arXiv:2303.06086v1 [math.AG] 10 Mar 2023

可定义与次解析多值函数的广义 Lojasiewicz 不等式

MICHA L KOSIBA

Abstract. 本文旨在证明可定义情形和次解析情形下的一般 Lojasiewicz 不等式，并采用最宽松的假设。也就是说，我们不再采用通常的连续性和紧致性假设。本文第二部分将重点讨论多值函数的 Lojasiewicz 不等式，并将其应用于与集合中轴相关的自然多值函数（这是模式识别中的基本概念）。

1. Introduction

奇点理论乃至广义分析中最强大、用途最广泛的工具之一，便是所谓的 Lojasiewicz 不等式。一般而言，这类不等式描述两个函数或集合如何彼此靠近，以及在某些（较宽松的）条件下如何控制这种靠近。第一类 Lojasiewicz 不等式由 Lojasiewicz 教授于20世纪50年代末证明，旨在解决施瓦茨提出的用解析函数除一个分布的问题。本文旨在为函数和多值函数表述不同类型的 Lojasiewicz 不等式。本文所述结果可分为两部分。

第一部分致力于研究函数的 Łojasiewicz 不等式。该定理最基本的经典版本（下文称定理 2.20）针对紧致子集上的两个连续半代数函数提出。在 [7] 中，我们证明，在满足某些条件时，可以不要求其中一个函数连续。在 [6] 中，我们可以找到适用于任意可定义结构的洛亚谢维奇不等式，但在这种情况下，我们要求两个函数都连续。我们的目标是将这些结果推广到任意可定义结构。我们将证明，在某些条件下，不仅可以免去对一个函数连续性的要求，也可以免去对另一个函数连续性的要求（定理 3.5 和定理 3.6）。此外，我们还将证明，函数可以定义在任意可定义集上，而不必局限于紧致集甚至闭集。在次解析情形中，情况则更为微妙。在 [8] 中可以找到某种次解析版本（同样适用于多项式有界可定义结构）。尽管定理 3.5 有直接对应的次解析版本（定理 4.6），但要将定理 3.6 移植到次解析情形，我们就必须改变方法并加入有界性假设（定理 4.7 和定理 4.8）；例 4.9 表明，这一假设不可避免。这又是一个例子，说明 o-极小结构与亚解析几何之间存在相当大的差异。

论文第二部分旨在将此前获得的结果应用于可定义多值函数。首先，我们将定义几种多值函数的原像类型

2020 *Mathematics Subject Classification.* 32B20, 49J52.*Key words and phrases.* -洛亚谢维奇不等式、o-极小结构、亚解析几何、多值函数、中轴。

，这些类型已在 [5] 中介绍。随后，我们将用它们为具有紧值的可定义多值函数定义若干类似洛亚谢维奇不等式的结论，并在之后将其推广到具有闭值的可定义多值函数情形。论文最后，我们将把所得不等式应用于最近点的多值函数，以及实现到集合距离的点的多值函数。这些对象与中轴的概念有关，而中轴是模式识别理论中的一个核心概念。

我想感谢我的导师 Maciej Denkowski 提出了这个问题。

2. Classic version of Łojasiewicz's inequality

本章介绍的事实和定义取自 [2], [3], [5]。我们在此汇集后文将用到的所有基本概念。

定义 2.1. 若存在一个子集 $S \subset \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ 使得，则称集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为代数集

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, f \in S : f(x) = 0\}.$$

定义 2.2. 若集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 具有如下形式，则称其为半代数集

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcap_{l_i=1}^{j_i} \{P_i = 0, Q_{il_i} > 0\},$$

其中 k、$j_i \in \mathbb{N}$ 和 P_i、$Q_{il_i} \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$。

定义 2.3。设 $\mathcal{S}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集族。若满足以下条件，则称 $\mathcal{S}_n$ 为布尔代数：

1) $\emptyset \in \mathcal{S}_n$；2) 对于 A、$B \in \mathcal{S}_n$，有 $A \cap B$、$A \cup B$、$\mathbb{R}^n \backslash A \in \mathcal{S}_n$。

定义 2.4。域 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 上的一个结构是一个序列 $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{S}_n$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集族，并满足：
1) $\mathcal{S}_n$ 包含 $\mathbb{R}^n$ 的所有代数集；
2) $\mathcal{S}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集构成的布尔代数；
3）若 $A \in \mathcal{S}_n$、$B \in \mathcal{S}_m$，则 $A \times B \in \mathcal{S}_{n+m}$；
4）若 $\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是自然投影且 $A \in \mathcal{S}_{n+1}$，则 $\pi(A) \in \mathcal{S}_n$。
$\mathcal{S}_n$ 的元素称为可定义集。

定义2.5. 设 $\mathcal{S}$ 是定义在 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 上的结构。我们按如下方式定义一阶公式：

1）若 $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$，则 $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ 和 $P(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ 都是一阶公式。

2）若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是可定义集，则 $x \in A$ 是一阶公式。
3) 如果 $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ 和 $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ 是一阶公式，那么

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \vee \Psi(y_1, \ldots, y_m),\ \Phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \Psi(y_1, \ldots, y_m),$$

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \Psi(y_1, \ldots, y_m),\ \sim \Phi(x_1, \ldots, x_n),\ \exists\, x_n \in \mathbb{R} :\ \Phi(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\text{and } \forall\, x_n \in \mathbb{R} :\ \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

都是一阶公式。

定理2.6（[2] 定理1.13）。设 $\mathcal{S}$ 是定义在（$\mathbb{R}, +, \cdot$）上的一个结构，且 Φ（$x_1, \ldots, x_n$）是一个一阶公式 $\mathcal{S}$。那么集合

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \Phi(x_1, \ldots, x_n)\}$$

是可定义的。

命题2.7（[2] 命题1.12）。设 A 为可定义集。那么 $int\ A$ 和$\overline{A}$ 都是可定义集。

定义2.8。在（$\mathbb{R}, +, \cdot$）上的结构 $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 o-极小结构，若 $\mathcal{S}_1$ 仅由任意类型的点和区间的所有有限并组成。

定理2.9（[3] 定理1.6）。（塔斯基-塞登伯格）设 π： $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为自然投影， $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为半代数集。那么 π（A）是半代数集。

命题2.10（[3] 命题1.4）。任何 o-极小结构都包含半代数集。

记 $\mathcal{SA}_n = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A$ 半代数$\}$。

定理2.11（[3]）。 $\{\mathcal{SA}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在（$\mathbb{R}, +, \cdot$）上的一个 o-极小结构。

该定理与前面的命题表明，任意 o-极小结构都包含半代数集作为一个子结构。

从此处起，我们将可定义性理解为在某个 o-极小结构中的可定义性。

定义2.12. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$。函数 f： $A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 的函数图像是集合$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid f(x) = y\}$。

定义 2.13. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$。如果函数 f： $A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 的图是一个可定义集，我们就称其为（在某个 o-极小结构中）可定义的。

由自然投影的性质可知，可定义函数的定义域和像都是可定义集。

命题 2.14。可定义集上的限制以及可定义函数的复合仍然是可定义的。

命题 2.15。设 f, g： $A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ 是两个可定义函数。那么集合 $\{x \in A \mid f(x) \leq g(x)\}$ 和 $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ 都是可定义集。

证明。函数 f 和 g 是可定义的，因此集合 Γ_f, Γ_g 也是可定义的。

$$\{x \in A \mid f(x) \leq g(x)\} \ni z \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, (x_0, y_0) \in \Gamma_f, \forall\, (x_1, y_1) \in \Gamma_g : (z = x_0 \wedge z = x_1) \Longrightarrow y_0 \leq y_1.$$

$$\{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \ni z \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, (x_0, y_0) \in \Gamma_f, \forall\, (x_1, y_1) \in \Gamma_g : (z = x_0 \wedge z = x_1) \Longrightarrow y_0 = y_1.$$

我们用一阶公式得到了这两个集合的描述，至此证明完成。□

定理2.16. 设 f, g： $A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ 是两个可定义函数。那么 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid f(x) = g(y)\}$ 和 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq g(y)\}$ 是可定义集。

证明. 集合 Γ_f, Γ_g 是可定义的，因此我们可以用一阶公式来描述它们:

$$\begin{gathered}\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid f(x)=g(y)\}\ni(w,z)\iff\\ \iff\forall\,(x_0,y_0)\in\Gamma_f,\forall\,(x_1,y_1)\in\Gamma_g:(x_0=w\wedge x_1=z)\implies y_0=y_1,\\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid f(x)\leq g(y)\}\ni(w,z)\iff\\ \iff\forall\,(x_0,y_0)\in\Gamma_f,\forall\,(x_1,y_1)\in\Gamma_g:(x_0=w\wedge x_1=z)\implies y_0\leq y_1.\end{gathered}$$

□

根据该定理，当且仅当有序对 (x,y) 分别属于 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid f(x)\leq g(y)\}$ 和 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid f(x)=g(y)\}$时，以下公式 $f(x)\leq g(y)$ 和 $f(x)=g(y)$ 成立。因此，$f(x)=g(y)$ 和 $f(x)=g(y)$ 可以视为一阶公式。

