无名稿件编号。（将由编辑插入）

内禀非线性弹性：外微分演算表述

Ramy Rashad、Andrea Brugnoli、Federico Califano、Erwin Luesink、Stefano Stramigioli

arXiv:2303.06082v1 [math-ph] 10 Mar 2023

2023年3月13日

摘要 本文利用外微分演算和丛值微分形式，以几何内禀的方式构建非线性弹性理论。我们将速度和应变率等运动学变量表示为广延量矢量值形式，将应力和动量等动力学变量表示为广延型余向量值伪形式。我们处理运动的空间、物质和对流表示，并展示如何在不同表示之间进行几何转换。此外，我们证明了本文的外微分演算表述与文献中基于张量分析的标准表述等价。我们还重点介绍了该理论的两类基本结构。第一类是将嵌入空间与物体上的黎曼度量空间联系起来的主丛结构，以及后者如何表示内禀变形空间。第二类是将各类丛值形式空间彼此联系起来的德拉姆复形结构。

关键词 几何力学 · 非线性弹性 · 丛值形式 · 外微分演算

R. Rashad、F. Califano、S. Stramigioli，特温特大学机器人与机电系，荷兰。电子邮件：{r.a.m.rashadhashem, f.califano,s.stramigioli}@utwente.nl A. Brugnoli，柏林工业大学数学研究所，德国。电子邮件：brugnoli@math.tu-berlin.de E. Luesink，特温特大学运筹研究数学系，荷兰。电子邮件：e.luesink@utwente.nl

1 引言

识别偏微分方程的内在结构，是现代连续介质力学及一般场论研究中的一个基础课题。每一次发现新的结构，不仅能加深我们对相关理论的数学理解，这些隐藏结构对于分析、离散化、模型降阶和控制器设计也至关重要。多年来，人们为寻找连续介质力学控制方程背后的几何、拓扑和能量结构付出了诸多努力，本文旨在为这一探索贡献力量。

Geometric structure

这段探索之旅最初始于约 1965年，C. Truesdell 和 W. Noll [1] 与 V. Arnold [2] 分别开展了相关研究，后者的重点在于流体力学。这两项工作的共同之处在于运用了微分几何，为流体力学和弹性力学带来了新的见解，并简化了经典坐标表述中固有的许多复杂问题。弹性力学几何表述的起点，是将弹性体的构形表示为一个嵌入 $\varphi:\ \mathcal{B}\to\mathscr{A}$ 将物体流形 $\mathcal{B}$ 嵌入环境空间 $\mathscr{A}$。

从概念上看，弹性体在变形过程中由少数几种物理变量（例如速度、动量、应变和应力）以及描述这些变量之间关系的本构方程来刻画。非线性弹性面临的挑战之一，是分别理解运动与变形。文献中有大量数学表示试图解决这一问题，但通常涉及相同的物理变量。文献中反复出现的一个主题，是统一这些不同的表示，并借助微分几何工具阐明它们之间的关联。

这种表示方式多样化的原因之一是，可以相对于附着于 $\mathcal{B}$ 的观察者来表示每个物理变量（称为$convective$ 表示），也可以相对于附着于 $\mathscr{A}$ 的观察者来表示（称为 $spatial$ 表示），或者在 $\mathcal{B}$ 和 $\mathscr{A}$ 上使用双点张量场来表示（称为 $material$表示）。尽管这三种表示彼此等价，但各自都有优势，因为理论的某些部分在一种表示中比在其他表示中更直观或表达更简单。只要能够清晰地在这三种表示之间灵活转换，并尊重它们的几何性质，原则上就不会有问题。在这方面，微分几何中的拉回和推前概念已被证明对于在对流、物质和空间表示之间顺畅转换至关重要。

几何力学中的一项重要原则是 Noll 所强调的 $intrinsicality$ [3]。在他的著作中，他指出，物质空间 $\mathcal{B}$在概念和技术层面上都应与其在环境空间中的任何构形 $\mathscr{A}$区分开来。通过这种区分，可以辨明哪些概念$intrinsic$ 属于弹性体，哪些则依赖于某种任意的 $referenceconfiguration$。这一表述的一个重要特点是，物体流形$\mathcal{B}$ 没有内禀度量，仅仅是由粒子连续组成的整体，并且只配备了质量测度。换言之，物体流形是一个仅包含物质信息、而不包含尺度、角度或

距离的空间。另一方面， $\mathcal{B}$ 上的（常）度量取决于参考构形的选择，因此并非内禀属性。为物体流形赋予黎曼结构，实际上也是文献中数学表示多样化的另一个来源。其后果的一个明显例子体现在应变和应力的表示上。

直观地说，应变是任意两个变形状态之间的差异（即相对变形），不一定是指其中一个状态为未加载（无应力）的参考构形。文献中有大量用于描述变形状态的张量场。最常见的有右柯西-格林张量场和皮奥拉张量场，它们用于对流表示；以及左柯西-格林张量场和阿尔曼西张量场，它们用于空间表示。利用 $\mathcal{B}$ 和 $\mathscr{A}$ 上的黎曼度量，还可以通过升降指标，为这些张量场定义更多张量形式的变体。每一种变形张量场都会产生不同的应变定义，进而对应不同的应力变量。通过区分依赖质量和质量无关的版本（例如空间表示中的基尔霍夫应力张量场和柯西应力张量场），应力表示的种类甚至可以加倍。

借助微分几何的工具可以看出，上述所有变形状态的表示都等价于一个内禀量！也就是通过嵌入φ将 $\mathscr{A}$ 的黎曼度量拉回到 $\mathcal{B}$ 上。这个定义在 $\mathcal{B}$ 上的时变度量是一种内禀量，无须参照未变形的参考构形即可据此定义应变。基于这一几何洞见，P. Rougee [4] 进一步发现， $\mathcal{B}$上的黎曼度量空间记作 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$，在有限应变理论的内禀表述中发挥着基础性作用。具体而言， $\mathcal{M}(\mathcal{B})$这一无限维黎曼流形上的点表示一种变形状态，而应变率和应力分别是 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$中某一点处的切空间和余切空间中的元素。

对 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$的黎曼结构的构造带来了许多发现，至今仍是一个活跃的研究领域。其中最深刻的发现是，不能简单地将两个变形状态之差定义为应变（例如 [5, 第1.3]节）。相反，应考虑 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$的曲率，由此引入了对数应变度量 [6]。另一项重要发现是，亚弹性中使用的众多客观应力率等价于在 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ [7] 上的协变微分；并非所有这些应力率都能像 [5, 第1.6]节所述的那样由李导数导出。

Topological structure

连续介质力学几何方法的一个重要特征，是将依赖度量的运算与不依赖度量、仅具拓扑性质的运算区分开来。识别控制方程的潜在拓扑结构，对于分析和离散化都至关重要；此外，这种方法还适用于经典理论和相对论理论 [8]。

连续介质力学中的物理变量，自然地与环境空间中的 $\mathcal{B}$ 或其构形 $\varphi(\mathcal{B})$ 上的积分量相关联。质量、动能、应变能和应力功率都是这类量的例子。事实上，这些变量是密度，应该在 $\mathcal{B}$ 或 $\varphi(\mathcal{B})$ 上积分，以便

得到一个实数。这个积分过程与度量无关，而流形上的积分理论表明，表示这些密度的自然数学对象是微分形式 [9]。正如函数可以自然地在一点处取值，微分 k-形式可以自然地在 k 维空间上取值。

与传统上使用向量和张量分析来表述连续介质力学的方式不同，基于微分形式的外微分演算突显了拓扑与几何之间的差异。此外，它为微分和积分演算提供了一套优雅的工具，不仅统一了张量分析中的诸多运算与恒等式，还将其推广至任意维度和坐标系。

Frankel [9] 和 Kanso 等人 [10] 的研究表明，使用外微分演算表述固体力学和流体力学时，需要采用丛值微分形式。特别是，他们的研究指出，用于表示物理变量的张量场实际上具有 *two legs*，应将其彼此区分：“形式”分量和“丛值”分量。丛值形式的使用进一步阐明了空间表述与物质表述之间的区别，并表明可以通过仅对形式分量进行拉回或推前、同时保持丛值分量不变，在两种表述之间来回转换。

研究连续介质力学拓扑结构的一项重要应用是保结构离散化，其旨在开发能够在离散层面表征底层光滑结构的数值格式。著名的德拉姆复形是此类拓扑结构的典型例子，也是发展有限元外微分演算[11] 和离散外微分演算 [12]的基础。线弹性与非线性弹性的底层复形结构已在 [13,14,15] 中得到深入研究，而将其应用于数值格式开发仍是一个活跃的研究领域 [16,17,18]。

Objectives and main result of this paper

本文聚焦于以几何内禀的方式，运用外微分演算构建非线性弹性理论。全文旨在揭示非线性弹性背后的几何与拓扑结构，同时探讨该理论的空间、物质与对流表述。图 1 展示了本文公式体系的概览及主要结果。

本文的主要贡献在于采用整体性方法，结合了 1） [3], 2的内禀性原则；2） [4,6], 借助黎曼度量空间 $\mathcal{M}$（$\mathcal{B}$）对变形进行的几何表述；以及 3） [10]借助丛值形式所作的外微分演算表述。与 [4,6], 相比，我们工作的创新之处在于采用外微分演算进行无坐标处理。此外，我们着重阐明了主纤维丛结构：它将黎曼度量空间 $\mathcal{M}$（$\mathcal{B}$）与构形空间 $\mathscr{C}$ 联系起来，后者由从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathscr{A}$的嵌入构成。这一隐藏结构使我们能够将弹性体的运动分解为纯变形和纯刚体运动。此外，这也说明了为何采用对流表示最便于描述本构应力-应变关系。与 [10,19], 相比，我们工作的创新之处在于处理了运动的全部三种表示，展示了它们在外微分演算中的关联，并强调了其背后的德拉姆复形。

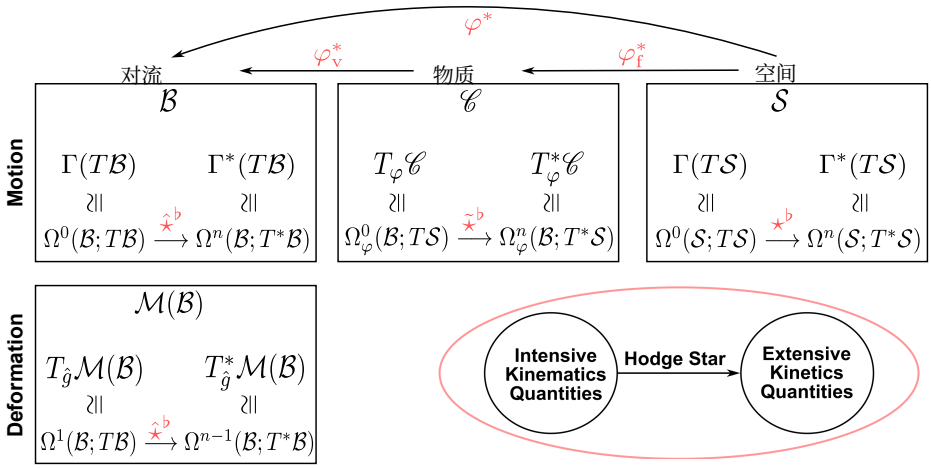
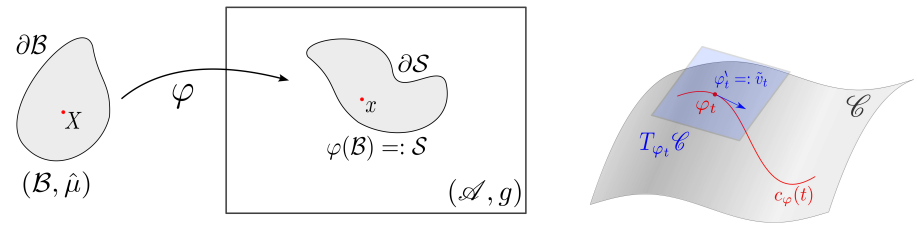


图 1：非线性弹性力学内在几何 formulation 概述

我们的非线性弹性表述以极简为特色，将理论简化至其本质的内在无坐标部分。我们展示了如何自然地利用切丛 $T\mathscr{C}$和 $T\mathcal{M}$（$\mathcal{B}$），以及向量场空间 Γ（$T\mathcal{B}$）和 Γ（$T\mathcal{S}$），分别在 $\mathcal{B}$和$\mathcal{S}$ 上描述运动学。其中包括速度和应变率变量。通过将这些运动学量与适当的 *intensive vector-valued forms*相对应，动量和应力变量便可根据拓扑对偶性自然地表示为 *extensive covector-valued pseudo-forms*。此外，利用黎斯表示定理，我们将构造适当的霍奇星算子，以关联不同变量。我们的内在表述不仅体现了物理变量的几何本质，而且所得动力学表达式简洁明了，符合物理直觉，并且提供了在不同表示之间转换的清晰方法。最后，为了让更多读者受益，而不局限于精通几何力学的研究人员，我们以教学式风格撰写本文，通过多种方式直观展示理论，并给出抽象几何对象的基于坐标的表达式。

本文结构如下：第 2 节以一种内在的无坐标方式概述弹性体的运动运动学，并另设一个小节介绍基于坐标的表达式。第 3 节讨论变形运动学，重点说明黎曼度量空间在描述弹性体变形中的作用。第 4 节讨论与物体相关的质量结构，该结构将运动学变量与动力学变量联系起来，并着重阐明使用质量顶形式而非质量密度函数的内在性。第 5 节将介绍丛值形式及其外微分演算工具，并说明它们如何应用于非线性弹性。第 6 节将给出基于外微分演算表述的动力运动方程，随后在第 7 节说明这些方程与文献中的标准表述等价。第 8 节将讨论联系构形空间与黎曼度量空间的主丛结构，



(a) 构形 (b) 构形空间

图 2：弹性体 $\mathcal{B}$ 嵌入环境空间 $\mathscr{A}$ 的示意图 $\varphi:\ \mathcal{B}\to\mathscr{A}$，以及其作为构形空间 $\mathscr{C}$ 中的一条曲线的运动。

此外，还将讨论丛值形式所依托的德拉姆复形结构。最后，我们将在第 9 节总结本文。

2 内禀运动运动学

本节回顾描述弹性体运动的运动学变量及运算的几何表述，这种表述完全采用无坐标方式。在这种内禀处理方法中，我们不将抽象物体与环境空间中的某个参考构形等同起来。我们首先介绍运动的三种表示方式，以及如何以无坐标方式在不同表示方式之间转换的各种关系。相应的基于坐标的表达将在单独一节中介绍。假设读者熟悉弹性力学的几何表述和微分几何，尤其是微分形式和纤维丛相关内容。鉴于纤维丛与本文的相关性，我们在附录中提供了纤维丛概述；更多背景知识和细节见 [9,5,1]。

2.1 构形与速度

发生变形的弹性体，其几何设定如下。物体的物质点在数学上构成一个带边界 $\partial\mathcal{B}$ 的三维紧致可定向光滑流形 $\mathcal{B}$。该物体流形配备了一个质量形式 $\hat{}\mu\in\Omega^3(\mathcal{B})$，用以表示物体的质量这一物质属性；我们用 $X\in\mathcal{B}$ 表示一个物质粒子。物体发生变形的环境空间由一个三维光滑定向流形 $(\mathscr{A},\ g)$ 表示，其中 g 表示其黎曼度量。因此，按照 Noll [3]，的工作，我们将物体及其 *material properties* 与承载它的空间及其 *geometric properties* 完全分离。$\mathcal{B}$ 和 $\mathscr{A}$ 的结构体现了分别与这两种实体相关的恒定物理性质。本文将重点讨论 $\dim(\mathcal{B})=3$ 的情形。本文末尾将讨论如何处理其他情形。

弹性体的构形由一个保持定向的光滑嵌入 $\varphi:\mathcal{B}\to\mathscr{A}$ 表示，它描述了物体在环境空间中的放置。参见图 2a，我们将整个

物体的像记为 $\mathcal{S} := \varphi(\mathcal{B}) \subset \mathscr{A}$，并将物体的空间点记为 $x \in \mathcal{S}$。由于 $\dim(\mathcal{B}) = 3$，因此 $\dim(\mathcal{S}) = 3$。于是，构形空间是由 $\mathscr{C} := \mathrm{Emb}^{\infty}(\mathcal{B}, \mathscr{A})$ 构成的集合，其中包含从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathscr{A}$ 的光滑嵌入，并且可赋予其无限维微分流形 [20] 的结构。弹性体的运动由一条光滑曲线 $c_\varphi : \mathbb{R} \to \mathscr{C}$ 表示，如图 2b 所示。利用嵌入是到其像上的微分同胚这一事实，$c_\varphi(t) =: \varphi_t$ 表示一参数微分同胚族 $\varphi_t : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$。

曲线 c_φ 在给定构形 φ_t 处的切向量记为 $\tilde{v}_t \in T_{\varphi_t}\mathscr{C}$，它定义了映射 $\tilde{v}_t : \mathcal{B} \to T\mathcal{S}$，使得

$$\tilde{v}_t : X \in \mathcal{B} \mapsto \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \varphi_s(X) \in T_{\varphi_t(X)}\mathcal{S}. \tag{1}$$

因此，切空间 $T_{\varphi_t}\mathscr{C}$ 可与（无限维）向量空间 $\Gamma(\varphi^* T\mathcal{S})$ 自然地等同起来；该空间由映射 φ 上的向量场构成（即诱导丛 $\varphi^* T\mathcal{S}$ 的截面，如附录 10.1 所述）。我们将 $\tilde{v}_t \in \Gamma(\varphi^* T\mathcal{S})$ 称为物质（拉格朗日）速度场，它描述了物体的无穷小运动。该运动也可以用“真正的”向量场 $v_t \in \Gamma(T\mathcal{S})$ 或 $\hat{v}_t \in \Gamma(T\mathcal{B})$（图 3）来描述，它们定义为

$$v_t := \tilde{v}_t \circ \varphi_t^{-1}, \qquad \hat{v}_t := T\varphi_t^{-1} \circ \tilde{v}_t = T\varphi_t^{-1} \circ v_t \circ \varphi_t, \tag{2}$$

其中 $T\varphi_t^{-1} : T\mathcal{S} \to T\mathcal{B}$ 表示 φ_t^{-1} 的切映射。v_t 称为空间速度场，而 $\hat{v}_t$ 称为对流速度场。使用拉回的记法，物体速度的物质、空间和对流表示之间的关系为

$$\hat{v}_t = \varphi_t^*(v_t), \qquad \tilde{v}_t = \varphi_{t,b}^*(v_t),$$

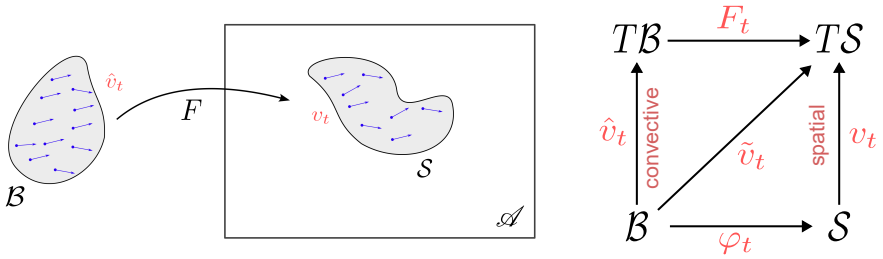
其中 $\varphi_{t,\,b}^*$ 表示将 v_t（视为映射 $v_t : \mathcal{S} \to T\mathcal{S}$）的基点拉回。

物质速度场 $\tilde{v}_t \in \Gamma(\varphi^* T\mathcal{S})$ 是映射 $\varphi_t : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ 上的一个双点张量场示例（*cf.* 附录 10.1）。双点张量场的另一个重要示例是 φ_t 的切映射，通常记作 $F_t \in \Gamma(T^*\mathcal{B} \otimes \varphi^* T\mathcal{S})$，并称为变形梯度。因此，$F_t := T\varphi_t$。注意，$\tilde{v}_t$ 和 F_t 都被视为 $X \in \mathcal{B}$ 的函数，而非 $x \in \mathcal{S}$ 的函数。因此，在每个 $X \in \mathcal{B}$ 处，我们都有 $F_t(X) : T_X\mathcal{B} \times T^*_{\varphi_t(X)}\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 定义了一个 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 双点张量，而 $\tilde{v}_t(X)$ 定义了一个 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 双点张量，两者都在映射 φ_t 上。

2.2 $\mathcal{B}$ 上的黎曼结构

虽然 $\mathcal{B}$ 表示物质粒子的抽象（无度量）集合，但将其嵌入环境空间 $\mathscr{A}$ 后，便可利用 $\mathscr{A}$ 的度量（内积）结构观测和测量物理性质与变形，并量化长度和角度。关联构形 $\mathcal{S} = \varphi_t(\mathcal{B})$ 从环境空间 $\mathscr{A}$ 继承的度量及其对应的列维-奇维塔联络分别记为：

$$g : \Gamma(T\mathcal{S}) \times \Gamma(T\mathcal{S}) \to C^\infty(\mathcal{S}), \qquad \nabla : \Gamma(T\mathcal{S}) \times \Gamma(T^r_s\mathcal{S}) \to \Gamma(T^r_s\mathcal{S}).$$



(a) 空间速度场和对流速度场

(b) 交换图

图 3：物体速度场的空间表示 $v_t \in \Gamma(T\mathcal{S})$和对流表示$\hat{v}_t \in \Gamma(T\mathcal{B})$，以及它们对应的交换图。

我们将 g 称为空间度量，将 ∇ 称为空间联络。

每个构形 $\varphi_t \in \mathscr{C}$ 都会在 $\mathcal{B}$ 上诱导出一个黎曼度量结构，其特征为

$$\hat{g} : \Gamma(T\mathcal{B}) \times \Gamma(T\mathcal{B}) \to C^\infty(\mathcal{B}), \qquad \hat{\nabla} : \Gamma(T\mathcal{B}) \times \Gamma(T^p_q\mathcal{B}) \to \Gamma(T^p_q\mathcal{B}),$$

其中$\hat{g} := \varphi_t^*(g)$ 表示对流度量，其定义满足

$$\hat{g}(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = g(\varphi_{t,*}\hat{u}_1, \varphi_{t,*}\hat{u}_2) \circ \varphi_t, \qquad \forall \hat{u}_1, \hat{u}_2 \in \Gamma(T\mathcal{B}), \tag{3}$$

$\hat{\nabla}$ 是与$\hat{g}$相对应的列维-奇维塔联络。对于向量场的情形（即 $p = 1$， $q = 0$），$\hat{\nabla}$ 由下式给出：

$$\hat{\nabla}_{\hat{u}_1}\hat{u}_2 = \varphi_t^*(\nabla_{(\varphi_{t,*}\hat{u}_1)}\varphi_{t,*}\hat{u}_2), \qquad \forall \hat{u}_1, \hat{u}_2 \in \Gamma(T\mathcal{B}). \tag{4}$$

按照通常的方式，利用莱布尼茨法则 [21, 第 6 节3]，可将定义（4）推广到更一般的张量丛。我们用 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 表示 $\mathcal{B}$ 上所有黎曼度量$\hat{g}$ 的集合；正如后文将要说明的，这一集合在有限应变理论中起着重要作用。

*Remark 1（$\mathcal{B}$)*上的常量度量

需要注意的是，从技术角度而言，区分具有其内在结构的抽象物体流形与它在环境空间[3]中的观测结果，颇有启发意义。为此，对于给定的嵌入 $\varphi_0 : \mathcal{B} \to \mathscr{A}$，不应将 $\mathcal{B}$ 等同于某个参考构形 $\varphi_0(\mathcal{B})$。

在许多关于非线性弹性力学的几何处理方法中，物体流形都配备了一个常黎曼结构，在 [5,22,23,24]中记作 G。事实上，这个度量继承自 $\mathscr{A}$，这一点可由下式看出：

$$G \equiv \hat{g}_0 := \varphi_0^*(g),$$

因此，它是一个非内禀量，取决于参考构形的任意选择 φ_0。

这个常量度量 G 通常只出现在物质表示中，而它的存在实际上给理论增添了不必要的歧义。例如，G 有时用于构造对流描述中变量的张量变体（即升高或降低指标），

这使其不具内禀性。更容易造成歧义的是，人们通常假定φ_0是某种恒等映射（在不同空间之间），因此$\mathcal{B}$恒等于φ_0（$\mathcal{B}$），进而G与g相同，这毫无道理!

