arXiv:2303.06096v1 [math.SP] 10 Mar 2023

$\overline{\partial}$算子的隧穿

约翰内斯·舍斯特兰德和马丁·福格尔

摘要。我们研究定义在 S^1+iS^1 和 $S^1+i\mathbb{R}$上的二维半经典微分算子 $P=2\mathrm{e}^{-\phi/h}\circ hD_{\overline{z}}\circ \mathrm{e}^{\phi/h}$ 的小奇异值，其中ϕ 分别由$\sin y$ 和 $y^3/3$给出。该模型的关键特点是，我们可以精确指出相空间中泊松括号$\{p,\overline{p}\}=0$的位置，其中 p 是 P的半经典符号。

我们通过研究相关Witten复形的隧穿效应，对 P 的指数级小奇异值给出精确的渐近描述。我们利用这些渐近结果，确定 P的指数级小奇异值的Weyl定律。

目录

1. 引言 1 2. 主要结果 3 3. 先验预解估计与缩放 7 4. Witten 拉普拉斯算子 10 5. 奇异值计数 19 参考文献 23

1. 引言

背景。 众所周知，线性非自伴算子在复希尔伯特空间上的预解算子范数，即使远离算子的谱，也可能很大。因此，算子的谱在小扰动下可能不稳定。这种现象也称为伪谱现象，最初被视为一种缺陷，因为它可能导致数值分析中的计算误差 [21, 23, 7]。不过，它也是一些新颖而有趣的结果的源头。 $P-z, z\in\mathbb{C}$ 的预解算子范数较大，与近似解的存在有关，而这些近似解对应于特征向量问题（$P-z$）$u=0$；这又等价于 $P-z$ 存在小奇异值。

本文研究了一个非自伴的半经典微分算子 P_h的小奇异值，该算子在 X 上，其 Fredholm 指标为 0；这里的 X 可以是实数集 $\mathbb{R}^d$ ，也可以是一个 d维光滑紧流形。其半经典参数为 $h>0$，符号为 p。对于 P_h 的非自伴性，一个自然的条件是 $\{p,\overline{p}\}\neq 0$ 在T^*X上成立——这里 $\{\cdot,\cdot\}$ 表示泊松括号——因为这是$\frac{i}{h}[P_h,P_h^*]$的主符号。在一系列工作[2, 3, 4, 25, 5]中已经证明，若存在一点$\rho_+\in T^*X\cap p^{-1}(z)$，以及 $z\in\mathbb{C}$，使得 $\frac{1}{i}\{p,\overline{p}\}(\rho_+)>0$，那么存在一个光滑

日期：2023年3月13日。关键词和短语。

谱理论。

函数 e_+ 定义在 X上，其微局部化于 ρ_+，使得

$$(P-z)e_+ = O(h^\infty). \tag{1.1}$$

存在这样的拟模，意味着 $(P-z)$ 存在一个大小为 $O(h^\infty)$ 的小奇异值。此外，当 p 是解析的时，我们可以用 $O(\mathrm{e}^{-1/Ch})$ 替换上述误差估计。

另一方面，在 $p^{-1}(z)$ 上 $\frac{1}{i}\{p,\overline{p}\} < 0$ 的区域附近，我们有微局部性质 $|P-z| \geqslant h/C$，其中设 $|P-z| := ((P-z)^*(P-z))^{1/2}$。这表明，$|P-z|$的特征函数，也就是 $P-z$ 的奇异向量，应当微局部化在 $p^{-1}(z)$ 中满足$\frac{1}{i}\{p,\overline{p}\} > 0$ 的区域附近。对于 $(P-z)^*$ 的奇异向量，也有类似的观察结果，只是在泊松括号前多了一个 (-1) 因子。

在维数为 $d=1$时，当 $p^{-1}(z)$ 是紧算子且 $\{p,\overline{p}\} \neq 0$ on $p^{-1}(z)$ 时，我们可以证明，存在 $|p^{-1}(z)| =: (P-z)$ 和 $(P-z)^*$ 有 n_0 个奇异值，其大小为 $O(h^\infty)$（当 p 是解析的时，则为 $O(\mathrm{e}^{-1/Ch})$）。然而，第 n_0+1 个奇异值通常为 $\sqrt{h}$。

在高维情形下，情况更为复杂。我们将重点讨论以下情形：$\{p,\overline{p}\} \neq 0$并且在 p^{-1} 中由区域分隔（z）其中 $\{p,\overline{p}\} = 0$但是$\{p,\{p,\overline{p}\}\} \neq 0$。关于更退化情形下的相关结果，请参见 [18, 19, 20]。

本文旨在研究某些二维模型算子 P_h 的小奇异值数量，这些算子的符号 p 满足 $\{p,\overline{p}\} \neq 0$ 或$\{p,\{p,\overline{p}\}\} \neq 0$。

模型。我们将在复一维流形 $X+iY$ 上工作，其中 $X = S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$，且 Y 等于 $\mathbf{R}$ 或 S^1。我们经常将 $X+iY$ 与实二维流形 $X\times Y$ 等同起来，记作 $z = x+iy$, $x\in X$, $y\in Y$。

设 $h\in]0,h_0]$, $h_0>0$，且令 $\phi(z)$ 为 $X+iY$ 上的实值光滑函数，并考虑算子

$$P = 2\,\mathrm{e}^{-\phi/h}\circ hD_{\overline{z}}\circ \mathrm{e}^{\phi/h} = 2(hD_{\overline{z}} + (D_{\overline{z}}\phi)) = hD_x + h\partial_y + \partial_y\phi, \tag{1.2}$$

其中 $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ 且 $D_{\overline{z}} = \frac{1}{i}\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(D_x + iD_y)$。稍微滥用一下记号，我们写作 $\phi(z) = \phi(y)$，其中 $z = x+iy \in X+iY$，并选取以下两个模型情形

$$\phi(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}y^3, & \text{when } Y=\mathbb{R}, \\ \sin y, & \text{when } Y = S^1. \end{cases} \tag{1.3}$$

我们在 P 上赋予定义域

$$\mathcal{D}(P) = \begin{cases} \{u\in L^2(S^1_x\times Y);\ (1+y^2)u,\ hD_xu,\ hD_yu\in L^2(S^1_x\times Y)\}, & Y=\mathbb{R}_y, \\ H^1_h(S^1_x\times Y) = \{u\in L^2(S^1_x\times Y);\ hD_xu,\ hD_yu\in L^2(S^1_x\times Y)\}, & Y = S^1_y. \end{cases} \tag{1.4}$$

算子 P 的符号为

$$p(x,y;\xi,\eta) := \xi + i\eta + \partial_y\varphi =: p_\xi(y,\eta), \tag{1.5}$$

定义在 $S^1_x\times Y$ ×实数集$_\xi$ ×实数集$_\eta$ 上。相应地，P 具有正交直和分解

$$P = \bigoplus_{\xi\in h\mathbb{Z}} P_\xi, \quad P_\xi = \xi + h\partial_y + \partial_y\varphi \text{ on } Y, \quad h\in]0,h_0]. \tag{1.6}$$

P 的特征集为

$$p^{-1}(0)=\{(x,y;\xi,\eta)\in S^1\times Y\times\mathbb{R}_\xi\times\mathbb{R}_\eta;\ \eta=0,\ \partial_y\varphi=-\xi\}. \tag{1.7}$$

当 $Y=\mathbb{R}$ 时，我们在 $p^{-1}(0)$ 上有 $\xi\leqslant 0$；而当 $Y=S^1$ 时，我们有 $\xi\in[-1,1]$。我们分别排除极限值 $\xi=0$ 和 $\xi\in\{-1,1\}$，并令

$$\Sigma=\{(x,y;\xi,\eta)\in p^{-1}(0);\ \xi<0 \text{ when } Y=\mathbb{R},\ -1<\xi<1 \text{ when } Y=S^1\}. \tag{1.8}$$

回顾一下，函数 $f(x,y,\xi,\eta)$ 的哈密顿向量场为

$$H_f=\partial_\xi f\,\partial_x+\partial_\eta f\,\partial_y-\partial_x f\,\partial_\xi-\partial_y f\,\partial_\eta.$$

于是得到

$$\frac{1}{2i}\{p,\overline{p}\}=\frac{1}{2i}H_p(\overline{p})=\frac{1}{2i}\left(\partial_\xi p\,\partial_x\overline{p}+\partial_\eta p\,\partial_y\overline{p}-\partial_x p\,\partial_\xi\overline{p}-\partial_y p\,\partial_\eta\overline{p}\right)=\partial_y^2\phi \tag{1.9}$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}$ 表示泊松括号。我们将 $\Sigma=\Sigma_+\cup\Sigma_-$ 分解为，其中

$$\begin{aligned}\Sigma_\pm=\{(x,y;\xi,\eta)\in p^{-1}(0);\ y=y_\pm(\xi),\ \xi\in]-\infty,0[\text{ when } Y=\mathbb{R},\\ \xi\in]-1,1[\text{ when } Y=S^1\}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 $y_\pm(\xi)$ 是方程 $\partial_y\phi(y_\pm(\xi))=-\xi$ 的解，且 $\pm\partial_y^2\phi(y_\pm(\xi))>0$。注意到 $\frac{1}{2i}\{p_\xi,\overline{p_\xi}\}=\partial_y^2\phi$，并且 $\{p,\overline{p}\}(x,y;\,\xi,\eta)=\{p_\xi,\overline{p_\xi}\}(y,\eta)$，因此

$$\Sigma_\pm=\{(x,y;\xi,\eta)\in p^{-1}(0);\ \pm\frac{1}{i}\{p,\overline{p}\}(x,y;\xi,\eta)>0\}. \tag{1.11}$$

$\Sigma_\pm$ 子流形是辛的。事实上，令 $\sigma=d\xi\wedge dx+d\eta\wedge dy$ 为 $T^*X\times Y$上的辛形式。那么，

$$\sigma|_{\Sigma_\pm}\simeq d\xi\wedge dx, \tag{1.12}$$

因为 $\eta=0$ 在 $\Sigma_\pm$上。

2. 主要结果

我们关注 P 的小奇异值，它们是 $\ll h^{2/3}$。回顾一下，P的奇异谱定义为 P^*P 的奇异谱的平方根；P^*P 是一个正本质自伴算子，并赋予其自然定义域。事实上，当 $Y=S^1$时，根据 Rellich定理，我们知道包含映射 $H_h^2(S^1\times S^1)\hookrightarrow L^2(S^1\times S^1)$是紧的，这意味着 P^*P具有紧预解式，因此 P^*P的谱是纯离散的，且 $\subset[0,\infty[$。当 $Y=\mathbb{R}$ 时，我们将通过一种不那么直接的论证看到，谱 P^*P包含于 $[0,\infty[$，并且在 0 之外是离散的。P 的奇异值 随后定义为 P^*P的特征值的平方根。

我们将定义在 $X\times Y$ 上的函数 $u(x,y)$ 的部分傅里叶变换定义为

$$\mathcal{F}u(\xi,y)=\widehat{u}(\xi,y)=\int_X e^{-ix\xi/h}u(x,y)dx,\ \xi\in\widehat{X}=h\mathbb{Z}.$$

那么，当 X 和 Y 配备勒贝格测度，而 $X=h\mathbb{Z}$ 配备 $1/(2\pi)$ 乘以 $h\mathbb{Z}$ 上的计数测度时，$\mathcal{F}$：$L^2(X\times Y)\to L^2(\widehat{X}\times Y)$ 是酉算子。

应用 $\mathcal{F}$ 后，方程 $Pu=v$变为

$$P_\xi\widehat{u}(\xi,y)=\widehat{v}(\xi,y),\ \text{where } P_\xi=h\partial_y+\xi+\partial_y\phi,\ \xi\in\widehat{X},\ y\in Y,\quad h\in]0,h_0], \tag{2.1}$$

于是我们推出（1.6）。我们赋予算子 P_ξ 其自然定义域，即半经典索伯列夫空间

$$\mathcal{D}(P_\xi) = \{u \in L^2(\mathbb{R});\, (1+y^4)^{1/2}u,\, hD_y u \in L^2(\mathbb{R})\} \tag{2.2}$$

当 Y =实数集，且

$$\mathcal{D}(P_\xi) = H^1_h(S^1) = \{u \in L^2(S^1);\, hD_y u \in L^2(S^1)\},$$

当 $Y = S^1$。关于半经典伪微分算子的简要回顾，见第 3.1 节下文。事实上，P_ξ 是其自然类别中的一个椭圆伪微分算子，由此可得 $P_\xi :\ \mathcal{D}(P_\xi) \to L^2(Y)$ 是指标为 0的弗雷德雷姆算子（也可通过直接的常微分方程论证验证）。这一结论也适用于其伴随算子

$$P_\xi^* = -h\partial_y + \xi + \partial_y\phi, \tag{2.3}$$

其定义域与 P_ξ相同。

p_ξ 的主符号 P_ξ 为

$$p_\xi(y,\eta) = i\eta + \xi + \partial_y\phi(y), \quad (y,\eta) \in T^*Y, \tag{2.4}$$