此外，注意到 $(\mathbb{R},+,0)$ 上的结构与加法和乘法相容。这意味着集合 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=z\}$ 和 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\cdot y=z\}$ 是可定义的。因此，可定义函数的和、差、积与商仍是可定义函数。

定理 2.17（[3] 定理 1.11）。半代数集到该集合的欧几里得距离是半代数的。

注意，l_1 范数和上确界范数都是半代数的，因此上述定理对于相应的两种度量也成立。

定义 2.18（[5]）。设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 和 $f:\ A\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个函数。对于 f，我们将广义零点集定义为 $f^{-1}(0)^\gamma:=\pi(\overline{\Gamma_f}\cap\mathbb{R}^n\times\{0\})$，其中 $\pi:\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 是自然投影。

如果 f 是连续的，那么零点集与广义零点集相同。如果 f 是可定义函数，那么 f 的广义零点集是可定义集。此外，我们还可以用以下等价方式描述该集合:

$$f^{-1}(0)^\gamma\ni x_0\iff\exists\,A\ni x_\nu\longrightarrow x_0:f(x_\nu)\longrightarrow 0.$$

注 2.19。根据曲线选择引理，在可定义情形下
$x_0\in f^{-1}(0)^\gamma\iff\exists\,\gamma:$ 存在一条可定义曲线 $\epsilon:(0,\longrightarrow A)\ _{t\to 0}\,\gamma$a，使得 $\lim t(=x_0)\ _{t\to 0}\,f$且 $\lim\gamma(t(=0))$。
事实上，对于 $(x_0,0)\in\overline{\Gamma_f}$，我们要么有 $x_0\in A$ 且 $f(x_0)=0$，此时 $\gamma(t)\equiv 0$; 要么是剩下两种可能之一：$x_0\in A$ 且 $f(x_0)\neq 0$，或者 $x_0\notin A$。在这两种情况下，$(x_0,0)\in\overline{\Gamma_f}\backslash\Gamma_f$，由曲线选择引理，存在一条可定义曲线 $\tilde{\gamma}:(0,\epsilon)\longrightarrow\Gamma_f$，使得 $\tilde{\gamma}(t)\longrightarrow(x_0,0)$ 当 $t\longrightarrow 0$ 趋于 0 时。显然，对于 $\pi(x,y)=x$，我们可得到一条曲线 $\gamma(t)=\pi((\tilde{\gamma}(t))$（因为 $\tilde{\gamma}$ 不可能投影为单点），满足所需条件。

定理 2.20（[3] 定理 2.14）。（Łojasiewicz 不等式）设 f、$g:\ K\longrightarrow\mathbb{R}$是紧集 K 上的两个连续半代数函数，且 $f^{-1}(0)\subset g^{-1}(0)$。

那么存在 C、$N>0$，使得:

$$|f(x)|\geq C|g(x)|^N,\quad x\in K.$$

命题 2.21（[3] 推论 2.16）。设 A、B 是两个非空紧致半代数集。那么存在某些 N、$C>0$，使得:

$$dist(x,A)\geq Cdist(x,A\cap B)^N,\quad x\in B.$$

3. Generalized Łojasiewicz's inequality

在 [6] 中，我们可以找到适用于任意可定义结构的定理 2.20 版本。本章旨在证明，在某些条件下，我们可以省去函数 f 的连续性假设，并且只要求函数 g 有界。此外，我们将说明，加入一个条件后，可以将该定理表述为适用于任意可定义集，而该集合不一定是紧致的，甚至不一定是有界的。

设 Φ_p 为所有奇的、单调递增双射 $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 的集合，这些双射属于 $\mathcal{C}^p$类，且在 0 处为 p-平坦，即对于 $k\in\{1,...,p\}$，有 $\phi^{(k)}(0)=0$。根据 [5], 中的思想，下文中 $p\geq 1$ 可以是任意预先固定的整数。

为证明所述结果，我们需要以下定理和命题。

定理 3.1（[5] 定理 2.3）。若 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是可定义函数，则对于 f 的零点的一般集合中的任意一点，存在一个邻域 U 和可定义的 $\phi\in\Phi_p$，使得

$$||f(x)||\geq\phi(d(x,f^{-1}(0)^{\gamma})),\ \ x\in U\cap\Omega.$$

命题 3.2（[6] C.7 引理）。设 $f:\ A\times(0,\infty)\ \longrightarrow\ \mathbb{R},\ A\ \subset\ \mathbb{R}^n$ 是可定义函数。则存在一个可定义函数 $\phi\in\Phi_p$，使得对于每个 $x\in A$，$\lim_{t\to 0^+}\phi(t)f(x,t)=0$。

定理 3.3（[6] 4.20）。设 f、$g:\ A\longrightarrow\mathbb{R}$ 是在紧集 A 上定义的连续、可定义函数，且 $f^{-1}(0)\subset g^{-1}(0)$。则存在一个可定义的 $\phi\in\Phi_p$，使得对所有 $x\in A$都有 $|\phi(g(x))|\leq|f(x)|$。

命题 3.4。设 $\varphi_1,\ ...,\ \varphi_n:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续、可定义的奇函数。定义 $\varphi(t):=\text{sgn}(t)\ \min\ \{|\varphi_1(t)|,\ ...,\ |\varphi_n(t)|\},\ \ t\in\mathbb{R}$。存在 $\epsilon>0$和 $i_0\in\{1,...,n\}$，使得 $\varphi_{i_0}|_{[-\epsilon,\epsilon]}=\varphi|_{[-\epsilon,\epsilon]}$。

证明。首先注意到，函数 φ 是连续的、奇函数且可定义。证明将对 n使用归纳法。当 $n=1$ 时，结论显然。考虑 $n=2$的情形。集合 $\pi_1(\Gamma_{\varphi_1}\cap\Gamma_{\varphi_2})$ 非空，因为 $\varphi_1(0)=0=\varphi_2(0)$。由于这些函数是可定义的，$\pi_1(\Gamma_{\varphi_1}\cap\Gamma_{\varphi_2})$ 是有限个点和区间的有限并。如果存在 $c>0$ 使得 $[0,c]\subset\pi_1(\Gamma_{\varphi_1}\cap\Gamma_{\varphi_2})$，则由于这些函数是奇函数，我们有 $\varphi|_{[-c,c]}=\varphi_1|_{[-c,c]}=\varphi_2|_{[-c,c]}$。否则，记 $\epsilon:=\min\{(\pi_1(\Gamma_{\varphi_1}\cap\Gamma_{\varphi_2})\backslash\{0\})\cap\mathbb{R}_+\}$。则下列情形之一成立：在 $(0,\ c]$上有 $\varphi_1>\varphi_2$ 或 $\varphi_2<\varphi_1$。这意味着存在 $i\in\{1,2\}$ 使得 $\varphi|_{[0,c]}=\varphi_i|_{[0,c]}$，从而 $\varphi|_{[-c,c]}=\varphi_i|_{[-c,c]}$。现在取 $n>0$，并假设对于所有小于 n 的 m，定理均成立。定义$\phi(t):=\text{sgn}(t)\ \min\ \{|\varphi_1(t)|,\ ...,\ |\varphi_{n-1}(t)|\}$，其中 $t\in\mathbb{R}$。我们可以将 φ写成如下形式：$\varphi(t)=\text{sgn}(t)\ \min\{|\phi(t)|,\ |\varphi_n(t)|\}$。根据 $n=2$的情形，我们有两种可能：

1) 存在 $\epsilon>0$ 使得 $\varphi|_{[-\epsilon,\epsilon]}=\varphi_n|_{[-\epsilon,\epsilon]}$，且定理成立；2) 存在 $\epsilon_1>0$ 使得 $\varphi|_{[-\epsilon_1,\epsilon_1]}=\phi|_{[-\epsilon_1,\epsilon_1]}$。由于 $\phi(t)=\text{sgn}(t)\ \min\ \{|\varphi_1(t)|,...,|\varphi_{n-1}(t)|\}$，根据归纳假设，我们知道存在 $\epsilon_2>0$ 和 $i_0\in\{1,...,n-1\}$ 使得 $\phi|_{[-\epsilon_2,\epsilon_2]}=\varphi_{i_0}|_{[-\epsilon_2,\epsilon_2]}$。现在取 $\epsilon=\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$，可得 $\varphi|_{[-\epsilon,\epsilon]}=\varphi_{i_0}|_{[-\epsilon,\epsilon]}$，定理的证明至此完成。□

下面的定理是 [5] 定理 2.3 的一个一般对应形式，也是 [7]中半代数引理 2.3 的一个可定义对应形式。

定理 3.5. 设 $f, g:\ K \longrightarrow \mathbb{R}$ 是定义在紧集$\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^m$上的两个可定义函数。此外，假设 g 连续且 $f^{-1}(0)^\gamma \subset g^{-1}(0)$。存在可定义的 $\phi \in \Phi_p$，使得对所有 $x \in K$，$|\phi(g(x))| \leq |f(x)|$。