正如我们将在本文中展示的那样，无需在 $\mathcal{B}$ 上引入这种额外结构，也可以表述非线性弹性的控制方程。与更常用的强度变量相比，我们采用广延变量，并将在后文展示，甚至可以用内禀方式描述物质表示。

空间张量场使用(g,∇)，对流张量场使用$(\hat{g},\hat{\nabla})$；而物质表示中出现的两点张量所用的类似对象则为

$$\tilde{g}:\Gamma(\varphi^*T\mathcal{S})\times\Gamma(\varphi^*T\mathcal{S})\to C^\infty(\mathcal{B}),\qquad \tilde{\nabla}:\Gamma(T\mathcal{B})\times\Gamma(T^p_q\mathcal{B}\otimes\varphi^*T^r_s\mathcal{S})\to\Gamma(T^p_q\mathcal{B}\otimes\varphi^*T^r_s\mathcal{S}).$$

材料度量 $\tilde{g}$ 由构形 $\varphi_t\in\mathscr{C}$ 在 $\mathcal{B}$ 上诱导，并定义为$\tilde{g}:=\varphi^*_{t,b}(g)$，使得

$$\tilde{g}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)=g(\tilde{u}_1\circ\varphi_t^{-1},\tilde{u}_2\circ\varphi_t^{-1})\circ\varphi_t,\qquad\forall\tilde{u}_1,\tilde{u}_2\in\Gamma(\varphi^*T\mathcal{S}).\tag{5}$$

˜此外，每个 φ_t 都会在 $\mathcal{B}$ 上诱导出联络 ∇，从而可以沿 $\mathcal{B}$ 上的真正向量场对两点张量进行协变微分。对于映射 φ_t 上的向量场情形（即 $p=q=s=0$, $r=1$），$\tilde{\nabla}$ 仅利用空间联络 ∇ 构造如下:

$$\tilde{\nabla}_{\hat{u}}\tilde{w}:=\varphi^*_{t,b}(\nabla_{(\varphi_{t,*}\hat{u})}(\tilde{w}\circ\varphi_t^{-1})),\qquad\forall\hat{u}\in\Gamma(T\mathcal{B}),\tilde{w}\in\Gamma(\varphi^*T\mathcal{S}).\tag{6}$$

另一方面，将定义 (6) 推广到一般张量丛需要对流联络 ˆ ∇ [25]。例如，对于情形 $p=r=1$, $q=s=0$，我们有 $\tilde{\nabla}_{\hat{u}}\tilde{P}\in\Gamma(T\mathcal{B}\otimes\varphi^*T\mathcal{S})$ 的定义如下:

$$\tilde{\nabla}_{\hat{u}}\tilde{P}(\hat{\alpha},\tilde{\beta}):=\hat{u}(\tilde{P}(\hat{\alpha},\tilde{\beta}))-\tilde{P}(\hat{\nabla}_{\hat{u}}\hat{\alpha},\tilde{\beta})-\tilde{P}(\hat{\alpha},\tilde{\nabla}_{\hat{u}}\tilde{\beta}),\tag{7}$$

对于任意 ˆ$u\in\Gamma(T\mathcal{B})$, ˆ$\alpha\in\Gamma(T^*\mathcal{B})$ $\tilde{\beta}\in\Gamma(\varphi^*T^*\mathcal{S})$。在弹性力学中，式 (6) 用于对物质速度场进行协变微分，而式 (7) 用于定义第一类皮奥拉-基尔霍夫应力张量场的散度。

*Remark 2（*材料度量与联络*）*

i) 虽然$\hat{g}_t\in\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{B}$ 上一个“真正的”时间依赖黎曼度量，且 ˆ∇ 是其对应的列维-奇维塔联络，但 $\tilde{g}$ 不是 $\mathcal{B}$ 上的黎曼度量， ∇ 也不是 $\tilde{g}$ 的列维-奇维塔联络。

˜ii) 在式 (7) 中将 ∇ 推广到高阶张量场时，需要在 $\mathcal{B}$ 上引入对流ˆ联络 ∇。原则上，可以使用与当前度量$\hat{g}_t:=\varphi_t^*(g)$ [25] 相关的时变联络 (4)，也可以使用与参考度量 $G:=\varphi_0^*(g)$ [24,5] 相关的常联络（定义方式类似于式 (4)，但改用 φ_0）。前一种做法能够实现完全内蕴的描述，但会导致对流表示与物质表示相混淆。因此，文献中的˜标准做法是使用参考度量 G来推广 ∇。

iii）我们基于丛值形式的表述有一项重要优势：与（7）相比，我们将以另一种方式把（6）的定义扩展到高阶张量场，

而且不需要 $\mathcal{B}$ 的度量结构。这一点将在备注 6 和 12 中进一步讨论。

上述每个度量都会诱导标准的降指标（♭ 映射）和升指标（♯ 映射）运算：将每个向量场对应到唯一的余向量场，即余切丛的一个截面，我们称之为 1-形式。根据线性性，这些运算也可扩展到任意张量场。物理变量的张量变体在一般的几何力学中频繁出现。例如，与空间、对流和物质速度场相对应的 1-形式分别定义为

$$\begin{aligned} v^\flat(u) &:= g(v,u) \in C^\infty(\mathcal{S}), && \forall u \in \Gamma(T\mathcal{S}) \\ \hat{v}^\flat(\hat{u}) &:= \hat{g}(\hat{v},\hat{u}) \in C^\infty(\mathcal{B}), && \forall \hat{u} \in \Gamma(T\mathcal{B}) \\ \tilde{v}^\flat(\tilde{u}) &:= \tilde{g}(\tilde{v},\tilde{u}) \in C^\infty(\mathcal{B}), && \forall \tilde{u} \in \Gamma(\varphi^* T\mathcal{S})。 \end{aligned}$$

略去符号使用上的区别，我们将相应的降指标（♭）和升指标（♯）映射作用于 g、$\hat{g}$ 和 $\tilde{g}$ 时，均用相同的符号表示，具体所指可由上下文判断。不过，如果要明确指出所用的度量，我们将采用记号 $v^\flat = g \cdot v$, $\hat{v}^\flat = \hat{g} \cdot \hat{v}$, $\tilde{v}^\flat = \tilde{g} \cdot \tilde{v}$，反之则记为$v = g^{-1} \cdot v^\flat$, $\hat{v} = \hat{g}^{-1} \cdot \hat{v}^\flat$, $\tilde{v} = \tilde{g}^{-1} \cdot \tilde{v}^\flat$.

2.3 基于联络的运算

联络在连续介质力学中发挥着重要作用，可用于定义许多关键的物理量和运算。特别是，接下来将介绍：1）协变微分，2）散度算子，以及 3）物质导数。

2.3.1 Covariant differential and divergence of tensor fields

任意张量场 $P \in \Gamma(T^r_s\mathcal{S}), \hat{P} \in \Gamma(T^p_q\mathcal{B})$, 和 $\tilde{P} \in \Gamma(T^p_q\mathcal{B} \otimes \varphi^* T^r_s\mathcal{S})$。$\hat{}$ $\tilde{}$一个重要的观察是，沿任意 $u \in \Gamma(T\mathcal{S})$ 和 $\hat{u} \in \Gamma(T\mathcal{B})$ 的协变导数 $\nabla_u P, \nabla_{\hat{u}} P$ 和 $\nabla_{\tilde{u}} P$，仅取决于在作为截面执行运算的点处 u 和 $\hat{u}$ 的取值，而与其附近任何点的取值无关（这与李导数运算不同）。因此，$\hat{}$ $\tilde{}$联络 $\nabla, \hat{\nabla}, \tilde{\nabla}$ 可以解释为微分算子

$$\begin{aligned} &\nabla : \Gamma(T^r_s\mathcal{S}) \to \Gamma(T^r_{s+1}\mathcal{S}) \\ &\hat{\nabla} : \Gamma(T^p_q\mathcal{B}) \to \Gamma(T^p_{q+1}\mathcal{B}) \\ &\tilde{\nabla} : \Gamma(T^p_q\mathcal{B} \otimes \varphi^* T^r_s\mathcal{S}) \to \Gamma(T^p_{q+1}\mathcal{B} \otimes \varphi^* T^r_s\mathcal{S}). \end{aligned} \tag{8}$$

在第 5 节中，我们将说明如何扩展这些联络，以定义作用于丛值形式的微分算子。

使用上述构造的一个重要物理量是速度梯度，它是将协变微分作用于速度场而定义的二阶张量场

[1] 同理，$\tilde{v}$ 并非真正的向量场，$\tilde{v}^\flat$ 也并非真正的 1-形式。

。速度梯度的空间、对流和物质表示分别记作

$$\nabla v \in \Gamma(T^*\mathcal{S} \otimes T\mathcal{S}), \qquad \hat{\nabla}\hat{v} \in \Gamma(T^*\mathcal{B} \otimes T\mathcal{B}), \qquad \tilde{\nabla}\tilde{v} \in \Gamma(T^*\mathcal{B} \otimes \varphi^* T\mathcal{S})$$

请注意，尽管 ∇v 和 $\hat{\nabla}\hat{v}$ 分别是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{B}$上的 (1,1) 型张量场，但 $\tilde{\nabla}\tilde{v}$是 φ上的 $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ 两点张量场。

$\hat{}$ 根据定义，联络 ∇ 和 ∇ 是分别与度量 g 和$\hat{g}$ 相容的 Levi-Civita 联络，使得 $\nabla g = 0$ 和 $\nabla\hat{g} = 0$ 在所有点处成立。$\tilde{}$类似地，很容易验证 ∇ 和 $\tilde{g}$ 的相容性，正如我们将在第 2.4 节中展示的那样。这种相容性的一个重要结果是，指标升降运算与协变微分[5, Pg. 80]可交换。例如，上述速度梯度的协变形式等价于其对应的一形式速度场的协变微分。空间、对流和物质协变速度梯度分别为

$$\begin{aligned}(\nabla v)^\flat &= \nabla v^\flat \in \Gamma(T_2^0\mathcal{S}),\\ (\hat{\nabla}\hat{v})^\flat &= \hat{\nabla}\hat{v}^\flat \in \Gamma(T_2^0\mathcal{B}),\\ (\tilde{\nabla}\tilde{v})^\flat &= \tilde{\nabla}\tilde{v}^\flat \in \Gamma(T^*\mathcal{B} \otimes \varphi^* T^*\mathcal{S}).\end{aligned} \tag{9}$$

这些协变速度梯度将在后续推导中发挥重要作用。一个重要性质是，可以将 $\nabla v^\flat$ 和 $\hat{\nabla}\hat{v}^\flat$分解为对称部分和反对称部分，如下列命题所示。

命题 **1** *The covariant differential of* $v^\flat \in \Gamma(T\mathcal{S})$ *and*$\hat{v}^\flat \in \Gamma(T\mathcal{B})$ *can be expressed as*

$$\nabla v^\flat = \mathrm{sym}(\nabla v^\flat) + \mathrm{skew}(\nabla v^\flat) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_v g + \frac{1}{2}\mathrm{d}v^\flat, \tag{10}$$

$$\hat{\nabla}\hat{v}^\flat = \mathrm{sym}(\hat{\nabla}\hat{v}^\flat) + \mathrm{skew}(\hat{\nabla}\hat{v}^\flat) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\hat{v}}\hat{g} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\hat{v}^\flat, \tag{11}$$

with $\mathcal{L}_v g \in \Gamma\ ST_2^0\mathcal{S}$ *and* $\mathcal{L}_{\hat{v}} g \in \Gamma\ ST_2^0\mathcal{B}$ *being symmetric* $0,2$ *tensor fields over*( ) ˆ ( ) ( ) ,,d ( ) $\mathcal{S}$ *and* $\mathcal{B}$ *respectively. Furthermore the 2-forms* $v^\flat \in \Omega^2\ \mathcal{S}\ \subset \Gamma\ T_2^0\mathcal{S}$ *and* $v^\flat \in$ ( ) dˆ$\Omega^2\ \mathcal{B}\ \subset \Gamma\ T_2^0\mathcal{B}$ *are considered as generic (0,2) tensor field in the equations above.* ( ) ( )

Using Cartan's homotopy (magic) formula

$$\mathcal{L}_u = \mathrm{d} \circ \iota_u + \iota_u \circ \mathrm{d}, \tag{12}$$

a corollary of the above identities is that

$$\nabla_v v^\flat = \mathcal{L}_v v^\flat - \frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_v v^\flat \tag{13}$$

$$\hat{\nabla}_{\hat{v}}\hat{v}^\flat = \mathcal{L}_{\hat{v}}\hat{v}^\flat - \frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^\flat. \tag{14}$$

Proof 请参阅附录10.3。

Remark 3 请注意，恒等式 (10) 在 [26] 中的项 $\frac{1}{2}\mathrm{d}v^\flat$ 前面是负号，而不是正号。这一差异源于定义 $\nabla v^\flat$ 时采用了相反的约定。我们将 ∇ 视为第一条腿，将 $v^\flat$ 视为第二条腿（见 *cf.* 表1）；而 [26] 中的作者则将 ∇ 视为第二条腿，将 $v^\flat$ 视为第一条腿。此外，恒等式 (10) 在 [10] 中也出现了，但缺少 $\frac{1}{2}$ 因子，这显然是不正确的。

对于任意空间张量场，其散度通过对 ∇P 的最后一个逆变指标和协变指标进行缩并来构造，其中 $r \geq 1, s \geq 0$。类似地，对于任意对流张量场 $\hat{P} \in \Gamma(T^p_q\mathcal{B})$，其散度将由 $\hat{\nabla}\hat{P}$ 构造，其中 $p \geq 1, q \geq 0$；而对于任意物质张量场 $\tilde{P} \in \Gamma\left(T^p_q\mathcal{B} \otimes \varphi^* T^r_s\mathcal{S}\right)$，其散度将由 $\tilde{\nabla}\tilde{P}$ 构造，其中 $p \geq 1, q \geq 0; r, s \geq 0$。我们分别将 P, $\hat{P}$ 和 $\tilde{P}$ 的散度记为

$$\operatorname{div}(P) \in \Gamma(T^{r-1}_s\mathcal{S}), \qquad \widehat{\operatorname{div}}(\hat{P}) \in \Gamma(T^{p-1}_q\mathcal{B}), \qquad \widetilde{\operatorname{div}}(\tilde{P}) \in \Gamma(T^{p-1}_q\mathcal{B} \otimes \varphi^* T^r_s\mathcal{S}).$$

本文中将出现的此类张量场示例包括空间速度和对流速度的散度 $\operatorname{div}(v) \in C^\infty(\mathcal{S})$ 以及 $\operatorname{div}(\hat{v}) \in C^\infty(\mathcal{B})$，此外还包括应力张量的散度。

2.3.2 Material time derivative

连续介质力学中另一个同样借助联络定义的重要量是物质时间导数，记为 D_t，它描述物质微元沿曲线 c_φ 运动时某个物理量的变化率。因此，D_t 用于描述双点张量场在物质表示下的变化率。可以通过沿曲线拉回空间联络，在几何上定义这种导数，这与黎曼流形上测地线方程的标准表述类似[7,27]。本文关注两种情形：物质速度的物质时间导数 $\tilde{v}_t$ 以及变形梯度 F_t。为方便读者，我们在附录 10.2 中给出了沿曲线的任意向量场这一情形的构造。

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个时间区间。对于任意固定点 $X \in \mathcal{B}$，构形映射 $\varphi_t : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ 定义了一条位于 $\mathcal{S}$ 中的曲线 $\varphi_X : I \to \mathcal{S}$。类似地，可以将物质速度视为映射 $\tilde{v}_X : I \to T\mathcal{S}$，使得 $\tilde{v}_X(t) = v_t(\varphi_X(t)) \in T_{\varphi_X(t)}\mathcal{S}$。因此，$\tilde{v}_X \in \Gamma(\varphi_X^* T\mathcal{S})$ 是映射 φ_X 上的一个向量场。此外，令 $\varphi'_X : I \to T\mathcal{S}$ 表示 φ_X 的切曲线。于是，物质时间导数 $D_t\tilde{v}_X \in \Gamma(\varphi_X^* T\mathcal{S})$ 定义为（见附录 10.2 中的 (99)）：

$$D_t\tilde{v}_X(t) := (\nabla_{\varphi'_X(t)} v)(\varphi_X(t)) \in T_{\varphi_X(t)}\mathcal{S}.$$

通过推广到 $\mathcal{B}$ 中的所有点，可以定义 $D_t\tilde{v}_t \in \Gamma(\varphi_t^* T\mathcal{S})$。

一个利用物质导数定义的关键量是与运动 φ_t 相关联的加速度向量场，在物质表示中记为 $\tilde{a}_t := D_t\tilde{v}_t \in \Gamma(\varphi_t^* T\mathcal{S})$。将加速度的空间表示和对流表示分别定义为 $a_t := \tilde{a}_t \circ \varphi_t^{-1} \in \Gamma(T\mathcal{S})$ 和 $\hat{a}_t := \varphi_t^*(a_t) \in \Gamma(T\mathcal{B})$，则有[23]

$$a_t = \partial_t v_t + \nabla_{v_t} v_t, \qquad \hat{a}_t = \partial_t \hat{v}_t + \hat{\nabla}_{\hat{v}_t} \hat{v}_t.$$

将物质时间导数推广到变形梯度 $F_t \in \Gamma(T^*\mathcal{B} \otimes \varphi_t^* T\mathcal{S})$ 以及更高阶的物质张量场，过程要复杂得多。请读者参阅 [28] 和 [5, 第 2.4 章，框 4.2]。稍后将用到的一个关键恒等式是：变形梯度的物质时间导数 $D_t F_t \in \Gamma(T^*\mathcal{B} \otimes \varphi_t^* T\mathcal{S})$ 等于物质速度梯度[28]

$$D_t F = \tilde{\nabla} \tilde{v} \in \Gamma(T^*\mathcal{B} \otimes \varphi^* T\mathcal{S}). \tag{15}$$

2.4 基于坐标的表达式

本文的动机是尽可能采用纯粹的无坐标几何构造来表述非线性弹性，但有时借助基于坐标的表达式理解某些恒等式并进行某些计算也很有启发性。此外，基于坐标的表达式对于计算也必不可少。尽管如此，仍需谨慎，因为纯粹基于坐标的构造可能会误导我们。我们认为这两种处理方式相辅相成，正确地在两者之间切换才能获得最大益处。

通过引入坐标函数 $\boldsymbol{X}^I\colon\ \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{x}^i\colon\ \mathcal{V} \subset \mathcal{S} \to \mathbb{R}$，可以对运动进行基于坐标的描述。对于 $i, I \in \{1, \cdots, 3\}$，这些函数分别为每个物理点 $X \in \mathcal{B}$ 和 $x \in \mathcal{S}$ 赋予坐标 $(X^1, X^2, X^3) \in \mathbb{R}^3$ 和 $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$。这些坐标系分别在切空间 $T_x\mathcal{S}$ 和 $T_X\mathcal{B}$ 上诱导出基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial X^I}\}$，并在余切空间 $T_x^*\mathcal{S}$ 和 $T_X^*\mathcal{B}$ 上诱导出对偶基 $\{\mathrm{d}x^i\}$ 和 $\{\mathrm{d}X^I\}$。下文中，我们将对重复指标采用爱因斯坦求和约定。

一般而言，不必使用这类坐标诱导基，也可以采用任意基。在本文中，我们将采用这种更一般的做法。具体而言，通用张量场 $P \in \Gamma(T_1^1\mathcal{S})$、$\hat{P} \in \Gamma(T_1^1\mathcal{B})$ 和 $\tilde{P} \in \Gamma(T_1^1\mathcal{B} \otimes \varphi^* T_1^1\mathcal{S})$ 在点 $x \in \mathcal{S}$ 和 $X \in \mathcal{B}$ 处的局部表示为

$$\begin{aligned}
P|_x &= P_j^i(x)\ e_i|_x \otimes e^j|_x \\
\hat{P}|_X &= \hat{P}_J^I(X)\ E_I|_X \otimes E^J|_X \\
\tilde{P}|_X &= \tilde{P}_{Jj}^{Ii}(X)\ E_I|_X \otimes E^J|_X \otimes e_i|_{\varphi(X)} \otimes e^j|_{\varphi(X)},
\end{aligned}$$

其中，$\{e_i|_x\}$ 和 $\{E_I|_X\}$ 分别表示 $T_x\mathcal{S}$ 和 $T_X\mathcal{B}$ 的任意基，而 $\{e^i|_x\}$ 和 $\{E^I|_X\}$ 表示它们相应的对偶基，其配对为克罗内克δ符号：$e^j|_x(e_i|_x) = \delta_i^j$ 和 $E^J|_X(E_I|_X) = \delta_I^J$. 我们用 $P_j^i \in C^\infty(\mathcal{S})$ 和 $\hat{P}_J^I$，$\tilde{P}_{Jj}^{Ii} \in C^\infty(\mathcal{B})$ 表示张量场在任意基下的分量函数。

需要注意的是，与空间和对流张量场的基底不同，物质张量场的基底具有部分 φ 依赖性（因此也具有时间依赖性）。这是一个基本性质，这意味着在定义物质量的时间导数（*cf.* 第 2.3 节）以及在不同坐标表示之间进行转换时，必须谨慎处理。

截至目前引入的运动学量局部表达式汇总见表1。为简化记号，书写局部表达式时，我们将省略时间和基点依赖关系，除非有必要。

	对流	物质	空间
度量	$\hat{g}=\hat{g}_{IJ}E^I\otimes E^J$	$\tilde{g}=\tilde{g}_{ij}e^i\|_\varphi\otimes e^j\|_\varphi$	$g=g_{ij}e^i\otimes e^j$
速度	$\hat{v}=\hat{v}^I E_I$	$\tilde{v}=\tilde{v}^i e_i\|_\varphi$	$v=v^i e_i$
速度 1-形式	$\hat{v}^\flat=\hat{v}_I E^I$ $\hat{v}_I:=\hat{g}_{IJ}\hat{v}^J$	$\tilde{v}^\flat=\tilde{v}_i e^i\|_\varphi$ $\tilde{v}_i:=\tilde{g}_{ij}\tilde{v}^j$	$v^\flat=v_i e^i$ $v_i:=g_{ij}v^j$
速度 梯度	$\hat{\nabla}\hat{v}=\hat{\nabla}_I\hat{v}^J E^I\otimes E_J$ $\hat{\nabla}_I\hat{v}^J:=\frac{\partial \hat{v}^J}{\partial X^I}+\hat{\Gamma}^J_{IK}\hat{v}^K$	$\tilde{\nabla}\tilde{v}=\tilde{\nabla}_I\tilde{v}^i E^I\otimes e_i\|_\varphi$ $\tilde{\nabla}_I\tilde{v}^i:=\frac{\partial\tilde{v}^i}{\partial X^I}+F^j_I(\Gamma^i_{jk}\circ\varphi)\tilde{v}^k$	$\nabla v=\nabla_i v^j e^i\otimes e_j$ $\nabla_i v^j:=\frac{\partial v^j}{\partial x^i}+\Gamma^j_{ik}v^k$
协变 速度梯度	$\hat{\nabla}\hat{v}^\flat=\hat{\nabla}_I\hat{v}_J E^I\otimes E^J$ $\hat{\nabla}_I\hat{v}_J:=\frac{\partial \hat{v}_J}{\partial X^I}-\hat{\Gamma}^K_{IJ}\hat{v}_K$	$\tilde{\nabla}\tilde{v}^\flat=\tilde{\nabla}_I\tilde{v}_i E^I\otimes e^i\|_\varphi$ $\tilde{\nabla}_I\tilde{v}_i:=\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial X^I}-F^j_I(\Gamma^k_{ij}\circ\varphi)\tilde{v}_k$	$\nabla v^\flat=\nabla_i v_j e^i\otimes e^j$ $\nabla_i v_j:=\frac{\partial v_j}{\partial x^i}-\Gamma^k_{ij}v_k$
加速度	$\hat{a}=\hat{a}^J E_J$ $\hat{a}^J:=\partial_t\hat{v}^J+\hat{v}^I\hat{\nabla}_I\hat{v}^J$	$\tilde{a}=\tilde{a}^j e_j\|_\varphi$ $\tilde{a}^j:=\partial_t\tilde{v}^j+(\Gamma^j_{ik}\circ\varphi)\tilde{v}^i\tilde{v}^k$	$a=a^j e_j$ $a^j:=\partial_t v^j+v^i\nabla_i v^j$
速度 散度	$\widehat{\mathrm{div}(\hat{v})}=\hat{\nabla}_I\hat{v}^I$		$\mathrm{div}(v)=\nabla_i v^i$

表1：运动学量的局部坐标表达式

切映射 $F:=T\varphi_t$：$T\mathcal{B}\to T\mathcal{S}$ 通常称为变形梯度，记作 F，其逆映射 F^{-1} 在拉回和推前运算的坐标表达式中起着关键作用。在局部坐标图中，F 和 F^{-1} 分别由该坐标图中 φ_t 和 φ_t^{-1} 各分量偏导数构成的雅可比矩阵给出：

$$F|_X=F^i_I(X)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi_t(X)}\otimes \mathrm{d}X^I|_X, \tag{16}$$

$$F^{-1}|_x=(F^{-1})^I_i(x)\left.\frac{\partial}{\partial X^I}\right|_{\varphi_t^{-1}(x)}\otimes \mathrm{d}x^i|_x, \tag{17}$$