另见（1.5），而 P_ξ^*的主符号等于 $\overline{p}_\xi$。这两个算子均为主类型，其意义是 $dp_\xi \neq 0$ 且 $d\overline{p}_\xi \neq 0$。它们的公共特征集 $p_\xi^{-1}(0)$，对于 P_ξ和 P_ξ^*在（2.1）、（2.3）中，定义为

$$\eta = 0,\ \ \xi + \partial_y\phi = 0. \tag{2.5}$$

2.1. **韦尔渐近**。 在第 3.2 节中，我们证明 $P_\xi^* P_\xi, \xi \in h\mathbb{Z}$, 的谱是纯离散的（在 $Y = S^1$ 和 Y =实数集两种情况下），且等于 $P_\xi P_\xi^*$的谱。我们将 P_ξ 的奇异值记为 $t_k(\xi),\ k \in \mathbb{N}$，按重数计数并按递增顺序排列，即

$$0 \leqslant t_0(\xi) \leqslant t_1(\xi) \leqslant \cdots \to +\infty. \tag{2.6}$$

在第 3.2节中，我们将为 ξ 建立预解式估计，使得 P_ξ 是椭圆的或接近椭圆的，并得到以下结果

定理2.1。 我们定义 ϕ 如下，见 (1.3)，并定义 $P_\xi = h\partial_y + \xi + \partial_y\phi$ 如下，见 (2.1)。

1. 令 Y = 实数集。对任意 $C_0 > 0$，存在常数 $C > 0$，使得若 $-C_0h^{2/3} \leqslant \xi$ 且 $h_0 > 0$ 足够小，则 $t_0(\xi)$ 的最小奇异值P_ξ 满足

$$t_0(P_\xi) \geqslant \frac{1}{C}(|\xi| + h^{2/3}).$$

2. 设 Y = 实数集$/2\pi\mathbb{Z}$。对于每个 $C_0 > 0$，存在一个常数 $C > 0$，使得如果$1 - C_0h^{2/3} \leqslant |\xi|$ 且 $h_0 > 0$ 足够小，那么 P_ξ 的最小奇异值 $t_0(\xi)$满足

$$t_0(P_\xi) \geqslant \frac{1}{C}(|\xi| + h^{2/3}).$$

从微局部的角度来看，上述结果基于这样一个事实：当$\xi > 0$ 当 Y =实数集或 $|\xi| > 1$ 当 $Y = S^1$时，P_ξ 的主符号在模意义下为 > 0，结果由适当版本的加尔丁不等式得出。我们将通过与适当的权函数共轭，把所得估计推广到区域 $|\xi| \leqslant O(h^{2/3})$（当 Y = 实数集时）以及 $||\xi| - 1| \leqslant O(h^{2/3})$。

注 2.2。 当 $\xi = 0$时，我们有 0 是 $p_\xi(T^*Y)$的边界上的一点，且 $\{p, \overline{p}\}(0,0) = \overline{0}$。符号 p_ξ 满足以下次椭圆性条件

$$H^2_{\operatorname{Im} p_\xi} \operatorname{Re} p_\xi(0,0) = \partial_y^3 \phi(0) \neq 0$$

其中 $H_{\operatorname{Im} p_\xi}$ 表示由 $\operatorname{Im} p_\xi$诱导的哈密顿向量场。根据 [5, 定理 **1**。4] 和 [22, 定理 **1**。1]（另见其中的参考文献），可得

$$\|P_0^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} = O(h^{-2/3}). \tag{2.7}$$

利用纽曼级数论证 (2.7) 可立即得出

$$\|P_\xi^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} = O(h^{-2/3}), \quad for\ |\xi| \ll h^{2/3}. \tag{2.8}$$

对于我们的模型算子，我们将采用更直接的论证。

接下来，我们研究“非椭圆”区域，也就是说，研究满足以下条件的区域: $-\xi \gg h^{2/3}$ 当 $Y =$为实数集 且 $h^{2/3} \ll 1 - |\xi|$ 当 $Y = S^1$时。在第 4 节中，我们将证明最小奇异值 $t_0(\xi)$ 的 P_ξ 具有以下形式 $|m_+(\xi)|$，其中$m_+(\xi)$具有如下渐近性质。

定理 *2.3*。定义 ϕ同 ***(1.3)***，并定义 $P_\xi = h\partial_y + \xi + \partial_y\phi$同 ***(2.1)***，其中 $h_0 > 0$充分小。对于 $\xi < 0$，当 $Y =$为实数集且 $\xi \in]-1, 1[$当 $Y = S^1$时，令 $y_+, y_- \in Y$为方程 $\partial_y\phi(y) = -\xi$的两个解，并标记使得 $\pm\partial_y^2\phi(y_\pm) > 0$。令 d 表示 Y上的 *Lithner-Agmon* 距离，其度量为 $(\xi + \partial_y\phi(y))^2 dy^2$，并定义作用

$$S_0 : \mathcal{D}(S_0) := \begin{cases}]-\infty, 0[, & Y = \mathbb{R}, \\ ]-1, 0[, & Y = S^1 \end{cases} \to\ ]0, +\infty[, \quad \xi \mapsto S_0(\xi) = d(y_+(\xi), y_-(\xi)).$$

那么，当 $Y = \mathbb{R}$ 时，以及当 $Y = S^1$ 时，最小奇异值 *of*P_ξ 均等于 $|m_+|$，其中对任意 $\varepsilon > 0$，此结论对在紧的、与 h 无关的子集 $]-\infty, 0[$ 中变化的 ξ 一致成立

$$\begin{aligned} m_+ =& h^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_+, 0)|}{4\pi} \right)^{1/4} \left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_-, 0)|}{4\pi} \right)^{1/4} + \mathcal{O}(h) \right) \\ & \times \begin{cases} e^{-S_0/h} + \mathcal{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h - 3S_0/h}), & when\ Y = \mathbb{R} \\ \left(e^{-\frac{1}{h} d_J(y_+, y_- - 2\pi)} - e^{-\frac{1}{h} d_J(y_+, y_-)} \right) + \mathcal{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h - 3S_0/h}), & when\ Y = S^1. \end{cases} \end{aligned}$$

在后一种情形下，我们将 y_+、y_- 分别视为 $]-\pi, 0[$ 和 $]0, \pi[$ 中的点，并令 d_J 表示 $J =]y_- - 2\pi, y_-[$ 上的 *Lithner-Agmon* 距离。

此外，对于任意 $C_0 > 0$，若 $-C_0 h^2 \geqslant \xi \geqslant -1/C_0$，或者当 $Y = \mathbb{R}$ 时 $-C_0 \geqslant \xi$，或者当 $Y = S^1$ 时 $C_0 h^{2/3} \leqslant 1 \pm \xi \leqslant 1/C_0$，则只要 $h_0 > 0$ 足够小

$$\begin{aligned} m_+ &= h^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_+, 0)|}{4\pi} \right)^{1/4} \left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_-, 0)|}{4\pi} \right)^{1/4} + \mathcal{O}\big(h|\xi|^{-5/4}\big) \right) e^{-S_0/h} \\ &= \frac{\sqrt{h}|\xi|^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \mathcal{O}(h|\xi|^{-3/2})\right) e^{-4|\xi|^{3/2}/3h}. \end{aligned}$$

这里指出，对于度量（$\xi + \partial_y\phi(y)$），d 上的 Lithner-Agmon 距离 Y 满足

$$d(y_\pm, y) = \pm(f(y) - f(y_\pm)), \quad y \in \operatorname{neigh}(y_\pm),$$

其中 $f(y,\xi) = y\xi + \phi(y)$。

另一方面， P_ξ 的第二小奇异值满足 $t_1(P_\xi) \geqslant h^{2/3}/C$ 对所有 $\xi \in$实数集，另见定理 2.1。更精确地说，

定理 2.4。 在定理*2.1*的假设下，当 ξ 在一个紧算子 h-无关子集 $]-\infty$中变化时， $0[$ 当 $Y =$实数集时，以及 $]-1,\ 1[$ 当 $Y = S^1$时，存在一个常数 $C > 0$ 使得对于 $h_0 > 0$ 足够小的 $t_1(P_\xi) \geqslant h^{1/2}/C$关于 ξ一致成立。

对于每个 $C_0 > 0$ ，如果 $C_0h^{2/3} \leqslant -\xi \leqslant 1/C_0$ 或 $-\xi \geqslant C_0$ 当 $Y =$ 实数集时，并且如果$C_0h^{2/3} \leqslant 1+\xi \leqslant 1/C_0$ 或 $C_0h^{2/3} \leqslant 1-\xi \leqslant 1/C_0$ 当 $Y = S^1$时，存在一个常数 $C > 0$ 使得对于 $h_0 > 0$ 足够小的 $t_1(P_\xi) \geqslant h^{1/2}|\xi|^{1/4}/C$。

由正交分解 (1.6) 可知， P的奇异值具有 $t_k(\xi)$、 $k \in$N、 $\xi \in h$Z 的形式，其中 $t_k(\xi)$表示 P_ξ的奇异值。根据定理 2.1、2.3 和 2.4，当 $Y =$ R 时， P在 $[\mathrm{e}^{-1/Ch}, h^{2/3}/C]$ 中的奇异值，以及当 $Y = S^1$时其在 $[0, h^{2/3}/C]$ 中的奇异值，对于充分大的 $C > 0$ 和足够小的 $h_0 > 0$ ，具有 $t_0(\xi) = |\mu_+(\xi)|$ 的形式，其中

$$\xi \in h\mathbb{Z} \text{ satisfies } \begin{cases} C_0h^{2/3} \leqslant -\xi \leqslant C_0, & Y = \mathbb{R}, \\ C_0h^{2/3} \leqslant 1 - |\xi|, & Y = S^1, \end{cases}$$

对于充分大的 $C_0 > 0$ 。

回顾 (1.10), (1.11)。定理 S_0 中定义的作用 2.3 可以看作如下映射的应用

$$S_0 : \Sigma_+ \to [0, +\infty[$$

因此，我们的问题是研究取值 $t_0(\xi)$的分布。这里，计数测度 $\sum_{\xi\in h\mathbb{Z}} \delta_\xi$ 自然出现，其在 $\frac{1}{h}d\xi$中的近似也随之出现。由于 x中的平移不变性，我们可以使用 $\frac{1}{2\pi h}dx \otimes d\xi$ 上的测度 $S^1 \times$ 实数集ξ，并且 $dx \otimes d\xi$ 可与 $\sigma|_{\Sigma_+}$ 上的辛体积元 Σ_+ 相对应，见 (1.11),(1.12)。按照第 5 节中的这一论证，我们得到

定理 2.5。 设 P 满足 (1.2)，设 Σ_+ 如 (1.11) 所述，并回顾 (1.12)。设 S_0 如定理 *2.3*所述。取 $C_0 > 0$ 充分大，并令

$$C_0h \leqslant \frac{\delta^{3/2}}{\log \delta^{-1}}, \quad \delta > 0.$$

那么，对于满足 $b \asymp 1$ 和 $a \asymp \delta^{3/2}$的 $0 < a < b$ ，

$$\left| \#\left(\mathrm{Spec}(P^*P) \cap [\mathrm{e}^{-b/h}, \mathrm{e}^{-a/h}]\right) - \frac{1}{2\pi h}\int_{S_0^{-1}([a,b])} d\sigma|_{\Sigma_+} \right| = \mathcal{O}(1)\frac{\log \delta^{-1}}{\sqrt{\delta}}.$$

2.2. 可能的推广。 我们将在余切空间 $X \times Y \times$实数集^2 的自然复化上进行研究，并且也用 p 表示 p 在该空间上的全纯延拓。于是， $\overline{p}$ 的全纯延拓由 $p^*(\rho) := \overline{p(\overline{\rho})}$ 给出。令 $\mathcal{P}$、 $\mathcal{P}^*$ 分别表示由 $p = 0$ 和 $p^* = 0$ 定义的复超曲面。

在 $\Sigma_\pm$ 中靠近某一点处， $\Sigma_\pm^{\mathbb{C}}$ of $\Sigma_\pm$ 的复化是由 $p(\rho) = p^*(\rho) = 0$ 给出的复流形。 $\Sigma_\pm^{\mathbb{C}}$ 是余维为 2、维数为 2 的复辛流形，在局部与 $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^*$ 重合。在局部，我们可以将 $\Sigma_\pm^{\mathbb{C}}$ 视为 $\mathcal{P}$ 中由 $p^* = 0$ 给出的复超曲面，也可以将其视为 $\mathcal{P}^*$ 中由 $p = 0$ 给出的复超曲面。

复向量场 H_p、 H_{p^*} 分别与 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}^*$ 相切，且它们在 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}^*$ 上的限制分别与 $\Sigma^{\mathbb{C}}_{\pm}$ 横截，因为

$$H_p p^* = -H_{p^*} p \neq 0.$$

如果 $\rho \in \Sigma^{\mathbb{C}}_+$ 接近 Σ_+，那么经过 ρ、位于 $\mathcal{P}$ 中的复 H_p 积分曲线会在点 $\kappa(\rho) \in \Sigma^{\mathbb{C}}_-$ 处与 $\Sigma^{\mathbb{C}}_-$相交，并且 $\kappa\colon\ \Sigma^{\mathbb{C}}_+ \to \Sigma^{\mathbb{C}}_-$ 是一个正则变换。该情形在小扰动下是稳定的。我们认为，本文的结果可以借助 κ 以及沿着连接 $\Sigma^{\mathbb{C}}_+$ 与 $\Sigma^{\mathbb{C}}_-$的 H_p 和 H_{p^*} 积分曲线的作用量积分来表述。此外，这或许是推广的恰当视角。