证明。对于任意 $\phi \in \Phi_p$，函数 $h := \phi(d(x, f^{-1}(0)^\gamma))$ 连续且可定义。此外，$\phi(d(x, f^{-1}(0)^\gamma)) = 0 \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(0)^\gamma$。对于这样的点 x，根据假设可得 $g(x) = 0$，因此 $h^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$。现在固定一点 $a \in f^{-1}(0)^\gamma$，并取 U_a, ϕ_a 如定理 3.1 所述。注意，函数 $d(\cdot, f^{-1}(0)^\gamma)$ 可连续延拓到 $\overline{U_a \cap K}$，且在延拓上 $h^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$。集合 $\overline{U_a \cap K}$ 是紧致的，因此根据定理 3.3，我们可以找到 $\psi_a \in \Phi_p$，使得

$$d(x, f^{-1}(0)^\gamma) \geq |\psi_a(g(x))| \text{ for } x \in \overline{U_a \cap K}.$$

我们得到

$$|f(x)| \geq \phi_a(d(x, f^{-1}(0)^\gamma)) \geq \phi_a(|\psi_a(g(x))|) \text{ for } x \in U_a \cap K,\ \phi_a \text{ being increasing.}$$

由于 ϕ_a 是奇函数，我们有

$$\phi_a(|\psi_a(g(x))|) = |\phi_a(\psi_a(g(x)))|.$$

取 $\varphi_a = \phi_a \circ \psi_a$，我们得到一个从 Φ_p 到某处的函数，使得

$$|f(x)| \geq |\varphi_a(g(x))| \text{ for } x \in U_a \cap K.$$

现在注意到 $f^{-1}(0)^\gamma = \overline{\Gamma_f} \cap K \times \{0\}$。集合 $f^{-1}(0)^\gamma$是 K的闭子集，因此是紧致的。设$\{U_a\}_{a \in f^{-1}(0)^\gamma}$ 是 $f^{-1}(0)^\gamma$的一个开覆盖。由于 $f^{-1}(0)^\gamma$ 是紧致的，我们可以找到一个有限子覆盖 $\{U_{a_1}, ..., U_{a_n}\}$。由命题 3.4 可知，存在 $1 > \epsilon > 0$和 $i_0 \in \{1, ..., n\}$，使得对于所有 $i \in \{1, ..., n\}$，在 $[-\epsilon, \epsilon]$ 上有 $|\varphi_{a_{i_0}}| \leq |\varphi_{a_i}|$。由于 g在紧集上是连续函数，存在 $t_0 > 0$，使得在 K上有 $|g(x)| \leq t_0$。我们不妨假设 $\epsilon < t_0$。定义函数

$$\varphi(x) := \varphi_{a_{i_0}}(\frac{\epsilon}{t_0}x).$$

取 $t \in \mathbb{R}$使得 $|t| \in [0, t_0]$。注意，由于这些函数是单调递增且为奇函数，对所有 φ_{a_i}，都有$|\frac{\epsilon}{t_0}t| \in [0, \epsilon]$和 $|\varphi_{a_i}(\frac{\epsilon}{t_0}t)| \leq |\varphi_{a_i}(t)|$。因此我们得到

$$|\varphi(t)| = |\varphi_{a_{i_0}}(\frac{\epsilon}{t_0}t)| \leq |\varphi_{a_i}(\frac{\epsilon}{t_0}t)| \leq |\varphi_{a_i}(t)|,$$

进而

$$|f(x)| \geq |\varphi(g(x))|,\ x \in \left(\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}\right) \cap K.$$

现在考虑集合 $B := K \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$。它是闭集，因而是紧致的。我们将证明 $|f|$ 在 B上有下界。反设存在一个序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset B$ 使得 $|f(x_k)| \longrightarrow 0$。由于 B 是紧致的，$\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 存在一个子序列收敛到某个 x_0。这意味着 $x_0 \in f^{-1}(0)^\gamma \subset g^{-1}(0)$。一方面，由 B的闭性可得 $x_0 \in B$；另一方面，由于 $\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$是 $f^{-1}(0)^\gamma$的开覆盖，可得$x_0 \in \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$。因此我们得到

$$x_0 \in \left(\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}\right) \cap B = \emptyset$$

这就产生了矛盾。取 $M > 0$，使得 $|f| > M$ 在 B 上。定义 $L := |\varphi(t_0)|$。取 $C := \min\{\frac{M}{L}, 1\}$，并定义 $\phi := C\varphi$。我们得到如下估计

$$|f(x)| \geq |\phi(g(x))| \text{ for } x \in K.$$

□

现在我们将给出洛亚谢维奇不等式最广义的版本。

定理 3.6. 设 $f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ 是两个可定义函数，且 $|g|$ 有界。此外，假设满足以下条件:

$$\forall\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A : f(x_n) \longrightarrow 0 \Longrightarrow g(x_n) \longrightarrow 0.$$

存在可定义的 $\varphi \in \Phi_p$，使得对于 $x \in A$, $|f(x)| \geq |\varphi(g(x))|$。

证明. 定义如下函数:

$$\psi : (0,\infty) \ni t \longrightarrow sup\{\frac{1}{|f(x)|} : x \in A \cap g^{-1}(t)\}.$$

注意，对于 $t \in (0,\infty)$，由于 $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$，$|f^{1}(x)|$ 在 $A \cap g^{-1}(t)$ 上定义良好。函数 ψ 是可定义的，这可直接从其图的描述得出，因为定义中的上确界总是有限的。为证明这一点，假设存在一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \cap g^{-1}(t)$，使得 $|f^{1}(x_n)| \longrightarrow \infty$。于是得到 $f(x_n) \longrightarrow 0$。由后一假设可知，$g(x_n) \longrightarrow 0$，但对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$g(x_n) = t$，因此得到矛盾。将 ψ 与 $\psi: \{0\} \times (0,\infty) \ni (0,t) \longrightarrow \psi(t) \in \mathbb{R}$ 视为相同，根据命题 3.2，我们可以找到一个函数 $\phi \in \Phi_p$，使得 $\lim_{t\to 0^+} \phi(t)\psi(t) = 0$。要证明该定理，只需证明函数 $\frac{|\phi\circ g|}{|f|}$ 在 $A\backslash\{g^{-1}(0)\}$ 上有界。反设存在一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$，使得 $\frac{|\phi(g(x_n))|}{|f(x_n)|} \longrightarrow \infty$。分子有界，因为 g 有界且 ϕ 单调递增。于是得到 $|f(x_n)| \longrightarrow 0$。由假设可知，$g(x_n) \longrightarrow 0$。我们得到以下不等式:

$$0 \leq \frac{|\phi(g(x_n))|}{|f(x_n)|} \leq |\phi(g(x_n))\psi(g(x_n))| \longrightarrow 0.$$

这与 $\frac{|\phi(g(x_n))|}{|f(x_n)|} \longrightarrow \infty$ 这一事实相矛盾。这意味着存在 $C > 0$ 使得

$$\frac{|\phi(g(x_n))|}{|f(x_n)|} \leq C$$

然后

$$\frac{1}{C}|\phi(g(x))| \leq |f(x)| \text{ on } A\backslash g^{-1}(0).$$

注意，对于 $x \in g^{-1}(0)$，这个不等式显然成立，因此取 $\varphi := \frac{1}{C}\phi$，我们得到

$$|\varphi(g(x))| \leq |f(x)| \text{ for } x \in A.$$

□

注意，在上述定理中，条件 $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$ 由常值序列实现。

例 3.7。函数 g 有界这一假设不可省略。考虑以下半代数函数: $f: [0,1] \ni x \longrightarrow x \in \mathbb{R}$ 和

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{when } x \in [0,1), \\ 1, & \text{when } x = 0. \end{cases}$$

假设存在 $\phi \in \Phi_p$，使得对于 $x \in [0,1]$, $\phi(g(x)) \leq f(x)$。取一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1)$，使得 $x_n \longrightarrow 1$。注意，对于所有 n, $f(x_n) < 1$。

另一方面， $g(x_n) \longrightarrow \infty$ ，因此 $\phi(g(x_n))$，因为 ϕ 是连续递增双射。

例3.8。注意，我们不能省略 $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$ 这一假设。特别是，我们不能仅将其替换为条件 $f^{-1}(0)^\gamma \subset g^{-1}(0)^\gamma$。令$f\colon [0,1] \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$ 且

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{when } x \in (0,1], \\ 1, & \text{when } x = 0. \end{cases}$$

注意，我们有 $g^{-1}(0)^\gamma = f^{-1}(0)^\gamma = [0,1]$。假设存在 $\phi \in \Phi_p$，使得对于 $x \in [0,1]$，有 $\phi(g(x)) \leq f(x)$。对于 $x = 0$，我们有 $g(0) = 1$ 且$\phi(g(0)) = \phi(1) \leq f(0) = 0$，这与 ϕ 是递增奇双射这一事实矛盾。

4. Generalized Łojasiewicz's inequality for subanalytic functions

本部分最后要做的是表述次解析集情形下的广义 Lojasiewicz 不等式。我们必须单独考虑这种情形，因为次解析集并不构成 o-极小结构。更多信息请参阅 [3]。