其中 $F^i_I(X):=\frac{\partial\varphi^i_t}{\partial X^I}(X)$ and $(F^{-1})^I_i(x):=\frac{\partial(\varphi_t^{-1})^I}{\partial x^i}(x)$ 而

$$\varphi^i_t:=\boldsymbol{x}^i\circ\varphi_t:\mathcal{B}\to\mathbb{R},\qquad (\varphi_t^{-1})^I:=\boldsymbol{X}^I\circ\varphi_t^{-1}:\mathcal{S}\to\mathbb{R}.$$

φ^i_t 的时间导数等于坐标图诱导基中的物质速度场分量，即 $\tilde{v}^i(X):=\frac{\partial\varphi^i_t}{\partial t}(X)$。在一般基底中，$F$、$F^{-1}$ 和 $\tilde{v}$ 的分量与上述定义的分量之间遵循通常的张量变换规则。

利用 F 和 F^{-1}，我们现在可以将对流、物质和空间表示联系起来，如下所示：在局部坐标中，三个度量的分量之间的关系为

$$\hat{g}_{IJ}=F^i_I F^j_J\tilde{g}_{ij},\qquad \tilde{g}_{ij}=g_{ij}\circ\varphi_t.$$

速度的分量 v，$\hat{v}$，和 $\tilde{v}$ 之间的关系为

$$v^i=\tilde{v}^i\circ\varphi_t^{-1},\qquad \hat{v}^I=((F^{-1})^I_i\circ\varphi_t)\tilde{v}^i=((F^{-1})^I_i\circ\varphi_t)(v^i\circ\varphi_t).$$

虽然速度一形式的分量 $v^\flat,\hat{v}^\flat$ 和 $\tilde{v}^\flat$ 之间存在如下关系

$$v_i=\tilde{v}_i\circ\varphi_t^{-1},\qquad \hat{v}_I=F^i_I\tilde{v}_i=F^i_I(v_i\circ\varphi_t).$$

此外，很容易通过局部分量验证

$$\tilde{g}(\tilde{v},\tilde{v}) = \tilde{g}_{ij}\tilde{v}^i\tilde{v}^j = \tilde{g}_{ij}F^i_I F^j_J \hat{v}^I\hat{v}^J = \hat{g}_{IJ}\hat{v}^I\hat{v}^J = \hat{g}(\hat{v},\hat{v}). \tag{18}$$

基于 ∇ 和 $\hat{\nabla}$ 的运算在坐标图中的局部表达式，其关键要素是分别与空间度量 g 和对流度量 $\hat{g}$ 相关联的克里斯托费尔符号 Γ^i_{jk} 和 $\hat{\Gamma}^I_{JK}$。例如，表1分别展示了 ∇ 和 $\hat{\nabla}$ 在 v，$v^\flat$ 和 $\hat{v}$，$\hat{v}^\flat$ 上的应用。另一方面，处理材料联络时需要谨慎；通常，材料联络除 ∇ 和 ∇ 外，还涉及变形梯度 F，如式（6-7）所示。例如，表1中列出了 $\tilde{\nabla}\tilde{v}$ 和 $\tilde{\nabla}\tilde{v}^\flat$ 的局部表达式，其中此前在式（7）中引入的三阶物质张量场 $\tilde{\nabla}\tilde{P} \in \Gamma(T^1_1\mathcal{B}\otimes\varphi^*T\mathcal{S})$ 具有如下局部分量

$$\tilde{\nabla}_J\tilde{P}^{Ij} = \frac{\partial\tilde{P}^{Ij}}{\partial X^J} + \tilde{P}^K{}_j\hat{\Gamma}^I_{JK} + \tilde{P}^I{}_k(\Gamma^j_{ik}\circ\varphi)F^i_J. \tag{19}$$

如注2中所述，在处理物质变量时，通常使用由参考度量 G 导出的、与时间无关的克里斯托费尔符号 $\hat{\Gamma}^I_{JK} := \hat{g}_0$。这样可以避免混淆对流表示和物质表示。

$\hat{}$ 联络 ∇ 和 ∇ 分别与度量 g 和 $\hat{g}$ 自然相容，因此在任意一点都有 $\nabla_k g_{ij} = 0$ 和 $\nabla_K\hat{g}_{IJ} = 0$。$\tilde{}$ 类似地，由于 $\nabla_K\tilde{g}_{ij} = F^k_K(\nabla_k g_{ij}\circ\varphi) = 0.$，很容易验证 ∇ 和 $\tilde{g}$ 的相容性。这种相容性的重要结果是，指标升降运算与协变微分可交换 [5,Pg。 80]因此，我们有

$$\nabla_j v_i = \nabla_j(g_{ik}v^k) = v^k\nabla_j(g_{ik}) + g_{ik}\nabla_j v^k = g_{ik}\nabla_j v^k,$$

$\hat{}$ $\tilde{}$，同理对于 $\nabla_J\hat{v}_I$ 和 $\nabla_J\tilde{v}_i$。

3 内禀变形运动学

现在我们转而关注变形运动学及其几何表述。本节着重说明黎曼度量空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 的重要作用，以及它如何以内禀方式表示物体的变形空间。这使我们能够定义应变和应变率的几何表示。联系构形空间 $\mathscr{C}$ 与 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 的主丛结构将在第8节中讨论。

3.1 变形空间

类似于 $\mathbb{R}^3$ 中的经典弹簧，弹性体的应变，粗略地说，是任意两个变形状态之间的差异。根据注 1，距离的测量以及几何变形，都是通过物体从环境空间 $\mathscr{A}$ 继承的度量 g 来实现的。在每一点 $x\in\mathcal{S}$，g 在 x 处的值决定了附着于该点的任意两个向量的内积，从而在其邻域内建立起几何结构。唯一内在的方式是

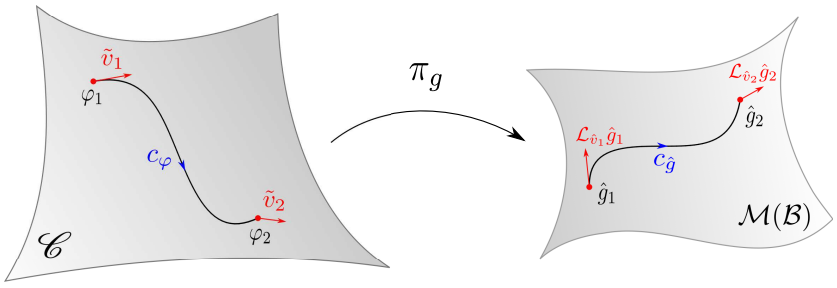


图 4：使用映射 π_g，将弹性体的运动分别示意为 $\mathscr{C}$ 上的曲线和 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$上的曲线。

在 $\mathcal{B}$ 上直接实现相同操作的方法，是通过 φ 对 g 的拉回，这会产生一种依赖于 φ 的机制，用于测量材料线段 [4] 的长度和角度。因此，黎曼度量 $\hat{g} := \varphi^*(g)$ $\in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ 是内在的变形状态，而黎曼度量空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 则是相应的变形空间。

状态空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 因其在弹性力学几何表述中的重要性，已在文献中得到广泛研究。感兴趣的读者可参阅 [4,6,29,30,7]。研究表明，该空间具有无限维流形结构，并且是无限维向量空间 $\Gamma(ST_2^0\mathcal{B})$ 中的一个开凸集，其中包含 $\mathcal{B}$ 上的对称 (0，2) 阶张量场。此外，研究还表明， $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 本身是一个具有常负曲率 [6] 的黎曼流形。

考虑映射

$$\begin{aligned}\pi_g : \mathscr{C} &\to \mathcal{M}(\mathcal{B})\\ \varphi_t &\mapsto \varphi_t^*(g) =: \hat{g}_t,\end{aligned}$$

该映射为任意构形 φ_t 关联一个定义在 $\mathcal{B}$ 上的黎曼度量。参见图 4，构形空间 $\mathscr{C}$ 中的一条曲线 $c_\varphi : t \mapsto \varphi_t$ （表示弹性体的一种运动）会在度量空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 中诱导出曲线 $c_{\hat{g}} : t \mapsto \hat{g}_t = \pi_g(\varphi_t)$。曲线 $c_{\hat{g}}$ 在任意点 $\hat{g}_t \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ 处的切向量，可以利用 π_g 的切映射计算；或者，也可以利用李导数的性质计算，得到

$$T_{\hat{g}_t}\mathcal{M}(\mathcal{B}) \ni \partial_t \hat{g}_t = \partial_t(\varphi_t^* g) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{v_t} g) = \mathcal{L}_{(\varphi_t^* v_t)}\varphi_t^* g = \mathcal{L}_{\hat{v}_t}\hat{g}_t. \tag{20}$$

因此，切空间 $T_{\hat{g}_t}\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 可自然地与向量空间 $\Gamma(ST_2^0\mathcal{B})$ 等同。此外，可以证明切丛 $T\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 实际上是平凡的 [7],，即它等价于乘积空间 $T\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}) \times \Gamma(ST_2^0\mathcal{B})$。这与构形空间的切丛 $T\mathscr{C}$ 不同，后者并非平凡的 [23]。在第8节中，我们将说明映射 π_g 如何从 c_φ中剔除刚体运动，使得曲线 $c_{\hat{g}}$ 仅表示物体的变形，从而形成将 $\mathscr{C}$ 与 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$联系起来的主丛结构。

Remark 4 注意，在黎曼度量空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 中的任意一点 $\hat{g}$，都可以任意改变切向量 $\partial_t\hat{g}$ 的张量类型。因此，原则上

也可以将 $T_{\hat{g}}\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 与向量空间 $\Gamma(ST_0^2\mathcal{B})$ 或 $\Gamma(T_1^1\mathcal{B})$ 等同起来。稍后我们将利用这种任意性，将 $T_{\hat{g}}\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 与向量值形式等同，从而将 $T_{\hat{g}}^*\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 与余向量值形式等同。

3.2 对数应变度量

通过上述构造，现在可以将应变定义为任意两个状态 $\hat{g}_1$，$\hat{g}_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ 之间的相对变形。然而，变形空间$\mathcal{M}(\mathcal{B})$并不具有向量空间结构。例如，$\mathcal{M}(\mathcal{B})$中度量的正定性在减法运算下并不封闭 [6]。因此，不能简单地将任意有限应变定义为 $\hat{g}_1$ 和 $\hat{g}_2$ 之差；例如，经典的格林–圣维南应变张量场或欧拉–阿尔曼西应变张量场仅适用于（无穷小）应变 [6]。

应变的正确几何定义是 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 上 $\hat{g}_1$ 和 $\hat{g}_2$ 之间的“最短运动”，即连接这两点的测地线。文献 [4,29,7] 已证明，这一构造导出了如下定义的对数应变度量：

$$\hat{\delta}(\hat{g}_1, \hat{g}_2) := \frac{1}{2}\mathrm{Log}_{\hat{g}_1}(\hat{g}_2),$$

其中 $\mathrm{Log}_{\hat{g}_1}$ 表示黎曼指数映射 $\mathrm{Exp}_{\hat{g}_1} : T_{\hat{g}_1}\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$的逆映射，它对应于从点 $\hat{g}_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$出发的测地流。

现在，若我们将注意力转回由曲线 $c_\varphi : t \to \varphi_t$ 和 $c_{\hat{g}} : t \to \hat{g}_t$描述的弹性体运动，则可在任意 t 处将对流应变张量场定义为

$$\hat{\delta}_t := \frac{1}{2}\mathrm{Log}_{\hat{g}_0}(\hat{g}_t),$$

它表示当前状态 $\hat{g}_t$ 与参考状态$\hat{g}_0$之间的相对变形。然而，必须注意，在流形 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 上，并不存在一个优先选定的 $\hat{}$ 变形状态 $\hat{g}_0$，可据此以内禀方式定义应变 δ_t。一种常见做法是选取 $\hat{g}_0$ 作为 $t = 0$处对流度量的初始值。

在超弹性中，通常先利用 δ_t 定义应变能泛函，再将应力定义为该泛函关于 $\hat{} \delta_t$ 的某种“梯度”（即 Doyle-Erickson公式的对流对应形式）。然而，利用 δ_t 或$\hat{g}_t$ 定义的能量泛函仅相差一个常数偏移量，该偏移量对应于参考状态$\hat{g}_0$的应变能。另一方面，两种情况下的应力完全相同。因此，在定义应力的本构关系时，正如我们稍后将要说明的，只需使用变形状态$\hat{g}_t$即可。

3.3 应变率

最后，我们给出应变率(1,1)张量场；它们在对流表示和空间表示中分别记为

$$\hat{\varepsilon}_t \in \Gamma(T_1^1\mathcal{B}), \qquad \varepsilon_t \in \Gamma(T_1^1\mathcal{S}).$$

其对应的二阶协变变体为

$$\hat{\varepsilon}_t^\flat := \hat{g}_t \cdot \hat{\varepsilon}_t = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\hat{v}_t}\hat{g}_t \in \Gamma(ST_2^0\mathcal{B}), \qquad \varepsilon_t^\flat := g \cdot \varepsilon_t = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{v_t}g \in \Gamma(ST_2^0\mathcal{S}),$$

它们是对称二阶张量场。由式（10-11）可见，应变率变量 $\hat{}\varepsilon_t^\flat$ 和 $\varepsilon_t^\flat$ 也分别等于协变速度梯度 $\hat{}\nabla\hat{}v_t^\flat$ 和 $\nabla v_t^\flat$的对称部分。此外，根据注 4，我们可以从技术上将 $\hat{}\varepsilon_t^\flat$ 和 $\hat{}\varepsilon_t$ 都视为点 $\hat{g}_t$ 处、位于 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$中的切向量。

$\hat{}\varepsilon_t^\flat$ 和$\varepsilon_t^\flat$ 之间一个有趣的区别是，只有对流变量是某个变形状态变量的时间导数：

$$\partial_t \hat{g}_t = 2\hat{\varepsilon}_t^\flat = 2\,\mathrm{sym}(\hat{\nabla}\hat{v}_t^\flat), \tag{21}$$

而其空间对应量则不是如此。在物质表示中，情况更加有趣，因为由于速度梯度 $\tilde{\nabla}\tilde{v}_t^\flat$ 在几何上属于双腿张量，其对称性从一开始就无法定义。因此，不存在物质应变率张量场。

总之，我们得出结论：只有在对流表示中，才具有恰当的几何变形状态；该状态及其变化率共同编码了对变形进行内蕴描述所需的信息。稍后在讨论将应力与变形运动学联系起来的本构方程时，我们将在第 6.5 节回到这一问题。

4 质量和体积性质

现在我们来关注与抽象流形 $\mathcal{B}$ 相关联的质量结构。这一结构为弹性体的运动学量与动力学量建立了联系，也是本文随后提出的非线性弹性内蕴表述的基础。因此，我们将在本节中对此进行详细讨论。

4.1 质量、体积和质量密度

按照 [30], ，我们通过一个顶形式 $\hat{}\mu \in \Omega^3(\mathcal{B})$ 为 $\mathcal{B}$ 定义相应的质量测度，并将其称为物体（对流）质量形式。该顶形式为任意 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ 指定一个非负标量 $\mathrm{m}(\mathcal{U})$，用于量化 $\mathcal{U}$ 的物理质量，其定义如下：

$$\mathrm{m}(\mathcal{U}) := \int_{\mathcal{U}} \hat{\mu} \in \mathbb{R}^+.$$

对于每个嵌入 φ_t，在 $\mathcal{S}$ 上都有一个诱导的时变质量形式，其定义为

$$\mu_t := \varphi_{t,*}(\hat{\mu}) \in \Omega^3(\mathcal{S}),$$

因此，利用变量替换定理，我们有

$$\int_{\varphi_t(\mathcal{U})} \mu_t = \int_{\mathcal{U}} \hat{\mu} = \mathrm{m}(\mathcal{U}). \tag{22}$$

我们将 μ_t 称为空间质量形式。

值得注意的是，正如我们稍后将要展示的，要以内禀方式表述非线性弹性的控制方程，前述两种质量形式便已足够。$\mathcal{B}$ 的质量是一种基本物理属性，不受其在环境空间 $\mathscr{A}$中的构形影响。因此，它被赋予 $\mathcal{B}$ *a priori* 作为一种额外结构，而非从 $\mathscr{A}$ 继承而来。另一方面，若要将质量形式$\hat{}\mu$ 和 μ_t 表示为标量密度，就需要引入体积测度，以便将这些标量质量密度定义为质量与体积之比。这种体积测度并非$\mathcal{B}$ 的内禀属性，因此必须通过嵌入从 $\mathscr{A}$ 继承。

鉴于其继承而来的度量结构，物体的任意构形 $\mathcal{S}$ 都有一个体积形式 $\omega_g \in \Omega^3(\mathcal{S})$，该形式由黎曼度量 g诱导。由于流形上的所有顶阶形式都彼此成比例，时间相关的空间质量密度函数 $\rho_t \in C^\infty(\mathcal{S})$便隐式定义为

$$\mu_t = \rho_t \omega_g. \tag{23}$$

同样，诱导度量 $\hat{}g_t = \varphi_t^*($ g $\omega_{\hat{g}_t} =$ $\varphi_t^*\ \omega_g \in \Omega^3\ \mathcal{B}$) 在 $\mathcal{B}$ 上诱导出体积形式 $\hat{}(\ )(\ )$，据此可以定义随时间变化的对流质量密度函数 $\hat{}\rho_t \in C^\infty(\mathcal{B})$，使得

$$\hat{\mu} = \hat{\rho}_t \hat{\omega}_{\hat{g}_t}. \tag{24}$$

空间质量密度与对流质量密度之间的关系为 $\hat{}\rho_t = \rho_t \circ \varphi_t$，这是通过将 (24) 与下式进行比较得出的

$$\hat{\mu} = \varphi_t^*(\mu) = \varphi_t^*(\rho_t \omega_g) = (\rho_t \circ \varphi_t)\varphi_t^*(\omega_g) = (\rho_t \circ \varphi_t)\hat{\omega}_{\hat{g}_t}. \tag{25}$$

现在有一个有趣的问题：上述质量顶形式和质量密度函数是否还有另一种内禀表示，可用于运动的物质表示? 答案是否定的！若要使用物质变量定义积分量（例如动能和应变能），那么质量顶形式 $\hat{}\mu$ 已足够，因为它允许在 $\mathcal{B}$ 上进行积分。为方便记号，在物质表示中使用时，我们将物体质量形式 $\hat{}\mu$ 记为 $\tilde{\mu}$，即 $\tilde{\mu} \equiv \hat{}\mu$。另一方面，由于 $\mathcal{B}$ 没有内禀体积形式，因此无法定义物质质量密度函数！原则上，可以在物质表示中也使用 $\hat{}\rho_t$。然而，如注2中所述，这种混用物质表示与对流表示的做法通常会避免。文献中常见的做法是使用参考构形 $\varphi_0(\mathcal{B})$，它在 $\mathcal{B}$ 上诱导出参考度量 $G := \varphi_0^*(g)$，进而诱导出体积形式 $\tilde{\omega}_G \in \Omega^3(\mathcal{B})$。利用这一额外结构，可以定义一个（与时间无关的）物质质量密度 $\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathcal{B})$，使得

$$\tilde{\mu} = \tilde{\rho}\tilde{\omega}_G. \tag{26}$$

使用 φ_t 的雅可比行列式，记为 $J_{\varphi_t} \in C^\infty(\mathcal{B})$，其定义如下：

$$\hat{\omega}_{\hat{g}_t} = \varphi_t^*(\omega_g) = J_{\varphi_t}\tilde{\omega}_G, \qquad \Longrightarrow \qquad J_{\varphi_t} = \det(F_t)\frac{(\det(g) \circ \varphi_t)}{\det(G)}, \tag{27}$$

可以得到物质质量密度与其他表示形式之间的标准关系：$\tilde{\rho} = J_{\varphi_t}\hat{}\rho_t = J_{\varphi_t}(\rho_t \circ \varphi_t)$，这是将 (27) 代入 (25) 并与 (26) 对比后得到的。表格总结了本节引入的质量和体积量。

	对流	物质	空间
质量形式 [M]	$\hat{\mu}$	$\tilde{\mu}$	μ_t
体积形式 [L^3]	$\hat{\omega}_{\hat{g}_t}$	$\tilde{\omega}_G$	ω_g
质量密度 [$\mathrm{M\,L}^{-3}$]	$\hat{\rho}_t$	$\tilde{\rho}$	ρ_t

表 2：质量和体积量的不同表示形式。时间依赖性用 t 下标表示，质量和长度的物理单位分别用 [M] 和 [L], 表示。

*Remark 5 (*定向与伪形式*)*

为了使式 (22) 中对物体质量的描述在物理上合理，要求对 $\hat{}\mu$ 和 μ_t 在各自定义域上的积分在定向改变时保持不变（例如，使用右手定则而非左手定则）。这就要求 $\hat{}\mu$ 和 μ_t 在定向反转时改变符号，从而使积分始终得到正的质量值。

由此得到两类微分形式：一类在定向反转时改变符号，另一类则不改变。我们将前者称为 *pseudo-forms*，后者称为 *true-forms*，沿用 [9]的说法。文献中还使用其他术语，包括 *outer-oriented* 和 *inner-oriented* 形式 [31,32] ，以及 *twisted* 和 *straight* 形式 [33]。于是，质量形式 $\hat{}\mu$ 和 μ_t 被要求为 *pseudo-forms*。这对前文介绍的体积形式同样成立。

物理量定向性质的这种区分通常被忽视。然而，对于保结构离散化，利用这种区分目前是一个活跃的研究领域。感兴趣的读者可参阅我们近期的工作 [34,35]。

4.2 质量与体积守恒

以下结果总结了运动的三种表示中的质量守恒。

命题 **2** *Let the curve $c_\varphi(t) \in \mathscr{C}$ denote a motion of the elastic body. Conservation of mass requires that along $c_\varphi(t)$ we have that*

$$\begin{aligned}
&\partial_t \tilde{\mu} = 0, && \partial_t \tilde{\rho} = 0 && \text{(material)}\\
&\partial_t \hat{\mu} = 0, && \partial_t \hat{\rho}_t + \hat{\rho}_t \widehat{\operatorname{div}}(\hat{v}_t) = 0 && \text{(convective)}\\
&\partial_t \mu_t + \mathcal{L}_{v_t}\mu_t = 0, && \partial_t \rho_t + \mathcal{L}_{v_t}\rho_t + \rho_t \operatorname{div}(v_t) = 0 && \text{(spatial)}
\end{aligned}$$

where $\widehat{\operatorname{div}}(\hat{v}_t) \in C^\infty(\mathcal{B})$ denotes the divergence of the convective velocity field and $\operatorname{div}(v_t) \in C^\infty(\mathcal{S})$ denotes the divergence of the spatial velocity field.