2.3. 记号。我们将频繁使用以下记号：写作 $a \ll b$时，意指对于某个充分大的常数 $C > 0$，有 $Ca \leqslant b$。记号$f = \mathcal{O}(h^\alpha)$， $\alpha \in$ 实数集，表示存在一个常数 $C > 0$ （与 h>0无关），使得 $|f| \leqslant Ch^\alpha$。若要强调常数 $C > 0$ 依赖于某个参数 k，则写作 C_k，或者用上述记号写作 $\mathcal{O}_k(N)$。若要强调 f 为正，则写作 $f = 1/\mathcal{O}$。 (1)中，我们意指存在一个常数 $C > 0$ ，使得 $0 \leqslant f \leqslant 1/C$。

致谢。感谢 M. Hitrik 和 M. Zworski 与我们进行富有启发性的讨论，并请读者参阅他们正在进行的相关工作[15]。M. Vogel 获得了法国国家研究署通过 ADYCT 项目（ANR-20-CE40-0017）提供的部分资助。

3. 先验预解估计与缩放

3.1. 半经典量子化。 我们首先回顾实数集 $\mathbb{R}^d$ 上半经典伪微分算子演算的一些基本概念和性质，其中$d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$。关于此处回顾的结果和概念，以及更深入的阅读，我们请读者参阅 [9, 6, 17, 26, 16]。

令 $h \in]0,1]$ 表示半经典参数。若存在常数 $C, N > 0$ 使得函数 $m \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d};]0,\infty[)$ 满足下述条件，则称其为阶函数，

$$m(\rho) \leqslant C(1 + |\rho - \mu|^2)^{N/2} m(\mu), \quad \text{for all } \rho, \mu \in \mathbb{R}^{2d}.$$

给定一个阶函数 m，我们将可能依赖于 h 的符号类 $S(m)$ 定义为复值函数 $p(\rho; h)$ 的类，其中定义在 $\mathbb{R}^{2d}_\rho \times]0,1]_h$ 上，满足对所有 $h \in]0,1]$，都有 $p(\cdot; h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$，且 p 满足以下导数界

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d} : \sup_{h\in]0,1]} \sup_{\rho\in\mathbb{R}^{2d}} m(\rho)^{-1} |\partial^\alpha p(\rho; h)| < +\infty.$$

符号 $p \in S(m)$ 生成一个线性算子 $\mathrm{Op}_h(p) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$，称为 h-*Weyl* 量子化，其定义由振荡积分给出

$$\begin{aligned} \mathrm{Op}^w_h(p)u(x) &:= p^w(x, hD_x; h)u(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^d} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}\xi(x-y)} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi; h\right) u(y) dy d\xi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

这里， $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上施瓦茨测试函数的空间，而 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 是其拓扑对偶，即缓增分布空间 $\mathbb{R}^d$。可以证明， p^w 是从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 到 $\to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 的连续算子，因此根据对偶性，它也是从 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 到 $\to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 的连续算子。

当阶函数 m 等于 1 时， p^w 是从 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 到 $\to L^2(\mathbb{R}^d)$ 的有界算子。此外，当 $m(\rho)$ 随 $|\rho| \to \infty$趋于 $\to 0$ 时， p^w : $L^2(\mathbb{R}^d)$ 到 $\to L^2(\mathbb{R}^d)$ 是紧算子。

3.2. **预解式估计**。 我们关注以下算子的小奇异值： P_ξ和 P_ξ^*，见（2.1）。更确切地说，我们将研究半经典微分算子 $P_\xi^* P_\xi$和 $P_\xi P_\xi^*$的谱底部；它们在集合（2.5）之外是椭圆的。这两个算子本质上是自伴的，其定义域为

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}(P_\xi P_\xi^*) = \mathcal{D}(P_\xi^* P_\xi)\\ &= \begin{cases}\{u \in L^2(Y); hD_y u,\ (hD_y)^2 u,\ (1+y^2)^2 u \in L^2(Y)\},\ \text{when } Y = \mathbb{R};\\ H^2(S^1) = \{u \in L^2(S^1); hD_y u,\ (hD_y)^2 u \in L^2(S^1)\},\ \text{when } Y = S^1.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.2}$$

注意， $P_\xi^* P_\xi$和 $P_\xi P_\xi^*$具有纯离散谱 $\subset [0, +\infty[$，并且我们知道（例如参见[8]），谱 $\sigma(P_\xi^* P_\xi)$和 $\sigma(P_\xi P_\xi^*)$除0以外重合。特别地，当 P_ξ 和P_ξ^* 均为单射时，这两个谱完全重合。分别将 $P_\xi^* P_\xi$和 $P_\xi P_\xi^*$的特征值记为 $t_j^2(P_\xi)$和 $t_j^2(P_\xi^*)$，并按递增顺序排列，其中 $t_j(P_\xi) \geqslant 0$， $t_j(P_\xi^*) \geqslant 0$。按照定义， P_ξ^*和 P_ξ的奇异值分别等于 $t_j(P_\xi)$和 $t_j(P_\xi^*)$。如上所述，非零奇异值彼此重合。

和 P_ξ和 P_ξ^*的单射性。 我们先讨论 $Y = \mathbb{R}$ 的情形。若 $0 \neq u \in \mathcal{N}(P_\xi)$，则得到 $P_\xi u(y) = 0$，即

$$u(y) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}(\xi y + \phi(y))}.$$

由（1.3），当 L^2（$\mathbb{R}$）时，该函数不可能属于 $C \neq 0$。因此， $\mathcal{N}$（P_ξ） $= 0$ 在此情形下成立。

接下来讨论情形 $Y = S^1$。在这种情况下，一个元素 $u \in \mathcal{N}(P_\xi)$ 仍具有 $u(y) = C\exp\{-\frac{1}{h}(\xi y + \phi(y))\}$ 的形式，并且必须是 2π-周期的。现在，根据（1.3）， $\varphi(y) = \sin y$ 是 2π-周期的；又由于 ξ 是实数， 2π-周期性意味着当 $\xi \neq 0$ 时 $C = 0$。因此，在这种情况下，当 $\xi \neq 0$ 时，$\mathcal{N}(P_\xi) = 0$，且 $\mathcal{N}(P_0) = \mathbb{C} \cdot \exp\{-\frac{1}{h}\phi(y)\}$。

类似地，当 $Y = \mathbb{R}$ 时，对所有 $\xi \in \mathbb{R}$， P_ξ^*都是单射的；当 $Y = S^1$ 时，对所有 $\mathcal{N}(P_0^*) = \mathbb{C} \cdot \exp\{\frac{1}{h}\phi(y)\}$，后者情形下亦然。

由于核 $\mathcal{N}(P_\xi^* P_\xi) = \mathcal{N}(P_\xi)$ 且 $\mathcal{N}(P_\xi P_\xi^*) = \mathcal{N}(P_\xi^*)$，我们得出，对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，谱 $\mathrm{Spec}(P_\xi^* P_\xi)$ 和 $\mathrm{Spec}(P_\xi P_\xi^*)$ 相同。因此，对所有 $\xi \in \mathbb{R}$， P_ξ 和 P_ξ^* 的奇异值相同。

接下来我们证明以下预解算子估计。

命题 3.1。 令 P_ξ 按 (2.1)定义。

1. 当 $Y =$实数集 且 $\phi = y^3/3$ 时。于是，对于任意固定的 $C_0 > 0$

$$\|P_\xi^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} = O(h^{-2/3}), \quad |\xi| \leqslant C_0 h^{2/3}, \tag{3.3}$$

and

$$\|P_\xi^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} = O(|\xi|^{-1}), \quad C_0 h^{2/3} \leqslant \xi. \tag{3.4}$$

2. 当 $Y =$ 实数集$/2\pi\mathbb{Z}$ 且 $\phi =$ 正弦 y 时。因此，对任意固定的 $C_0 > 0$

$$\|P_\xi^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} = O(h^{-2/3}), \quad ||\xi| - 1| \leqslant C_0 h^{2/3}, \tag{3.5}$$

and

$$\|P_\xi^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})} = O(|\xi|^{-1}), \quad 1 + C_0 h^{2/3} \leqslant |\xi|. \tag{3.6}$$

在转而证明该命题之前，我们先陈述一个直接推论。事实上，由于 P_ξ 的奇异值的平方（见（2.6））是自伴算子 $P_\xi^* P_\xi$ 的特征值，谱定理和命题3.1便推出定理 2.1。

位置的证明 *3.1.* 我们只考虑 $Y =$ 实数集 且 $\phi(y) = y^3/3$的情形，因为另一种情形类似。

1. 设 ψ 是实数值 C^1 函数，定义在实数集 R 上，并且 ψ 和 $\partial_y\psi$ 有界，考虑

$$\mathrm{e}^{-\psi/h} P_\xi \mathrm{e}^{\psi/h} = h\partial_y + \xi + \partial_y\phi + \partial_y\psi.$$

通过分部积分可得，对所有 $u \in \mathcal{D}(P_\xi)$，参见（2.2），

$$\mathrm{Re}\ \left(\mathrm{e}^{-\psi/h} P_\xi \mathrm{e}^{\psi/h} u|u\right) = ((\xi + \partial_y\phi + \partial_y\psi)u|u) \geqslant (\xi + \text{下确界}_{y\in\mathbb{R}}(\partial_y\phi + \partial_y\psi))\|u\|^2. \tag{3.7}$$

假设

$$\xi + \inf_{y\in\mathbb{R}}(\partial_y\phi + \partial_y\psi) > 0. \tag{3.8}$$

那么，将（3.7）左边的项从上方估计为 $\|\mathrm{e}^{-\psi/h} P_\xi \mathrm{e}^{\psi/h} u\|\|u\|$，可得

$$(\xi + \inf_{y\in\mathbb{R}}(\partial_y\phi + \partial_y\psi))\|u\| \leqslant \|\mathrm{e}^{-\psi/h} P_\xi \mathrm{e}^{\psi/h} u\|,$$

因此

$$\|\mathrm{e}^{-\psi/h} P_\xi^{-1} \mathrm{e}^{\psi/h}\| \leqslant (\xi + \inf_{y\in\mathbb{R}}(\partial_y\phi + \partial_y\psi))^{-1}. \tag{3.9}$$

令 $P_\xi^{-1} = \mathrm{e}^{\psi/h}(\mathrm{e}^{-\psi/h} P_\xi^{-1} \mathrm{e}^{\psi/h})\mathrm{e}^{-\psi/h}$，（3.9）意味着

$$\|P_\xi^{-1}\| \leqslant \mathrm{e}^{\sup_y \psi/h}(\xi + \inf_{y\in\mathbb{R}}(\partial_y\phi + \partial_y\psi))^{-1}\mathrm{e}^{-\inf_y \psi/h}.$$

因此，

$$\|P_\xi^{-1}\| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{h}(\sup_y \psi - \inf_y \psi)}}{\xi + \inf_{y\in\mathbb{R}}(\partial_y\phi + \partial_y\psi)}. \tag{3.10}$$

2. 接下来我们选取 ψ。令 $\alpha > 0$，并取

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & \text{for } y \leqslant -\sqrt{\alpha}, \\ \alpha y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{3}\alpha^{3/2}, & \text{for } -\sqrt{\alpha} \leqslant y \leqslant \sqrt{\alpha}, \\ \frac{4}{3}\alpha^{3/2}, & \text{for } y \geqslant \sqrt{\alpha}. \end{cases} \tag{3.11}$$

于是 下确界$_y(\partial_y\phi + \partial_y\psi) = \alpha$，上确界$_y\,\psi -$ 下确界$_y\,\psi = \frac{4}{3}\alpha^{3/2}$ 由（3.10）可得

$$\|P_\xi^{-1}\| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\frac{4}{3h}\alpha^{3/2}}}{\xi + \alpha}, \quad \text{when } \alpha > -\xi. \tag{3.12}$$

3. 接下来，我们来寻找一个合适的 α，当 $\xi \geqslant 0$时。对（3.12）右侧关于 α 求导，我们看到当$\alpha + \xi$时，它有一个临界点。$\alpha^{1/2} = h/2$该方程有一个唯一解，对应于$]0$的 $+\infty[\ni \alpha \mapsto$（$\xi + \alpha$）$^{-1}\mathrm{e}^{\frac{4}{3h}\alpha^{3/2}}$的最小值点。定义

$$f(\alpha, \xi) := \min(2\xi\alpha^{1/2}, 2\alpha^{3/2}). \tag{3.13}$$

注意， $f(\cdot,\xi)$ 是一个递增函数，并且 $f(\alpha,\xi) \leqslant (\alpha+\xi)\alpha^{1/2}$，等号当且仅当 $\alpha=\xi$ 时成立。我们求解简化后的方程 $f(\alpha,\xi)=h/2$，得到

$$\alpha = \begin{cases} \left(\frac{h}{4\xi}\right)^2 \leqslant \xi & \text{when } \xi \geqslant \left(\frac{h}{4}\right)^{2/3} \\ \left(\frac{h}{4}\right)^{2/3} \geqslant \xi, & \text{when } \xi \leqslant \left(\frac{h}{4}\right)^{2/3}. \end{cases} \tag{3.14}$$