定义 4.1. 若对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，都存在一个邻域 $U \ni x$ 以及解析函数 f_i、g_{ij}，它们定义在 U 上，使得 $A \subset \mathbb{R}^n$，则称集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为半解析集。

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcap_{j=1}^{q} \{x \in U | f_i(x) = 0, g_{ij}(x) > 0\}.$$

我们可以在更一般的情形下定义这一概念，即用解析簇 M 代替 $\mathbb{R}^n$。

定义 4.2. 若实解析簇 $E \subset M$、M 满足：对任意 $x \in M$，存在一个邻域 $U \ni x$，使得 $E \cap U = \pi(A)$，其中 $\pi\colon M \times N \longrightarrow M$ 是自然投影，N 是实簇，且 A 是 $M \times N$中的半解析且相对紧的集合，则称其为亚解析集。

定义 4.3. 映射 $f\colon E \longrightarrow N$，其中 $E \subset M$ 是非空亚解析集，若其图在 $M \times N$中是亚解析的，则称该映射为亚解析映射。

对亚解析集进行并集、交集、补集和闭包等基本运算后，所得集合仍为亚解析集 [3]。

定理 4.4（[4] 命题3.17）。设 f、$g\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ 是紧集 K 上的两个连续次解析函数，且 $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$。那么存在 C、$N > 0$，使得:

$$|f(x)| \geq C|g(x)|^N, \quad x \in K.$$

定理 4.5（[5] 定理2.1）。若 $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 是次解析函数，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$，则对于 f 的零点的一般集合中的任意一点 a，都存在一个邻域 U 以及正常数 C 和 α，使得

$$|f(x)| \geq Cd(x, f^{-1}(0)^\gamma)^\alpha, \ x \in U \cap \Omega.$$

定理 4.6. 设 $f, g\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ 是紧集 $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个次解析函数。此外，假设 g 连续，且 $f^{-1}(0)^\gamma \subset g^{-1}(0)$。存在 $C, \alpha > 0$，使得对所有 $x \in K$，$C|g(x)|^\alpha \leq |f(x)|$。

证明. 首先，利用定理 4.4 和 4.5，我们采用与定理 3.5 的证明相同的方法进行论证。我们得到 $f^{-1}(0)^{\gamma}$ 的一个有限覆盖 $\{U_1, ..., U_n\}$，以及正数常量 $C_1, ..., C_n, \alpha_1, ..., \alpha_n$，使得

$$C_i|g(x)|^{\alpha_i} \leq f(x),\ x \in U_i.$$

此外，我们知道存在某个常数D，使得 f 在 $K\backslash(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)$上有下界。定义 $\alpha = max\{\alpha_1, ..., \alpha_n, 1\}$。现在注意，如果对某个 $x \in K$有 $|g(x)| \leq 1$，那么对于 $i = 1,...,n$，有 $|g(x)|^{\alpha} \leq |g(x)|^{\alpha_i}$。由于 $|g|^{\alpha}$ 在紧集上连续，因此存在 $C_0 > 0$，使得对 $x \in K$ 有 $|g(x)|^{\alpha} \leq C_0$。定义$C = min\{\frac{D}{C_0}, C', \frac{C'}{C_0}\}$，其中 $C' = min\{C_1, ..., C_n\}$。我们得到

$$C|g(x)|^{\alpha} \leq |f(x)|,\ x \in K.$$

□

定理 4.7. 设 $f, g:\ A \longrightarrow \mathbb{R}$ 是紧致次解析子集 $A \subset \mathbb{R}^m$ 上的两个次解析函数，且 $|g|$ 有界。此外，假设满足以下条件:

$$\forall\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A : f(x_n) \longrightarrow 0 \Longrightarrow g(x_n) \longrightarrow 0. \quad (*)$$

那么存在常数 $C, \alpha > 0$ 使得 $|f(x)| \geq C|g(x)|^{\alpha}$ 对于 $x \in A$。

证明。在此证明中，我们将考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的范数，其定义为 $||(x, y)|| = |x| + |y|$。按照 [4] (命题 3.17)，定义以下集合

$$B = \{(s, t) \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A :\ f(x) = s,\ g(x) = t\},$$

$$B' = \{(x, s, t) \in A \times \mathbb{R}^2 \mid f(x) = s,\ g(x) = t\}.$$

令 $\pi :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 为到最后两个坐标的投影。我们有$\pi(B') = B$，且 π 在投影方向上有界，因此 B 是次解析的[4] (命题 2.9)。

现在假设 $f^{-1}(0)^{\gamma} \neq \emptyset$。注意，$\overline{B} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \{(0, 0)\}$。事实上，取一个序列 $\{(x_n, y_y)\}_{n=1}^{\infty} \subset B$，并假设 $x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow y_0$ 且 $y_0 \neq 0$。这与条件 (∗) 矛盾。由正则分离定理 [4] (定理 3.5)，可知存在 (0, 0) 的一个邻域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 以及常数 C_1, $\alpha > 0$，使得

$$d((s, t), \{0\} \times \mathbb{R}) \geq C_1 d((s, t), \overline{B} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}))^{\alpha} = C_1 d((s, t), \{(0, 0)\})^{\alpha},\ \text{for } (s, t) \in U.$$

现在定义集合 $Z_1 = \pi(\Gamma_{(f,g)}) \cap U$和 $Z_2 = \pi(\Gamma_{(f,g)})\backslash U$。显然，我们有$\pi(\Gamma_{(f,g)}) = Z_1 \cup Z_2$。注意，集合 Z_2中的第一坐标与 0 相离。为此，假设情况并非如此，并取一个序列 $\{(x_m, y_m)\}_{m=1}^{\infty} \subset Z_2$使得 $x_m \longrightarrow 0$。由条件 (∗) 可得 $y_n \longrightarrow 0$。我们有$\{(x_m, y_m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2\backslash U$，因此得到矛盾，因为 $(0, 0) \in \text{int}\ U$。取$K > 0$，使得对每个 $(s, t) \in Z_2$，都有 $s > K$。我们知道 $|g|$ 在 A 上有界，因此 $|g|^{\alpha}$也有界。取 $L > 0$，使得对每个 $x \in A$，都有 $L > |g(x)|^{\alpha}$。我们可以找到 C_2 使得 $K > C_2 L$。取 $C = \min\{C_1, C_2\}$。

注意，对于满足 $(f(x)\ g(x)) = (s, t) \in Z_1 \subset U$ 的 $x \in A$，我们有

$$|f(x)| = d((s, t), \{0\} \times \mathbb{R}) \geq C_1 d((s, t), \{(0, 0)\})^{\alpha} = C_1(|s| + |t|)^{\alpha} \geq C_1|t|^{\alpha} \geq C|g(x)|^{\alpha}.$$

另一方面，对于满足 $(f(x)\ g(x)) = (s, t) \in Z_2 \subset U$ 的 $x \in A$，我们有

$$|f(x)| \geq K \geq C_2 L \geq CL \geq C|g(x)|^{\alpha}.$$

由于对于 $x \in A$，有 $(f(x)\ g(x)) \in Z_1$ 或 $(f(x)\ g(x)) \in Z_2$，证明的这部分就完成了。如果 $f^{-1}(0)^\gamma = \emptyset$，那么 $|f|$ 有下界，我们可以像之前一样推理。它有下界，因为否则就会存在一个自变量序列，使函数 f 趋于零；而由于 A 是紧致的，广义零点集不可能为空。□

定理 4.8。设 $f, g:\ A \longrightarrow \mathbb{R}$ 是定义在有界次解析子集 $A \subset \mathbb{R}^m$ 上的两个次解析函数，且 $|g|$ 有界。此外，假设满足以下条件：

$$\forall \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A : f(x_n) \longrightarrow 0 \Longrightarrow g(x_n) \longrightarrow 0. \quad (*)$$

那么存在常数 $C, \alpha > 0$，使得对于 $x \in A$，有 $|f(x)| \geq C|g(x)|^\alpha$。

证明。首先注意到 $\overline{A}$ 是紧致且次解析的。我们定义以下次解析函数：

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & \text{when } x \in \overline{A} \backslash A, \\ g(x), & \text{when } x \in A. \end{cases}$$

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{when } x \in \overline{A} \backslash A, \\ f(x), & \text{when } x \in A. \end{cases}$$

$\widetilde{\ }$ 函数 $\widetilde{g}, f$ 满足前一定理的假设，因此可得所述结论。□

自然会产生一个问题：在亚解析情形下，我们能否得到定理 3.6 的对应结论？答案是否定的，以下示例便说明了这一点。该示例是与 Maciej Denkowski 合作构造的。

例 4.9。定义以下次解析函数：

$$g(x) = x - \lfloor x \rfloor, \text{ for } x \in [0, \infty)$$

and

$$f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^{\lfloor x \rfloor}, \text{ for } x \in [0, \infty).$$