Proof 参见 [20,5]。 ■

以 μ_t 表示的质量守恒表达式指出，空间质量形式 μ_t 是运动中的一个对流量，而与之对应的质量密度ρ_t 则不是。此外，可以看出，对流

密度 $\hat{\rho}_t$ 取决于 $\hat{v}_t$ ，这解释了为什么如前所述，在物质表示中使用 $\hat{\rho}_t$ 并不合适。

在不可压缩弹性中，还有一个额外约束：沿着 $c_\varphi(t)$，对流体积形式保持恒定，并等于其在 $t = 0$ 处的值[2] 。因此，

$$0 = \partial_t \hat{\omega}_{\hat{g}_t} = \partial_t (J_{\varphi_t} \tilde{\omega}_G) = \partial_t \varphi_t^*(\omega_g) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{v_t}\omega_g) = \mathcal{L}_{\hat{v}_t}\hat{\omega}_{\hat{g}_t}.$$

由于 $\widehat{\mathcal{L}_{\hat{v}_t}\omega_{\hat{g}_t}} = \widehat{\mathrm{div}(\hat{v}_t)\omega_{\hat{g}_t}}$ 且 $\mathcal{L}_{v_t}\omega_g = \mathrm{div}(v_t)\omega_g$，不可压缩条件在对流、物质和空间表示中分别表示为

$$\widehat{\mathrm{div}}(\hat{v}_t) = 0, \qquad \partial_t J_{\varphi_t} = 0, \qquad \mathrm{div}(v_t) = 0.$$

因此，由命题 2 可知，在不可压缩弹性中，对流表示和物质表示中的质量形式、体积形式及质量密度均保持恒定。此外，若参考构形选为初始构形，它们彼此相同。另一方面，在空间表示中，质量形式、体积形式和质量密度会成为运动的随流量。

4.3 广延与强度物理量

从热力学角度看，任何物理系统的性质都可分为两类： *extensive* 和 *intensive* 性质。强度性质是指不取决于系统中物质量或系统大小的量。弹性体的强度量包括速度、速度梯度、加速度和质量密度。相反，广延性质的数值取决于其所描述系统的大小，例如弹性体的质量和体积。两个广延性质的比值通常是一个强度量（例如，质量密度是质量与体积之比）。

在我们的非线性弹性几何 formulation 中，区分内禀量与广延量至关重要。第 2 节和第 3 节引入的运动学量都属于内禀量。物体的质量属性将这些运动学量与动力学量联系起来，例如稍后将介绍的动量和应力。不过，在这里，可以选择用广延质量顶形式或内禀质量密度来表示物体的质量结构。前一种情况下，得到的动量和应力表示是广延的；后一种情况下，它们则是内禀的。常见的柯西应力张量、第一类和第二类皮奥拉-基尔霍夫应力张量，都是内禀应力表示的例子。

鉴于质量顶形式相较于质量密度所具有的内在性和技术优势，我们在本文中选择用广延量来表示动力学。我们将说明，这一选择如何使控制方程的表述完全具有内在性，并且相较于更常见的描述方式具有诸多技术优势。接下来，我们将讨论这一表述所需的外微分演算工具。

[2] 通常选作参考构形

5 外微分演算表述

文献中已有若干尝试，旨在以几何上一致的方式表述非线性弹性以及一般的连续介质力学。本文采用的方法是使用外微分演算来表示非线性弹性的控制方程，具体做法是将相应的物理变量表述为微分形式 [10,26]。与依赖张量场 [24], 、张量场密度 [25]，或张量分布 [30]，的其他方法相比，使用微分形式突显了物理变量的几何本质，这些变量与其在弹性体区域 $\mathcal{B}$及其边界 $\partial\mathcal{B}$上的内在积分量相关联。此外，这种自然的几何结构已被证明是推导高效且稳定的非线性弹性离散化格式的基础，因为它能在离散层面保留这一结构。感兴趣的读者可参阅 [16] ，了解基于离散外微分演算的数值格式；并参阅[17,18] ，了解基于有限元外微分演算的格式。

要用外微分演算表述非线性弹性，需要用到丛值微分形式。它们是更常见的标量值微分形式的一种推广。标量值形式仅适用于采用反对称张量场的理论（例如电磁学），而丛值形式则使我们能够纳入用于表示应变和应力变量的对称张量场，以及用于表示这些变量的物质表述的双点张量场。首先，我们将概述丛值微分形式，然后说明其如何应用于非线性弹性问题。关于纤维丛及所用符号的介绍，请参阅附录 10.1。

5.1 丛值微分形式

设 M 是维数为 n 的光滑流形， $\mathbb{E} \to M$ 是其上的光滑向量丛。回顾一下， M 上的标量值微分 k形式是$\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k T^*M)$的一个元素，其中 $k \in \{0, \cdots, n\}$ (*cf.* 附录 10.1)。 M 上的 $\mathbb{E}$ 值微分 k 形式是一种多重线性映射，它将每个 $p \in M$ 映射为 $\Lambda^k T_p^*M \otimes \mathbb{E}_p$中的一个元素，即一个取值于 $\mathbb{E}_p$的 k形式。我们将 $\mathbb{E}$值微分 k形式的空间记为

$$\Omega^k(M;\mathbb{E}) := \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes_{\mathrm{id}} \mathbb{E}).$$

对于情形 $k = 0$，取值于 $\mathbb{E}$ 的 0-形式就是丛 $\mathbb{E}$ 的一个截面，即 $\Omega^0(M;\mathbb{E}) = \Gamma(\mathbb{E})$。对于情形 $\mathbb{E} = TM$ 和 $\mathbb{E} = T^*M$，我们将分别把 $\Omega^k(M;TM)$ 和 $\Omega^k(M;T^*M)$ 称为 *vector-valued forms* 和 *covector-valued forms*。

令 N 为另一个光滑流形， $\mathbb{F} \to N$ 为N上的光滑向量丛。映射 $f\colon M \to N$ 上的一个 $\mathbb{F}$值微分 k形式，是一种多重线性映射，它为每个 $p \in M$关联一个 $\Lambda^k T_p^*M \otimes \mathbb{F}_{f(p)}$中的元素。我们将 f 上的 $\mathbb{F}$值微分 k形式空间记为

$$\Omega_f^k(M;\mathbb{F}) := \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes_f \mathbb{F}).$$

对于情形 $k=0$， $\Omega^0_f(M;\mathbb{F})=\Gamma(f^*\mathbb{F})$。对于情形 $\mathbb{F}=TN$， $\Omega^k_f(M;TN)$的元素是 f上的 $\binom{0\ 1}{k\ 0}$ 双点张量场，我们称之为 *vector-valued forms over* f。类似地， $\Omega^k_f(M;T^*N)$ 的元素是 f 上的 $\binom{0\ 0}{k\ 1}$ 双点张量场，我们称之为 *covector-valued forms over* f。

一般的向量值 k-形式 $\zeta\in\Omega^k(M;TM)$ 和一般的余向量值k-形式 $\mathcal{X}\in\Omega^k(M;T^*M)$ 可局部表示为

$$\zeta=\zeta^i\otimes e_i,\qquad\qquad \mathcal{X}=\mathcal{X}_i\otimes e^i,$$

其中，对于 $i\in\{1,\cdots,n\}$，每个 $\zeta^i,\mathcal{X}_i\in\Omega^k(M)$ 都是定义在 M 上的普通 k-形式，而$e_i|_p$ 表示 T_pM 的任意一组基， $e^i|_p$ 表示其对应的对偶基。这也表明，这种组合对应于一个张量积，其所生成元素的维数等于 n 乘以定义每个 ζ^i 和 $\mathcal{X}^j$ 的空间维数，而后者也为 n。在本文中，我们用大写符号表示余向量值形式，以便在记号上将其与向量值形式区分开来。平凡的向量值（或余向量值） k-形式，是指等价于向量场（或余向量场）与普通 k-形式的张量积的形式。例如，如果 $\zeta\in\Omega^k(M;TM)$ 由向量场 $u\in\Gamma(TM)$和一个 k-形式 $\alpha\in\Omega^k(M)$构成，并满足下式，我们就称其为平凡形式:

$$\zeta=\alpha\otimes u=\left(\frac{1}{k!}\alpha_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\right)\otimes u^je_j.$$

通常的运算，例如利用 $\sharp$ 和 $\flat$ 映射升降指标，以及拉回算子，都可以作用于丛值形式的任一腿。我们不再像 [10]那样用数字下标表示运算作用于哪条腿，而是用 f-*subscript*表示形式腿，用 v-*subscript*表示值腿。例如，对于 $\zeta=\alpha\otimes u\in\Omega^k(M;TM)$，有 $\flat_{\mathrm{v}}(\zeta)=\alpha\otimes u^\flat\in\Omega^k(M;T^*M)$，且 $i^*_{\mathrm{f}}(\zeta)=i^*(\alpha)\otimes u\in\Omega^k(\partial M;TM)$，其中 $i:\partial M\to M$ 表示包含映射。

Wedge-dot and duality product

wedge-dot 积

$$\dot\wedge:\Omega^k(M;TM)\times\Omega^l(M;T^*M)\to\Omega^{k+l}(M)$$

向量值形式与余向量值形式之间的运算，按定义是值腿中的余向量部分与向量部分之间的标准对偶积，以及形式腿之间的标准楔积。例如，若考虑平凡形式 $\zeta=\alpha\otimes u\in\Omega^k(M;TM)$ 和 $\mathcal{X}=\beta\otimes\gamma\in\Omega^l(M;T^*M)$，则 $\zeta\dot\wedge\mathcal{X}$:

$$\gamma\ u\ \alpha\wedge\beta\in\Omega^{k+l}\ M\ .\qquad\qquad \dot\wedge\qquad\qquad =\ (\ )\ (\ )$$

值得注意的是，的构造不使用任何度量结构，因此是一个拓扑算子。 $\dot\wedge$ 积与标量值形式的标准楔积之间的一个重要区别在于，拉回映射不能对 $\dot\wedge$ [36] 分配。不过，拉回仍像往常一样对形式腿分配。例如，若考虑包含映射 $i:\partial M\to M$，则有

$$i^*(\zeta\dot\wedge\mathcal{X})=i^*_{\mathrm{f}}(\zeta)\dot\wedge i^*_{\mathrm{f}}(\mathcal{X})\in\Omega^{k+l}(\partial M).\tag{28}$$

向量值 k-形式 $\zeta \in \Omega^k(M;\, TM)$ 与余向量值 $n-k$-形式 $\mathcal{X} \in \Omega^{n-k}(M;\, T^*M)$ 之间的对偶配对定义为

$$\langle \mathcal{X} | \zeta \rangle_M := \int_M \zeta \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{X} \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

按照注 5 中的思路，如果对偶配对 (29) 表示的物理积分量应始终为正，那么 n-形式 $\zeta \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{X}$ 应当是伪形式。这要求 ζ 要么是向量值伪形式而$\mathcal{X}$ 是协向量值真形式，要么 ζ 是向量值真形式而 $\mathcal{X}$ 是余向量值伪形式。正如我们将在下一节讨论的，在本文中我们始终采用第二种情况：该对偶配对表示运动学量与动力学量之间的物理功率，其中运动学量表示为向量值真形式，动力学量表示为余向量值伪形式。

Exterior covariant derivative

令 $(\boldsymbol{g}, \nabla)$ 分别为与 M 相关联的黎曼度量和列维-奇维塔联络。与性质 (8) 类似，联络可解释为作用于向量值 0-形式空间上的微分算子，即 $\nabla\colon\ \Omega^0(M;\, TM) \to \Omega^1(M;\, TM)$。一般向量值形式的微分通过外协变导数算子 $\mathrm{d}^k_\nabla\colon\ \Omega^k(M;\, TM) \to \Omega^{k+1}(M;\, TM)$ 实现，该算子扩展了 ∇ 的作用。

任意 $\alpha \in \Omega^k(M;\, TM)$ 的外协变导数 d^k_∇ 定义为 [19,第 3] [37, 章，定义 5.1。]

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}^k_\nabla \alpha)(u_0, \cdots, u_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \nabla_{u_i} (\alpha(u_0, \cdots, \underline{u_i}, \cdots, u_k)) \\ &+ \sum_{0 \le i < j < k} (-1)^{i+j} \alpha(\mathcal{L}_{u_i} u_j, u_0, \cdots, \underline{u_i}, \cdots, \underline{u_j}, \cdots, u_k),\end{aligned} \tag{30}$$

对于所有向量场 $u_j \in \Gamma(TM)$，以及 $j \in \{0, \cdots, k\}$，其中带下划线的自变量表示将其省略。对于一般的丛值 0-形式，d^0_∇ 就是协变导数；而对于标量值 k-形式，d^0_∇ 则退化为外微分。因此，它被称为外协变导数。

举例来说，将 d^0_∇，d^1_∇ 和 d^2_∇ 分别作用于任意 $\alpha \in \Omega^0(M;\, TM)$ $\beta \in \Omega^1(M;\, TM)$，以及 $\gamma \in \Omega^2(M;\, TM)$ 所得的表达式为

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}^0_\nabla \alpha)(u_0) &= \nabla_{u_0} \alpha && \in \Gamma(TM), \\ (\mathrm{d}^1_\nabla \beta)(u_0, u_1) &= \nabla_{u_0}(\beta(u_1)) - \nabla_{u_1}(\beta(u_0)) - \beta(\mathcal{L}_{u_0} u_1) && \in \Gamma(TM), \\ (\mathrm{d}^2_\nabla \gamma)(u_0, u_1, u_2) &= \nabla_{u_0}(\gamma(u_1, u_2)) - \nabla_{u_1}(\gamma(u_0, u_2)) + \nabla_{u_2}(\gamma(u_0, u_1)) \\ &\quad - \gamma(\mathcal{L}_{u_0} u_1, u_2) + \gamma(\mathcal{L}_{u_0} u_2, u_1) - \gamma(\mathcal{L}_{u_1} u_2, u_0) && \in \Gamma(TM).\end{aligned}$$

外协变导数的一个关键性质是满足莱布尼茨法则，即

$$\mathrm{d}_\nabla(\zeta \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{X}) = \mathrm{d}_\nabla \zeta \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{X} + (-1)^k \zeta \mathbin{\dot\wedge} \mathrm{d}_\nabla \mathcal{X}, \qquad \forall \zeta \in \Omega^k(M; TM), \mathcal{X} \in \Omega^l(M; T^*M), \tag{31}$$

其中，左侧的第一个 d_∇ 退化为作用于（$k+l$）形式的外微分。结合莱布尼茨法则（31）、斯托克斯定理和（28），使用外微分演算得到的 *integration by parts* 公式可表示为

$$\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}_\nabla\zeta \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{X} + \zeta \mathbin{\dot\wedge} \mathrm{d}_\nabla\mathcal{X} = \int_{\partial\mathcal{S}} i^*(\zeta \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{X}) = \int_{\partial\mathcal{S}} i_{\mathrm{f}}^*(\zeta) \mathbin{\dot\wedge} i_{\mathrm{f}}^*(\mathcal{X}). \tag{32}$$

Remark 6（外协变导数的局部表达式）

在局部坐标下，上述向量值形式 $\mathsf{d}^0_\nabla\alpha$、$\mathsf{d}^1_\nabla\beta$、$\mathsf{d}^2_\nabla\gamma$ 可表示为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^0_\nabla\alpha &= \alpha^i_{;a} e^a \otimes e_i && \in \Omega^1(M;TM)\\
\mathrm{d}^1_\nabla\beta &= 2\beta^i_{[a;b]} \left(\frac{e^a\wedge e^b}{2}\right) \otimes e_i && \in \Omega^2(M;TM)\\
\mathrm{d}^2_\nabla\gamma &= 3\gamma^i_{[ab;c]} \left(\frac{e^a\wedge e^b\wedge e^c}{3!}\right) \otimes e_i && \in \Omega^3(M;TM),
\end{aligned} \tag{33}$$

其中，方括号表示反对称化，分号表示协变微分，因此 $\alpha^i_{;a} \coloneqq \nabla_a\alpha^i$，$\beta^i_{a;b} \coloneqq \nabla_b\beta^i_a$，且 $\gamma^i_{ab;c} \coloneqq \nabla_c\gamma^i_{ab}$。由此可见，外协变导数是通过对形式指标上的协变导数进行反对称化而构造的。此外，协变微分作用于向量场，而不是高阶张量场。例如，$\gamma^i_{ab;c} = \partial_c(\gamma^i_{ab}) + \Gamma^i_{kc}\gamma^k_{ab}$。因此，分量函数 γ^i_{ab} 作为一组由 a 和b索引的向量场进行微分，而不是作为一个 (1,2) 张量场进行微分。这是外协变微分与高阶张量场的协变微分（例如式 (7) 中的协变微分）之间的根本区别，并将对材料运动方程的内在性产生重大影响。注 12 将进一步讨论这一点。

Hodge star operator

类似于标量值形式的标准构造（*cf.* [11, 第6]章），我们可以按以下方式构造一个霍奇星算子，将向量值形式映射为协向量值伪形式。设 $\boldsymbol{\mu} \in \Omega^n(M)$是$M$上的某个顶形式。对偶积（29）定义了一个线性泛函，将 $\Omega^{n-k}(M;\, T^*M)$映射到 $\mathbb{R}$。根据里斯表示定理，我们可以引入霍奇星算子

$$\star^\flat : \Omega^k(M;TM) \to \Omega^{n-k}(M;T^*M),$$

使得

$$\zeta \mathbin{\dot\wedge} \star^\flat \xi = \langle\zeta,\xi\rangle_{\boldsymbol{g}}\, \boldsymbol{\mu}, \qquad \forall\zeta,\xi \in \Omega^k(M;TM), \tag{34}$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\boldsymbol{g}}\colon\ \Omega^k(M;\, TM) \times \Omega^k(M;\, TM) \to C^\infty(M)$ 表示将向量值形式视为 M 上的 $(1,\ k)$ 张量场时的逐点内积。$\star^\flat$ 的作用等价于在值腿上使用 $\boldsymbol{g}$ 进行降指标运算，并在形式腿上相对于 $\boldsymbol{\mu}$ 使用标准霍奇算子。必要时，我们将用 $\star^\flat[\boldsymbol{g},\boldsymbol{\mu}]$ 显式表示这种依赖关系。例如，若 $\zeta = \alpha\otimes u$ 和 $\xi = \bar\alpha\otimes\bar u$ 是平凡的向量值 k-形式，则 $\star^\flat\xi = \star^\flat(\bar\alpha\otimes\bar u) = \star\bar\alpha \otimes \boldsymbol{g}\cdot\bar u$，而

$$\langle\zeta,\xi\rangle_{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g}_{ab}u^a\bar u^b\boldsymbol{g}^{i_1j_1}\cdots\boldsymbol{g}^{i_kj_k}\alpha_{i_1\cdots i_k}\bar\alpha_{j_1\cdots j_k} \in C^\infty(M),$$

	对流 $\Omega^k(\mathcal{B};\, T\mathcal{B})$	物质 $\Omega^k_\varphi(\mathcal{B};\, T\mathcal{S})$	空间 $\Omega^k(\mathcal{S};\, T\mathcal{S})$
$k=0$	$\hat{v}, \hat{a}$	$\tilde{v}, \tilde{a}$	v, a
$k=1$	$\hat{\nabla}\hat{v}, \hat{\epsilon}$	$\tilde{\nabla}\tilde{v}, F$	$\nabla v, \epsilon$

表 3：运动学物理量的丛值微分形式表示

其中 $\boldsymbol{g}_{ij}$，$\boldsymbol{g}^{ij} \in C^\infty(M)$分别表示度量张量和逆度量张量的分量。最后，我们将 $\star^\flat$ 的逆霍奇星算子记为

$$\star^\sharp : \Omega^{n-k}(M; T^*M) \to \Omega^k(M; TM).$$

*Remark 7 (*霍奇星算子中的材料属性*)*

需要注意的是，上述霍奇星算子定义（34）中的顶形式 $\boldsymbol{\mu}$ 不一定等于由度量诱导的体积形式 $\omega_{\boldsymbol{g}}$，但当然与其相差一个标量函数因子。这种一般化的霍奇星算子定义允许纳入材料属性，例如电磁学中的做法 [38]。在下一节中，我们将把第 4 节引入的弹性体的质量顶形式纳入霍奇星算子。这样，霍奇星算子就可用于将以向量值形式表示的 *intensive kinematics quantities*映射为以余向量值伪形式表示的 *extensive kinetics quantities*。

*Remark 8 (*推广到张量值微分形式*)* 迄今为止针对向量值形式和余向量值伪形式所介绍的构造，可以推广到任意一对互补的（p，q）阶张量值形式和（q，p）阶张量值伪形式。楔点积保持不变，而霍奇星算子则应推广，使值腿价数从（p，q）变换为（q，p）。

5.2 非线性弹性力学的应用

用丛值形式表示，我们可以如下完整地表述非线性弹性理论。首先，第 2 节和第 3 节中引入的所有运动学量都将视为 *intensive vector-valued forms* (*cf.* 表 3)。特别地，对流量属于 $\Omega^k(\mathcal{B};\, T\mathcal{B})$，空间量属于 $\Omega^k(\mathcal{S};\, T\mathcal{S})$，而材料量属于 $\Omega^k_\varphi(\mathcal{B};\, T\mathcal{S})$。

速度场将视为向量值 0-形式，其底层 0-形式即为它们的分量函数。因此，我们将其识别为

$$\Gamma(T\mathcal{B}) \cong \Omega^0(\mathcal{B}; T\mathcal{B}), \qquad T_\varphi\mathscr{C} = \Gamma(\varphi^* T\mathcal{S}) \cong \Omega^0_\varphi(\mathcal{B}; T\mathcal{S}), \qquad \Gamma(T\mathcal{S}) \cong \Omega^0(\mathcal{S}; T\mathcal{S}).$$

将三个速度都视为向量值 0-形式时，它们的局部表达式为

$$\hat{v} = \hat{v}^I \otimes E_I, \qquad \tilde{v}^\flat = \tilde{v}^i \otimes e_i|_\varphi, \qquad v = v^i \otimes e_i$$

这与它们在式 (1) 中作为向量场时的表达式形成对比。空间速度梯度和对流速度梯度分别被视为 $\Omega^1(\mathcal{S};\, T\mathcal{S})$ 和 $\Omega^1(\mathcal{B};\, T\mathcal{B})$ 中的向量值1-形式。而速度的物质表示

梯度以及变形梯度（F）都是 $\Omega^1_\varphi(\mathcal{B};\, T\mathcal{S})$ 的元素。速度一形式和协变速度梯度将被视为协向量值（真）形式，并通过对值腿应用 $\flat$ 运算与其协变对应物相关联：

$$\begin{aligned} \hat{v}^\flat &= \flat_{\mathrm{v}}(\hat{v}), \qquad & \tilde{v}^\flat &= \flat_{\mathrm{v}}(\tilde{v}), \qquad & v^\flat &= \flat_{\mathrm{v}}(v), \\ \hat{\nabla}\hat{v}^\flat &= \flat_{\mathrm{v}}(\hat{\nabla}\hat{v}), \qquad & \tilde{\nabla}\tilde{v}^\flat &= \flat_{\mathrm{v}}(\tilde{\nabla}\tilde{v}), \qquad & \nabla v^\flat &= \flat_{\mathrm{v}}(\nabla v). \end{aligned}$$

对于应变率张量场 $\hat{}\varepsilon$ 和 ε，我们将其视为向量值 1-形式，因此将 $T_{\hat{g}}\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 与 $\cong \Omega^1(\mathcal{B};\, T\mathcal{B})$ 视为相同。这样，我们可以将余切空间 $T^*_{\hat{g}}\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 视为 $\Omega^{n-1}(\mathcal{B};\, T^*\mathcal{B})$，后者将是稍后讨论的应力空间。

我们采用向量丛值形式进行表述，其最重要的技术优势在于，从一种表示转换到另一种表示时，所有物理变量都遵循明确且统一的规则。具体而言，

– 从空间表示转换到物质表示时，只需使用 φ^*_{f} 拉回 *form-leg*。– 从物质表示转换到对流表示时，只需使用 φ^*_{v} 拉回 *value-leg*。– 从空间表示转换到对流表示时，使用 $\varphi^* = \varphi^*_{\mathrm{v}} \circ \varphi^*_{\mathrm{f}}$ 拉回 *both legs*。

反向转换只需使用相应的推前映射。因此，我们可以将空间、对流和物质速度场之间的关系改写为

$$\tilde{v} = \varphi^*_{\mathrm{f}}(v), \qquad \hat{v} = \varphi^*_{\mathrm{v}}(\tilde{v}), \qquad \hat{v} = \varphi^*(v). \tag{35}$$

同样，速度梯度之间的关系为

$$\tilde{\nabla}\tilde{v} = \varphi^*_{\mathrm{f}}(\nabla v), \qquad \hat{\nabla}\hat{v} = \varphi^*_{\mathrm{v}}(\tilde{\nabla}\tilde{v}), \qquad \hat{\nabla}\hat{v} = \varphi^*(\nabla v). \tag{36}$$

速度一形式、协变速度梯度和加速度也满足相同的关系。事实上，（根据构造）有以下交换性质

$$\hat{\nabla} \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \nabla, \qquad \tilde{\nabla} \circ \varphi^*_{\mathrm{f}} = \varphi^*_{\mathrm{f}} \circ \nabla, \qquad \hat{\nabla} \circ \varphi^*_{\mathrm{v}} = \varphi^*_{\mathrm{v}} \circ \tilde{\nabla}. \tag{37}$$

用于空间、对流和物质变量的外协变导数分别记为：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^k_\nabla &: \Omega^k(\mathcal{S};T\mathcal{S}) \to \Omega^{k+1}(\mathcal{S};T\mathcal{S}) \\ \hat{\mathrm{d}}^k_{\hat{\nabla}} &: \Omega^k(\mathcal{B};T\mathcal{B}) \to \Omega^{k+1}(\mathcal{B};T\mathcal{B}) \\ \tilde{\mathrm{d}}^k_{\tilde{\nabla}} &: \Omega^k_\varphi(\mathcal{B};T\mathcal{S}) \to \Omega^{k+1}_\varphi(\mathcal{B};T\mathcal{S}). \end{aligned} \tag{38}$$

根据 (30) 中的空间联络 ∇，通过作用于向量场 $u_j \in \mathit{\Gamma}(T\mathcal{S})$ 来定义 d^k_∇。至于 $\hat{}\,\mathrm{d}^k_{\hat{\nabla}}$ 和 $\tilde{}\,\mathrm{d}^k_{\tilde{\nabla}}$，则分别使用对流 $\hat{}$ $\tilde{}$ 和材料联络 ∇ 和 ∇，通过作用于向量场 $\hat{}\,u_j \in \mathit{\Gamma}(T\mathcal{B})$ 来定义。外协变导数的一个重要性质是它

