z U_{x,y} U_y(z)$$

5.1 雅各布森恒等式的数值验证

我们可以验证雅各布森恒等式：

```
> U <- function(x){function(y){2*x*(x*y)-(x*x)*y}}
> diff <- function(x,y,z){
+       LHS <- U(x)(U(y)(U(x)(z)))
+       RHS <- U(U(x)(y))(z)
+       return(LHS-RHS)  # zero if Jacobson holds
+ }
```

接下来，我们可以对3至5型约旦代数进行雅各布森恒等式的数值验证：

```
> diff(ralbert(),ralbert(),ralbert())  # Albert algebra obeys Jacobson:
```

带有元素的阿尔伯特矩阵向量
[1] [2] [3]d1
3.637979e-12-1.477929e-12 2.273737e-12 d2-3.637979e-12 -
9.094947e-13 4.547474e-13

```
      d3 1.364242e-12 6.821210e-13 0.000000e+00
Re(o1)-1.364242e-12 -3.979039e-13 6.821210e-13 i(o1) 0.000000e
+00-1.136868e-13 0.000000e+00j(o1) 4.547474e-13
4.547474e-13-6.821210e-13 k(o1)-2.273737e-13
1.364242e-12-4.547474e-13 l(o1)-2.273737e-12-1.364242e-12
4.547474e-13 il(o1) 0.000000e+00-1.364242e-12 9.094947e-13 jl(
o1) 1.818989e-12 3.410605e-13-4.547474e-13 kl(o1)-2.728484e-12 -
2.273737e-13 1.364242e-12 Re(o2)-1.364242e-12 1.421085e-12
1.818989e-12 i(o2) 9.094947e-13 1.136868e-13 9.094947e-13 j(o2)
1.818989e-12-7.958079e-13-9.094947e-13 k(o2)
9.094947e-13-3.410605e-13 0.000000e+00
l(o2)-9.094947e-13-1.364242e-12 1.136868e-12 il(o2)-1.818989e-12
0.000000e+00  9.094947e-13 jl(o2)-9.094947e-13
1.477929e-12-9.094947e-13 kl(o2) 4.547474e-13 -3.410605e-13
0.000000e+00Re(o3) 0.000000e+00  1.136868e-12-2.273737e-13
i(o3) 1.818989e-12-2.501110e-12-6.821210e-13
j(o3)-1.818989e-12-7.673862e-13 4.547474e-13 k(o3) -1.364242e-12 -
2.273737e-13 -4.547474e-13 l(o3)-4.547474e-13 0.000000e+00  0.
000000e+00il(o3) 1.818989e-12 -2.273737e-13 4.547474e-13 jl(o3)
4.547474e-13 3.183231e-12 0.000000e+00kl(o3) 1.818989e-12
1.136868e-12 4.547474e-13
```

```
> diff(rqhm(),rqhm(),rqhm()) # Quaternion Jordan algebra obeys Jacobson:
```

带有元素的四元数厄米矩阵向量

```
      [1]              [2]              [3][1,]-9.094947e-13
  1.364242e-12 1.818989e-12[2,]-2.728484e-12 -1.193712e-12 -
  9.094947e-13[3,]  5.456968e-12 0.000000e+00-2.273737e-13
  [4,]  0.000000e+00-5.911716e-12 -9.094947e-13[5,]  0.
  000000e+00-4.547474e-13 1.818989e-12

[41,]-1.136868e-12 0.000000e+00  0.000000e+00[42,]-2.955858e-12
 0.000000e+00  -2.160050e-12[43,]-2.273737e-13 -4.547474e-13
 2.728484e-12[44,]  2.273737e-13 -2.614797e-12-2.728484e-12[45,]-
 1.136868e-12 1.818989e-12 1.364242e-12
```

```
> diff(rspin(),rspin(),rspin()) # spin factors obey Jacobson:
```

自旋对象的向量，元素为[1] [2] [3]

```
r 0.000000e+00-2.842171e-14 1.421085e-14[1]  4.
263256e-14 -7.105427e-148.881784e-15[2]  -3.552714e-14 -
2.131628e-147.105427e-15[3]-4.263256e-14 5.684342e-14
4.884981e-15[4]  2.842171e-14 0.000000e+00  5.
329071e-15[5]  -4.973799e-14 -2.842171e-140.000000e+00
```