注意，函数 g 的图限制在区间 $[n, n+1)$ 上且对于$n \in \mathbb{N}$，恰好是函数图形的平移。

$$\tilde{g}(x) = x, \text{ for } x \in [0, 1).$$

类似地，函数 f 的图限制在区间 $[n, n+1)$ 上且对于 $n \in \mathbb{N}$，恰好是函数图形的平移。

$$\tilde{f}_n(x) = x^n, \text{ for } x \in [0, 1).$$

假设在亚解析情形下存在定理 3.6 的对应结论，则我们将有 C、 $\alpha > 0$ 使得

$$f(x) \geq Cg(x)^\alpha, \text{ for } x \in [0, \infty).$$

这意味着不等式

$$x^n \geq Cx^\alpha, \text{ for } x \in [0, 1)$$

将对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，从而导致矛盾。

在 [8] 中可以找到一个类似于定理 4.8 的结果：

命题 4.10（[8] 命题 1.1）。设 f 和 g 是定义在全局次解析集 A 上的两个全局次解析函数，且 $\sup_{x\in a}|f(x)| < \infty$。假设对于每个满足 $\lim_{t\to 0} g(\gamma(t)) = 0$ 的全局次解析弧 $\gamma: (0,\epsilon) \longrightarrow A$，均有 $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0$fro。那么存在 $N \in \mathbb{N}$ 和 $C \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $x \in A$:

$$|f(x)|^N \leq C|g(x)|.$$

证明很容易推广到多项式有界的 o-极小结构。与定理 4.8 相比，有两项主要区别。在命题 4.10 中，我们不要求A 有界，而是要求两个函数都全局次解析。在定理 4.8 g 实际上是全局次解析的，而 f 则不必如此。例 4.9 展示了这两项结果之间的区别。第二项区别仅体现在记号上，如下述引理所示。

引理 4.11。设 f、g 是有界次解析集 $A \subset \mathbb{R}^n$上的两个次解析函数。那么以下断言等价：i）对于任意解析 $\gamma: (0, \epsilon) \longrightarrow A$，若 $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t))$，则存在 $\lim_{t\to 0} g(\gamma(t)) = 0$；ii）对于任意（$x_\nu$）$\subset A$，若 $f(x_\nu) \longrightarrow 0$，则存在 $g(x_\nu) \longrightarrow 0$。

证明。我们只需证明 $(i) \Longrightarrow (ii)$。反设存在一个序列 $(x_\nu) \subset A$，使得 $|g(x_\nu)| > c$，而 $f(x_\nu) \longrightarrow 0$，其中 $c > 0$ 是一个常数。注意，$|g|$ 是次解析的（因为 $\Gamma_{|g|} = (\Gamma_g \cap A \times [0,+\infty)) \cup \varphi(\Gamma_g \cap A \times [-\infty, 0))$，其中 $\varphi(x,y) = (x,-y)$ 是双解析的），因此集合 $A_c = \{x \in A \mid |g(x)| > c\}$ 也是次解析的，因为它是 $\{x \in A \mid |g(x)| < x\} = \pi(\Gamma_{|g|} \cap A \times [0,c))$ 的补集，其中 $\pi(x,y) = x$ 在投影次解析集上的原像沿 y 方向相对紧致。我们不需要 $|g|$ 有界。由于集合 A 有界，我们可以假设 $x_\nu \longrightarrow x_0$。于是 $(x_0,0) \in (A_c \times \{0\}) \cap \Gamma_f$，接下来可以完全按照注 2.19 中的方法进行，同时注意在次解析情形下，曲线选择引理给出一条解析曲线。□

上述引理可以推广到一般的可定义情形。

引理 4.12. 设 $f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ 是两个可定义函数。则以下断言等价:

i) 对任意可定义的 $\gamma: (0,\epsilon) \longrightarrow A$，若 $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t))$，则存在 $\lim_{t\to 0} g(\gamma(t)) = 0$;
ii) 对任意 $(x_\nu) \subset A$，若 $f(x_\nu) \longrightarrow 0$，则存在 $g(x_\nu) \longrightarrow 0$。

证明. 我们证明 $(ii) \Longrightarrow (i)$。注意到 A 可能无界。因此，要么 (x_ν) 在 $\overline{A}$ 中有极限（取一个子序列后即可），此时我们可以重复前面基于曲线选择引理的证明；要么 $||x_\nu|| \longrightarrow +\infty$。接着注意到 $\varphi(x) = \frac{x}{||x||^2}$ 是一个半代数微分同胚 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.˜ 因此 $A = \varphi(A\backslash\{0\})$ 可定义，且 $\varphi(x_\nu) \longrightarrow 0$。现在取满足 $\lim_{t\to 0} \tilde{\gamma}(t) = 0$ 的可定义曲线 ˜ $\tilde{\gamma}: (0,\epsilon) \longrightarrow A$，便得到一条可定义曲线 $\gamma = (\varphi^{-1}) \circ \tilde{\gamma}: (0,\epsilon) \longrightarrow A$，使得 $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = +\infty$。由此我们可以将证明的第一部分应用于 $\tilde{A}$ 以及 $f \circ \varphi^{-1}, g \circ \varphi^{-1}$，从而完成论证 □

注 4.13. 作为对 A.Valette 结果的补充，我们指出，在引理 4.11 中，解析曲线已足够（但我们保留 A 有界这一假设）；而引理 4.12 则是对 A.Vallete 可定义版本的直接补充。

5.Lojasiewicz's inequality for multifunctions

接下来，我们将利用前面证明的定理，表述一些适用于可定义多值函数的洛亚谢维奇不等式对应形式。这里给出的定义来自 [5]。

5.1. 可定义多值函数。

定义 5.1. 多值函数是一个函数 $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$。 $F(a)$ 的元素称为多值函数在 x 处的值 F。此外，我们将多值函数的定义域视为集合 $dom\ F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \neq \emptyset\}$.

如果多值函数的图 $\Gamma_F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid y \in F(x)\}$ 是一个可定义集，则称其为可定义多值函数。

可定义多值函数的定义域是一个可定义集。

定义 5.2. 对于多值函数 $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 和 $a \in \overline{domF\backslash\{a\}}$ ，我们定义 Kuratowski 部分极限：

- $y \in \liminf\limits_{x\to a} F(x) \Leftrightarrow \forall\ dom\ F\backslash\{a\} \ni x_\nu \to a,\ \exists\ F(x_\nu) \ni y_\nu \to y \Longleftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ \forall U \ni y$ 邻域 $\exists V \ni a$ 邻域 $\forall x \in V \cap domF\backslash\{a\}, U \cap F(x) \neq \emptyset$;
- $y \in$ 上确界 $F(x) \Leftrightarrow \exists\, dom\ F\backslash\{a\} \ni x_\nu \to a,\ \exists\ F(x_\nu) \ni y_\nu \to y \Leftrightarrow_{x\to a}$

$\Leftrightarrow\ \forall\, U \ni y$ 邻域 $\forall\, V \ni a$ 邻域 $\exists\, x \in V\backslash\{a\}\colon\ U \cap F(x) \neq \emptyset$.

包含关系 $\liminf_{x\to a} F(x) \subset \limsup_{x\to a} F(x)$ 总是成立。如果反向包含关系也成立，则有 $\limsup_{x\to a} F(x) = \liminf_{x\to a} F(x)$，此时我们称之为 Kuratowski意义下的收敛。

定义 5.3。设 $a \in dom\ F$。采用前述记号，我们称 F 为：i) 在 a处外半连续，如果 $\limsup_{x\to a} F(x) \subset F(a)$；ii) 在 a处内半连续，如果 $\liminf_{x\to a} F(x) \supset F(a)$；iii) 在 a处上半连续，如果 $\limsup_{x\to a} F(x) = F(a)$；iv) 在 a处下半连续，如果 $\liminf_{x\to a} F(x) = F(a)$；v) 在 a处连续，如果 $\liminf_{x\to a} F(x) = \limsup_{x\to a} F(x) = F(a)$。

定义 5.4（[5]）。对于多值函数 $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 和 $a \in dom\ F$，我们定义：

- $F^{-1}(F(a)) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) = F(a)\}$ – 强原像，- $F^*(F(a)) :$
$= \{x \in dom\ F \mid F(x) \subset F(a)\}$ – 下原像，- $F_*(F(a)) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(a) \subset F$
$(x)\}$ – 上原像，- $F_\#(F(a)) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) \cap F(a) \neq \emptyset\}$ – 弱原像。

命题 5.5（[5] 命题 3.1）。对于可定义多值函数 $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 和 $a \in dom\ F$，上述各类原像都是可定义集。

5.2. 豪斯多夫距离。

定义 5.6. 设 A、B 是度量空间 X 中两个非空紧子集。我们将豪斯多夫度量定义为

$$dist_H(A,B) := \max\{\max_{x\in A} d(x,B), \max_{x\in B} d(x,A)\}.$$

如果空间 X 是紧致的，那么我们也可以考虑扩展豪斯多夫度量。如果 A 或 B 中有一个为空集但另一个不为空集，则定义 $dist_H(A,B) = diam\ X + 1$。