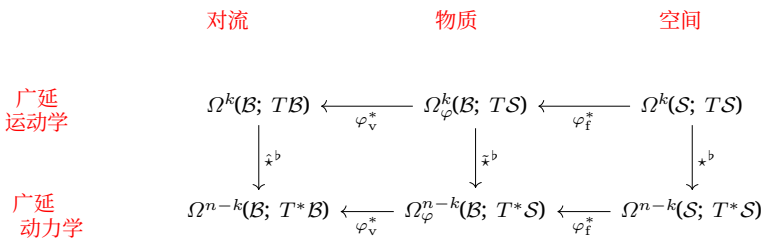


图 5：我们提出的利用丛值形式表述非线性弹性的方法

与拉回 [37] 可交换，这与协变导数 (37) 类似。因此，我们有

$$\hat{\mathrm{d}}_{\hat{\nabla}} \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \mathrm{d}_\nabla, \qquad \tilde{\mathrm{d}}_{\tilde{\nabla}} \circ \varphi^*_{\mathrm{f}} = \varphi^*_{\mathrm{f}} \circ \mathrm{d}_\nabla, \qquad \hat{\mathrm{d}}_{\hat{\nabla}} \circ \varphi^*_{\mathrm{v}} = \varphi^*_{\mathrm{v}} \circ \tilde{\mathrm{d}}_{\tilde{\nabla}}. \tag{39}$$

利用每种表示对应的质量顶形式和度量，我们将定义三个霍奇星算子，以便将弹性体的广延动力学变量与广延运动学变量联系起来。这些变量包括动量和应力变量。空间、对流和物质霍奇星算子分别记为：

$$\begin{aligned}
&\star^\flat : \Omega^k(\mathcal{S};T\mathcal{S}) \to \Omega^{n-k}(\mathcal{S};T^*\mathcal{S}),\\
&\hat{\star}^\flat : \Omega^k(\mathcal{B};T\mathcal{B}) \to \Omega^{n-k}(\mathcal{B};T^*\mathcal{B}),\\
&\tilde{\star}^\flat : \Omega^k_\varphi(\mathcal{B};T\mathcal{S}) \to \Omega^{n-k}_\varphi(\mathcal{B};T^*\mathcal{S}),
\end{aligned} \tag{40}$$

其度量和质量形式依赖关系表示为 $\star^\flat[g,\mu]$，$\hat{\star}^\flat[\hat{g}]$，$\hat{\mu}]$，$\tilde{\star}^\flat[\tilde{g},\tilde{\mu}]$，并以类似于式 (34) 的方式构造。这种依赖关系的一个结果是，空间和对流霍奇星算子将随时间变化，因此在进行时间微分时需要考虑这一点。图 5 展示了我们提出的利用丛值形式构建的几何 formulation 的概要。

6 动力学运动方程

现在，我们转而运用外微分演算，关注非线性弹性的控制运动方程及其背后的能量平衡定律。这些方程的主要特点是，动量和应力变量将表示为广延型余向量值伪形式。本文不对这些方程进行正式推导，而是说明它们与文献中常见标准表述的等价性。这样，我们便无需在本文中详述推导过程涉及的所有技术细节。在本文的后续篇章中，我们将于端口哈密顿框架内从第一原理推导这些方程，并阐明其背后的能量结构，这与我们此前关于流体力学的研究类似 [39,40,41,42]。

6.1 总能量平衡

我们首先对能量平衡（即热力学第一定律）作一般性陈述。它是最基本的平衡定律，可通过多种方法从中导出控制方程，例如通过假设协变性 [10]、变分原理 [26]、拉格朗日约化[43]，或哈密顿约化 [23]。

令 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ 表示物体的一个良好开集，并令 $\mathscr{E}_{\mathrm{kin}}$ 和 $\mathscr{E}_{\mathrm{int}}$ 分别表示该集合的动能和内能。此外，令 $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ 表示应力作用于表面 $\partial\mathcal{U}$ 所做功的功率。热力学第一定律可表述为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathscr{E}_{\mathrm{kin}} + \mathscr{E}_{\mathrm{int}}) = \mathscr{P}_{\mathrm{st}}, \tag{41}$$

这表明，物体$\mathcal{B}$ 任意部分 $\mathcal{U}$ 的总能量增长率，等于由其边界 $\partial\mathcal{B}$上的表面牵引力向该部分提供的机械功率。为简便起见，我们不考虑任何体力，因为体力可以直接添加进来。此外，我们只关注运动的机械方面。因此，为了使论述清晰，我们不考虑与其他物理定义域之间的非机械功率交换（例如热弹性和压电效应）。

$\mathscr{E}_{\mathrm{kin}}$，$\mathscr{E}_{\mathrm{int}}$，和 $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ 均为积分量，除了取决于弹性体的质量属性外，还取决于某些运动学和动力学变量。为满足物理相容性，要求它们各自的被积函数为伪形式，从而在改变 $\mathcal{U}$的定向时，这些积分量始终为正。能量平衡定律（41）的显式表达式取决于若干选择：

1. *Spatial, material or convective description*对于物质表述和对流表述，积分均在 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ 上进行，并相对于由 $\hat{\mu} = \tilde{\mu}$ 定义的质量测度。在采用空间表示的情况下，积分域为 $\varphi_t(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{S}$，质量测度则由 μ_t 定义。 2. *The pairing operation and mathematical representation of kinematics and kinetics quantities*文献中通常采用张量场 [24] 或张量场密度 [25]。在本文中，我们将运动学量表示为向量值形式，将动力学量表示为余向量值伪形式。它们之间的配对由楔点积 (29) 给出。 3. *Intensive or extensive description*文献中通常的做法是将广延的质量结构与运动学变量和动力学变量分开，因此将两者都表示为广延量。我们的目标是将质量结构纳入动力学变量，使其成为广延量。

6.2 应力的广延表示

在连续介质力学的外微分演算表述中，[9,10]，人们假定应力作为一种 *covector-valued* $(n-1)$ *pseudo-form*存在，其方式与经典柯西应力定理中假定牵引力场存在相同。

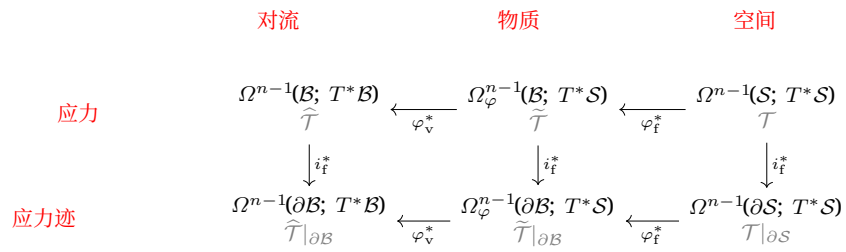


图 6：使用丛值形式表示广延应力

这一应力变量的对流、物质和空间表示分别记为

$$\widehat{\mathcal{T}} \in \Omega^{n-1}(\mathcal{B};T^*\mathcal{B}), \qquad \widetilde{\mathcal{T}} \in \Omega_{\varphi}^{n-1}(\mathcal{B};T^*\mathcal{S}), \qquad \mathcal{T} \in \Omega^{n-1}(\mathcal{S};T^*\mathcal{S}),$$

它们之间的关系为

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \varphi_{\mathrm{f}}^*(\mathcal{T}), \qquad \widehat{\mathcal{T}} = \varphi_{\mathrm{v}}^*(\widetilde{\mathcal{T}}), \qquad \widehat{\mathcal{T}} = \varphi^*(\mathcal{T}), \tag{42}$$

如图 6 所示。在 $n=3$ 的局部坐标图中，应力表示为

$$\widehat{\mathcal{T}} = \underbrace{(\frac{1}{2}\widehat{\mathcal{T}}_{KAB}\ E^A \wedge E^B)}_{=:\widehat{\mathcal{T}}_K} \otimes E^K, \qquad \widetilde{\mathcal{T}} = \underbrace{(\frac{1}{2}\mathcal{T}_{kAB}\ E^A \wedge E^B)}_{=:\widetilde{\mathcal{T}}_k} \otimes e^k|_{\varphi},$$

$$\mathcal{T} = \underbrace{(\frac{1}{2}\mathcal{T}_{kab}\ e^a \wedge e^b)}_{=:\mathcal{T}_k} \otimes e^k, \tag{43}$$

其中，每个 $\widehat{\mathcal{T}}_K, \widetilde{\mathcal{T}}_k \in \Omega^2(\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{T}_k \in \Omega^2(\mathcal{S})$ 都是二形式，而 $\widehat{\mathcal{T}}_{KAB}, \mathcal{T}_{kAB} \in C^\infty(\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{T}_{kab} \in C^\infty(\mathcal{S})$ 表示它们各自的分量函数。

将应力（作为余向量值形式）与速度（作为向量值形式）配对，会得到一个 $(n-1)$ 形式；在任意曲面上对其积分，所得结果即为应力在该曲面上所做的功率。由于应力是伪形式，当曲面的定向改变时，$(n-1)$ 形式的符号以及积分值也会自动改变。这对应于经典方法中曲面法向量符号的改变 [10]。

在空间表示中，这种配对可表示为 $v \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{T} \in \Omega^{n-1}(\mathcal{S})$。在空间构形 $\partial\mathcal{S}$的边界上，曲面应力功率可表示为 $\mathscr{P}_{\mathrm{st}} = \int_{\partial\mathcal{S}} i^*(v \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{T})$，其中 $i:\ \partial\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 表示空间嵌入映射。由式（28）可将 $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ 表示为

$$\mathscr{P}_{\mathrm{st}} = \int_{\partial\mathcal{S}} v|_{\partial\mathcal{S}} \mathbin{\dot\wedge} \mathcal{T}|_{\partial\mathcal{S}},$$

其中

$$v|_{\partial\mathcal{S}} := i_{\mathrm{f}}^*(v) \in \Omega^0(\partial\mathcal{S};T\mathcal{S}), \qquad \mathcal{T}|_{\partial\mathcal{S}} := i_{\mathrm{f}}^*(\mathcal{T}) \in \Omega^{n-1}(\partial\mathcal{S};T^*\mathcal{S}),$$

表示空间嵌入映射 $i\colon \partial\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ 下边界上空间速度和应力的（部分）拉回。变量 $v|_{\partial\mathcal{S}}$ 和 $\mathcal{T}|_{\partial\mathcal{S}}$ 表示问题的边界条件。

类似地，在物质表示中，可以利用变量替换公式以及 $\partial\mathcal{S}=\varphi(\partial\mathcal{B})$ 这一事实，得出曲面应力功率表示为

$$\mathscr{P}_{\mathrm{st}}=\int_{\partial\mathcal{S}} v|_{\partial\mathcal{S}}\,\dot\wedge\,\mathcal{T}|_{\partial\mathcal{S}}=\int_{\partial\mathcal{B}}\varphi^*(v|_{\partial\mathcal{S}}\,\dot\wedge\,\mathcal{T}|_{\partial\mathcal{S}})=\int_{\partial\mathcal{B}}\varphi_{\mathrm{f}}^*(v|_{\partial\mathcal{S}})\,\dot\wedge\,\varphi_{\mathrm{f}}^*(\mathcal{T}|_{\partial\mathcal{S}})=\int_{\partial\mathcal{B}}\tilde v|_{\partial\mathcal{B}}\,\dot\wedge\,\widetilde{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}},$$

其中

$$\tilde v|_{\partial\mathcal{B}}:=i_{\mathrm{f}}^*(\tilde v)=\varphi_{\mathrm{f}}^*(v|_{\partial\mathcal{S}})\in\Omega^0_\varphi(\partial\mathcal{B};T\mathcal{S})\qquad \widetilde{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}}:=i_{\mathrm{f}}^*(\widetilde{\mathcal{T}})=\varphi_{\mathrm{f}}^*(\mathcal{T}|_{\partial\mathcal{S}})\in\Omega^{n-1}_\varphi(\partial\mathcal{B};T^*\mathcal{S})$$

表示在物体包含映射 $i\colon \partial\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ 下物质速度和应力在边界上的（部分）拉回；为避免符号混淆，我们也将其记为 i。

类似地，在对流表示中，除了利用对偶性以及式 (42) 和 (35) 外，可以得出曲面应力功率表示为

$$\mathscr{P}_{\mathrm{st}}=\int_{\partial\mathcal{B}}\tilde v|_{\partial\mathcal{B}}\,\dot\wedge\,\widetilde{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}}=\int_{\partial\mathcal{B}}\tilde v|_{\partial\mathcal{B}}\,\dot\wedge\,\varphi_{\mathrm{v},*}(\widehat{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}})=\int_{\partial\mathcal{B}}\varphi_{\mathrm{v}}^*(\tilde v|_{\partial\mathcal{B}})\,\dot\wedge\,\widehat{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}}=\int_{\partial\mathcal{B}}\hat v|_{\partial\mathcal{B}}\,\dot\wedge\,\widehat{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}}$$

其中

$$\hat v|_{\partial\mathcal{B}}:=i_{\mathrm{f}}^*(\hat v)=\varphi_{\mathrm{v}}^*(\tilde v|_{\partial\mathcal{B}})\in\Omega^0(\partial\mathcal{B};T\mathcal{B})\qquad \widehat{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}}:=i_{\mathrm{f}}^*(\widehat{\mathcal{T}})=\varphi_{\mathrm{v}}^*(\widetilde{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}})\in\Omega^{n-1}(\partial\mathcal{B};T^*\mathcal{B})$$

表示在物体包含映射 i 下，对边界上的对流速度和应力进行（部分）拉回：$\partial\mathcal{B}\to\mathcal{B}$。

6.3 动量的广延表述

除使用强度速度变量来表示物体的运动外，也可以使用广延动量来表示，该动量定义为速度的霍奇星算子。该动量变量的对流、物质和空间表示分别记为

$$\widehat{\mathcal{M}}:=\hat\star^\flat\hat v\in\Omega^n(\mathcal{B};T^*\mathcal{B}),\qquad \widetilde{\mathcal{M}}:=\tilde\star^\flat\tilde v\in\Omega^n_\varphi(\mathcal{B};T^*\mathcal{S}),\qquad \mathcal{M}:=\star^\flat v\in\Omega^n(\mathcal{S};\,T^*\mathcal{S}),\tag{44}$$

它们之间的关系为

$$\widetilde{\mathcal{M}}=\varphi_{\mathrm{f}}^*(\mathcal{M}),\qquad \widehat{\mathcal{M}}=\varphi_{\mathrm{v}}^*(\widetilde{\mathcal{M}}),\qquad \widehat{\mathcal{M}}=\varphi^*(\mathcal{M}).\tag{45}$$

在 $n=3$ 的局部坐标图中，对流、物质和空间动量变量表示为

$$\widehat{\mathcal{M}}=\underbrace{\hat g_{IJ}\hat v^J\hat\mu}_{=:\widehat{\mathcal{M}}_I}\otimes E^I,\qquad \widetilde{\mathcal{M}}=\underbrace{\tilde g_{ij}\tilde v^j\tilde\mu}_{=:\widetilde{\mathcal{M}}_i}\otimes e^i|_\varphi,\qquad \mathcal{M}=\underbrace{g_{ij}v^j\mu}_{=:\mathcal{M}_i}\otimes e^i,\tag{46}$$

其中，每个 $\widehat{\mathcal{M}}_I$，$\widetilde{\mathcal{M}}_i\in\Omega^3(\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{M}_i\in\Omega^3(\mathcal{S})$ 都是顶形式。

动量作为余向量值形式与速度作为向量值形式的配对，得到一个 n-形式；在任意体积上对其积分，结果为动能的两倍

因此，整个物体的动能分别以空间、物质和对流表示表示为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{kin}} = \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} v \mathbin{\dot{\wedge}} \mathcal{M} = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \tilde{v} \mathbin{\dot{\wedge}} \widetilde{\mathcal{M}} = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \hat{v} \mathbin{\dot{\wedge}} \widehat{\mathcal{M}}. \tag{47}$$

Remark 9（余向量值形式与张量密度）

请注意，对流动量变量和空间动量变量都是平凡的余向量值形式，分别可与张量密度 $\hat{}\mu \otimes \hat{v^\flat}$ 和 $\mu \otimes v^\flat$对应。另一方面，物质动量并非平凡的。尽管可以将其等价地表示为张量密度 $\tilde{\mu} \otimes \tilde{v^\flat}$，但它显然不是 $\Omega^n_\varphi(\mathcal{B};\, T^*\mathcal{S})$ 的元素，因为 $\tilde{v^\flat}$ 并非真正的向量场。此外，为使式（45）中的空间到物质变换有效，必须将 $\mathcal{M}$ 的形式腿和值腿分别视为 $\mathcal{M}_i$ 和 e^i，如式（46）所示，而不能视为 μ 和 $v^\flat$。同样，式（45）中的物质到对流变换要求将 $\widehat{\mathcal{M}}$ 的形式腿和值腿分别视为 $\widehat{\mathcal{M}}_I$ 和 E^I，而不是 $\hat{}\mu$ 和 $\hat{v^\flat}$。因此，在使用丛值形式而非张量密度时，应牢记这些技术差异，例如 Rashad 等人所用的张量密度。

6.4 运动方程

现在，我们给出空间描述、对流描述和物质描述下的运动方程。每种描述都包含一个局部动量平衡，将动量与应力变量联系起来，此外还有一个各自独有的方程。空间描述包含一个关于 μ 的平流方程，对流描述包含一个关于 $\hat{g}$ 的平流方程，而物质描述则包含一个关于 φ 的重构方程。如前所述，本文不会对这些方程进行正式推导。相反，我们将留待后续续篇讨论，并仅展示它们与文献中各标准形式的等价性。

命题 3（空间） *The equations of motion governing the extensive variables* $(\mu, \mathcal{M}, \mathcal{T}) \in \Omega^n(\mathcal{S}) \times \Omega^n(\mathcal{S};\, T^*\mathcal{S}) \times \Omega^{n-1}(\mathcal{S};\, T^*\mathcal{S})$ *are given by*

$$\partial_t \mu = -\,\mathrm{d}(\iota_v \mu), \tag{48}$$

$$\partial_t \mathcal{M} = -\,\mathrm{d}_\nabla(\iota_v \mu \otimes v^\flat) + \mathrm{d}_\nabla \mathcal{T}, \tag{49}$$

where $v = \star^\sharp \mathcal{M} \in \Omega^0(\mathcal{S};\, T\mathcal{S})$. *Furthermore, the balance of the total energy is expressedas*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} \star^\sharp \mathcal{M} \mathbin{\dot{\wedge}} \mathcal{M} + \mathcal{E}(x, F, g) = \int_{\partial \mathcal{S}} v|_{\partial \mathcal{S}} \mathbin{\dot{\wedge}} \mathcal{T}|_{\partial \mathcal{S}}, \tag{50}$$

where $\mathcal{E}\ \ \mathcal{S} \times \Omega^1_\varphi\ \mathcal{B}\ T\mathcal{S}\ \times \mathcal{M}\ \mathcal{S}\ \to \Omega^n\ \mathcal{S}$ *is the internal energy density function in*: (;) ( ) ( ) *the spatial representation.*

上面的第一个方程表示质量守恒，第二个方程则以广延变量$\mathcal{M}$表示局部动量平衡。(48-49) 中的运动方程形式通常称为 *conservationform*。从这类方程中可以清楚地看出，质量通量由 $\iota_v \mu$表示，而动量通量则由协向量值的 $(n-1)$ 形式 $\iota_v \mu \otimes v^\flat$表示，

它与应力 $\mathcal{T}$ [26]具有相同的几何性质。内能密度函数 $\mathcal{E}$ 及其依赖关系将在稍后的第 6.5 节中讨论。

最后，可以证明，沿着式（48–49）的轨迹（$\mu(t)$ $\mathcal{M}(t)$），动能的变化率满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_{\mathrm{kin}} = \int_{\mathcal{S}} v \mathbin{\dot\wedge} \mathrm{d}_{\nabla}\mathcal{T}, \tag{51}$$

这表明动能的变化率等于应力作用力所做的功，并说明动量通量项对功率平衡没有贡献 [26]。

Remark 10（动量平衡的平流形式）

考虑以下恒等式，它将外协变导数与平凡协向量值顶形式 [26] 的李导数联系起来

$$\mathcal{L}_u(\omega \otimes \alpha) = \mathrm{d}_{\nabla}(\iota_u\omega \otimes \alpha) + \omega \otimes (\nabla u \mathbin{\dot\wedge} \alpha), \tag{52}$$

$\forall u \in \Gamma(TM)$ $\alpha \in \Omega^1(M)$ $\omega \in \Omega^n(M)$，其中 $\iota_u\colon \Omega^k(\mathcal{S}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{S})$ 表示标量值形式的标准内积。

利用 (12)、(52) 以及恒等元 $\nabla v \mathbin{\dot\wedge} v^\flat = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\iota_v v^\flat$，还可以将空间运动方程表示为

$$\partial_t \mu = -\mathcal{L}_v \mu, \tag{53}$$

$$\partial_t \mathcal{M} = -\mathcal{L}_v \mathcal{M} + \mu \otimes \frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_v v^\flat + \mathrm{d}_{\nabla}\mathcal{T}, \tag{54}$$

这通常称为方程的 *advection form*。值得注意的是，(52) 与标量值形式的嘉当公式 (12) 有一些相似之处。

命题 4（对流） *The equations of motion governing* $\hat{g} \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ *and the extensive variables* $(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{T}}) \in \Omega^n(\mathcal{B};\, T^*\mathcal{B}) \times \Omega^{n-1}(\mathcal{B};\, T^*\mathcal{B})$ *are given by*

$$\partial_t \hat{g} = \mathcal{L}_{\hat{v}}\hat{g}, \tag{55}$$

$$\partial_t \widehat{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\hat{\mu} \otimes \mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^\flat + \hat{\mathrm{d}}_{\hat{\nabla}}\widehat{\mathcal{T}}, \tag{56}$$

where $\hat{v} = \hat{\star}^\sharp\widehat{\mathcal{M}} \in \Omega^0(\mathcal{B};\, T\mathcal{B})$. *Furthermore, the balance of the total energy is expressedas*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\hat{\star}^\sharp\widehat{\mathcal{M}} \mathbin{\dot\wedge} \widehat{\mathcal{M}} + \hat{\mathcal{E}}(X, \hat{g}) = \int_{\partial\mathcal{B}} \hat{v}|_{\partial\mathcal{B}} \mathbin{\dot\wedge} \widehat{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}}, \tag{57}$$

$\hat{\mathcal{E}}$ $\mathcal{B} \times \mathcal{M}$ $\mathcal{B}$ $\to \Omega^n$ $\mathcal{B}$ *is the internal energy density function in the convective*: () () *representation.*

方程（55）表示对流度量（相对于–$\hat{v}$）的平流，而（56）则以广延$\widehat{\ }$变量 $\mathcal{M}$表示局部动量平衡。最后，（55–56）的轨迹 $(\hat{g}(t)$ $\widehat{\mathcal{M}}(t))$上的动能变化率满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_{\mathrm{kin}} = \int_{\mathcal{B}} \hat{v} \mathbin{\dot\wedge} \hat{\mathrm{d}}_{\hat{\nabla}}\widehat{\mathcal{T}}. \tag{58}$$

命题 5 *The equations of motion governing $\varphi \in \mathscr{C}$ and the exten-*(物质) (,) (;) (;) *sive variables $\widetilde{\mathcal{M}}\ \widetilde{\mathcal{T}}\ \in \Omega^n_\varphi\ \mathcal{B}\ T^*\mathcal{S}\ \times \Omega^{n-1}_\varphi\ \mathcal{B}\ T^*\mathcal{S}$ are given by*

$$\partial_t \varphi = \tilde{v}, \tag{59}$$

$$D_t \widetilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathrm{d}}_{\tilde{\nabla}} \widetilde{\mathcal{T}}, \tag{60}$$

where $\tilde{v} = \tilde{\star}^\sharp \widetilde{\mathcal{M}} \in \Omega^0_\varphi(\mathcal{B};\, T\mathcal{S})$. Furthermore, the balance of the total energy is expressedas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \tilde{\star}^\sharp \widetilde{\mathcal{M}} \,\dot{\wedge}\, \widetilde{\mathcal{M}} + \tilde{\mathcal{E}}(X, F) = \int_{\partial\mathcal{B}} \tilde{v}|_{\partial\mathcal{B}} \,\dot{\wedge}\, \widetilde{\mathcal{T}}|_{\partial\mathcal{B}}, \tag{61}$$

where $\tilde{\mathcal{E}}\colon\ \mathcal{B} \times \Omega^1_\varphi(\mathcal{B};\, T\mathcal{S}) \ \to \Omega^n(\mathcal{B})$ is the material internal energy density function.