显示两者在数值精度上相符（输出接近于零）。现在我们可以验证 Glennie 的 G_8 和G_9 恒等式。

5.2 G_8 的数值验证

```
> B <- function(x,y,z){2*(x*(y*z) + (x*y)*z - (x*z)*y)}  # bracket function
> H8 <- function(x,y,z){B(U(x)(U(y)(z)),z,x*y) - U(x)(U(y)(U(z)(x*y)))}
> G8 <- function(x,y,z){H8(x,y,z)-H8(y,x,z)}
```

因此，我们验证第3型和第5型约旦代数：

```
> G8(rqhm(1),rqhm(1),rqhm(1))   # Quaternion Jordan algebra obeys G8:
```

元素为四元数厄米矩阵的向量

```
     [1][1,]  0.000000e
+00[2,] -4.547474e-12
[3,]  3.637979e-12[4,] -
1.818989e-12[5,] -
5.456968e-12

.....[41,]  0.000000e
+00[42,]  3.637979e-12
[43,]  8.185452e-12[44,] -
4.547474e-12[45,] -
6.366463e-12
```

```
> G8(rspin(1),rspin(1),rspin(1)) # Spin factors obey G8:
```

自旋对象的向量，其分量为

```
    a r 3.552714e-15
[1]  7.494005e-16[2] -
4.440892e-16[3] -
2.220446e-16[4] -
2.664535e-15[5]  0.
000000e+00
```

再次表明精度令人满意。该恒等式对阿尔伯特代数不 成立：

```
> G8(ralbert(1),ralbert(1),ralbert(1)) # Albert algebra does not obey G8:
```

阿尔伯特矩阵向量，带有元素[1]d1 -
3209.77325 d2 -2183.08560 d3
5392.85884 Re(o1) 3048.77534 i(o1) -
341.17026 j(o1) -5069.00757 k(o1) -
3255.20454 l(o1) 6325.31177 il(o1)
4202.32334 jl(o1) -3395.24245 kl(o1)
3494.94665 Re(o2) -1279.20890 i(o2) -
9545.59707 j(o2) -998.40758 k(o2)
2071.51608 l(o2) 1031.05238 il(o2) -
7691.31254 jl(o2) 4705.92146 kl(o2)
685.36332

Re(o3) -7504.55626 i(o3)
4532.20967 j(o3) -
5012.57428 k(o3)
902.05461 l(o3) -
184.23557 il(o3) 46.94533
jl(o3) 8277.70343 kl(o3)
988.06732

5.3 G_9 的数值验证

```
> L <- function(x){function(y){x*y}}
> U <- function(x){function(y){2*x*(x*y)-(x*x)*y}}
> U2 <- function(x,y){function(z){L(x)(L(y)(z)) + L(y)(L(x)(z)) - L(x*y)(z)}}
> H9 <- function(x,y,z){2*U(x)(z)*U2(y,x)(U(z)(y*y)) - U(x)(U(z)(U2(x,y)(U(y)(z))))}
> G9 <- function(x,y,z){H9(x,y,z)-H9(y,x,z)}
```

然后，我们可以验证第3型约旦代数的 'G9()' 恒等式:

```
> G9(rqhm(1),rqhm(1),rqhm(1))  # Quaternion Jordan algebra obeys G9:
```

元素为四元数的厄米矩阵向量
[1][1,] -1.746230e-10
[2,] -5.820766e-11[3,] -
1.746230e-10[4,] 7.
275958e-12[5,] 2.
910383e-11

.....
[41,] 4.365575e-11
[42,] 0.000000e+00
[43,] 4.365575e-11[44,] -
9.458745e-11[45,] -
1.455192e-10

然而，阿尔伯特代数不满足以下恒等式:

```
> G9(ralbert(1),ralbert(1),ralbert(1)) # Albert algebra does not obey G9:
```

带有元素的阿尔伯特矩阵向量[1]d1
32205.7845 d2 37449.9386 d3 -2734.0653
Re(o1) 21079.0754 i(o1) -8520.7870 j(o1)
2463.1298 k(o1) 11536.5988 l(o1)
10866.9855 il(o1) 21487.3519 jl(o1) -
385.9625 kl(o1) -7022.2586 Re(o2)
29565.4992 i(o2) -10266.0920 j(o2)
6242.0058 k(o2) 15384.8470 l(o2)
6507.9183 il(o2) 8053.8656 jl(o2) -
2563.1248 kl(o2) 304.0676

Re(o3) 20493.9088 i(o3)
30960.4312 j(o3) -
12243.8005 k(o3) -
6366.5065 l(o3)
5962.5897 il(o3) -
12700.1558 jl(o3) -
24581.3730 kl(o3)
5110.3595

参考文献

[1] McCrimmon, K.（1978）。约旦代数及其应用。《美国数学会通报》，84(4)。