命题 5.7（[5] 引理 5.1）。设 $f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ 是两个可定义函数。那么函数 $\phi(x) = max\{f(x)\ g(x)\}$ 是可定义的。

命题 5.8（[5] 引理 5.2）。设 $F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是一个可定义多值函数，且 $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个可定义函数。那么函数

$$\psi : \mathbb{R}^k \times dom\ F \ni (x, x') \longrightarrow \sup_{y \in F(x')} f(x, y) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

是可定义的。

命题 5.9。设 $F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是一个可定义多值函数，且 $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个可定义函数。那么函数

$$\psi : \mathbb{R}^k \times domF \ni (x, x') \longrightarrow \inf_{y \in F(x')} f(x, y) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

是可定义的。

证明。下确界可以用上确界表示，因此利用 5.8 可得所述结论。□

命题 5.10（[5] 命题 5.3）。设 $F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ $G: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是两个取紧值的可定义函数。那么函数

$$\delta_{F,G} : dom\ F \times dom\ G \ni (x, x') \longrightarrow \max_{y \in G(x')} d(y, F(x)) \in \mathbb{R}$$

是可定义的。

命题 5.11（[5] 定理 5.4）。设 $F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ $G: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是两个取紧值的可定义多值函数。那么函数:

$$d_H(F, G) : dom\ F \times dom\ G \ni (x, x') \longrightarrow dist_H(F(x), G(x')) \in \mathbb{R}$$

是可定义的。

命题 5.12。设 $F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是一个取紧值的多值函数。设 $a \in dom\ F$ 是一个不动点，且 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$ 是一个满足 $x_\nu \longrightarrow x_0$ 的序列，其中某个 $x_0 \in \mathbb{R}^m$。那么

$$dist_H(F(x_\nu), F(a)) \longrightarrow 0 \Longrightarrow \limsup_{x \to x_0} F(x) \supset F(a).$$

证明。设 $z \in F(a)$。由于 $dist_H(F(x_\nu)\ F(a)) \longrightarrow 0$ 成立，因此对每个 $\epsilon > 0$，我们有 $dist_H(F(x_k)\ F(a)) < \epsilon$，当 k 充分大时成立。于是，对固定的 k 和 $z \in F(a)$，可得 $d(z, F(x_k)) \leq \max_{w \in F(a)} d(w, F(x_k)) \leq \epsilon$，且距离在某个 $z_k \in F(x_k)$ 处取得，因此我们得到一个序列 $F(x_k) \ni z_k \longrightarrow z$。这意味着 $z \in \limsup_{x \to x_0} F(x)$。□

5.3. 多值函数的洛亚谢维奇不等式。本小节补充了 [5] 中给出的结果。特别是，它消除了一个形式上的缺陷

定理 5.13. 设 $F: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是一个具有紧值的外半连续可定义多值函数。对于 $a \in dom\ F$，存在一个可定义的 $\varphi \in \Phi_p$，使得

$$dist_H(F(x), F(a)) \geq \varphi(d(x, F_*(F(a)))),\ x \in K$$

其中，K 是 a 的紧邻域，使得 K 属于 $dom\ F$。

证明。定义函数 $g(x) := d(x, F_*(F(a)))$、 $f(x) := dist_H(F(x)\ F(a))$。设 $x_\nu \longrightarrow x_0$为一个满足 $f(x_\nu) \longrightarrow 0$的序列。由命题 5.12 可得 $\limsup_{x\to x_0} F(x) \supset F(a)$。根据外半连续性，我们有 $\limsup_{x\to x_0} F(x) \subset F(x_0)$。因此，存在包含关系 $F(a) \subset F(x_0)$，这意味着 $g(x_0) = 0$。由此，函数 f、 g 满足定理 3.5 的假设，因此得到所需结果。□

例 5.14. 接下来，我们将修改上一条定理的假设，使其结论对其他类型的原像也成立。考虑以下半代数多值映射。

$$F(x) = \begin{cases} \{\sqrt{x}\}, & \text{when } x \in (0,4) \\ \{2,1\}, & \text{when } x = 4 \\ \{-x+5\}, & \text{when } x \in (4,5). \end{cases}$$

它是一个上半连续的半代数多值映射，但对于 $a = 1$ 和序列 $x_n = 4 + \frac{1}{n}$，我们得到 $dist_H(F(x_n)\ F(a)) \longrightarrow 0$，而 $d(4, F^{-1}(F(1))) = d(4, \{1\}) \neq 0$，且 $d(4, F^*(F(1))) = d(4, \{1\}) \neq 0$。这意味着，对于下原像和强原像，仅假设上半连续是不够的。

定理 5.15. 设 $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是一个取紧值的内半连续可定义多值函数。对于 $a \in dom\ F$，存在一个可定义的 $\varphi \in \Phi_p$，使得

$$dist_H(F(x), F(a)) \geq \varphi(d(x, F^*(F(a)))),\ x \in K$$

其中， K 是 a 的一个紧致邻域，使得 K 属于 $dom\ F$。

证明。定义 $g(x) := d(x, F^*(F(a)))$， $f(x) := dist_H(F(x)\ F(a))$。设 $x_\nu \longrightarrow x_0$为一个序列，使得 $f(x_\nu) \longrightarrow 0$。我们要证明 $F(x_0) \subset F(a)$。固定$y \in F(x_0)$。由内半连续性可知，对于 $x_\nu \longrightarrow x_0$，存在一个序列 $F(x_\nu) \ni y_\nu$，使得 $y_\nu \longrightarrow y$。由于 $dist_H(F(a)\ F(x_\nu)) \longrightarrow 0$，且 $F(a)$是紧致的，因而是闭集，我们得到 $y \in F(a)$。因此，函数f、 g 满足定理 3.5 的假设，从而得到所需结论。□

例 5.16. 考虑如下半代数多值映射:

$$G(x) = \begin{cases} \{(x-2)^2, 1, 2\}, & \text{when } x \in [-1,4) \\ \{1,2\}, & \text{when } x \in [4,6]. \end{cases}$$

它是下半连续的。注意，对于序列 $x_n = 4 - \frac{1}{n}$，有 $dist_H(G(x_n)\ G(0)) \longrightarrow 0$，但 $d(4, G^{-1}(G(0))) \neq 0$。这意味着，仅假设下半连续性不足以保证强原像。此前我们也已证明，上半连续性同样不足。因此得到以下定理。

定理 5.17. 设 $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是一个取紧值的连续可定义多值映射。对于 $a \in dom\ F$，存在一个可定义的 $\varphi \in \Phi_p$，使得

$$dist_H(F(x), F(a)) \geq \varphi(d(x, F^{-1}(F(a)))),\ x \in K$$

其中， K 是 a 的紧邻域，使得 $K \subset dom\ F$。

证明。定义如下两个函数: $g(x) := d(x, F^{-1}(F(a)))$ 和 $f(x) := dist_H(F(x), F(a))$。令 $x_\nu \longrightarrow x_0$ 为一个序列，使得 $f(x_\nu) \longrightarrow 0$。我们得到 $\limsup_{x\to x_0} F(x) \supset F(a)$。由连续性可知，$\limsup_{x\to x_0} F(x) = \liminf_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$，因此包含关系 $F(a) \subset F(x_0)$ 成立。连续多值函数尤其是内半连续的，因此由前一定理的证明可知，包含关系 $F(x_0) \subset F(a)$ 也成立。我们得到等式 $F(x_0) = F(a)$，这意味着函数 f 和 g 满足定理 3.5 的假设，从而得证。□

注 5.18. 注意，利用定理 3.1 并重复上述证明，我们可以得到这三个定理在 $x \in U \cap dom\ F$ 下的版本，其中 U 是 a 的某个开邻域。区别在于，K 可以是包含于 $dom\ F$ 中的任意紧集，特别是不依赖于 a，而 U 则依赖于 a。

一个自然的问题是，我们能否利用定理 3.6 得到前述定理对任意子集 K 的适用版本，而不要求其为紧集。下面的例子给出了答案。

例 5.19. 考虑以下半代数多值映射:

$$H(x) = \{x^2, x^2 + 1\},\ \text{for } x \in (-1, 1].$$

取 K 为 $(-1, 1]$，并令 $x_n = -1 + \frac{1}{n}$ 为一个序列，我们有 $dist_H(H(x_n), H(1)) \longrightarrow 0$，但 $H^{-1}(H(1)) = H^*(H(1)) = H_*(H(1)) = \{1\}$，因此从 x_n 到这些集合的距离不趋于 0。定理 3.6 的假设不成立。

5.4. 闭值多值函数。我们的下一个目标是将已陈述的事实推广到闭值多值函数。令 $\mathcal{F}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的所有闭子集构成的族。

引理 5.20（[5] 引理 6.1）。设 $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是一个可定义多值函数，且 $h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ 是一个可定义函数。那么函数 $G\colon dom\ F \ni x \longrightarrow h(F(x)) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ 是可定义的。

引理 5.21（[5] 引理 6.2）。设 $F, G : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是两个可定义多值函数。那么函数 $H_1 = F(x) \cap G(x)$、$H_2 = F(x) \cup G(x)$、$H_3 = F(x) \backslash G(x)$ 都是可定义的。