方程 (59) 表示构形的重构方程 φ，而 (60) 则以广延变量 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 表示局部动量平衡。请注意，与 (49,56) 不同，动量平衡 (60) 是用物质导数表示的。最后，沿着 (59-60) 的轨迹 $(\varphi(t)\ \mathcal{M}(t))$，动能 $\widetilde{\ }$ 的变化率满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{E}_{\mathrm{kin}} = \int_{\mathcal{B}} \tilde{v} \,\dot{\wedge}\, \tilde{\mathrm{d}}_{\tilde{\nabla}} \widetilde{\mathcal{T}}. \tag{62}$$

6.5 本构方程与内能

最后，我们将讨论在本构方程中如何纳入用于确定应力的关系。本文无意对这一复杂主题作简明而全面的阐述，而是旨在着重介绍外微积分中的方程形式、三种表示之间的差异，以及为何只有本构方程的对流表示才能实现完整描述，并在此基础上延续第 3 节的讨论。因此，为简化起见，我们仅讨论纯超弹性情形，并忽略任何记忆效应或速率效应。关于本构理论的入门介绍，请参阅[5, 第3]章。

6.5.1 Convective

利用分部积分公式（32），并结合式（57）和（58），可以看出，能量守恒意味着内能的变化率应满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{E}_{\mathrm{int}} = \int_{\mathcal{B}} \hat{\nabla}\hat{v} \,\dot{\wedge}\, \widehat{\mathcal{T}}. \tag{63}$$

因此，为使运动方程适定，需要一个闭合关系 $\widehat{\ }$ ˆbetween $\mathcal{T}, \nabla\hat{v},$ 和 $\mathscr{E}_{\mathrm{int}}$。如第 3 节所述，对流度量 $\hat{g}$ 能够对变形状态进行内蕴描述。因此，可以将内应变能定义为 ˆ g的泛函:

$$\mathscr{E}_{\mathrm{int}}[\hat{g}] := \int_{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{E}}(X, \hat{g}), \tag{64}$$

其中，$\hat{\mathcal{E}}\colon \mathcal{B}\times\mathcal{M}(\mathcal{B})\to\Omega^n(\mathcal{B})$ 是内能密度函数，而对物质点的依赖使得非均质材料的建模成为可能。

利用第 5 节中所述的将切空间和余切空间 $T_{\hat{g}}\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 及$T^*_{\hat{g}}\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 识别为丛值形式的方法，$\mathscr{E}_{\mathrm{int}}$ 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_{\mathrm{int}}=\int_{\mathcal{B}}\frac{\partial\hat{\mathcal{E}}}{\partial\hat{g}}\mathbin{\dot{\wedge}}\partial_t\hat{g}=\int_{\mathcal{B}}(\partial_t\hat{g})^\sharp\mathbin{\dot{\wedge}}\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{E}}}{\partial\hat{g}}\right)^\flat, \tag{65}$$

其中，$\frac{\partial\hat{\mathcal{E}}}{\partial\hat{g}}\in\Omega^{n-1}(\mathcal{B};T\mathcal{B})$ 表示 $\hat{\mathcal{E}}$ 关于$\hat{g}$ 的梯度，而 sharp 和 flat 运算则是相对于$\hat{g}$ 定义的，详见注 4。此外，利用式（9、11），可得

$$\int_{\mathcal{B}}\hat{\nabla}\hat{v}\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}}=\int_{\mathcal{B}}(\hat{\nabla}\hat{v}^\flat)^\sharp\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}}=\int_{\mathcal{B}}(\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\hat{v}}\hat{g}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\hat{v}^\flat)^\sharp\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}}. \tag{66}$$

因此，根据式（20、65）和（66），为了使式（63）成立，在满足条件 $(\mathrm{d}\hat{v}^\flat)^\sharp\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}}=0$ 的情况下，对流应力 $\widehat{\mathcal{T}}$ 应满足

$$\widehat{\mathcal{T}}=2\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{E}}}{\partial\hat{g}}\right)^\flat. \tag{67}$$

此外，当满足以下条件时，条件 $(\mathrm{d}\hat{w}^\flat)^\sharp\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}}=0$ 成立：

$$(\hat{\alpha}^\sharp\otimes\hat{\beta})\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}}=(\hat{\beta}^\sharp\otimes\hat{\alpha})\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}},\qquad\forall\hat{\alpha},\hat{\beta}\in\Omega^1(\mathcal{B}). \tag{68}$$

式（67）对应于众所周知的 Doyle-Erickson 公式 [10] 的对流对应形式，而式（68）对应于通常的应力对称条件。因此，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_{\mathrm{int}}=\int_{\mathcal{B}}\hat{\nabla}\hat{v}\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}}=\int_{\mathcal{B}}\frac{1}{2}(\partial_t\hat{g})^\sharp\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}}=\int_{\mathcal{B}}\hat{\varepsilon}\mathbin{\dot{\wedge}}\widehat{\mathcal{T}}, \tag{69}$$

其中，$\hat{\varepsilon}$ 表示对流应变率张量场。

结合运动方程（55,56），本构定律（67）提供了一组完整的方程，以内禀方式描述弹性体的运动。鉴于他在强调 $\mathcal{M}$（$\mathcal{B}$）在这种内禀表述中的重要性方面所做的工作，我们仿照 [7]，将 $\widehat{\mathcal{T}}$称为Rougee应力张量。

Remark 11 注意，在（65）中，楔积点应具有与标准楔积类似的交替性质，因此交换形式的各个分量时必须谨慎。不过，由于我们假设 $n=3$，交换一个1-形式和一个2-形式不会改变乘积的符号。

6.5.2 Material

作为式 (63) 的替代方法，可以尝试对物质情形重复上述思路。由式 (15、61、32) 和 (62) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_{\mathrm{int}}=\int_{\mathcal{B}}\tilde{\nabla}\tilde{v}\mathbin{\dot{\wedge}}\widetilde{\mathcal{T}}=\int_{\mathcal{B}}D_tF\mathbin{\dot{\wedge}}\widetilde{\mathcal{T}}. \tag{70}$$

这个方程可能会让人立即认为变形梯度是合适的变形状态，因此可以说

$$\mathscr{E}_{\mathrm{int}}[F] := \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathcal{E}}(X, F), \tag{71}$$

其中 $\tilde{\mathcal{E}}\colon \mathcal{B} \times \Omega^1_\varphi(\mathcal{B};\, T\mathcal{S}) \to \Omega^n(\mathcal{B})$ 是 $\hat{}\mathcal{E}$ 的物质对应量。因此，Doyle Erickson 公式的物质版本应为 [10]

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial F}\right), \tag{72}$$

其中，$\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial F}\right) \in \Omega^{n-1}_\varphi(\mathcal{B};\, T^*\mathcal{S})$ 表示相对于 F 的 $\tilde{\mathcal{E}}$ 梯度。

然而，这种描述的根本问题在于，与表征运动的变形分量的对流度量 $\hat{g}$ 不同，F 表征的是完整运动。一种理解方式是比较式（15）和式（21）：它们表明，$\hat{g}$ 是通过对速度梯度的对称部分（因而也是应变率）进行时间积分得到的，而 F 则是由完整的速度梯度计算得出的。另一种理解方式是依据物质参考系无关性公理，即客观性 [5]。这一众所周知的结果表明，为使内能 $\mathscr{E}_{\mathrm{int}}$ 在任意空间微分同胚下保持不变，$\mathcal{E}$ 只能依赖于 $\hat{g}$，而不能依赖于 F [5, Th. 2.10]。事实上，这条不变性公理等价于主丛结构中刚体运动的因子化，该结构联系着 $\mathscr{C}$ 和 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$，相关内容将在第8节详述。因此，这说明了空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 作为变形空间的重要性。

6.5.3 Spatial

按照 [5, 第 3]，章的标准构造，通过将 $\hat{g} = \varphi^*(g)$ 视为 F 和 g 的函数，即可实现向空间描述的转换。因此，可以将 $\mathscr{E}_{\mathrm{int}}$ 视为如下泛函

$$\mathscr{E}_{\mathrm{int}}[F, g] := \int_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(x, F, g), \tag{73}$$

其中 $\mathcal{E}\colon \mathcal{S} \times \Omega^1_\varphi(\mathcal{B};\, T\mathcal{S}) \times \mathcal{M}(\mathcal{S}) \to \Omega^n(\mathcal{S})$ 是 $\hat{}\mathcal{E}$ 的空间对应量，其定义满足 $\mathcal{E}(x,\ F,\ g) := \varphi_*(\,\hat{}\mathcal{E}(\varphi^{-1}(x)\ \varphi^*(g)))$。此外，利用链式法则可证明，$\mathcal{E}$ 关于 g 的梯度为

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g} = \varphi_* \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial \hat{g}}\right) \in \Omega^{n-1}(\mathcal{S}; T\mathcal{S}).$$

利用推前运算与缩并的可交换性，可得式 (67) 的空间对应量

$$\mathcal{T} = \varphi_* \left(\widehat{\mathcal{T}}\right) = \varphi_* \left(2\hat{g} \cdot \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial \hat{g}}\right) = 2\varphi_*(\hat{g}) \cdot \varphi_* \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial \hat{g}}\right) = 2g \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g} = 2\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g}\right)^\flat. \tag{74}$$

此外，$\hat{\sigma}$ 继承了对称条件 (68)，因此

$$(\alpha^\sharp \otimes \beta)\ \dot{\wedge}\ \mathcal{T} = (\beta^\sharp \otimes \alpha)\ \dot{\wedge}\ \mathcal{T}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega^1(\mathcal{S}). \tag{75}$$

因此，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_{\mathrm{int}} = \int_{\mathcal{S}} \nabla v \mathbin{\dot{\wedge}} \mathcal{T} = \int_{\mathcal{B}} \varepsilon \mathbin{\dot{\wedge}} \mathcal{T}, \tag{76}$$

其中 ε 表示空间应变率张量场。

将（76）与（69）进行比较，可以发现两者极为相似，这可能导致人们对这两种本构方程描述产生严重混淆。这种表面上的相似性可能会使人误以为度量 g在空间描述中充当变形状态。然而， g 是环境空间的一种固定物理属性，因此既不是随时间变化的状态，也不是应变率张量 $\varepsilon^\flat = \frac{1}{2}\mathcal{L}_v g$ 的积分！要澄清这一误解，可以明确写出 Doyle Erickson 公式（74）中的自变量，该公式也可以改写为

$$\mathcal{T} = 2\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g}\right)^\flat [F, g],$$

以强调本构方程同时取决于 g 和 F，而这正是对应于$\hat{g}$、即真实变形状态的组合。此外，通过明确写出这种依赖关系，还可以看出，空间本构方程（74）与运动方程（48-49）结合后并非适定，因为还需要为变形梯度 F补充一个演化方程。然而，这会导致物质描述与空间描述混杂。这再次表明，只有在对流描述中，才能对本构方程进行完整的内禀表述。

7 与常见表述的关系

在最后这一节中，我们将说明本文提出的外微分演算表述与文献中的标准表述之间的关系，例如 $[5, 23]$。主要区别在于，我们选择使用内禀质量密度和速度变量，而非广延质量形式和动量变量。此外，常见表述将应力表示为内禀二阶张量，而非我们所采用的广延应力变量。

接下来，我们将说明如何从（$\mathcal{T}$，$\mathcal{T}$，$\mathcal{T}$）中还原常见的内禀应力变量$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$，以及如何在不同表示形式之间进行转换。然后，我们将从第 6.4 节给出的方程推导出标准的控制动力学方程。

7.1 从广延应力到内禀应力

类似于式 (44) 中动量变量与速度变量之间的关系，我们可以将余向量值的（$n-1$）形式 $\widehat{\mathcal{T}}$、$\widetilde{\mathcal{T}}$、和 $\mathcal{T}$变换为以下内禀应力变量:

$$\begin{aligned}
\hat{\tau} &:= \hat{\star}^\sharp\ \widehat{\mathcal{T}} \in \Omega^1(\mathcal{B}; T\mathcal{B}) \cong \Gamma(T^1_1\mathcal{B}),\\
\tilde{\tau} &:= \tilde{\star}^\sharp\ \widetilde{\mathcal{T}} \in \Omega^1_\varphi(\mathcal{B}; T\mathcal{S}) \cong \Gamma(T^*\mathcal{B} \otimes \varphi^* T\mathcal{S}),\\
\tau &:= \star^\sharp\ \mathcal{T} \in \Omega^1(\mathcal{S}; T\mathcal{S}) \cong \Gamma(T^1_1\mathcal{S}),
\end{aligned} \tag{77}$$

	对流	物质	空间
质量和体积依赖关系	$\widehat{\mathcal{T}}$ Rougee	$\widetilde{\mathcal{T}}$	$\mathcal{T}$
无依赖关系	$\hat{\tau}$	$\tilde{\tau}$	τ
质量依赖关系	$\hat{\sigma}$ 对流的	$\tilde{\sigma}$ 1st皮奥拉 – 基尔霍夫	σ 柯西

表 4：广延和内禀应力表示

它们可解释为向量值 1-形式，或等价地 *mixed 2-rank*张量场。标准应力张量场使用质量密度定义如下

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} :=& \hat{\rho}\hat{g}^{-1}\cdot\hat{\tau}\in\Gamma(T_0^2\mathcal{B}),\\ \tilde{\sigma} :=& \tilde{\rho}\tilde{g}^{-1}\cdot\tilde{\tau}\in\Gamma(T\mathcal{B}\otimes\varphi^*T\mathcal{S}),\\ \sigma :=& \rho g^{-1}\cdot\tau\in\Gamma(T_0^2\mathcal{S}),\end{aligned}\tag{78}$$

分别称为对流的、 1^{st} 皮奥拉–基尔霍夫和柯西应力张量场。其他常见的应力还有 2^{nd} 皮奥拉–基尔霍夫应力 $J_\varphi\hat{\sigma}\in\Gamma(T_0^2\mathcal{B})$和基尔霍夫应力 $(J_\varphi\circ\varphi^{-1})\ \sigma\in\Gamma(T_0^2\mathcal{S})$, 其中 $J_\varphi\in C^\infty(\mathcal{B})$是 φ的雅可比行列式。

在局部坐标图中，内禀应力 (77) 和 (78) 表示为

$$\hat{\tau}=\hat{\tau}_I^J\ E^I\otimes E_J,\qquad \tilde{\tau}=\tilde{\tau}_I^j\ E^I\otimes e_j|_\varphi,\qquad \tau=\tau_i^j\ e^i\otimes e_j,$$

$$\hat{\sigma}=\hat{\sigma}^{IJ}\ E_I\otimes E_J,\qquad \tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}^{Ij}\ E_I\otimes e_j|_\varphi,\qquad \sigma=\sigma^{ij}\ e_i\otimes e_j,$$

其分量与 (43) 中广延应力变量的分量之间的关系为

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{T}}_{KAB} =& \hat{\tau}_K^J\hat{\mu}_{JAB}=\hat{g}_{KM}\hat{\sigma}^{JM}\hat{\omega}_{JAB},\\ \widetilde{\mathcal{T}}_{kAB} =& \tilde{g}_{kj}G^{IM}\tilde{\tau}_I^j\tilde{\mu}_{MAB}=\tilde{g}_{kj}\tilde{\sigma}^{Mj}\tilde{\omega}_{MAB},\\ \mathcal{T}_{kab} =& \tau_k^j\mu_{jab}=g_{km}\sigma^{jm}\omega_{jab},\end{aligned}\tag{79}$$

其中，带指标的 *μ-symbols* 和 *ω-symbols* 分别表示质量形式和体积形式的分量（*cf.* 表 2）。

比较不同的分量函数可以发现，广延应力变量（$\widehat{\mathcal{T}}$，$\widetilde{\mathcal{T}}$，$\mathcal{T}$）具有质量和体积依赖关系，而混合二阶张量场（$\hat{\tau}$，$\tilde{\tau}$，τ）则不存在这种依赖关系，因此表示由本构方程确定的纯应力信息。另一方面，应力（$\hat{\sigma}$，$\tilde{\sigma}$，σ）与（$\hat{\tau}$，$\tilde{\tau}$，τ）类似，也属于内禀量，但不同之处在于它们通过质量密度具有质量依赖关系。不同应力表示的总结见表 4。

广延应力变量与内禀应力变量之间的另一个关键区别，在于空间表示、对流表示和物质表示彼此之间的关联方式。广延应力具有明确的内在拉回关系，由（42）表征；而内禀应力变量则

不具备这一优势。具体而言，从空间表示到对流表示的变换可在局部写为

$$\hat{\tau}_I^J = F_I^i (F^{-1})_j^J \tau_i^j, \qquad \hat{\sigma}^{IJ} = (F^{-1})_i^I (F^{-1})_j^J \sigma^{ij}, \tag{80}$$

并由空间表示转换为物质表示，如下所示

$$\tilde{\tau}_I^j = G_{IM} \tilde{g}^{ij} (F^{-1})_m^M \tau_i^m, \qquad \tilde{\sigma}^{Ij} = J_\varphi (F^{-1})_i^I \sigma^{ij}, \tag{81}$$

并由物质表示转换为对流表示，如下所示

$$\hat{\tau}_I^J = \hat{g}_{IK} G^{JM} (F^{-1})_j^K \tilde{\tau}_M^j, \qquad \hat{\sigma}^{IJ} = \frac{1}{J_\varphi} (F^{-1})_j^I \tilde{\sigma}^{Ji}. \tag{82}$$

从上述关系可以看出，只有从空间表示到对流表示的变换（80）是拉回关系，即有 $\hat{\tau} = \varphi^*(\tau)$ 和 $\hat{\sigma} = \varphi^*(\sigma)$。对于（81）和（82），情况显然并非如此；除了拉回一个指标之外，它们还需要使用非内禀量 G 或 J_φ。在文献中，（81）中 $\tilde{\sigma}$ 与 σ 之间的关系被称为 *Piola transformation*，可以看出，这实际上是一种非内禀运算。再次说明，将应力表示为余向量值伪形式具有重要的技术优势。

7.2 控制动力学方程

定理 1（空间） *The counterparts of equations (48,49) and (74) in terms of the intensive variables* $(\rho,\ v,\ \sigma) \in C^\infty(\mathcal{S}) \times \Gamma(T\mathcal{S}) \times \Gamma(T_0^2\mathcal{S})$ *are given by*

$$\partial_t \rho = -\mathcal{L}_v \rho - \rho \mathrm{div}(v) \tag{83}$$

$$\partial_t v = -\nabla_v v + \frac{1}{\rho} \mathrm{div}(\sigma) \tag{84}$$

$$\sigma = 2\rho \frac{\partial e}{\partial g}. \tag{85}$$

Furthermore, the balance of the total energy is expressed as

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{S}} \left[\frac{1}{2} g(v,v) + e(x,F,g) \right] \rho \omega_g = \int_{\partial \mathcal{S}} \sigma^\flat(v,n) \varsigma_g, \tag{86}$$

where $e(x,F,g) \in C^\infty(\mathcal{S})$ *denotes the internal energy function,* $\sigma^\flat := g \cdot (g \cdot \sigma) \in \Gamma(T_2^0\mathcal{S})$ *denotes the 2-covariant version of the stress, while* $n\colon \partial\mathcal{S} \to T\mathcal{S}$ *and* $\varsigma_g := \mathrm{tr}($ $\iota_n \omega_g$ $\partial\mathcal{S}$ *denote respectively the unit normal vector field and the area form* $) \in \Omega^2() , ,$ *on the boundary* $\partial\mathcal{S}$ *induced by the spatial metric* g.

Proof i) (83) 与 (48) 的等价性是标准的，且此前在质量守恒命题 2 中提到过。

ii) 动量平衡 (84) 由 (49) 推导而来，因此

$$\star^\sharp(\partial_t \mathcal{M}) = \star^\sharp(-\mathcal{L}_v \mathcal{M} + \mu \otimes \frac{1}{2} \mathrm{d} \iota_v v^\flat) + \star^\sharp \mathrm{d}_\nabla \star^\flat (\tau).$$

首先，利用时间导数的莱布尼茨性质，我们可以写出

$$\partial_t \mathcal{M} = \partial_t (\mu \otimes v^\flat) = \mu \otimes g \cdot (\partial_t v) + \partial_t \mu \otimes v^\flat.$$

其次，利用李导数的莱布尼茨性质和恒等式 (13)，我们有

$$\mathcal{L}_v\mathcal{M} = \mathcal{L}_v(\mu \otimes v^\flat) = \mu \otimes \mathcal{L}_v v^\flat + \mathcal{L}_v\mu \otimes v^\flat = \mu \otimes (\nabla_v v^\flat + \frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_v v^\flat) + \mathcal{L}_v\mu \otimes v^\flat.$$

将上述两个方程与质量守恒式 (48) 结合，可得

$$\star^\sharp \left(\partial_t \mathcal{M} + \mathcal{L}_v\mathcal{M} - \mu \otimes \frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_v v^\flat \right) = \partial_t v + \nabla_v v$$

$\mathcal{T}$ 的外微分是余向量值顶形式，在局部可表示为

$$\mathrm{d}_\nabla \mathcal{T} = \left(\frac{3}{3!}\mathcal{T}_{k[ab;c]} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right) \otimes e^k,$$

与 (33) 类似，其中分号用作关于 ∇ 的协变微分的（标准）简写符号。利用关系式 (79)，可得

$$3\mathcal{T}_{k[ab;c]} = 3(\tau_k^m \mu_{m[ab)_{;c]}} = 3(g_{kj}\sigma^{jm}\omega_{m[ab)_{;c]}}.$$

利用协变导数的性质 $\nabla g = 0$ 和 $\nabla \omega_g = 0$，以及 3-形式 ω_g 的全反对称性，可得

$$3\mathcal{T}_{k[ab;c]} = 3g_{kj}(\sigma^{jm})_{;[c}\omega_{ab]m} = g_{kj}(\sigma^{jm})_{;m}\omega_{abc} = g_{kj}\frac{1}{\hat{\rho}}(\sigma^{jm})_{;m}\mu_{abc}$$

因此，$\mathcal{T}$ 的外微分等价于

$$\mathrm{d}_\nabla \mathcal{T} = \mathrm{d}_\nabla \star^\flat(\tau) = g_{kj}\frac{1}{\rho}(\sigma^{jm})_{;m}\mu \otimes e^k = \mu \otimes \frac{1}{\rho}\left(g \cdot \mathrm{div}(\sigma)\right),$$

因此 $\star^\sharp \mathrm{d}_\nabla \star^\flat(\tau) = \frac{1}{\rho}\mathrm{div}(\sigma)$。至此，便完成了从（49）推导出（84）的过程。

iii）在标准表述中，内能函数通常表示为$\mathcal{E}(X, F, g) = e(X, F, g)\mu$，其中 $e\colon \mathcal{S} \times \Omega^1_\varphi(\mathcal{B};\, T\mathcal{S}) \times \mathcal{M}(\mathcal{S}) \to C^\infty(\mathcal{S})$ 是一个标量函数。e 关于 g 的梯度是二阶逆变张量场$\frac{\partial e}{\partial g} \in \Gamma(T^2_0\mathcal{S})$，其变体 $\left(\frac{\partial e}{\partial g}\right)^\flat \in \Gamma(T^1_1\mathcal{S}) \cong \Omega^1(\mathcal{S};\, T\mathcal{S})$可解释为向量值1-形式。因此，它与 $\mathcal{E}$ 关于 g 的梯度之间的关系为

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g}\right)^\flat = \star^\flat \left(\frac{\partial e}{\partial g}\right)^\flat \in \Omega^2(\mathcal{S}; T^*\mathcal{S}).$$

在局部坐标中，它表示为

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g}\right)^j_{ab} = \left(\frac{\partial e}{\partial g}\right)^{jm} \mu_{mab}.$$

利用（74）和 $\mu = \rho\omega_g$，可得

$$\mathcal{T}_{kab} = 2g_{kj}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g}\right)^j_{ab} = 2g_{kj}\left(\frac{\partial e}{\partial g}\right)^{jm} \rho\omega_{mab}.$$

与式 (79) 比较，可得 $\sigma^{jm} = 2\rho\left(\frac{\partial e}{\partial g}\right)^{jm}$。

iv) 根据霍奇星算子 (34) 的定义，可以看出

$$\star^\sharp\mathcal{M}\wedge\mathcal{M}=v\wedge\mathcal{M}=v\wedge\star^\flat v=g(v,v)\mu.$$

利用楔点运算的定义以及边界法向量为单位向量这一事实，即 $g_{mj}n^jn^l=\delta^l_m$，应力功率 $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(v\wedge\mathcal{T})&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(v^k\tau_k^m\mu_{mab}e^a\wedge e^b)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(v^k\tau_k^m\delta^l_m\mu_{lab}e^a\wedge e^b)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(v^k\tau_k^mg_{mj}n^jn^l\mu_{lab}e^a\wedge e^b)=\mathrm{tr}(\rho v^k\tau_k^mg_{mj}n^j)\mathrm{tr}(\frac{1}{2}n^l\omega_{lab}e^a\wedge e^b)\\&=\mathrm{tr}(g_{mj}g_{kl}\sigma^{ml}v^kn^j)\mathrm{tr}(\iota_n\omega_g)=\mathrm{tr}(\sigma^\flat(v,n))\varsigma_g,\end{aligned}$$

由此完成证明。 ■

定理2（对流形式） *The counterparts of equations (55,56) and (67) in terms of the intensive variables* $(\hat{\rho},\hat{v},\hat{\sigma})\in C^\infty(\mathcal{B})\times\Gamma(T\mathcal{B})\times\Gamma(T^2_0\mathcal{B})$ *are given by*

$$\partial_t\hat{g}=\mathcal{L}_{\hat{v}}\hat{g}\tag{87}$$

$$\partial_t\hat{\rho}=-\hat{\rho}\widehat{\mathrm{div}}(\hat{v})\tag{88}$$

$$\partial_t\hat{v}=-\hat{\nabla}_{\hat{v}}\hat{v}+\frac{1}{\hat{\rho}}\widehat{\mathrm{div}}(\hat{\sigma})\tag{89}$$

$$\hat{\sigma}=2\hat{\rho}\frac{\partial\hat{e}}{\partial\hat{g}}\tag{90}$$

Furthermore, the balance of the total energy is expressed as

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}}\left[\frac{1}{2}\hat{g}(\hat{v},\hat{v})+\hat{e}(X,\hat{g})\right]\hat{\rho}\hat{\omega}_{\hat{g}}=\int_{\partial\mathcal{B}}\hat{\sigma}^\flat(\hat{v},N)\hat{\varsigma}_{\hat{g}},\tag{91}$$

where $\hat{e}(X,\hat{g})\in C^\infty(\mathcal{B})$ *denotes the internal energy function,* $\hat{\sigma}^\flat:=\hat{g}\cdot(\hat{\mathcal{G}}\cdot\hat{\sigma})\in\Gamma(T^0_2\mathcal{B})$ *denotes the 2-covariant version of the stress while* $N\in\partial\mathcal{B}\to T\mathcal{B}$ *and* $\hat{\varsigma}_{\hat{g}}=\iota_N\hat{\omega}_{\hat{g}}\in\Omega^2(\partial\mathcal{B})$ *denote respectively the unit normal vector field and the area form on the boundary* $\partial\mathcal{B}$ *induced by the convective metric* g.