分别在两种情况下取 $\xi+\alpha \geqslant \xi$、$\xi+\alpha \geqslant \alpha$，我们得到

$$\|P_\xi^{-1}\| \leqslant \begin{cases} \frac{1}{\xi}\mathrm{e}^{\frac{h^2}{3\cdot 4^2\xi^3}} = \frac{O(1)}{\xi}, & \text{when } \xi \geqslant \left(\frac{h}{4}\right)^{2/3}, \\ \frac{1}{(h/4)^{2/3}}\mathrm{e}^{\frac{4}{3h}(h/4)} = \frac{O(1)}{\xi+h^{2/3}}, & \text{when } \xi \leqslant \left(\frac{h}{4}\right)^{2/3}. \end{cases} \tag{3.15}$$

4. 接下来，当 $-Ch^{2/3} \leqslant \xi < 0$ 时，我们寻找 α 的最优选择。为简化方程 $(\alpha+\xi)\alpha^{1/2}=h/2$，我们用 $g(\alpha,\xi)=h/2$ 对其进行近似，其中

$$g(\alpha,\xi) = \begin{cases} (\alpha+\xi)(-2\xi)^{1/2}, & \text{when } -\xi \leqslant \alpha \leqslant -2\xi, \\ \alpha^{3/2}/2, & \text{when } -2\xi \leqslant \alpha. \end{cases} \tag{3.16}$$

注意，$(\alpha+\xi)\alpha^{1/2}$ 和 $g(\alpha,\xi)$ 都是 $\alpha \in [-\xi,+\infty[$ 的递增连续函数，并且在 $\alpha=-2\xi$ 处相等。方程 $g(\alpha,\xi)=h/2$ 的解为

$$\alpha = \begin{cases} -\xi + 2^{-3/2}h(-\xi)^{-1/2}, & \text{when } -\xi \geqslant h^{2/3}/2, \\ h^{2/3}, & \text{when } -\xi \leqslant h^{2/3}/2. \end{cases}$$

取此值 α 由（3.12）可得

$$\|P_\xi^{-1}\| \leqslant \frac{2^{3/2}(-\xi)^{1/2}}{h}\mathrm{e}^{\frac{4}{3h}(-\xi+2^{-3/2}h(-\xi)^{-1/2})^{3/2}} = O(1)(-\xi)^{-1}, \tag{3.17}$$

当 $-\xi \geqslant h^{2/3}/2$ 时。这里我们用到了 $h(-\xi)^{-3/2}=O(1)$。

当 $-\xi \leqslant h^{2/3}/2$ 我们有 $\alpha=h^{2/3}$ 且（3.12）给出

$$\|P_\xi^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\xi+h^{2/3}}\mathrm{e}^{\frac{4}{3h}h} = 2\mathrm{e}^{4/3}h^{-2/3}, \quad \text{when } 0 < -\xi \leqslant \frac{h^{2/3}}{2}. \tag{3.18}$$

至此，命题3.1第一部分的证明完成。 □

4. Witten Laplacians

我们关注 P_ξ 和 P_ξ^* 的小奇异值，当

$$\begin{cases} \xi \ll -h^{2/3}, \\ |\xi|-1 \ll -h^{2/3} \end{cases} \quad \text{for} \quad \begin{cases} Y=\mathbb{R}, \\ Y=S^1, \end{cases} \quad \text{respectively.} \tag{4.1}$$

如前所述，这相当于分别研究 $P_\xi^*P_\xi$ 和 $P_\xi P_\xi^*$ 的小特征值。

令

$$f(y,\xi) = y\xi + \phi(y), \tag{4.2}$$

其中参数 ξ 通常会从记号中省略，我们可以将（2.1）、（2.3）写成

$$P_\xi = h\partial_y + \partial_y f, \quad P_\xi^* = -h\partial_y + \partial_y f. \tag{4.3}$$

这里我们必须牢记，$f(\cdot,\xi)$在实数集$\mathbb{R}$上定义良好，但通常在S^1上并非如此，因为 $f(y+2\pi,\xi)=f(y)+2\pi\xi$，但 $\partial_y f$ 在所有情况下都在 Y 上定义良好。

由（4.3）可知， $P_\xi^* P_\xi$和 $P_\xi P_\xi^*$是半经典薛定谔算子

$$\begin{aligned} Q_+ &:= P_\xi^* P_\xi = -h^2\partial_y^2 + (\partial_y f)^2 - h\partial_y^2 f, \\ Q_- &:= P_\xi P_\xi^* = -h^2\partial_y^2 + (\partial_y f)^2 + h\partial_y^2 f. \end{aligned} \tag{4.4}$$

势的首项为

$$V_0(y,\xi) = (\partial_y f)^2 \geqslant 0. \tag{4.5}$$

势 V_0恰在 f的临界点 $\partial_y f(y,\ \xi) = 0$处消失，即 $\partial_y\phi(y) = -\xi$。在假设 (4.1成立时，恰有两个临界点$y_+,\ y_- \in Y$。当 $Y = \mathbb{R}$时，它们为

$$y_\pm = \pm\sqrt{-\xi}, \tag{4.6}$$

当 $Y = S^1$ 时，则为

$$\cos(y_\pm) = -\xi. \tag{4.7}$$

$\pm$ 记号规定为

$$\pm\,\partial_y^2 f(y_\pm)(y_\pm) = \mp\sin(y_\pm) > 0. \tag{4.8}$$

在两种情况下，我们都有 $\pm\partial_y^2 f(y_\pm) > 0$。因此， f是一个（当 $Y = S^1$ 时为多值的）莫尔斯函数，其临界集为 $\{y_+, y_-\}$，在 y_+ 处有一个非退化局部极小值，在 $y = y_-$处有一个非退化局部极大值。我们注意到，当 $\xi \to 0$ （在 $Y = \mathbb{R}$ 的情况下）以及当 $\xi \to \pm 1$ （在 $Y = S^1$的情况下）时，会出现退化现象。类似的退化情形已通过 [10, 1, 24], 中的尺度论证进行了分析，下面我们将沿用这种方法。

回顾 Witten 复形的定义，

$$hd_f = e^{-f/h} hd \circ e^{f/h} = hd + df\wedge. \tag{4.9}$$

这里， $df = \partial_y f\, dy$是 f的微分，将其视为一个微分 1-形式； $dy \in T_y^* Y \simeq$实数集 $\subset \mathbb{C}$，而 $df\wedge$是逐点左外乘以 df的算子； $df\wedge(u) = (df) \wedge u$。对于 $\ell \in \mathbb{N}$，令 $C^\infty(Y;\ \wedge^\ell \mathbb{C})$表示 Y上的光滑 ℓ-形式空间。这里采用通常的约定： $C^\infty(Y;\wedge^0\mathbb{C}) \simeq C^\infty(Y)$。由于 Y的维数为 1，该空间除 $\ell = 0$、1 外均为平凡空间。因此， hd_f: $C^\infty(Y;\wedge^\ell\mathbb{C}) \to C^\infty(Y;\ \wedge^{\ell+1}\mathbb{C})$，非平凡的情形是 $\ell = 0$时： hd_f: $C^\infty(Y;\wedge^0\mathbb{C}) \to C^\infty(Y;\wedge^1\mathbb{C})$。

将一般的 1-形式写作 $u(y)dy$，我们得到一个识别 $C^\infty(Y;\wedge^1\mathbb{C}) \simeq C^\infty(Y)$，相应地， hd_f 可识别为标量算子

$$h\partial_y + \partial_y f = h\partial_y + \xi + \partial_y\phi = P_\xi. \tag{4.10}$$

将 Y 视为具有自然常值度量的黎曼流形，我们有

$$hd_f^* = hd^* + df\lrcorner : C^\infty(Y;\wedge^{\ell+1}\mathbb{C}) \to C^\infty(Y;\wedge^\ell\mathbb{C}). \tag{4.11}$$

这里， $d = \partial_y \otimes dy\wedge$, $d^* = -\partial_y \otimes dy\lrcorner$和 $dy\lrcorner$, $df\lrcorner$表示分别与 dy, $\partial_y f\, dy$内乘的算子；此处它们对应于切向量 ∂_y, $(\partial_y f)\ \partial_y$。

同样，唯一的非平凡情形是 $\ell = 0$ 和 hd_f^* 可识别为 $-h\partial_y + \partial_y f = P_\xi^*$的情形。

在黎曼流形的一般情形下，Witten 拉普拉斯算子定义为 Witten 复形的 Hodge 拉普拉斯算子，

$$\Box_f = hd_f^* hd_f + hd_f hd_f^*.$$

它将 ℓ-形式映射为 ℓ-形式，我们用 $\square_f^{(\ell)}$ 表示其在 ℓ-形式上的限制。在我们的情形中，它仅在次数 $\ell = 0$ 和 $\ell = 1$ 上非平凡，并且有

$$\square_f^{(0)} = hd_f^* hd_f, \quad \square_f^{(1)} = hd_f hd_f^*.$$

同样，我们可以将这两个算子分别视为标量算子，

$$\square_f^{(0)} \simeq P_\xi^* P_\xi =: Q_+, \quad \square_f^{(1)} \simeq P_\xi P_\xi^* =: Q_-. \tag{4.12}$$

我们的方法沿用了 [14] 中的方法，不过情形大为简化，并以 [12] 作为主要的技术工具。

4.1. 非退化情形。 首先，我们将 ξ 限制在一个紧的、与 h 无关的子集 $\mathfrak{K}$ 上，并要求

$$\xi \in \mathfrak{K} \Subset \begin{cases}]-\infty, 0[, & Y = \mathbb{R}, \\ ]-1, 1[, & Y = S^1. \end{cases} \tag{4.13}$$

回顾 [11]，在 y_+ 和 y_- 的固定邻域内，我们分别可以构造如下形式的拟模：

$$u_k^\pm(y;h) = h^{-1/4} a_k^\pm(y;h) e^{-\frac{1}{h} d(y_\pm, \cdot)}, \tag{4.14}$$

$$a_k^\pm(y;h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j}^\pm(y) h^j \text{ in } C^\infty(\operatorname{neigh}(y_\pm)), \ a_{k,0} \neq 0.$$

$$(P_\xi^* P_\xi - \mu_k^\pm) u_k^\pm = \mathcal{O}(h^\infty) e^{-\frac{1}{h} d(y_\pm, \cdot)}. \tag{4.15}$$

这里，$d(y_\pm, y)$表示从 $y_\pm$ 到 y的利特纳—阿格蒙（LA）距离，即关于LA度量 $V_0(y)dy^2$的距离，见（4.5）。对每个 k，我们有$\mu_k^\pm(h) \sim h(\mu_{k,0}^\pm + h\mu_{k,1}^\pm + \cdots)$，其中$\mu_{k,0}^\pm$是 k-次特征值（其中 $k = 0, 1, \ldots$），它是 $P_\xi^* P_\xi$ 在 $y_\pm$处的二次近似的特征值，定义如下：

$$(-\partial_y + \partial_y^2 f(y_\pm)(y - y_\pm))(\partial_y + \partial_y^2 f(y_\pm)(y - y_\pm)). \tag{4.16}$$

现在，我们来验证

$$d(y_\pm, y) = \pm(f(y) - f(y_\pm)), \quad y \in \operatorname{neigh}(y_\pm). \tag{4.17}$$

算子 $P_\xi^* P_\xi$是 $\geqslant 0$，且我们知道 $P_\xi^* P_\xi(e^{-(f-f(y_+))/h})$ 在 $= 0$ y_+附近，因此除去一个与 y无关的因子 $u_k^+(y;h)$ 等于 $e^{-(f-f(y_+))/h}$，由此得出 $\mu_0^+(h)$，其含义是渐近展开恒等地为零。

同样的讨论也适用于 $Q_- = P_\xi P_\xi^*$：在 y_+ 和 y_- 附近，我们可以构造如下形式的拟模

$$v_k^\pm(y;h) = h^{-1/4} b_k^\pm(y;h) e^{-\frac{1}{h} d(y_\pm, \cdot)}, \tag{4.18}$$

使得在 $y_\pm$的一个固定邻域内

$$(P_\xi P_\xi^* - \nu_k^\pm) v_k^\pm = \mathcal{O}(h^\infty) e^{-\frac{1}{h} d(y_\pm, \cdot)}. \tag{4.19}$$

对于每个 k，我们有 $\nu_k^\pm(h) \sim h(\nu_{k,0}^\pm + h\nu_{k,1}^\pm + \cdots)$，其中 $\nu_{k,0}^\pm$ 是 $P_\xi P_\xi^*$ 在 $y_\pm$处的二次近似的第 k个特征值，其表达式为

$$(\partial_y + \partial_y^2 f(y_\pm)(y - y_\pm))(-\partial_y + \partial_y^2 f(y_\pm)(y - y_\pm)). \tag{4.20}$$

我们知道，当 $P_\xi P_\xi^*(e^{(f-f(y_+))/h}) = 0$ 趋近于 y_- 时，因此，除去一个与 y 无关的因子 $v_k^-(y;h)$ 等于 $e^{(f-f(y_+))/h}$，由此我们得出 $\nu_0^-(h) = 0$，也就是说，渐近展开恒等于零。