定理 5.22（[5] 定理 6.3）。存在一个定义在集合 $\mathcal{F}_n$ 上并扩展豪斯多夫度量的度量 dist_K，使得对于任意两个取紧值的可定义函数 $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ $G : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$，所诱导的函数:

$$d_K(F, G) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \ni (x, y) \longrightarrow dist_K(F(x), G(y)) \in \mathbb{R}$$

是可定义的。

证明。我们将 $\mathbb{R}^n$ 与 $R := \mathbb{R}^n \times \{-1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 等同，并考虑单位球面 $\mathbb{S}^n$，以极点 $p = (0, ..., 0, 1)$ 处的点为中心向 R 作立体投影，

$$s(x) = \left(\frac{-2x_1}{x_{n+1} - 1}, ..., \frac{-2x_n}{x_{n+1} - 1}, -1 \right) \in R \text{ for } x \in \mathbb{S}^n \backslash \{p\}.$$

将标准欧几里得度量在单位球面上的限制记为 ϱ $\mathbb{R}^{n+1}$。$(\mathbb{S}^n, \varrho)$ 对应于 R 的 Alexandrow 单点紧化，并且

$h := s^{-1}$ 是半代数同胚 $R \longrightarrow \mathbb{S}^n \backslash \{p\}$。我们将 $\mathcal{F}_n$ 上的度量定义为：

$$dist_K(K,L) = dist_H(h(K) \cup \{p\}, h(L) \cup \{p\}) \quad K, L \in \mathcal{F}_n.$$

如果集合 S、$T \subset \mathbb{S}^n$ 中恰有一个为空，则令 $dist_K(S,T) = diam\, \mathbb{S}^n + 1$。标准论证表明，这样的函数是给出库拉托夫斯基收敛的度量。根据命题 5.11，可知其可定义性。□

为了将先前针对具有闭值的多值函数所证明的定理推广，我们需要证明以下命题：

命题 5.23. 设 $F\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是一个具有闭值的可定义多值函数。设 $a \in dom\ F$ 为一个不动点，$\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ 为一个序列，满足 $x_\nu \longrightarrow x_0$，其中某个 $x_0 \in \mathbb{R}^m$。假设 $dist_K(F(x_\nu)\ F(a)) \longrightarrow 0$那么 1) 存在 $\limsup_{x \to x_0} F(x) \supset F(${v17)。

2）若 F 是内半连续的，则 $F(x_0) \subset F(a)$。

证明。对于 1），设 $z \in F(a)$。我们沿用前一个证明中使用的记号 h 和 p。由于

$dist_K(F(x_\nu)\ F(a)) \longrightarrow 0$，且 $h(z)$与 p之间的距离为常数，因此 $\max_{y \in h(F(x_\nu))} d(y, h(z)) \longrightarrow 0$。因此，我们可以找到一个序列 $h(F(x_\nu)) \ni z_\nu \longrightarrow h(z)$。由于 h 是一个同胚，我们得到 $h^{-1}(z_\nu) \longrightarrow z$。注意，$h^{-1}(z_\nu) \in F(x_\nu)$，因此 $z \in \limsup_{x \to x_0} F(x)$。

对于 2），固定 $y \in F(x_0)$。由内半连续性可知，对于 $x_\nu \longrightarrow x_0$，存在一个序列 $F(x_\nu) \ni y_\nu$，使得 $y_\nu \longrightarrow y$。由 h 是一个同胚可知，$h(y_\nu) \longrightarrow h(y)$。由于 $dist_K(F(x_\nu)\ F(a)) \longrightarrow 0$，$h(y_\nu) \in h(F(x_\nu))$，且 $h(F(a)) \cup \{p\}$ 是紧致的，因此 $h(y) \in h(F(a)) \cup \{p\}$。由于$h\colon R \longrightarrow \mathbb{S}^n \backslash \{p\}$，因此 $h(y) \in h(F(a))$。同胚是双射，因此 $y \in F(a)$，证明完毕。□

定理 5.24. 定理 5.13、5.15 和 5.17 的结论对取闭值的可定义多值函数仍然成立，其中以 $dist_K$ 替代豪斯多夫度量。

证明. 利用命题 5.23，我们只需重复之前的证明。 □

6. 应用

下一部分将把先前得到的结果应用于某些可定义多值函数。定义和基本事实参见 [1]。本节还将给出一个关于最近点多值函数 m 的上原像闭性的命题。

设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭集，且设 $x \in \mathbb{R}^n$。我们定义到 x 的最近点集：

$$m(x) = \{y \in X \mid ||y - x|| = d(x, X)\}.$$

由于 X 是闭的，对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，$m(x)$ 都非空。此外，还有

$$m(x) = X \cap \mathbb{S}(x, d(x, X)),$$

因此，$m(x)$ 是紧致的，因为它是闭集与紧集的交集。

由此我们得以定义中轴，即一组相对于 X无法唯一实现距离的点。这是模式识别理论中的一个重要概念。

命题 6.1（[1] 命题 2.17）。设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 为一个闭可定义集。那么，多值函数

$$m : \mathbb{R}^n \ni x \longrightarrow m(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

具有可定义性且上半连续。

证明。注意:

$$\Gamma_m \ni (x, y) \Longleftrightarrow (y \in X) \wedge (\forall z \in X : \ ||x - y|| \leq ||x - z||)$$

这意味着 Γ_m 是一个可定义集，从而完成了对我们函数可定义性的证明。

令 $y \in \limsup_{x \to a} m(x)$。根据定义 $\exists\ x_n \to a$, $\exists\ m(x_n) \ni y_n \to y$。显然， $y \in X$, 该集合是闭集。我们有如下估计

$$||y - a|| \leq ||a - x_n|| + ||x_n - y|| \leq ||a - x_n|| + ||x_n - y_n|| + ||y_n - y|| =$$

$$= ||a - x_n|| + d(x_n, X) \ + ||y_n - y|| \leq ||a - x_n|| + ||a - x_n|| + d(a, X)$$

$+ ||y_n - y||$.对于固定的 $\epsilon > 0$，我们将找到 $N \in \mathbb{N}$，使得对于 $n > N$, $max\{||a - x_n||, ||y_n - y||\} \leq \frac{\epsilon}{3}$。因此,

$$||y - a|| \leq \epsilon + d(a, X)$$

因此最终得到 $y \in m(a)$。所以，我们得到包含关系

$$\limsup_{x \to a} m(x) \subset m(a).$$

取 $y \in m(a)$。若 $a \in X$，则 $a = y$，并取任意满足 $x_n \longrightarrow a$ 的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，我们有 $x_n \longrightarrow y$，因为 $m(x_n) = \{x_n\}$。若 $a \notin X$，则用线段连接点 a 和 y，并令 $\{x_n\}$ 为该线段上满足 $x_n \longrightarrow a$ 的点序列。注意，在这种情况下，由范数的严格凸性可知 $y \in m(x_n)$。。如果存在 $y \notin m(x_n)$，那么对于 $z \in m(x_n)$，我们将得到 $||y - a|| = d(a, X) \ \leq ||a - x_n|| + d(x_n, X)$ $< ||a - x_n|| + ||x_n - y|| = d(a, X)$，这会导出矛盾。因此，我们得到反向包含关系，最终得到等式

$$\limsup_{x \to a} m(x) = m(a),$$

至此命题的证明结束。 □

上述多值函数 m 称为最近点多值函数。 $m(x)$ 中的值是 X中距离 x 最近的点。

命题 6.2. 设 $X \subset \mathbb{R}^m$ 为闭集， $a \in \mathbb{R}^n$ 为不动点。那么集合 $m_*(m(a))$ 是闭集。

证明。取一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid m(a) \subset m(x)\}$，使得对于某个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 有 $x_n \longrightarrow x_0$。我们要证明 $m(a) \subset m(x_0)$。固定 $y \in m(a)$。我们有如下估计

$$||y - x_0|| \leq ||y - x_n|| + ||x_n - x_0|| = d(x_n, X) + ||x_n - x_0|| \leq$$

$$\leq d(x_0, X) + 2||x_n - x_0||$$

对于固定的 $\epsilon > 0$，我们将找到 $N > 0$，使得当 $n > N$时， $||x_n - x_0|| \leq \frac{\epsilon}{2}$。于是得到不等式 $||y - x_0|| \leq d(x_0, X) \ + \epsilon$，从而得到 $y \in m(x_0)$。□

定理 6.3. 设 $X \subset \mathbb{R}^m$ 是一个闭集，且 $a \in \mathbb{R}^m$。那么集合 $m^{\#}(m(a))$ 是闭集。

证明. 取一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset m^{\#}(m(a))$，使得 $x_n \longrightarrow x_0$ 对某个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 成立。这意味着 $m(a) \cap m(x_n) \neq \emptyset$。定义以下序列：

$$z_n = \min_l\{m(x_n) \cap m(a)\}, \text{ with respect to the lexicographic order.}$$