Proof i) 式 (88) 在广延表示中的对应形式为 $\partial_t\hat{\mu}=0$，如命题 2 所示。

ii) 动量平衡式 (89) 可由式 (56) 推导得到:

$$\hat{\star}^\sharp(\partial_t\widehat{\mathcal{M}})=\hat{\star}^\sharp(\frac{1}{2}\hat{\mu}\otimes\mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^\flat)+\hat{\star}^\sharp\hat{\mathrm{d}}_{\hat{\nabla}}\hat{\star}^\flat(\hat{\tau}).$$

利用式 (87)、恒等式 (14) 和 $\mathcal{L}_{\hat{v}}\hat{g}\cdot\hat{v}=\mathcal{L}_{\hat{v}}\hat{v}^\flat$，可以证明:

$$\partial_t(\hat{g})\cdot\hat{v}=\hat{\nabla}_{\hat{v}}\hat{v}^\flat+\frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^\flat,$$

因此

$$\partial_t(\hat{g}\cdot\hat{v})=\hat{g}\cdot\partial_t\hat{v}+\partial_t(\hat{g})\cdot\hat{v}=\hat{g}\cdot\partial_t\hat{v}+\hat{\nabla}_{\hat{v}}\hat{v}^\flat+\frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^\flat.$$

利用 $\hat{}\mu$ 的时间独立性以及式（9），我们得到

$$\begin{aligned}\hat{\star}^{\sharp}(\partial_t\widehat{\mathcal{M}}) = \hat{\star}^{\sharp}(\hat{\mu}\otimes\partial_t(\hat{g}\cdot\hat{v})) =&\partial_t\hat{v} + \hat{g}^{-1}\cdot(\hat{\nabla}_{\hat{v}}\hat{v}^{\flat} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^{\flat})\\ =&\partial_t\hat{v} + \hat{\nabla}_{\hat{v}}\hat{v} + \hat{g}^{-1}\cdot(\frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^{\flat}).\end{aligned}$$

利用 $\hat{\star}^{\sharp}(\frac{1}{2}\hat{}\mu\otimes\mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^{\flat}) = \hat{g}^{-1}\cdot(\frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^{\flat})$ 这一事实，我们由此得到

$$\hat{\star}^{\sharp}(\partial_t\widehat{\mathcal{M}} - \frac{1}{2}\hat{\mu}\otimes\mathrm{d}\iota_{\hat{v}}\hat{v}^{\flat}) = \partial_t\hat{v} + \hat{\nabla}_{\hat{v}}\hat{v}.$$

由于 $\nabla\hat{g} = 0$ 和 $\nabla\hat{}\omega_{\hat{g}} = 0$，类似于前一个定理中的空间情形，可以证明，对流应力 $\mathcal{T}$的外微分等于

$$\hat{\mathrm{d}}_{\hat{\nabla}}\widehat{\mathcal{T}} = \hat{\mathrm{d}}_{\hat{\nabla}}\hat{\star}^{\flat}(\hat{\tau}) = \hat{g}_{KJ}\frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{\sigma}^{JM})_{;M}\hat{\mu}\otimes E^K = \hat{\mu}\otimes\frac{1}{\hat{\rho}}\left(\hat{g}\cdot\widehat{\mathrm{div}}(\hat{\sigma})\right),$$

其中，分号用作关于 $\hat{}\nabla$ 的协变微分的简写记号。因此，我们有 $\hat{\star}^{\sharp\hat{}}\mathrm{d}\hat{\nabla}\hat{\star}^{\flat}(\hat{\tau}) = \frac{1}{\hat{\rho}}\widehat{\mathrm{div}}(\hat{\sigma})$. 至此，便完成了从 (56) 推导 (89) 的过程。

iii) 从 (67) 推导 (90) 的过程，与定理 1 中空间情形的推导完全相同，均从 $\hat{}\mathcal{E}(X,\hat{g}) = \hat{e}(X,\hat{g})\hat{}\mu$ 开始。

iv) 最后，与空间情形类似，利用法向量是单位向量这一事实，即 $\hat{}g_{MJ}N^JN^L = \delta^L_M$，可得

$$\mathrm{tr}(\hat{v}\,\hat{\wedge}\,\widehat{\mathcal{T}}) = tr(\hat{g}_{MJ}\hat{g}_{KL}\hat{\sigma}^{ML}\hat{v}^KN^J)\mathrm{tr}(\iota_N\hat{\omega}_{\hat{g}}) = \mathrm{tr}(\hat{\sigma}^{\flat}(\hat{v},N))\varsigma_{\hat{g}},$$

由此完成证明。 ■

定理 3（物质） *The counterparts of equations (59,60) and (72) in terms of the intensive variables* $(\tilde{v},\ \tilde{\sigma}) \in \Gamma(\varphi^*T\mathcal{S}) \times \Gamma(T\mathcal{B}\otimes\varphi^*T\mathcal{S})$ *are given by*

$$\partial_t\varphi = \tilde{v} \tag{92}$$

$$D_tF = \tilde{\nabla}\tilde{v} \tag{93}$$

$$D_t\tilde{v} = \frac{1}{\tilde{\rho}}\widetilde{\mathrm{div}}(\tilde{\sigma}) \tag{94}$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\rho}\ \tilde{g}^{-1}\cdot\frac{\partial\tilde{e}}{\partial F}. \tag{95}$$

Furthermore, the balance of the total energy is expressed as

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{B}}\left[\frac{1}{2}\tilde{g}(\tilde{v},\tilde{v}) + \tilde{e}(X,F)\right]\tilde{\rho}\omega_G = \int_{\partial\mathcal{B}}\tilde{\sigma}^{\flat}(\tilde{v},\tilde{n})\tilde{\varsigma}_G, \tag{96}$$

where $\tilde{e}(X,F) \in C^{\infty}(\mathcal{B})$ *denotes the internal energy function,* $\tilde{\sigma}^{\flat} := \tilde{g}\cdot(G\cdot\tilde{\sigma}) \in \Gamma(T^*\mathcal{B}\otimes\varphi^*T^*\mathcal{S})$ *denotes the 2-covariant version of the stress, while* $N\colon \partial\mathcal{B}\to T\mathcal{B}$ *and* $\tilde{\varsigma}_G = \iota_N\omega_G$ *denote respectively the unit normal vector field and* $:\mathrm{tr}() \in \Omega^2()$, , *the area form on the boundary* $\partial\mathcal{B}$ *induced by the reference metric* G.

Proof i）由于我们可以通过 $\tilde{\mu}\otimes\tilde{v}^\flat$ 识别 $\widetilde{\mathcal{M}}$，因此可以利用 $\tilde{\mu}$ 的时间无关性，将动量平衡式（60）写为

$$D_t\widetilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mu}\otimes\tilde{g}\cdot(D_t\tilde{v}).$$

因此，立即可得 $\tilde{\star}^\sharp(D_t\widetilde{\mathcal{M}}) = D_t\tilde{v}$。

~ $\mathcal{T}$的外微分是余向量值顶阶形式，其局部表达式为

$$\tilde{\mathrm{d}}_{\tilde{\nabla}}\widetilde{\mathcal{T}} = \left(\frac{3}{3!}\widetilde{\mathcal{T}}_{k[AB;C]}E^A\wedge E^B\wedge E^C\right)\otimes e^k|_\varphi,$$

其中，分号用作相对于 $\tilde{\nabla}$进行协变微分的简写符号。利用关系式 (79)，可得

$$3\widetilde{\mathcal{T}}_{k[AB;C]} = 3(\tilde{g}_{km}G^{JM}\tilde{\tau}^m_J\tilde{\mu}_{M[AB})_{;C]} = 3(\tilde{g}_{km}\tilde{\sigma}^{mM}\tilde{\omega}_{M[AB})_{;C]}.$$

~ ~ ~回顾第 2.4 节可知 $\nabla\tilde{g}=0$。此外，由于 ∇是利用 G 的联络系数构造的，因此它与由 G 诱导的体积形式相容（*cf.* 注2），故有 $\nabla\tilde{\omega}_G = 0$。因此，与空间和对流情形类似，可得

$$3\widetilde{\mathcal{T}}_{k[AB;C]} = \tilde{g}_{km}(\tilde{\sigma}^{mM})_{;M}\tilde{\omega}_{ABC}.$$

~因此，$\mathcal{T}$的外微分等价于

$$\tilde{\mathrm{d}}_{\tilde{\nabla}}\widetilde{\mathcal{T}} = \tilde{\mathrm{d}}_{\tilde{\nabla}}\tilde{\star}^\flat(\tilde{\tau}) = \tilde{\mu}\otimes\frac{1}{\tilde{\rho}}\left(\tilde{g}\cdot\widetilde{\mathrm{div}}(\tilde{\sigma})\right),$$

因此 $\tilde{\star}^\sharp\tilde{\mathrm{d}}_{\tilde{\nabla}}\tilde{\star}^\flat(\tilde{\tau}) = \frac{1}{\tilde{\rho}}\widetilde{\mathrm{div}}(\tilde{\sigma})$。至此便从 (60) 推导出了 (94)。

iii）按照空间情形证明中的相同思路，我们有 $\tilde{\mathcal{E}}(X,\ F) = \tilde{e}(X,\ F)\tilde{\mu}$。$\tilde{e}$关于 F的梯度记为$\frac{\partial\tilde{e}}{\partial F}\in\Gamma(T\mathcal{B}\otimes\varphi^*T^*\mathcal{S})$，它与 $\tilde{\mathcal{E}}$关于 F的梯度之间的关系为

$$\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{E}}}{\partial F}\right)_{kAB} = \left(\frac{\partial\tilde{e}}{\partial F}\right)^M_k\tilde{\mu}_{MAB}.$$

因此，与 (79) 对比可得 $\tilde{\sigma}^{Mj} = \tilde{g}^{jk}\tilde{\rho}\left(\frac{\partial\tilde{e}}{\partial F}\right)^M_k$。

iv）最后，类似于空间情形和对流情形，利用法向量是单位向量这一事实，即 $G_{MJ}N^JN^L = \delta^L_M$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\tilde{v}\mathbin{\dot\wedge}\widetilde{\mathcal{T}}) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\tilde{v}^k\tilde{g}_{ki}G^{LM}\tilde{\tau}^i_L\tilde{\mu}_{MAB}E^A\wedge E^B) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^{iM}\tilde{v}^k\tilde{g}_{ki}\tilde{\omega}_{MAB}E^A\wedge E^B)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\tilde{g}_{ki}\tilde{\sigma}^{iM}\tilde{v}^kG_{MJ}N^JN^K\tilde{\omega}_{KAB}E^A\wedge E^B)\\ &= \mathrm{tr}(\tilde{g}_{ki}G_{MJ}\tilde{\sigma}^{iM}\tilde{v}^kN^J)\mathrm{tr}(\frac{1}{2}N^K\tilde{\omega}_{KAB}E^A\wedge E^B)\\ &= \mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^\flat(\tilde{v},N))\mathrm{tr}(\iota_N\tilde{\omega}_G) = \mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^\flat(\tilde{v},N))\tilde{\varsigma}_G,\end{aligned}$$

至此，证明完毕。 ■

Remark 12（物质表示的内在性）

必须明确区分广延动量平衡式 (60) 和强度动量平衡式 (94)。这两个方程实际上都是牛顿第二定律的表述，即动量的变化率等于应力所产生的力。这些力通过对空间应力张量求导来计算：在式 (60) 中以外协变导数 $\mathrm{d}\tilde{\nabla}$ 表示，在式 (94) 中则以散度算子 div 表示。然而，关键区别在于，广延表示 (60) 是内禀的，不依赖任何参考构形，而式 (94) 则不然。

$\tilde{}$式 (94) 不具内在性，这一点可从由式 (7) 中的协变微分 $\nabla\tilde{\sigma}$ 构造的 div 表达式看出；该微分使用参考度量 G 的列维-奇维塔联络，正如注2所述。另一方面，外协变导数 $\mathrm{d}\tilde{\nabla}$ 是通过对作用于一组余向量场的协变$\tilde{}$导数 ∇ 进行反对称化构造而成的，正如注 6 所述；这不需要参考度量（*cf.* 比较表1中 $\tilde{\nabla}\tilde{}$作用于余向量场时的坐标表达式与式 (19) 中 ∇ 作用于二阶张量场时的坐标表达式）。

这种不具内在性源于广延应力张量 $\mathcal{T}$ 与其广延对应量 $\tilde{\sigma}$ 之间的根本差异，如式 (79) 所示。纳入 $\tilde{\sigma}$ 定义中的广延质量形式 $\tilde{\mu}$，是为物体流形内在定义的。另一方面，$\tilde{\sigma}$ 由内禀质量密度 $\tilde{\rho}$构造，而后者取决于所选的参考构形。

8 底层结构

在本节中，我们最后强调非线性弹性力学理论的两种底层结构。具体而言，1）将构形空间 $\mathscr{C}$ 与变形空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 联系起来的主丛结构；2）将丛值形式空间彼此联系起来的德拉姆复形结构。

$\mathscr{C}$ 与 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 的主纤维丛结构

回顾第 3 节中的映射 $\pi_g\colon \mathscr{C} \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$，它将任意构形 φ_t 与 $\mathcal{B}$ 上的一个黎曼度量关联起来。描述物体运动的曲线 $c_\varphi : t \mapsto \varphi_t$ （位于 $\mathscr{C}$ 中）诱导出一条曲线 $c_{\hat{g}}\colon\ t \mapsto \hat{g}_t = \pi_g(\varphi_t)$（位于 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 中）。

必须区分构形空间 $\mathscr{C}$ 上的曲线 c_φ 与其在变形空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$上的像 $c_{\hat{g}} = \pi_g(c_\varphi)$。$c_\varphi$表示物体在环境空间中的运动，该运动由刚体运动（即同时进行平移和旋转）与变形共同构成；而曲线 $c_{\hat{g}}$ 仅表示该运动的变形分量。这一点可由以下事实看出：π_g 是一个非单射的投影映射。设 $\eta \in \mathrm{Isom}(\mathscr{A})$ 为环境空间的一个等距变换，即 $\eta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$，使得 $\eta^* g = g$，它在物理上表示刚体运动。若任意两个构形 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{C}$之间存在 $\varphi_2 = \eta \circ \varphi_1$ 关系（等价地，$\varphi_1 = \eta^{-1} \circ \varphi_2$），则有

$$\pi_g(\varphi_2) = \varphi_2^*(g) = (\eta \circ \varphi_1)^* g = \varphi_1^*(\eta^* g) = \varphi_1^*(g) = \pi_g(\varphi_1).$$

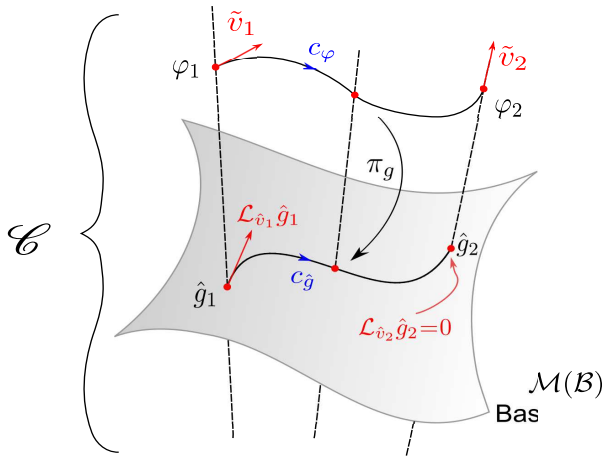


图7： π_g 的主纤维丛结构： $\mathscr{C} \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$。

在这种情况下， φ_2 表示对构形 φ_1叠加的刚体运动。

如 [44], 所示，这一观察结果是三元组（$\mathscr{C}$， π_g， $\mathcal{M}(\mathcal{B})$）所蕴含的一种几何结构的结果，即一种 *principal fiber bundle* 结构，可表述如下。令 $G := \mathrm{Isom}(\mathscr{A})$表示作用于 $\mathscr{A}$ 上的等距变换群，其群运算为复合；可以证明，该群是一个李群。考虑 G 在构形空间 $\mathscr{C}$ 上的右作用，定义如下：

$$\begin{aligned} \triangleleft : \mathscr{C} \times G &\to \mathscr{C} \\ (\varphi, \eta) &\mapsto \varphi \triangleleft \eta := \eta^{-1} \circ \varphi. \end{aligned} \tag{97}$$

可以验证， $\triangleleft$ 是一个自由的 G作用，因为 $\forall \varphi \in \mathscr{C}$ 唯一不改变 φ 的刚体运动是 G的恒等元。

对于任意 $\varphi \in \mathscr{C}$，我们将其在作用 $\triangleleft$ 下的轨道定义为集合

$$\mathscr{O}_\varphi := \{\bar{\varphi} \in \mathscr{C} \mid \exists \eta \in G : \varphi \triangleleft \eta = \bar{\varphi}\}.$$

若 $\varphi \sim \bar{\varphi}$ 满足 $\bar{\varphi} \in \mathscr{O}_\varphi$，则称二者等价。容易证明，这是一种等价关系（即具有自反性、对称性和传递性）。 $\mathscr{C}$的轨道空间定义为商空间 $\mathscr{C}/G$： $\{\mathscr{O}_\varphi | \varphi \in \mathscr{C}\}$，其中每个元素 $\mathscr{O}_\varphi = [\varphi]$ 都是 φ的一个等价类。直观而言，集合 $\mathscr{O}_\varphi$ 由所有作为 φ 的刚体运动的构形 $\bar{\varphi}$ 组成，因此它们具有相同的“形状”。因此，每个轨道 $\mathscr{O}_\varphi$ 都与一个变形状态$\hat{g}_\varphi := \pi_g(\varphi) \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$一一对应。由此可得映射

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{M}(\mathcal{B}) &\to \mathscr{C}/G \\ \hat{g}_\varphi &\mapsto [\varphi], \end{aligned}$$

是一个微分同胚，此外还满足 $\zeta \circ \pi_g = \pi$，其中 π： $\mathscr{C} \to \mathscr{C}/G$表示典范投影映射，它将集合 $\mathscr{C}$ 中的元素映射到其等价类。因此，这证明丛 π_g： $\mathscr{C} \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ 是一个主纤维 G-丛。

这种额外的丛结构将右 G-空间 $\mathscr{C}$与变形空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 联系起来。由此可知，在任意点$\hat{g} \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ 处（局部）附着着一个与 G 同构的纤维。这是因为 $\pi^{-1}(\mathscr{O}_\varphi) = \mathscr{O}_\varphi \cong G$ ，而 $\triangleleft$ 是一个自由的 G-作用。图7所示的这种主丛结构，形式化地描述了弹性体的完整运动如何由全空间 $\mathscr{C}$ 中的曲线 c_φ 表示；其在 π_g 下向基空间 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 的投影对应于变形分量，而沿纤维的运动则对应于刚体分量。

沿纤维的这种运动可以针对曲线$c_\varphi : t \to \varphi_t$ 以几何方式表述如下。考虑曲线的切向量$\tilde{v}_t \in T_{\varphi_t}\mathscr{C}$及其诱导的空间向量场 $v_t \in \Gamma(T\mathcal{S})$，该向量场定义于式（2）中。令由 v_t 生成的时变流定义为$\psi_{t,\ s} := \varphi_t \circ {\varphi_s}^{-1} : \ \varphi_s(\mathcal{B}) \ \to \varphi_t(\mathcal{B})$。如果每个映射$\psi_{t,\ s}$都是等距变换（即 G的一个元素），那么 v_t 由 G 的李代数中的一个元素生成，称为满足$\mathcal{L}_{v_t} g = 0$的Killing向量场。在这种情况下，由式（20）可得

$$\mathcal{L}_{v_t} g = 0 \implies \mathcal{L}_{\hat{v}_t} \hat{g}_t = \partial_t \hat{g}_t = 0.$$

换句话说，如果全空间中的切向量$\tilde{v}_t \in T_{\varphi_t}\mathscr{C}$ 完全沿着某个纤维，那么它在映射 π_g 下的推前将为零，因此对应于纯粹的刚体运动（图7中的$cf.$ 点 φ_2 ）。

如果在主 G-丛 $\pi_g : \mathscr{C} \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ 上给定一个联络，就可以将切空间 $T_\varphi\mathscr{C}$唯一分解为 $T_\varphi\mathscr{C} = V_\varphi\mathscr{C} \oplus H_\varphi\mathscr{C}$，其中，垂直子空间 $V_\varphi\mathscr{C}$定义为 π_g 的切映射的核，代表刚体运动；而水平子空间 $H_\varphi\mathscr{C}$ 则对应纯变形。基于这一构造，可以在 $\mathscr{C}$ 上定义平行移动，并在 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 上定义协变微分。利用 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 的黎曼结构，可以得到一个唯一的（列维-奇维塔）联络，从而实现这些运算。因此，可以定义 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 上任意两个变形状态之间的测地线，并据此得到应变 [6,29]的一致定义。

Remark 13 我们强调，文献中忽略了主丛结构 $\pi_g : \mathscr{C} \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$。相反， [4,6,29]中的研究以 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 上的列维-奇维塔联络为出发点。不过，未来若从主 G-丛上的联络1-形式出发，探究其对发展几何时间积分方案的启示，将会很有意义，类似于 [29]。此外，探讨其与 [44]中所述螺旋理论表述之间的关系，也很有意义。

8.2 德拉姆复形结构

使用丛值形式表述非线性弹性的一项关键优势，在于它突显了其底层的复形结构，而这一结构是许多分析与计算工具的基础。一方面，这种结构通过关联拓扑性质与几何性质，为偏微分方程的求解和分析提供了宝贵信息。另一方面，将这一结构借助索博列夫空间推广到一般的希尔伯特复形后，便可以为非线性弹性的混合有限元表述确定合适的解空间，从而得到稳定的保结构数值格式 [18]。接下来，我们将介绍

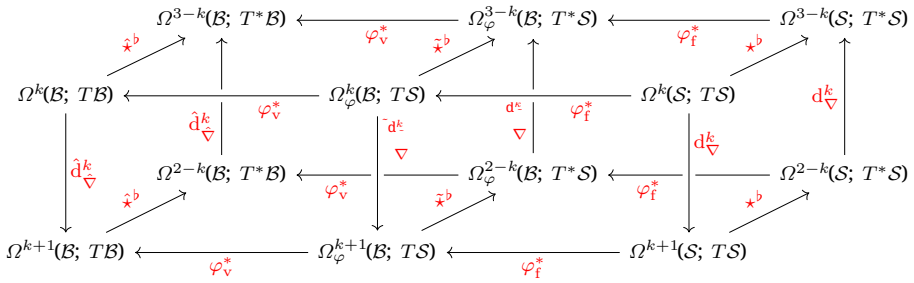


图 8：三维空间中的双德拉姆复形

空间、物质和对流表述下的向量值德拉姆复形。同样的构造也可以直接推广到余向量值形式。

向量空间序列 $\Omega^k(\mathcal{S};\, T\mathcal{S})$ 与微分算子 d^k_∇ 合在一起，构成代数拓扑中所称的 *co-chain complex*，前提是 $\mathrm{d}^k_\nabla \circ \mathrm{d}^{k-1}_\nabla = 0$。当且仅当环境空间 $\mathscr{A}$ 平坦，即没有内蕴曲率时，这一条件才成立。对于空间外协变导数，可以看出这一点：对于任意 $\alpha \in \Omega^0(\mathcal{S};\, T\mathcal{S})$ 和 $\beta \in \Omega^1(\mathcal{S};\, T\mathcal{S})$，有[19]

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}^1_\nabla \circ \mathrm{d}^0_\nabla(\alpha))(u_0, u_1) &= \mathcal{R}(u_0, u_1)\alpha, \\
(\mathrm{d}^2_\nabla \circ \mathrm{d}^1_\nabla(\beta))(u_0, u_1, u_2) &= \mathcal{R}(u_0, u_1)\beta(u_2) - \mathcal{R}(u_0, u_2)\beta(u_1) + \mathcal{R}(u_1, u_2)\beta(u_0),
\end{aligned}
$$