现在回想一下（4.4）以及 $\pm\partial_y^2 f(y_\pm) > 0$。比较这两个表达式，并利用 $\mu_0^+(h) = 0$, $\nu_0^-(h) = 0$，我们推知存在某个常数 $C > 0$,

$$\nu_0^+(h) \geqslant h/C, \quad \mu_-^0(h) \geqslant h/C \tag{4.21}$$

根据标准论证（例如参见 [6, 定理 4.23]），我们知道，若 $C > 0$足够大，则当 $h > 0$ 足够小时， Q_+ 有唯一特征值 λ_+ ，属于$[0, h/C[$ ，该特征值是单重的，且满足 $\lambda_+(h) = \mathcal{O}(h^\infty)$。类似地， Q_- 有唯一特征值 $\lambda_-(h) \in [0, h/C[$ ，该特征值是单重的，且 $= \mathcal{O}(h^\infty)$。设 e_+、 e_- 为相应的归一化特征向量：$Q_\pm e_\pm = \lambda_\pm e_\pm$，并设 $F_\pm = \mathbf{C}e_\pm$ 表示相应的一维特征空间。由交织性质，

$$P_\xi Q_+ = Q_- P_\xi, \quad Q_+ P_\xi^* = P_\xi^* Q_-,$$

可知

$$P_\xi : F_+ \to F_-, \quad P_\xi^* : F_- \to F_+,$$

根据对偶性，

$$P_\xi : F_+^\perp \to F_-^\perp, \quad P_\xi^* : F_-^\perp \to F_+^\perp,$$

若 $\lambda_+ \neq 0$，则可知 $P_\xi e_+$ 是 Q_- 的特征向量，对应的特征值为 λ_+ ，因此 $\lambda_+ = \lambda_-$。类似地，若 $\lambda_- \neq 0$ ，则 $\lambda_+ = \lambda_-$ ；而当 λ_+ 和 λ_-都为零时，显然也如此。因此，无论哪种情况，均有 $\lambda_+ = \lambda_-$。

令 $\pi_\pm$: $L^2(Y) \to F_\pm$ 为正交投影。根据 [13, 第 2 节2]的结果，我们知道，按照 [13, 定义 2.21]中所解释的意义， $K_{\pi_\pm} = \widetilde{\mathcal{O}}(e^{-d(x,y)/h})$。为方便读者，我们在此回顾其含义：称算子核 $K_{\pi_\pm} = \widetilde{\mathcal{O}}(e^{-d(x,y)/h})$，是指对于任意 $x_0, y_0 \in Y, \varepsilon > 0$, 存在 $V \subset Y$的一个邻域、 x_0的一个邻域以及一个常数 $C > 0$ ，使得

$$\|\pi_\pm u\|_{H^1(V)} \leqslant C_\varepsilon \mathrm{e}^{-(d(x_0,y_0)-\varepsilon)/h} \|u\|_{L^2(U)},$$

对于所有 $h \in]0, 1]$，以及所有满足 supp $u \subset U$ 的 $u \in L^2(Y)$。

当 $Y = S^1$ 时，令 $\theta_\pm \in C_0^\infty(]y_\pm - \eta, y_\pm + \eta[$ 在 $[y_\pm - \eta/2, y_\pm + \eta/2]$ 上等于 1。这里 $\eta > 0$ 是一个小参数。设 $\chi_\pm = 1 - \theta_{\mp}$。
当 $Y =$实数集 (参见式（4.6）)，令 $\theta_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\text{with } \begin{cases} \operatorname{supp} \theta_+ \subset]y_+ - \eta, +\infty[, \\ \operatorname{supp} \theta_- \subset]-\infty, y_- + \eta[, \end{cases} \quad \text{be equal to 1 in } \begin{cases} [y_+ - \eta/2, +\infty[, \\ ]-\infty, y_- + \eta/2] \end{cases}.$$

再次，令 $\chi_\pm = 1 - \theta_{\mp}$。
Let

$$u_\pm(y; h) = a_\pm(h)\chi_\pm(y) e^{\mp(f(y)-f(y_\pm))/h} \tag{4.22}$$

其中

$$a_\pm(h) \sim h^{-1/4}(a_0^\pm + a_-^\pm h + ...) \text{ with } a_0 > 0 \tag{4.23}$$

是一个归一化因子，使得 $\|u_\pm\| = 1$。于是

$$Q_+ u_+ = a_+[Q_+, \chi_+] e^{-(f-f(y_+))/h} =: r_+, \tag{4.24}$$

$$Q_- u_- = a_+[Q_-, \chi_-] e^{(f-f(y_-))/h} =: r_-. \tag{4.25}$$

特别是，

$$r_\pm = \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-S_0/h}), \tag{4.26}$$

其中我们令 $S_0 = d(y_+, y_-)$，并用 $\widetilde{\mathcal{O}}_\eta(A)$ 表示一个在 $\epsilon(\eta) \to 0$ 时为 $\mathcal{O}(e^{\epsilon(\eta)/h}A)$ 的量，其中 $\eta \to 0$。用驻相法——最速下降法计算 $\|u_\pm\|^2$，得到条件

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{|\partial_y^2 f(y_\pm)|^{1/2}}|a_0^\pm|^2 = 1,$$

其中 $\partial_y^2 f = \partial_y^2 \phi$，因此

$$a_0^\pm = \left(\frac{|\partial_y^2\phi(y_\pm)|}{2\pi}\right)^{1/4}. \tag{4.27}$$

Let

$$p_\xi(y,\eta) = i\eta + \xi + \partial_y\phi$$

表示.....的半经典主符号 P_ξ 在（4.3）中。于是

$$\frac{1}{2i}\{p_\xi, \overline{p}_\xi\} = \frac{1}{2i}\{i\eta + \xi + \partial_y\phi, -i\eta + \xi + \partial_y\phi\} = \partial_y^2\phi$$

并且（4.27）给出

$$a_0^\pm = \left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_\pm, 0)|}{4\pi}\right)^{1/4}. \tag{4.28}$$

我们用柯西公式表示 $\pi_\pm$，

$$\pi_\pm = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,h/(2C))}(z - Q_\pm)^{-1}dz, \tag{4.29}$$

其中 $C > 0$ 与（4.21）之后段落中的定义相同，并且根据 [13, 第 2 节2]，沿积分路径有：

$$K_{(z-Q_\pm)^{-1}}(x,y) = \widetilde{\mathcal{O}}(e^{-d(x,y)/h}). \tag{4.30}$$

由（4.24），

$$(Q_+ - z)u_+ = -zu_+ + r_+, \text{ i.e. } (z - Q_+)^{-1}u_+ = \frac{1}{z}u_+ + (z - Q_+)^{-1}z^{-1}r_+,$$

并且（4.29）给出

$$\pi_+u_+ = u_+ + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,h/(2C))}(z - Q_+)^{-1}z^{-1}r_+dz. \tag{4.31}$$

类似地，

$$\pi_-u_- = u_- + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,h/(2C))}(z - Q_-)^{-1}z^{-1}r_-dz. \tag{4.32}$$

设 $K \Subset Y$ 为紧算子。利用（4.30），我们在 K

$$\pi_+u_+ - u_+ = \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0 + d(y_-,\cdot))}) \in F_+^\perp \tag{4.33}$$

$$\pi_-u_- - u_- = \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0 + d(y_+,\cdot))}) \in F_-^\perp. \tag{4.34}$$

当 Y =实数集 时，由下面的缩放（4.60可知，对任意 $C_0 > 0$存在一个 $C > 0$ 使得当 $h > 0$ 足够小时

$$\pi_\pm u_\pm - u_\pm = \mathcal{O}(1)\mathrm{e}^{-C_0/h} \text{ on } \mathbb{R}\backslash[-C, C]. \tag{4.35}$$

注意到（4.26）适用于 $r_\pm$ 的所有导数，因此我们看到（4.33）、（4.34）和（4.35）中的估计适用于 $\pi_\pm u_\pm - u_\pm$ 的所有导数。

还利用 $u_\pm = \widetilde{\mathcal{O}}(e^{-d(y_\pm,\cdot)/h})$，我们得到

$$\|\pi_\pm u_\pm\| = 1 + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-2S_0/h}). \tag{4.36}$$

（这也可由（4.33）、（4.34）以及 $u_\pm = \pi_\pm u_\pm + (1-\pi_\pm)\, u_\pm$ 是一个正交分解这一事实推出。）

Let

$$e_\pm = \frac{\pi_\pm u_\pm}{\|\pi_\pm u_\pm\|} = \frac{u_\pm}{\|\pi_\pm u_\pm\|} + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0+d(y_\mp,\cdot))}), \tag{4.37}$$

其中最后一项属于 $F_\pm^\perp$，因此（4.37）可视为 $F_\pm \oplus F_\pm^\perp$ 中 $u_\pm/\|\pi_\pm u_\pm\|$的一个正交分解。

根据构造，$P_\xi u_+ = \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-(S_0+d_{(y_-,\ \cdot)})/h})$，因此由（4.37），

$$P_\xi e_+ = \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0+d(y_-,\cdot))}). \tag{4.38}$$

更准确地说，由于

$$P_\xi(\text{the remainder in } (4.37)) = \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0+d(y_\mp,\cdot))}),$$

我们有

$$P_\xi e_+ = \frac{P_\xi u_+}{\|\pi_+ u_+\|} + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0+d(y_-,\cdot))}) \tag{4.39}$$

类似地，$P_\xi^* u_- = \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-(S_0+d_{(y_+,\ \cdot)}\ )/h})$,

$$P_\xi^* e_- = \frac{P_\xi^* u_-}{\|\pi_- u_-\|} + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0+d(y_+,\cdot))}). \tag{4.40}$$

回忆一下，$P_\xi\colon \quad F_+^\perp \to F_-^\perp$，$P_\xi^*\colon \quad F_-^\perp \to F_+^\perp$，因此（4.39）、（4.40）中的余项分别属于 $F_-^\perp$和 $F_+^\perp$，我们可以将这些方程视为 $P_\xi u_+/\|\pi_+ u_+\|$、$P_\xi^* u_-/\|\pi_- u_-\|$ 分别分解为 $F_- \oplus F_-^\perp$和 $F_+ \oplus F_+^\perp$的正交分解。

我们有

$$P_\xi e_+ = m_+ e_-, \quad P_\xi^* e_- = m_- e_+,$$

对于某些 $m_+, m_- \in \mathbb{C}$。由于 e_+, e_- 已归一化，我们有

$$m_+ = (P_\xi e_+ | e_-) = (e_+ | P_\xi^* e_-) = \overline{m}_-. \tag{4.41}$$

由此可得，$Q_+ = P_\xi^* P_\xi$ 的最低特征值 λ_+ 为

$$\lambda_+ = (P_\xi^* P_\xi e_+ | e_+) = (P_\xi e_+ | P_\xi e_+) = |m_+|^2 \tag{4.42}$$

而且 λ_- 的最低特征值 $Q_- = P_\xi P_\xi^*$ 也等于 $|m_+|^2$，因为 $\lambda_+ = \lambda_-$。我们进一步考察（4.41）。根据（4.37），我们有

$\|\pi_+ u_+\| e_+ = u_+ + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0+d(y_-,\cdot))}) = a_+(h)\chi_+(y) e^{-\frac{1}{h}d_+(y_+,\cdot))} + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0+d(y_-,\cdot))})$,
$\|\pi_- u_-\| e_- = u_- + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0+d(y_+,\cdot))}) = a_-(h)\chi_-(y) e^{-\frac{1}{h}d_-(y_-,\cdot))} + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{1}{h}(S_0+d(y_+,\cdot))})$, 其中 $d_\pm$ 表示 $Y \setminus \{y_\mp\}$ 上的 LA距离（当 $Y = S^1$ 时）以及 $d_\pm = d$ 上的 LA距离（当 $Y = \mathbb{R}$时）。回想一下，这些等式可以视为u_+ 和 u_- 的正交分解；分别应用 P_ξ、P_ξ^*后，我们对 $P_\xi u_+$ 和$P_\xi^* u_-$ 也能得到相同结果（参见（4.39）、（4.40））。由此可得

$$(P_\xi u_+ | u_-) = \|\pi_+ u_+\| \|\pi_- u_-\| \underbrace{(P_\xi e_+ | e_-)}_{m_+} + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{3}{h}S_0})$$

并且我们得到

$$m_+ = (P_\xi u_+|u_-) + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-\frac{3}{h}S_0}). \tag{4.43}$$

由（4.22）、（4.10）以及 $\chi_- = 1$ 在 的支集上 $\partial_y\chi_+$,

$$(P_\xi u_+|u_-) = ha_+(h)\overline{a_-(h)}\int e^{-\frac{1}{h}(d_+(y_+,y)+d_-(y_-,y))}\partial_y\chi_+(y)dy. \tag{4.44}$$

在 $Y =$R 的情形下， y_+ 位于 y_- 的右侧，因此得到

$$(P_\xi u_+|u_-) = ha_+(h)\overline{a_-(h)}e^{-S_0/h},$$

因此

$$m_+ = ha_+(h)\overline{a_-(h)}e^{-S_0/h} + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-3S_0/h}). \tag{4.45}$$