由于 $m(a)$ 是紧致的，因此存在 $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$，它是 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的一个收敛子序列；并且存在与之对应的 $\{x_n^*\}_{n=0}^{\infty}$，它是 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的一个子序列，使得 $w_n \in m(x_n^*)$。记 w 为 $\lim_{n\to\infty} w_n$。显然， $w \in m(a)$。我们将证明 $w \in m(x_0)$。固定 $\epsilon > 0$。取 $N > 0$，使得对于 $n > N$： $||w_n - w|| \leq \frac{\epsilon}{3}$, $||x_n^* - x_0|| \leq \frac{\epsilon}{3}$。对于 $n > N$，有以下不等式：

$$\begin{gathered}||w - x_0|| \leq ||w - w_n|| + ||x_n^* - w_n|| + ||x_n^* - x_0|| \leq \\ \leq ||w - w_n|| + d(x_n^*, X) + ||x_n^* - x_0|| \leq \\ \leq ||w - w_n|| + d(x_0, X) + ||x_n^* - x_0|| + ||x_n^* - x_0|| \leq \\ d(x_0, X) + \epsilon.\end{gathered}$$

由于 ϵ 是任意的，这意味着 $w \in m(x_0)$ 且 $m(x_0) \cap m(a) \neq \emptyset$。 □

例 6.4。注意，集合 $m^*(m(a))$ 和 $m^{-1}(m(a))$ 不一定是闭集。考虑以下例子。设 $X = \{1, 0\} \subset \mathbb{R}$ 和 $a = \frac{1}{4}$。对于一个序列 $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$，有 $x_n \longrightarrow \frac{1}{2}$，且 $m(x_n) = m(a)$，但 $m(\frac{1}{2}) \not\subset m(a)$。

对于固定的闭半代数集 $X \subset \mathbb{R}^n$ 和 $a \in \mathbb{R}^n$，根据定理 5.13，有

$$dist_H(m(x), m(a)) \geq Cd(x, \{y \in \mathbb{R}^n \mid m(a) \subset m(y)\})^{\alpha},\ x \in K$$

对于某些 C、$\alpha > 0$ 和 K，它们是 a 的紧邻域。
这意味着，对于某个常数 C， x 和 a 的最近点之间的距离，可以用 x 到满足以下条件的点的距离的某个幂从下方估计： $m(a)$ 是 x 的最近点之一。

类似地，对于固定的闭集 X，我们可以定义这样一个点集：其中给定点是 X 的最近点：

$$N(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \in m(x)\}.$$

注意，这是一个非空集，因为 $a \in X$。令 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset N(a)$ 为一个满足以下条件的序列：对于某个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，有 $x_n \longrightarrow x_0$。那么：

$$\begin{gathered}||x_0 - a|| \leq ||x_0 - x_n|| + ||x_n - a|| = ||x_0 - x_n|| + d(x_n, X) \leq \\ \leq ||x_0 - x_n|| + ||x_0 - x_n|| + d(x_0, X).\end{gathered}$$

对于固定的 $\epsilon > 0$，我们将找到 $N > 0$，使得当 $n > N$ $||x_0 - x_n|| \leq \frac{\epsilon}{2}$ 时，因此 $||a - x_0|| \leq \epsilon + d(x_0, X)$，这意味着 $x_0 \in N(a)$，即 $N(a)$ 是闭集。
命题 6.5（[1] 命题 2.2）。设 X 是一个闭集， $a \in X$ 是一个不动点。那么集合 $N_*(N(a))$ 是闭集。

证明。设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x \in X \mid N(a) \subset N(x)\}$ 是一个序列，使得 $x_n \longrightarrow x_0$对某个 x_0成立。由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，我们有 $x_0 \in X$。因此 $N(x_0)$ 定义良好。我们要证明 $N(a) \subset N(x_0)$。固定 $z \in N(a)$。

$$||z - x_0|| \leq ||z - x_n|| + ||x_n - x_0|| = d(z, X) + ||x_n - x_0||$$

对于固定的 $\epsilon > 0$，我们将找到 $N > 0$，使得对于 $n > N$ $||x_n - x_0|| \leq \epsilon$。我们得到 $||z - x_0|| \leq d(z, X) + \epsilon$，这意味着 $x_0 \in m(z)$。于是 $z \in N(x_0)$，从而得出所述结论。□

例 6.6。现在请注意， N 的弱原像通常不必是闭集。考虑以下集合 $X = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\frac{1}{2},1],\ y = -(x-1)^2\}$。取一个序列 $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X \backslash \{(1,0)\}$，使得 $(x_n,y_n) \longrightarrow (1,0)$。注意，对于每个 $n \geq 1$，都有 $N((x_n,y_n)) \cap N((0,0)) \neq \emptyset$，但 $N((0,0)) \cap N((1,0)) = \emptyset$。

注 6.7。一维情形下， N 的弱原像总是闭集。设 $X \subset \mathbb{R}$ 为闭集。取 $a \in X$ 以及一个趋于某个 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，使得 $N(a) \cap N(x_n) \neq \emptyset$。存在一个子序列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得对所有 $k \geq 1$都有 $x_{n_k} \leq a$；或者存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得对 $k \geq 1$有$x_{n_k} \geq a$。考虑第一种情形，并假设存在 k_0、 k_1 使得 $x_{n_{k_0}} < x_{n_{k_1}} < a$。取 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $t \in N(a)$且 $|x_{n_{k_0}} - t| = |a-t|$。注意到 $|x_{n_{k_1}} - t| < |a-t|$，这与 $t \in N(a)$这一事实矛盾。这意味着这样的序列必定是常数序列。对于第二个子序列的情形，我们用同样的方法论证。这意味着序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是常数序列，因此 $x_0 \in X$。

命题 6.8（[1] 命题 2.2）。设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭可定义集。那么多值函数

$$N : X \ni x \longrightarrow N(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

在非孤立点处可定义且外半连续。

证明。注意:

$$\Gamma_N \ni (x,y) \Longleftrightarrow x \in X \wedge \forall z \in X :\ ||x-y|| \leq ||y-z||$$

这意味着多值函数 N 是可定义的。取 $a \in X$，使得 a 不是 X中的孤立点。设 $y \in \limsup_{x \to a} N(x)$。根据定义， $\exists\ x_n \to a$，$\exists\ N(x_n) \ni y_n \to y$。我们要证明 a 是 y的最近点。注意，我们有如下估计

$$||a-y|| \leq ||a-x_n|| + ||x_n - y_n|| + ||y_n - y|| = ||a-x_n|| + d(y_n, X) + ||y_n - y|| \leq$$

$$\leq ||a-x_n|| + ||y_n - y|| + d(y, X) + ||y_n - y||$$

对于固定的 $\epsilon > 0$，我们将找到 $N > 0$，使得 $n > N \max\{||a-x_n||, ||y_n - y||\} \leq \frac{\epsilon}{3}$。于是得到如下估计

$$||a-y|| \leq d(y,X) + \epsilon,$$

这意味着 $y \in N(a)$，由此得到外半连续性。 □

对于固定的闭半代数集 $X \subset \mathbb{R}^n$，且 $a \in \mathbb{R}^n$ 不是孤立的，命题 5.23 给出了某些 C、 $\alpha > 0$ 下的不等式

$$dist_K(N(x), N(a)) \geq C d(x, \{y \in X \mid N(a) \subset N(y)\})^{\alpha}, x \in K$$

其中 K 是 X 中的一个紧邻域 a。

我们得到，对于某个常数 C，分别以 x 和 a 为最近点的两个集合之间的距离，可由 x 到 X 中那些与 a 的最近点相同的点所构成的集合的距离的某个幂从下方估计。

References

[1] L. Birbrair, M.P Denkowski, 中轴与奇点，J. Geom. Anal. 第27卷第3期（2017年），2339–2380。[2] M. Coste，《O-极小几何导论》，比萨大学数学系，数学博士项目，国际出版与印刷机构，比萨，2000年。[3] Z. Denkowska, M.P. Denkowski，通往可定义集的漫长曲折之路，Journal of Singularities 第13卷（2015年），57–86。

[4] ` 2007

[5] ´

Z. Denkowska, J. Stasica，《波兰式次解析集合》，Hermann，巴黎；M.P. Denkowski, P. Pełszynska，关于可定义多值函数与Łojasiewicz 不等式，J. Math. Anal. Appl. 第456卷第2期（2017年），1101–1122。[6] L. Van Den Dries, C. Miller，几何范畴与O-极小结构，Duke Math. Journ. 84卷第2期（1995年），497–540；（2001年修订版：https://people.math.osu.edu/miller.1987/newg.pdf）[7] J. H. Lee, T. Pham，半代数集值映射的开性、H¨older 度量正则性与H¨older 连续性，SIAM J. Optimiz 第32卷第1期（2022年），56–74；[8] A. Valette，奇点处的Łojasiewicz 不等式，P. Am. Math. Soc. 第147卷（2019年），1109–1117。

Jagiellonian University, Faculty of Mathematics and Computer Science, Łojasiewicza6, 30-348 Kraków, Poland*Email address*: michal.kosiba@student.uj.edu.pl