其中，$\mathcal{R}$ 表示联络 ∇ 在 $\mathcal{S} \subset \mathscr{A}$ 上的曲率张量。因此，d_∇ 是一个微分算子，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是具有 $\mathcal{R} = 0$ 的平坦空间时，才满足 $\mathrm{d}^k_\nabla \circ \mathrm{d}^{k-1}_\nabla = 0$。此外，由于对流联络 $\hat{\nabla}$ 是通过映射 φ_t 由 ∇ 诱导的，可以证明 ∇ 的曲率为 $\hat{\mathcal{R}} := \varphi_t^* \mathcal{R}$ [19]。因此，$\mathscr{A}$ 的平坦性也意味着对流外协变导数满足 $\hat{\mathrm{d}}^k_\nabla \circ \hat{\mathrm{d}}^{k-1}_\nabla = 0$，材料外协变导数 [19] 也同样满足这一结论。因此，以下各对 $(\Omega^k(\mathcal{S};\, T\mathcal{S}), \mathrm{d}^k_\nabla)$、$(\Omega^k(\mathcal{B};\, T\mathcal{B}), \hat{\mathrm{d}}^k_\nabla)$ 和 $(\Omega^k_\varphi(\mathcal{B};\, T\mathcal{S}), \tilde{\mathrm{d}}^k_\nabla)$ 均构成丛值德拉姆复形。我们将这三个复形分别称为*spatial*，*convective*，和 *material de Rham complex*。上述适用于向量值形式的复形结构，也可通过霍奇星算子 (40) 应用于向量值伪形式，如图 8 所示。

回顾外协变导数与拉回之间的交换性质（39），图 9 展示了空间、物质和对流德拉姆复形。这个关键的交换性质表明，φ_v^* 和 φ_f^*实际上是复形同构。因此，对于一个复形成立的任何解析结果，例如其德拉姆上同调群，在其他复形中也应有相应的结果。此外，正如后文将要看到的，我们可以统一非线性弹性力学控制方程的三种表示，并以优雅的方式在它们之间转换。这再次表明，使用丛值形式在数学上表示非线性弹性力学以及一般的连续介质力学具有技术优势。

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^0(\mathcal{S};\,T\mathcal{S}) & \xrightarrow{\mathrm{d}^0_\nabla} & \Omega^1(\mathcal{S};\,T\mathcal{S}) & \xrightarrow{\mathrm{d}^1_\nabla} & \Omega^2(\mathcal{S};\,T\mathcal{S}) & \xrightarrow{\mathrm{d}^2_\nabla} & \Omega^3(\mathcal{S};\,T\mathcal{S}) & \longrightarrow & 0 & & \text{(空间)} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathrm{f}}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathrm{f}}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathrm{f}}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathrm{f}}^*} & & & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^0_\varphi(\mathcal{B};\,T\mathcal{S}) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1_\varphi(\mathcal{B};\,T\mathcal{S}) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^2_\varphi(\mathcal{B};\,T\mathcal{S}) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^3_\varphi(\mathcal{B};\,T\mathcal{S}) & \longrightarrow & 0 & & \text{(物质)} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathrm{v}}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathrm{v}}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathrm{v}}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathrm{v}}^*} & & & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^0(\mathcal{B};\,T\mathcal{B}) & \xrightarrow{\hat{\mathrm{d}}^0_\nabla} & \Omega^1(\mathcal{B};\,T\mathcal{B}) & \xrightarrow{\hat{\mathrm{d}}^1_\nabla} & \Omega^2(\mathcal{B};\,T\mathcal{B}) & \xrightarrow{\hat{\mathrm{d}}^2_\nabla} & \Omega^3(\mathcal{B};\,T\mathcal{B}) & \longrightarrow & 0 & & \text{(对流)}
\end{array}
$$

图 9：空间、物质和对流德拉姆复形的交换图，分别由上至下排列。

9 结论

本文介绍了一种使用向量值和余向量值微分形式表述非线性弹性力学的方法。我们考察了运动的全部三种表示，并从几何上确定了所有物理变量如何从一种表示转换为另一种表示。全文着重指出，描述运动方程并不需要将物体与环境空间中的参考构形相认同，除非在物质表示中将动量和应力表示为热力学强度变量。我们阐明了底层的德拉姆复形和主丛结构，它们将构形空间 $\mathscr{C}$ 与物体流形 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$上的黎曼度量空间联系起来；这突显了 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$作为内禀变形空间的重要意义。

在本文的后续篇章中，我们将以端口哈密顿框架重新表述非线性弹性理论。这不仅能突出运动方程所蕴含的能量结构，还将运用哈密顿约化技术从第一原理推导这些方程。

10 附录

10.1 纤维丛

纤维丛理论对于精确定义用于描述非线性弹性中物理量的数学对象至关重要。这些对象包括向量场、张量场、微分形式和双点张量场。下文将对这一主题作简要介绍。若需进一步阐述，请参阅 [20]。

设 $\mathbb{E},\mathcal{B}$ 是光滑流形，且 $\pi\colon \mathbb{E}\to\mathcal{B}$ 是光滑满射。三元组 $(\mathbb{E},\pi,\mathcal{B})$ 称为 *fibre bundle over* $\mathcal{B}$，$\mathbb{E}$ 称为 *total space*，$\mathcal{B}$ 称为 *base space*，而 π 称为 *projection map*。点 $X\in\mathcal{B}$ 在 π 下的原像称为 *fibre at* X，记作 $\mathbb{E}_X := \pi^{-1}(X)$。积丛的一种常用记法是 $(\mathbb{E},\pi,\mathcal{B})$、$\pi\colon \mathbb{E}\to\mathcal{B}$，或者在上下文明确时简写为 $\mathbb{E}$。若丛 $(\mathbb{E},\pi,\mathcal{B})$ 与某个积丛同构（作为丛），即对某个流形 $\mathcal{F}$ 有 $\mathbb{E}=\mathcal{B}\times\mathcal{F}$，则称其为 *trivial*。

切丛和余切丛分别定义为 $\mathcal{B}$ 上所有切空间和余切空间的不交并:

$$T\mathcal{B} := \bigsqcup_{X\in\mathcal{B}} T_X\mathcal{B}, \qquad T^*\mathcal{B} := \bigsqcup_{X\in\mathcal{B}} T_X^*\mathcal{B}.$$

在 $X \in \mathcal{B}$ 处的 (p, q) 型张量是一个多重线性映射

$$\zeta : \underbrace{T_X^*\mathcal{B}\cdots T_X^*\mathcal{B}}_{p-\text{copies}} \times \underbrace{T_X\mathcal{B}\cdots T_X\mathcal{B}}_{q-\text{copies}} \to \mathbb{R}.$$

所有 (p, q) 型张量构成的丛记作

$$T_q^p\mathcal{B} := \bigsqcup_{X\in\mathcal{B}} T^p_{q,X}\mathcal{B},$$

其中 $T^p_{q\ ,X}\mathcal{B}$ 表示 $X \in \mathcal{B}$处所有 (p, q) 型张量的集合。在 $X \in \mathcal{B}$处所有全反对称 $(0, k)$ 型张量的集合记作 $\Lambda^k T_X^*\mathcal{B}$。这些空间的不交并构成丛

$$\Lambda^k T^*\mathcal{B} := \bigsqcup_{X\in\mathcal{B}} \Lambda^k T_X^*\mathcal{B} \subset T_k^0\mathcal{B}.$$

类似地，可以构造所有对称 (0,2) 张量构成的丛，记作$ST_2^0\mathcal{B} \subset T_2^0\mathcal{B}$。

现在考虑两个丛 $(\mathbb{E}, \pi_\mathbb{E}, \mathcal{B})$ 和 $(\mathbb{F}, \pi_\mathbb{F}, \mathcal{S})$，以及光滑映射$f : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$。我们可以将这两个丛组合起来，在 $\mathcal{B}$ 上定义一个新丛，其定义为不交并

$$\mathbb{F} \otimes_f \mathbb{E} := \bigsqcup_{X\in\mathcal{B}} \pi_\mathbb{E}^{-1}(X) \otimes \pi_\mathbb{F}^{-1}(f(X)).$$

我们通过新丛的记号强调它对映射 f 的依赖关系。对于 $\mathbb{F} \otimes_f \mathbb{E}$，另一种记法也可以是 $\mathbb{F} \otimes f^*\mathbb{E}$。同样的过程可用于组合定义在同一流形上的丛（即 $\mathcal{S} = \mathcal{B}$）以及同一点上的丛（$f =\mathrm{id}_\mathcal{B}$）。在这种情况下，通常省略对映射 $f = \mathrm{id}_\mathcal{B}$ 的记号依赖关系。

考虑分别定义在 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{S}$ 上的张量丛 $T_q^p\mathcal{B}$ 和 $T_s^r\mathcal{S}$。映射 $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ 上的一种类型为 $\binom{p\ r}{q\ s}$ *two-point tensor* 、定义在 $X \in \mathcal{B}$ 处的对象，是一个多重线性映射 [5,Pg。 70]

$$\xi : \underbrace{T_X^*\mathcal{B}\cdots T_X^*\mathcal{B}}_{p-\text{copies}} \times \underbrace{T_X\mathcal{B}\cdots T_X\mathcal{B}}_{q-\text{copies}} \times \underbrace{T^*_{\varphi(X)}\mathcal{S}\cdots T^*_{\varphi(X)}\mathcal{S}}_{r-\text{copies}} \times \underbrace{T_{\varphi(X)}\mathcal{S}\cdots T_{\varphi(X)}\mathcal{S}}_{s-\text{copies}} \to \mathbb{R}.$$

$\binom{p\ r}{q\ s}$ 两点张量在 $\mathcal{B}$上的丛记为 $T_q^p\mathcal{B} \otimes \varphi^*T_s^r\mathcal{S} \equiv T_q^p\mathcal{B} \otimes_\varphi T_s^r\mathcal{S}$。对于 $p = q = 0$的情形，丛 $\varphi^*T_s^r\mathcal{S}$称为 $T_s^r\mathcal{S}$关于 φ的 *pullback orinduced bundle*，即

$$\varphi^*T_s^r\mathcal{S} := \bigsqcup_{X\in\mathcal{B}} T^r_{s,\varphi(X)}\mathcal{S}.$$

设$(\mathbb{E},\pi,\mathcal{B})$为一个纤维丛，映射 $\sigma\colon\ \mathcal{B}\to\mathbb{E}$满足 $\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$，则称其为一个 *section of the bundle*。 $\mathbb{E}$ 的所有截面构成的集合记为 $\Gamma(\mathbb{E})$。例如， $\Gamma(T\mathcal{B})$是向量场的集合， $\Gamma(T^p_q\mathcal{B})$是(p,q)张量场的集合，而 $\Gamma(T^p_q\mathcal{B}\otimes\varphi^*T^r_s\mathcal{S})$是 $\mathcal{B}$上的两点张量场的集合。元素$\tilde{v}\in\Gamma(\varphi^*T\mathcal{S})$称为映射 φ 上的向量场，而元素 $\omega\in\Gamma(\Lambda^kT^*\mathcal{B})$称为（取标量值的）微分 k-形式。通常将 $\Gamma(\Lambda^kT^*\mathcal{B})$记为 $\Omega^k(\mathcal{B})$。

10.2 物质时间导数

设 (M,g) 是一个黎曼流形，其列维-奇维塔联络为 ∇。给定一条曲线 $c\colon\ I\subset\mathbb{R}\to M$，沿 c 的向量场是一个映射

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}:I&\to TM\\ t&\mapsto\tilde{\zeta}(t)\in T_{c(t)}M.\end{aligned}\tag{98}$$

~可知， $\zeta\in\Gamma(c^*TM)$ 是拉回丛 c^*TM 的一个截面。设 $\xi\in\Gamma(TM)$ 是任意一个向量场，满足 $\zeta(t)=\xi(c(t))\in T_{c(t)}M$（原则上，它不必在整个 M 上定义，只需沿着 c 定义即可）。 $\tilde{\zeta}\in\Gamma(c^*TM)$ 沿 c 的协变导数是沿 c 的向量场，记作 $\frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{d}t}\in\Gamma(c^*TM)$，定义为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\tilde{\zeta}}{\mathrm{d}t}:I&\to TM\\ t&\mapsto\frac{\mathrm{D}\tilde{\zeta}}{\mathrm{d}t}(t):=(\nabla_{c'(t)}\xi)(c(t)),\end{aligned}\tag{99}$$

其中 $c'\colon\ I\to TM$ 是 c 的切向量场，且 $c'(t)\in T_{c(t)}M$。

在连续介质力学中，向量场 $\tilde{\zeta}\in\Gamma(c^*TM)$ 被称为 $\zeta\in\Gamma(c^*TM)$ 的物质时间导数。请注意，对于沿曲线的向量场进行协变微分，通常使用的记号与对真正的向量场进行协变微分时所用的记号不同。其他常见记号还有 $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}$ （见 [9] ）和 D_t （见 [7]）。本文将采用 D_t 表示物质时间导数。

考虑坐标图 (U,x^i)，使得 $U\subset M$ 和 $x^i\colon\ M\to\mathbb{R}$。设曲线$c$ 的分量为 $c^i(t):=x^i\circ c(t)\in\mathbb{R}$，且 $c'(t)$ 在局部可表示为 $(c^i(t)\ \dot{c}^i(t))$。若 $\tilde{\zeta}$ 的分量记为 $\tilde{\zeta}^i$，则 $D_t\tilde{\zeta}$的分量为

$$\left(D_t\tilde{\zeta}\right)^i=\partial_t\tilde{\zeta}^i+(\Gamma^i_{jk}\circ c)\dot{c}^j\tilde{\zeta}^k.$$

10.3 命题 1 的证明

设 u、 v、 $w\in\Gamma(T\mathcal{S})$ 是流形 $\mathcal{S}$ 上的任意向量场，并考虑恒等式

$$\mathcal{L}_uv=\nabla_uv-\nabla_vu,\qquad\forall u,v\in\Gamma(T\mathcal{S}).\tag{100}$$

利用 $\mathcal{L}_u f = \nabla_u f = u(f)\ \forall f \in C^\infty(\mathcal{S})$ 这一事实、李导数（关于缩并和张量积）的莱布尼茨法则、协变导数（关于张量积）的莱布尼茨法则以及 (100)，可以证明

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u g(v,w) &= \mathcal{L}_u(g(v,w)) - g(\mathcal{L}_u v, w) - g(v, \mathcal{L}_u w),\\ &= \nabla_u(g(v,w)) - g(\mathcal{L}_u v, w) - g(v, \mathcal{L}_u w),\\ &= g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w) - g(\mathcal{L}_u v, w) - g(v, \mathcal{L}_u w),\\ &= g(\nabla_u v - \mathcal{L}_u v, w) + g(v, \nabla_u w - \mathcal{L}_u w),\\ &= g(\nabla_v u, w) + g(v, \nabla_w u) = \nabla_v u^\flat(w) + \nabla_w u^\flat(v). \end{aligned} \tag{101}$$

现在考虑外微分的无坐标定义，利用协变导数的莱布尼茨法则和 (100) 可将其表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u^\flat(v,w) &= v(u^\flat(w)) - w(u^\flat(v)) - u^\flat(\mathcal{L}_v w) = \nabla_v(u^\flat(w)) - \nabla_w(u^\flat(v)) - u^\flat(\nabla_v w - \nabla_w v)\\ &= \nabla_v u^\flat(w) + u^\flat(\nabla_v w) - \nabla_w u^\flat(v) - u^\flat(\nabla_w v) - u^\flat(\nabla_v w) + u^\flat(\nabla_w v)\\ &= \nabla_v u^\flat(w) - \nabla_w u^\flat(v). \end{aligned} \tag{102}$$

将 (101) 和 (102) 相加可得

$$2\nabla_v u^\flat(w) = 2\nabla u^\flat(v,w) = \mathcal{L}_u g(v,w) + \mathrm{d}u^\flat(v,w),$$

由于 $(v,\ w)$ 的任意性，这就证明了 (10) 和 (11)。

现在考虑

$$\nabla v^\flat(v) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_v g(v) + \frac{1}{2}\mathrm{d}v^\flat(v).$$

利用 $\mathcal{L}_v g(v) = \mathcal{L}_v v^\flat$ 和嘉当恒等式 (12)，可以证明

$$\nabla v^\flat(v) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_v v^\flat + \frac{1}{2}\iota_v \mathrm{d}v^\flat = \frac{1}{2}\mathcal{L}_v v^\flat + \frac{1}{2}\mathcal{L}_v v^\flat - \frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_v v^\flat = \mathcal{L}_v v^\flat - \frac{1}{2}\mathrm{d}\iota_v v^\flat,$$

由此证明了（13）和（14）。

致谢 本研究得到欧洲研究委员会资助的 PortWings 项目支持，[资助协议编号： 787675]

参考文献

1. C. Truesdell、W. Noll 和 A. C. Pipkin，《力学的非线性场论》，*Journal of Applied Mechanics*，第 33 卷，第 4 期，第 958–958 页，1966年。2. V. I. Arnold，《论理想流体定常流动的拓扑》，载于 *Vladimir I. Arnold-Collected Works*，第 15–18 页，施普林格，1965年。3. W. Noll，《简单材料的新数学理论》，载于 *The foundations of mechanics and thermodynamics* 243 292, 1974，第 – 页，施普林格，。4. P. Rough´ee，《大应变本构定律的内禀拉格朗日表述》，*Computers and Structures* 84, 17 18, 1125 1133, 2006，第 卷，第 期，第 – 页。5. J. E. Marsden 和 T. J. R. Hughes，*Mathematical Foundations of Elasticity*。1994年。6. Z. Fiala，《固体力学的几何框架》，*Annals of Physics*，第 326 卷，第 8 期，第 1983–1997 页，2011年。7. B. Kolev 和 R. Desmorat，《客观率作为黎曼度量流形上的协变导数》，*arXiv*，第 1–39 页，2021年。

8. R. Segev, 《经典场的度量无关分析札记》, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 36, 5, 497 566, 2013 , 第 卷, 第 页, –。

9. Frankel, *The geometry of physics*。2019年。10. E. Kanso、M. Arroyo、Y. Tong、A. Yavari、J. G. Marsden 和 M. Desbrun, 《连续介质力学中应力的几何特征》, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik* 58, 5, 843 856, 2007 , 第 卷, 第 页, –。

11. D. N. Arnold, *Finite element exterior calculus*。工业与应用数学学会, 2018年。12. A. N. Hirani, *Discrete exterior calculus*。博士论文, 加州理工学院, 2003年。13. A. Angoshtari 和 A. Yavari, 《连续介质力学中的微分复形》, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 216, 193 220, 4 2015 , 第 卷, 第 页, –。

14. A. Angoshtari 和 A. Yavari, 《非线性弹性的希尔伯特复形》, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik* 67, 6, 2016 , 第 卷, 第 期, 。

15. A. Yavari, 《代数拓扑在弹性力学中的应用》, 载于 *Geometric Continuum Mechanics* 143 2020 , 第 –183 页,

施普林格, 。16. A. Yavari, 《弹性力学的几何离散化》, *Journal of Mathematical Physics*, 第 49 卷, 第 2 期, 2008 年。17. M. Faghih Shojaei 和 A. Yavari, 《不可压缩非线性弹性的相容应变混合有限元方法》, *Journal of Computational Physics*, 第 361 卷, 第 247–279 页, 2018年。18. M. Faghih Shojaei 和 A. Yavari, 《3 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 357, 112610, 2019 D 可压缩与不可压缩非线性弹性的相容应变混合有限元方法》, , 第 页, 。19. A. Angoshtari, *Geometric discretization schemes and differential complexes for elasticity*。博士论文, 佐治亚理工学院, 2013年。20. R. Abraham、J. E. Marsden 和 T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, *Applied Mathematical Sciences*第 75 卷。纽约, NY: 施普林格纽约, 1988年。21. B. F. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*。剑桥大学出版社, 1 1980年。22. J. C. Simo 和 J. E. Marsden, 《弹性力学中的应力张量、黎曼度量与替代描述》, *Lecture Notes in Physics*, 第 195 期, 第 369–383 页, 1984年。23. J. C. Simo、J. E. Marsden 和 P. S. Krishnaprasad, 《非线性弹性的哈密顿结构: 固体、杆和板的物质表述与对流表述》, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 第 104 卷, 第 2 期, 第 125–183 页, 1988年。24. A. Yavari、J. E. Marsden 和 M. Ortiz, 《弹性力学中的空间与物质协变平衡定律》, *Journal of Mathematical Physics*, 第 47 卷, 第 4 期, 2006年。25. N. Grubic、P. G. LeFloch 和 C. Mardare, 《黎曼流形上的弹性静力学方程》, *Journal des Mathematiques Pures et Appliquees* 102, 6, 1121 1163, , 第 卷, 第 页, –。 2014

26. A. D. Gilbert 和 J. Vanneste, 《从几何角度看流体力学中的动量通量与应力》, *Journal of Nonlinear Science*, 第 33 卷, 第 2 期, 2023年。27. F. Bullo 和 A. D. Lewis, *Geometric Control of Mechanical Systems* 49 *Texts in Applied Mathematics* 2005 , 第 卷。纽约, NY: 施普林格纽约, 。28. Z. Fiala, 《客观时间导数再探》, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik* 71, 1, 2020 , 第 卷, 第 期, 。

29. Z. Fiala, 《有限变形几何与时间增量分析》, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 81, 230 244, 2016 , 第 卷, 第 页, –。

30. B. Kolev 和 R. Desmorat, 《超弹性、压力势与非完整约束的内禀几何表述》, *Journal of Elasticity*, 第 146 卷, 第 1 期, 第 29–63 页, 2021年。31. M. Gerritsma, 《连续介质模型的保结构离散化》, 载于 *ternational Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems* 736 2014 , 第 –742 页,

2014年。32. A. Palha、P. P. Rebelo、R. Hiemstra、J. Kreeft 和 M. Gerritsma, 《单网格与对偶网格上的物理相容离散化技术及其在体积形式泊松方程中的应用》, *Journal of Computational Physics*, 第 257 卷, 第 1394–1422 页, 2014 年。33. W. Bauer, 《地球物理流体动力学旋转方程的一种新型分层结构 n 维协变形式》, *GEM-International Journal on Geomathematics*, 第 7 卷, 第 1 期, 第 31–101 页, 2016年。34. A. Brugnoli、R. Rashad 和 S. Stramigioli, 《利用有限元外微分演算对端口哈密顿系统进行对偶场保结构离散化》, *tional Physics* 471, 111601, 2022 *Journal of Computa* , 第 页, 。

35. A. Brugnoli, R. Rashad, Y. Zhang, 和 S. Stramigioli, “端口哈密顿系统的有限元混合化”, *arXiv*, 2023年。
36. F. Califano, R. Rashad, F. P. Schuller, 和 S. Stramigioli, “运动材料域中分布参数系统的能量分解：流固耦合的端口哈密顿模型”, *Journal of geometry and physics*, 第175卷, 页码104477, 2022年。37. N. H. Quang, B. C. Van, 和 D. T. Tuoi, “李导数与外微分如何与代数上的线性联络相联系”, *Applied Mathematical Sciences*, 第8卷, 第125-128期, 第6223–6235页, 2014年。38. A. Bossavit, *Computational electromagnetism: variational formulations, complementarity, edge elements* 1998 。学术出版社, 。
39. R. Rashad, F. Califano, F. P. Schuller, 和 S. Stramigioli, “理想流体流动的端口哈密顿建模：第一部分：基础与动能”, *Physics* 164, 104201, 2021 *Journal of Geometry and* , 第卷, 页码。
40. R. Rashad, F. Califano, F. P. Schuller, 和 S. Stramigioli, “理想流体流动的端口哈密顿建模：第二部分：可压缩流与不可压缩流”, *Physics* 164, 104199, 2021 *Journal of Geometry and* ,
第卷, 页码。41. R. Rashad, F. Califano, A. Brugnoli, F. P. Schuller, 和 S. Stramigioli, “不可压缩纳维-斯托克斯端口哈密顿模型的外微分与向量分析视角”, 载于 *IFAC-PapersOnLine* 54, 173 179, 2021 , 第卷, 第–页, 爱思唯尔有限公司, 。42. F. Califano, R. Rashad, F. P. Schuller, 和 S. Stramigioli, “纳维–斯托克斯方程的几何与能量感知分解：一种端口哈密顿方法”, *Physics of fluids* 33, 4, 47114, 2021 , 第卷, 第期, 页码。
43. F. Gay-Balmaz, J. E. Marsden, 和 T. S. Ratiu, “自由边界连续介质力学中的约化变分表述”, *Journal of Nonlinear Science*, 第22卷, 第4期, 第463–497页, 2012年。44. S. Stramigioli, “连续介质力学的主丛结构”, *arXiv*, 2022年。