在 $Y = S^1$ 的情形下，我们回忆 cos $y_\pm = -\xi$，其中 $\pm\partial_y^2\phi(y_\pm) = \mp\sin y_\pm > 0$。当 $\xi = -1+\delta$, $0 < \delta \ll 1$ 时，我们有 $y_\pm \approx \mp\sqrt{2\delta} \bmod 2\pi\mathbb{Z}$；当 $\xi = 1-\delta$,$0 < \delta \ll 1$ 时，我们有 $y_\pm \approx \pi \pm \sqrt{2\delta} \bmod 2\pi\mathbb{Z}$。为明确起见，考虑$y_+ \in]-\pi, 0[$, $y_- \in]0, \pi[$。

在（4.44）中，我们将积分域与 $J :=]y_- - 2\pi, y_-[$ 对应起来。$\partial_y\chi_+$ 的支集包含于 $]y_- - 2\pi, y_- - 2\pi + \eta[\cup]y_- - \eta, y_-[$ 中。在 $]y_- - 2\pi$ 上， $y_- - 2\pi + \eta[, \partial_y\chi_+ \geqslant 0$ 且积分为 1，而 $d_+(y_+, y) + d_-(y_- - 2\pi, y)$ 等于常数 $d_J(y_+, y_- - 2\pi)$，即 J 中从 y_+ 到 $y_- - 2\pi$ 的 LA距离。在 $]y_- - \eta$ 上， $y_-[, \partial_y\chi_+ \leqslant 0$ 且积分为 -1，而 $d_+(y_+, y) + d_-($ $y_-, y)$ 等于常数 $d_J(y_+, y_-)$，即 J 中从 y_+ 到 y_- 的 LA距离。

因此，(4.44) 给出

$$(P_\xi u_+|u_-) = ha_+(h)\overline{a_-(h)}\left(e^{-\frac{1}{h}d_J(y_+,y_- - 2\pi)} - e^{-\frac{1}{h}d_J(y_+,y_-)}\right)$$

因此，当 $Y = S^1$ 时，

$$m_+ = ha_+(h)\overline{a_-(h)}\left(e^{-\frac{1}{h}d_J(y_+,y_- - 2\pi)} - e^{-\frac{1}{h}d_J(y_+,y_-)}\right) + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-3S_0/h}) \tag{4.46}$$

命题*4.1*。我们按 *(1.3)* 定义 ϕ，并按 *(4.3)* 定义 $P_\xi = h\partial_y + \xi + \partial_y\phi$。$P_\xi$ 的共同最小奇异值等于 m_+ 的模，m_+ 已在 *(4.41)* 之前引入。将 ξ 限制在 $]-\infty$ 的一个紧算子 h 无关子集上；当 $Y =$ 属于实数集时取 $0[$，当 $Y = S^1$ 时取 $1[$ 的 $]-1$。令 y_+、$y_- \in Y$ 为方程 $\partial_y\phi(y) = -\xi$ 的两个解，并标记为使得 $\pm\partial_y^2\phi(y_\pm) > 0$。令 d 表示 Y 上关于度量 $(\xi + \partial_y\phi(y))^2dy^2$ 的 *LA* 距离，并回顾 *(4.17)*。令 $S_0 = d(y_+, y_-)$。则关于 ξ 一致地，当 $Y =$ 属于实数集时有 *(4.45)*，当 $Y = S^1$ 时有 *(4.46)*。后一种情况下，我们分别将 y_+、y_- 视为 $]-\pi$、$0[$ 中的点，将 $]0$、$\pi[$ 视为 $0[$ 中的点，并令 d_J 表示 $J =]y_- - 2\pi$、$y_-[$ 上的 LA 距离。这里，$a_+(h)a_-(h) = h^{-1/2}(a_0^+\overline{a_0^-} + \mathcal{O}(h))$ 关于 h 的幂有完整渐近展开，而 $a_0^\pm$ 由 *(4.23)*、*(4.28)* 给出。特别地，

$$\begin{aligned} m_+ =& h^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_+, 0)|}{4\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_-, 0)|}{4\pi}\right)^{1/4} + \mathcal{O}(h)\right) \\ &\times \begin{cases} e^{-S_0/h} + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-3S_0/h}), & when\ Y = \mathbb{R} \\ \left(e^{-\frac{1}{h}d_J(y_+,y_- - 2\pi)} - e^{-\frac{1}{h}d_J(y_+,y_-)}\right) + \widetilde{\mathcal{O}}_\eta(e^{-3S_0/h}), & when\ Y = S^1 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.47}$$

继续之前，我们先讨论 4.47 中 $Y = S^1$ 的情形。注意，$P_0u_0 = 0$ 对于 $u_0(y) = \exp(-\frac{1}{h}\int_0^y \cos\, tdt)$， $u_0 \in C^\infty(S^1)$。因此，对于 $\xi = 0$， P_ξ 的最小奇异值为 $t_0(\xi) = 0$。

注意， $d_J(y_+, y_- - 2\pi)$ 是严格递增函数，而 $d_J(y_+, y_-)$ 是关于 $\xi \in]-1, 1[$, 的严格递减光滑函数，它们的 ∂_ξ 导数为 $\asymp 1$。此外，对于 $\xi \in [0, 1[$，$d_J(y_+, y_- - 2\pi) \leqslant d_J(y_+, y_-)$；对于$\xi \in]-1$， $d_J(y_+, y_- - 2\pi) \geqslant d_J(y_+, y_-)$，其中 $1[$；两种情况下，当且仅当 $\xi = 0$ 时取等号。因此，当 $Y = S^1$，且 ξ 属于一个与 h 无关的紧集 $]-1$ 时， $1[$，P_ξ 的最小奇异值等于 $m_+(\xi)$ 的模，其中

$$\begin{aligned} m_+ =& h^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_+, 0)|}{4\pi} \right)^{1/4} \left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_-, 0)|}{4\pi} \right)^{1/4} + \mathcal{O}(h) \right) \\ & \times e^{-S_0/h} \left(1 - e^{-\frac{\asymp|\xi|}{h}} \right). \end{aligned} \tag{4.48}$$

4.2. **退化情形——膨胀论证**。现在考虑如下情形

$$Y = \mathbb{R} \text{ and } h^{2/3} \ll -\xi \ll 1 \tag{4.49}$$

or

$$Y = S^1 \text{ and } \begin{cases} \text{a) } h^{2/3} \ll 1 + \xi \ll 1, \\ \text{or} \\ \text{b) } h^{2/3} \ll 1 - \xi \ll 1. \end{cases} \tag{4.50}$$

情形 a) 和 b) 类似，因此当 $Y = S^1$ 时，我们只讨论情形 a)。

当 $Y =$实数集时，记 $\xi = -\delta, h^{2/3} \ll \delta \ll 1$；当 $Y = S^1$ （情形 a)）时，记 $\xi = -1 + \delta, h^{2/3} \ll \delta \ll 1$。

R注意 $P_\xi = h\partial_y + \partial_y f(y, \ \xi)$， $f(y, \ \xi) = y\xi + \phi(y)$，参见 (4.2)、(4.3)。我们有

$$P_\xi = \begin{cases} h\partial_y + y^2 - \delta, \text{ when } Y = \mathbb{R}, \\ h\partial_y + (\cos y - 1) + \delta, \text{ when } Y = S^1, \text{ case a)}. \end{cases}$$

作膨胀变换 $y = \alpha\widetilde{y}$，并注意，当 $Y = S^1$ 时， y 的 2π-周期函数会变为 $\widetilde{y}$ 中的 $2\pi/\alpha$-周期函数。这里 α 是一个小参数，我们选取 $\asymp \delta^{1/2}$。在两种情形下，我们得到：

$$P_\xi = \alpha^2 \begin{cases} \widetilde{h}\partial_{\widetilde{y}} + \widetilde{y}^2 - \widetilde{\delta}, \\ \widetilde{h}\partial_{\widetilde{y}} + \frac{\cos(\alpha\widetilde{y}) - 1}{\alpha^2} + \widetilde{\delta}, \end{cases}, \ \widetilde{y} \in \widetilde{Y}, \tag{4.51}$$

~ ~其中 $h = h/\alpha^3, \delta = \delta/\alpha^2 \asymp 1$。这里

$$\widetilde{Y} = \begin{cases} Y, \text{ when } Y = \mathbb{R}, \\ \mathbb{R}/((2\pi/\alpha)\mathbb{Z}), \text{ when } Y = S^1, \end{cases} \tag{4.52}$$

并且 $\widetilde{h} = h/\alpha^3 \asymp h/\delta^{3/2} \ll 1$，因为 $\delta \gg h^{2/3}$。该函数

$$\partial_{\widetilde{y}} \widetilde{f}(\widetilde{y}) = \begin{cases} \widetilde{y}^2 - \widetilde{\delta}, \\ \frac{\cos(\alpha\widetilde{y}) - 1}{\alpha^2} + \widetilde{\delta}, \end{cases} \quad \text{vanishes at } \begin{cases} \widetilde{y}_\pm = \pm\widetilde{\delta}^{1/2}, \\ \widetilde{y}_\pm \approx \mp(2\widetilde{\delta})^{1/2} \bmod (2\pi/\alpha)\mathbb{Z}, \end{cases},$$

~当 $Y =$和 $Y = S^1$分别取实数集时。此外，$\pm\partial^2_{\widetilde{y}} f(\widetilde{y}_\pm) \asymp 1$。我们注意到~， $\partial_{\widetilde{y}} f$ 在每个包含~的固定区间上关于 δ 一致有界，但在这些点之外会达到大值。写作 $P_\xi = \alpha^2 P$ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~（参见（4.51）），其中 $P = h\partial_{\widetilde{y}} + \partial_{\widetilde{y}} f$，我们构造 $P^* = -h\partial_{\widetilde{y}} + \partial_{\widetilde{y}} f$和 $Q_+ = P^*P$， $Q_- = PP^*$

~ ~并重复上述分析，此时以 h 作为小的半经典参数。令 d~表示与 $Q_{\pm}$相关的 LA距离。于是，

$$\widetilde{d}(\widetilde{y}_+, \widetilde{y}_-) \asymp 1. \tag{4.53}$$

~当 $Y = \mathrm{R}/((2\pi/\alpha)\mathrm{Z})$ 时，这个距离是通过沿着从 $\widetilde{y}_+$ 到 $\widetilde{y}_-$、长度为 $\approx 2(2\widetilde{\delta})^{1/2}$ 的一致有界线段得到的。沿着从 $\widetilde{y}_+$ 到 $\widetilde{y}_-$ 的互补线段，则得到一个 $\gg 1$的 LA 距离。

由此可知，命题 4.1 的结论可推广至更广的范围（4.49），~ ~（4.50），只需将 h, d, ...替换为 h, d, ...下面我们再详细回顾一下。回想一下，$P = P_\xi$ 满足

$$P = h\partial_y + \partial_y f = \alpha^2(\widetilde{h}\partial_{\widetilde{y}} + \partial_{\widetilde{y}}\widetilde{f}(\widetilde{y}), \quad \partial_y f = \alpha^2\partial_{\widetilde{y}}\widetilde{f} \tag{4.54}$$

其中 $y = \alpha\widetilde{y}$, $\alpha \asymp \delta^{1/2}$。 y, $\widetilde{y}$ 中的 LA 度量分别由 $(\partial_y f)^2 dy^2$ 和 ~$(\partial_{\widetilde{y}} f)^2 d\widetilde{y}^2$ 给出。若 $y_j = \alpha\widetilde{y}_j$, $j = 1, 2$，则相应的距离为

$$d(y_1, y_2) = \int_I |\partial_y f||dy|, \quad \widetilde{d}(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2) = \int_{\widetilde{I}} |\partial_{\widetilde{y}}\widetilde{f}||d\widetilde{y}|,$$

~ ~其中， $Y \subset Y$、 $I \subset Y$ 分别是从 y_1 到 y_2 以及从 $\widetilde{y}_1$ 到~$\widetilde{y}_2$ 的极小化线段。按自然的方式，我们可以取 $I = \{\alpha\widetilde{y};\ \widetilde{y} \in I\}$。通过直接计算可得

$$\widetilde{d}(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2) = \int_{\widetilde{I}} |\partial_{\widetilde{y}}\widetilde{f}||d\widetilde{y}| = \int_I \frac{1}{\alpha^2}|\partial_y f|\frac{|dy|}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^3} d(y_1, y_2),$$

~并回想 $h = \alpha^3 h$,

$$\frac{d(y_1, y_2)}{h} = \frac{\widetilde{d}(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2)}{\widetilde{h}}. \tag{4.55}$$

由（4.54）可得

$$\partial_y^2 f = \partial_y \alpha^2 \partial_{\widetilde{y}}\widetilde{f} = \frac{1}{\alpha}\partial_{\widetilde{y}}\alpha^2\partial_{\widetilde{y}}\widetilde{f} = \alpha\partial_{\widetilde{y}}^2\widetilde{f} \tag{4.56}$$

~ ~并令 $p\ (y,\ \eta) = i\eta + \partial_y f$、 $\widetilde{p}\ (\widetilde{y},\ \eta) = i\widetilde{\eta} + \partial_{\widetilde{y}} f$，可得

$$\frac{1}{2i}\{p, \overline{p}\}(y, 0) = \alpha\frac{1}{2i}\{\widetilde{p}, \overline{\widetilde{p}}\}(\widetilde{y}, 0). \tag{4.57}$$

~我们可以在4.1命题中应用h, $\widetilde{y}$ 设定。的最小奇异值是区间 $[0, \widetilde{h}^{1/2}/C[$中唯一的一个。它的形式为 $|\widetilde{m}_+|$，其中

$$\begin{aligned}\widetilde{m}_+ =& \widetilde{h}^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{|\{\widetilde{p}, \overline{\widetilde{p}}\}(\widetilde{y}_+, 0)|}{4\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{|\{\widetilde{p}, \overline{\widetilde{p}}\}(\widetilde{y}_-, 0)|}{4\pi}\right)^{1/4} + \mathcal{O}(\widetilde{h})\right) \\ &\times \begin{cases} e^{-\widetilde{S}_0/\widetilde{h}}, & \text{when } Y = \mathbb{R} \\ \pm e^{-\widetilde{S}_0/\widetilde{h}}, & \text{when } Y = S^1. \end{cases}\end{aligned} \tag{4.58}$$

~ ~ ~这里， S_0 表示 Y中从 $\widetilde{y}_+$ 到 $\widetilde{y}_-$的 d距离。在 $Y = S^1$ 的情形下，如果相应的最短线段沿着 $\widetilde{y}$ 值递减的方向（即顺时针方向）从 $\widetilde{y}_+$ 延伸到 $\widetilde{y}_-$，我们就选择+ 符号；如果最短线段沿着 $\widetilde{y}$ 递增的方向从 $\widetilde{y}_+$ 延伸到 $\widetilde{y}_-$，则选择 $-$ 符号。

这给出了 P_ξ的最小奇异值 $|m_+|$，其中 $m_+ = \alpha^2 \widetilde{m}_+$,

$$m_+ = \alpha^2 \left(\frac{h}{\alpha^3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_+,0)|}{4\pi\alpha}\right)^{1/4} \left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_-,0)|}{4\pi\alpha}\right)^{1/4} + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\alpha^3}\right)\right) \times \begin{cases} e^{-S_0/h}, \text{ when } Y = \mathbb{R} \\ \pm e^{-S_0/h}, \text{ when } Y = S^1 \end{cases},$$

这可简化为

$$m_+ = h^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_+,0)|}{4\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_-,0)|}{4\pi}\right)^{1/4} + \alpha^{\frac{1}{2}} \mathcal{O}\left(\frac{h}{\alpha^3}\right)\right) \times \begin{cases} e^{-S_0/h}, \text{ when } Y = \mathbb{R} \\ \pm e^{-S_0/h}, \text{ when } Y = S^1 \end{cases}. \tag{4.59}$$

这里我们注意到 $|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_\pm,\ 0)| \asymp \alpha \asymp \delta^{1/2}$，并且 $S_0 \asymp \delta^{3/2}$ 由（4.55）~以及 $S_0 \asymp 1$。

4.3. R 的情形以及 ξ 较大的负值情形。本节简要讨论 $Y = \mathrm{R}$ 且 $-\xi \gg 1$ 的情形。令 $\alpha = |\xi|^{1/2}$，我们得到

$$P_\xi = \alpha^2 \widetilde{P}_1 := \alpha^2(\widetilde{h}\partial_{\widetilde{y}} + (\widetilde{y}^2 - 1)), \quad \widetilde{h} = \frac{h}{\alpha^3},\ y = \alpha\widetilde{y}, \tag{4.60}$$

P_ξ^* 的情形也类似。

令 $t_0(\xi;\ h)$ $t_1(\xi;\ h)$ 分别表示 P_ξ 的最小和次小奇异值。缩放（4.60）表明 $t_j(\xi;\ h) = |\xi| t_j(-1;\ h/|\xi|^{3/2})$。在极限 $|\xi| \gg 1, h \ll 1$ 下，我们有 $h/|\xi|^{3/2} \ll 1$，并且可见对于某些 $C_0, C_1 > 0$,

$$t_0(\xi;h) = O(1)|\xi| \frac{h^{1/2}}{|\xi|^{3/4}} \mathrm{e}^{-C_0|\xi|^{3/2}/h} = \mathcal{O}(1)|\xi|^{1/4} h^{1/2} \mathrm{e}^{-C_0|\xi|^{3/2}/h} \tag{4.61}$$

and

$$t_1(\xi;h) \asymp |\xi| \left(\frac{h}{|\xi|^{3/2}}\right)^{1/2} = |\xi|^{1/4} h^{1/2} \geqslant h^{1/2}/C_1. \tag{4.62}$$

结合命题 4.1、(4.59) 和 (4.61)、(4.62) 可得定理 2.3。

我们以汇总上述部分结果来证明

定理 *2.4* 的证明。 1. 对 $t_1(P_\xi)$ 在 $\xi \in \mathfrak{K}$ 下的估计（见式(4.13)）可直接由 (4.21) 后的讨论得出。

2. 当 $h^{2/3} \ll -\xi \ll 1$ 且 $Y =$属于实数集 时，以及当 $h^{2/3} \ll 1+\xi \ll 1$ 或 $h^{2/3} \ll 1-\xi \ll 1$ 且 $Y = S^1$ 时， $t_1(P_\xi)$ 的估计可由 (4.57) 后的讨论得出。

3. 当 $-\xi \gg 1$ 且 $Y =$ 属于实数集 时， $t_1(P_\xi)$ 的估计由 (4.62) 得出。 □

5. 奇异值计数

我们将使用（4.47）及其扩展形式（4.59）来研究区间内 $t_0(\xi) = |m_+(\xi)|$ 对应于 $\xi \in h\mathbb{Z}$ 的奇异值个数。我们先回顾 $S_0 = S_0(\xi)$的一些性质。对于 $Y =$ 实数集 和 $Y = S^1$，我们分别定义作用

$$S_0 : \mathcal{D}(S_0) := \begin{cases}]-\infty, 0[, & Y = \mathbb{R}, \\ ]-1, 1[, & Y = S^1 \end{cases} \longrightarrow\ ]0, +\infty[\tag{5.1}$$

by

$$S_0(\xi) = d_\xi(y_-(\xi), y_+(\xi)), \tag{5.2}$$

由 Y 上的 LA距离（度量为 $\xi + \partial_y\phi(y)^2 dy^2$）给出。

当 $Y = \mathbb{R}$、$\xi < 0$ 时，由 $f(y,\xi) = y\xi + \phi(y) = y\xi + y^3/3$ 可得

$$\begin{aligned} S_0(\xi) &= f(y_-(\xi),\xi) - f(y_+(\xi),\xi) \\ &= \xi(y_-(\xi) - y_+(\xi)) + \frac{1}{3}(y_-(\xi)^3 - y_+(\xi)^3) \\ &= \xi(-(-\xi)^{1/2} - (-\xi)^{1/2}) + \frac{1}{3}(-(-\xi)^{3/2} - (-\xi)^{3/2}) \\ &= \frac{4}{3}(-\xi)^{4/3}. \end{aligned}$$

由于 $y_\pm(\xi)$ 是 $y \mapsto f(y,\xi)$ 的临界点，我们有

$$\begin{aligned} \partial_\xi S_0(\xi) &= (\partial_\xi f)(y_-,\xi) - (\partial_\xi f)(y_+,\xi) \\ &= y_-(\xi) - y_+(\xi) \\ &= -2(-\xi)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

当 $Y = S^1$ 时，令 $\xi \in]-1, 0[$。（情形 $\xi \in]0, 1[$ 可类似处理，而我们将避开情形 $\xi \approx 0$，以避免式 (4.47) 中两个竞争项带来的复杂性。）在此情形下，对应于式 (4.50) 中的情形 a)，由 $f(y,\xi) = y\xi + \phi(y) = y\xi + \sin y$ 可得，$\partial_\xi S_0(\xi) = y_-(\xi) - y_+(\xi)$，这里我们回顾约定：$y_- \in]0, \pi[$, $y_+ \in]-\pi, 0[$，因此当 $\xi \approx -1$ 时，$y_\pm \approx 0$。在此情形下，当 $\xi = -1+\delta$ 时，$y_\pm \approx \mp\sqrt{2\delta}$, $0 < \delta \ll 1$。于是，当 $\xi = -1+\delta$, $0 < \delta \ll 1$ 时，$\partial_\xi S_0(\xi) > 0$, $\partial_\xi S_0 = (1+\mathcal{O}(\delta))2\sqrt{2\delta}$。由于 $S_0(-1) = 0$，我们得到

$$S_0(\xi) = (1 + \mathcal{O}(\delta))\frac{2}{3}(2\delta)^{3/2}. \tag{5.4}$$

5.1. 非退化情形。 我们首先考虑 ξ 在紧集 $\mathfrak{K}'$ 中变化的情形，其中

$$\xi \in \mathfrak{K}' \Subset \begin{cases}]-\infty, 0[, & Y = \mathbb{R}, \\ ]-1, 1[, & Y = S^1. \end{cases} \tag{5.5}$$

于是，由命题 4.1 和（4.48），对于 $\xi \in \mathfrak{K}' \backslash \{0\}$

$$t_0(\xi) = (1 + \mathcal{O}(h))h^{\frac{1}{2}} \frac{|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_+, 0)\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_-, 0)|^{1/4}}{(4\pi)^{1/2}} \times \begin{cases} \mathrm{e}^{-S_0(\xi)/h}, \\ \left(1 - e^{-\frac{\asymp|\xi|}{h}}\right) \mathrm{e}^{-S_0(\xi)/h}, \end{cases}$$

其中 $y_\pm = y_\pm(\xi)$，因此

$$\log\left(\frac{t_0(\xi)}{\sqrt{h}}\right) = -\frac{1}{h}S(\xi; h) + \mathcal{O}(h), \tag{5.6}$$

其中

$$\begin{aligned} S(\xi; h) &= S_0(\xi) - \frac{h}{4}\left(\log|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_+, 0)| + \log|\{p_\xi, \overline{p}_\xi\}(y_-, 0)|\right) \\ &\quad + \begin{cases} \frac{h}{2}\log 4\pi \\ \frac{h}{2}\log 4\pi - h\log\left(1 - e^{-\frac{\asymp|\xi|}{h}}\right) \end{cases} \\ &:= S_0(\xi) + hS_1(\xi). \end{aligned} \tag{5.7}$$

设 $K \Subset]0,+\infty[$ 是一个固定的紧集，并设 $0<a<b$ 满足 $[a,b]\subset K$。我们将研究 $Y = \in$ 实数集 且 $Y = S^1$ 的情形

$$N_{\log(t_0/\sqrt{h})}\left(\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right) := \#\left\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap\mathcal{D}(S_0); \log\left(\frac{t_0(\xi)}{\sqrt{h}}\right)\in\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right\}. \tag{5.8}$$

由正交分解（1.6）可知， P （1.2）的奇异值具有如下形式： t_k （ξ）， $k\in\mathbb{N}$，$\xi\in h\mathbb{Z}$，其中 t_k （ξ）表示P_ξ的奇异值。由定理2.4可知，表达式（5.8）给出了 P 在区间内的奇异值个数

$$\left[\sqrt{h}\mathrm{e}^{-b/h},\sqrt{h}\mathrm{e}^{-a/h}\right]. \tag{5.9}$$

由（4.61）、（4.59）、（4.47）和（4.48）可推得，我们可以将（ $\xi\in h\mathbb{Z}\cap\mathcal{D}$（$S_0$）限制在（5.8）右侧集合中的 $\xi\in h\mathbb{Z}\cap$ （$\mathfrak{K}'\backslash\{0\}$）。

由于 ξ 在固定的 h-无关紧集 $\mathfrak{K}'$中变化，由（5.6）和（5.7）可知，存在常数 $C>0$（这些常数可能随行变化），使得

$$\begin{aligned}
&\left\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap(\mathfrak{K}'\backslash\{0\}); S(\xi;h)\in\left[a+Ch^2,b-Ch^2\right]\right\}\\
&\qquad\subset\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap(\mathfrak{K}'\backslash\{0\}); S_0(\xi)\in[a+Ch,b-Ch]\}\\
&\qquad\subset\left\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap(\mathfrak{K}'\backslash\{0\}); \log\left(\frac{t_0(\xi)}{\sqrt{h}}\right)\in\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right\}\\
&\qquad\subset\left\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap(\mathfrak{K}'\backslash\{0\}); S(\xi;h)\in\left[a-Ch^2,b+Ch^2\right]\right\}\\
&\qquad\subset\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap(\mathfrak{K}'\backslash\{0\}); S_0(\xi)\in[a-Ch,b+Ch]\}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

按式（5.8）定义

$$N_{S_0}(J) := \#\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap\mathcal{D}(S_0); S_0(\xi)\in J\} \tag{5.11}$$

并且对 S 作类似处理，可得

$$N_S([a+Ch^2,b-Ch^2])\leqslant N_{\log(t_0/\sqrt{h})}\left(\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right)\leqslant N_S([a-Ch^2,b+Ch^2]) \tag{5.12}$$

and

$$N_{S_0}([a+Ch,b-Ch])\leqslant N_{\log(t_0/\sqrt{h})}\left(\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right)\leqslant N_{S_0}([a-Ch,b+Ch]). \tag{5.13}$$

为简化起见，我们放弃追求最精确的结果，继续采用式（5.13），而不采用式（5.12）。由此可见

$$N_{S_0}([a,a+Ch[), N_{S_0}([a-Ch,a[) = O(1),\quad C>0,$$

对 b 代替 a，作类似处理，因此由式（5.13）可得

$$N_{\log(t_0/\sqrt{h})}\left(\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right) = N_{S_0}([a,b])+\mathcal{O}(1). \tag{5.14}$$

对于 $c\in K$，令 $\xi_0(c)\in S_0^{-1}(c)$。那么

$$S_0^{-1}([a,b]) = \begin{cases}[\xi_0(b),\xi_0(a)]\\ [-|\xi_0(a)|,-|\xi_0(b)|]\cup[|\xi_0(b)|,|\xi_0(a)|],\end{cases}$$

取决于 S_0 是递减的（在 $Y=$ 实数集的情况下），还是在$]-1$上递增、在 $[0,1[$上递减（在 $Y=S^1$的情况下）。将计数

测度在 $h\mathbb{Z}$ 上用 $\frac{1}{h}L(d\xi)$ 近似，其中 $L(d\xi)$ 表示 $\mathbb{R}_\xi$ 上的勒贝格测度，我们得到

$$\#\left(S_0^{-1}([a,b])\cap h\mathbb{Z}\right)=\frac{1}{h}L(S_0^{-1}([a,b]))+\mathcal{O}(1). \tag{5.15}$$

将此与（5.14）结合，可得

$$N_{\log(t_0/\sqrt{h})}\left(\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right)=\frac{1}{h}L(S_0^{-1}([a,b]))+\mathcal{O}(1). \tag{5.16}$$

总结目前为止已证明的结果，可得

命题 *5.1.* 设 S_0 如（*5.1*）、（*5.2*）中所述，并设 $t_0(\xi)=|m_+(\xi)|$ 表示 P_ξ的最小奇异值。设 $K\Subset]0,+\infty[$，当 $Y=$属于实数集时，以及 $K\Subset]0,S_0(0)[$，当 $Y=S^1$时，是一个固定的紧集，并设 $[a,b]\subset K$。定义 $N_{\log(t_0/\sqrt{h})}$，N_{S_0} 如（*5.8*）、（*5.11*）中所述。则，

$$N_{\log(t_0/\sqrt{h})}\left(\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right)=N_{S_0}([a,b])+\mathcal{O}(1).$$

5.2. 退化情形。 接下来，我们考虑这样的情形：对于某个固定的大常数 $C>0$

$$\xi\in\begin{cases}]-1/C,0[, & Y=\mathbb{R},\\ ]-1,-1+1/C[\cup]1-1/C,1[, & Y=S^1,\end{cases} \tag{5.17}$$

并且 ξ 可以趋近于 0，并且 -1 分别可以趋近于 $\delta\gg h^{2/3}$。我们已在（4.59）中看到，若

$$\xi=\begin{cases}-\delta, & Y=\mathbb{R},\\ \pm(-1+\delta), & Y=S^1,\end{cases}\qquad h^{2/3}\ll\delta\ll 1, \tag{5.18}$$

then

$$\frac{t_0(\xi)}{\sqrt{h}}=(1+\mathcal{O}(\delta^{-3/2}h))\frac{|\{p_\xi,\overline{p}_\xi\}(y_+,0)\{p_\xi,\overline{p}_\xi\}(y_-,0)|^{1/4}}{(4\pi)^{1/2}}\mathrm{e}^{-S_0(\xi)/h},$$

其中 $|\{p_\xi,\overline{p}_\xi\}(y_\pm,\ 0)|\asymp\delta^{1/2}$。因此（参见（5.6））,

$$\log\left(\frac{t_0(\xi)}{\sqrt{h}}\right)=-\frac{1}{h}S(\xi;h)+\mathcal{O}(h\delta^{-3/2}). \tag{5.19}$$

这里 S和 S_1在（5.7）中定义，并且我们知道 $S_1=\mathcal{O}(1)\log\,\delta^{-1}$，因此

$$S=S_0+\mathcal{O}(h\log\delta^{-1}), \tag{5.20}$$

并且（5.19）给出

$$\log\left(\frac{t_0(\xi)}{\sqrt{h}}\right)=-\frac{1}{h}S_0(\xi)+\mathcal{O}(\log\delta^{-1})+\mathcal{O}(h\delta^{-3/2}). \tag{5.21}$$

我们回顾一下，对于 ξ 如式（5.18）

$$S_0\asymp\delta^{3/2},\quad\begin{cases}-\partial_\xi S_0\asymp\sqrt{\delta}, & Y=\mathbb{R},\\ \pm\partial_\xi S_0\asymp\sqrt{\delta}, & \xi=\pm(-1+\delta),\ Y=S^1.\end{cases} \tag{5.22}$$

设 $K \Subset]0、+\infty[$ 在 $[0,+\infty[$ 中相对紧且固定。设 $0<a<b$，其中$[a,b]\subset K$，且 $b\asymp 1$、$a\asymp \delta^{3/2}$。那么，

$$S_0^{-1}([a,b])=\begin{cases}[\xi_0(b),\xi_0(a)],\ \xi_0(a)\asymp -\delta,\ |\xi_0(b)|\asymp 1,\\ [-|\xi_0(a)|,-|\xi_0(b)|]\cup[|\xi_0(b)|,|\xi_0(a)|],\ 1-|\xi_0(a)|\asymp\delta,\ 1-|\xi_0(b)|\asymp 1.\partial_\xi S_0\asymp\sqrt{\delta},\ pm(\end{cases} \tag{5.23}$$

我们再次研究 $N_{\log(t_0/\sqrt{h})}([-h^{-1}b,-h^{-1}a])$ 在 (5.8) 中。由 (5.21) 可知，存在常数 $C>0$ （这些常数可能随行而异），使得

$$\begin{aligned}&\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap\mathcal{D}(S_0)\backslash\{0\};S_0(\xi)\in[a+C(h\log\delta^{-1}+h^2\delta^{-3/2}),b-Ch]\}\\ &\subset\left\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap\mathcal{D}(S_0)\backslash\{0\};\log\left(\frac{t_0(\xi)}{\sqrt{h}}\right)\in\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right\}\\ &\subset\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap\mathcal{D}(S_0)\backslash\{0\};S_0(\xi)\in[a-C(h\log\delta^{-1}+h^2\delta^{-3/2}),b+Ch]\}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

假设若 ξ 属于 (5.24) 中的最后一个集合，则当 $Y=$ ∈实数集时有 $-\xi\gtrsim\delta$，而当 $Y=S^1$ 时有 $1\pm\xi\gtrsim\delta$。根据 (5.23)，当 $\xi\in S_0^{-1}([a,b])$ 时，情况即是如此。若 $\xi\in S_0^{-1}([a-\mathcal{O}(1)(h$ log $\delta^{-1}+h^2\delta^{-3/2})\ a])$，则利用 (5.22)，有 $|\xi|-|\xi_0(a)|=\mathcal{O}(1)\delta^{-1/2}(h$log $\delta^{-1}+h^2\delta^{-3/2})$，于是只需验证

$$\delta^{-1/2}(h\log\delta^{-1}+h^2\delta^{-3/2})\ll\delta,$$

i.e.

$$\log\delta^{-1}+h\delta^{-3/2}\ll h^{-1}\delta^{3/2}.$$

为此，我们将假设 $\delta\gg h^{2/3}$，即 $\delta^{3/2}\gg h$，加强为

$$h\ll\frac{\delta^{3/2}}{\log\delta^{-1}}. \tag{5.25}$$

若 $\xi\in S_0^{-1}(]b,b+\mathcal{O}(h)])$，则 $|\xi|-|\xi_0(b)|=\mathcal{O}(h)$，并且我们也得到了所需的控制。

现在我们采用假设（5.25）。由（5.24）及上述估计可得

$$\begin{aligned}&\#\left\{\xi\in h\mathbb{Z}\cap\mathcal{D}(S_0);\log\left(\frac{t_0(\xi)}{\sqrt{h}}\right)\in\left[-\frac{b}{h},-\frac{a}{h}\right]\right\}\\ &\qquad=\#\left(S_0^{-1}([a,b])\cap h\mathbb{Z}\right)+\mathcal{O}(1)\frac{\log\delta^{-1}}{\sqrt{\delta}}\\ &\qquad=\frac{1}{h}L(S_0^{-1}([a,b]))+\mathcal{O}(1)\frac{\log\delta^{-1}}{\sqrt{\delta}}.\end{aligned} \tag{5.26}$$

由于 S_0 在 x 中具有平移不变性，我们可以在 $\frac{1}{2\pi h}dx\otimes d\xi$ 上采用测度 $S^1\times$实数集$_\xi$，用于（5.26）和（5.16），而不只是采用测度 $d\xi$ 于 实数集$_\xi$上。此外，$dx\otimes d\xi$可以等同于 辛体积元 $\sigma|_{\Sigma_+}$在 Σ_+ 上的形式，见（1.11）、（1.12）。因此，（5.16）、命题 5.1 和（5.26）推出定理 2.5。

参考文献

[1] W. Bordeaux-Montrieux，几乎必然的 *Weyl* 定律及非自伴微分算子的预解式，博士论文，2008 年。[2] E. B. Davies，微分算子的伪谱，J. Oper. Th **43** (1997)，243–262。[3] E.B. Davies，伪谱、谐振子与复共振，伦敦皇家学会会刊 A **455** (1999)，第 1982 期，585–599。

[4] ———, 非自伴薛定谔算子的半经典态，《数学物理通讯》（1999），第 200 期，35–41。[5] N. Dencker、J. Sjöstrand 和 M. Zworski，半经典（伪）微分算子的伪谱，《纯粹与应用数学通讯》57（2004），第 3 期，384–415。[6] M. Dimassi 和 J. Sjöstrand，《半经典极限中的谱渐近》，伦敦数学学会讲义丛书 268，剑桥大学出版社，1999。[7] M. Embree 和 L. N. Trefethen，《谱与伪谱：非正规矩阵与算子的性质》，普林斯顿大学出版社，2005。[8] I.C. Gohberg 和 M.G. Krein，《线性非自伴算子理论导论》，数学专著译丛，第 18 卷，美国数学会，1969。[9] A. Grigis 和 J. Sjöstrand，《微分算子的微局部分析》，伦敦数学学会讲义丛书 196，剑桥大学出版社，1994。[10] M. Hager，《非自伴算子的半经典谱不稳定性 I：一个模型》，图卢兹科学学院年刊，第六辑 15（2006），第 2 期，243–280。[11] B. Helffer 和 J. Sjöstrand，《半经典极限中的多势阱 I》，《偏微分方程通讯》9（1984），第 4 期，337–408。[12] ———,《半经典极限中的多势阱 III——非共振势阱间的相互作用》，《数学新消息》124（1985），263–313。[13] ———，《半经典力学中的多势阱 II：分子相互作用、对称性与扰动》，《亨利·庞加莱研究所年刊》42（1985），第 2 期，127–212。[14] ———,《半经典力学中的多势阱 IV：Witten复形的研究》，《偏微分方程通讯》10（1985），第 3 期，245–340。[15] M. Hitrik 和 M. Zworski，进行中的研究。[16] L. Hörmander，《线性偏微分算子分析 III》，数学科学基础丛书，第 274 卷，施普林格出版社，1984。[17] A. Martinez，《半经典与微局部分析导论》，施普林格出版社，2002。[18] K. Pravda-Starov，关于薛定谔算子伪谱的一般结果，《伦敦皇家学会会刊 A：数学、物理与工程科学》460（2004），471–477。[19] ———,《非自伴算子伪谱研究》，博士论文，2006。[20] ———，《一类半经典算子的伪谱》，法国数学会通报 136（2008），第 3 期，329–372。[21] L. Reichel 和 L. N. Trefethen，托普利茨矩阵的特征值与伪特征值，《线性代数及其应用》162（1992），第 153–185 期。[22] J. Sjöstrand，《通过半群得到非自伴算子的预解式估计》，《弗拉基米尔·马兹亚研究论集 III》，国际数学系列，第 13 期，施普林格出版社，2010，第 359–384 页。[23] L.N. Trefethen，线性算子的伪谱，《SIAM 综述》39（1997），第 3 期，383–406。[24] M. Vogel，随机扰动下某类非自伴算子的特征值强度的精确形状，《亨利·庞加莱年刊》18（2017），435–517，（DOI）10.1007/s00023-016-0528-z。[25] M. Zworski，关于 E.B. Davies 一篇论文的评注，美国数学会会刊（2001），第 129 期，2955–2957。[26] ———,《半经典分析》，数学研究生教材 138，美国数学会，2012。（Johannes Sjöstrand）勃艮第数学研究所，勃艮第-弗朗什-孔泰大学，法国国家科学研究中心 UMR 5584，9, avenue Alain Savary - BP 47870 - 21078 第戎 Cedex，法国。电子邮箱：johannes.sjostrand@u-bourgogne.fr

（马丁·福格尔）高等数学研究所 - UMR 7501，法国国家科学研究中心和斯特拉斯堡大学，法国斯特拉斯堡勒内-笛卡尔街7号，邮编67084，Cedex。电子邮件地址：vogel@math.unistra.fr