二维加权 CLR 型界

RUPERT L. FRANK、ARI LAPTEV 和 LARRY READ

摘要。我们为具有非平凡阿哈罗诺夫–玻姆磁场的二维薛定谔算子推导出 Cwikel–Lieb–Rozenblum 不等式的加权版本。我们的界体现了对磁通量的最优依赖关系，并确定了一类长程势，它们在强耦合极限下使我们的界达到饱和。我们还将分析推广到作用于反对称函数的二维薛定谔算子，并获得类似结果。

arXiv:2303.06104v1 [math-ph] 10 Mar 2023

1. 引言与主要结果

著名的 Cwikel–Lieb–Rozenblum（CLR）不等式指出，薛定谔算子$-\Delta - V$在维数 $d \geqslant 3$ 下的负特征值个数（计重数）$N(-\Delta - V)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中有如下界：

$$N(-\Delta - V) \lesssim_d \int_{\mathbb{R}^d} V(x)_+^{d/2} \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

其中，隐含常数与 V 无关。此处及下文中，我们取$a_\pm := \max(0, \pm a)$，并用 $\lesssim$ 的下标注明隐含常数所依赖的变量。该不等式由 M. Cwikel [7], E. Lieb [22] 和 G. Rozenblum [25]提出。关于更多证明和背景知识，请参阅 [11]。在强耦合极限下，该界是饱和的，也就是说，当 V 替换为λV且 $\lambda \to \infty$ 时，由 Weyl 渐近公式可知，

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-d/2} N(-\Delta - \lambda V) = \frac{\omega_d}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} V(x)_+^{d/2} \, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

其中，ω_d 是 $\mathbb{R}^d$ 中单位球的体积。式 (1) 的用途之一，是将这一渐近行为推广到所有满足 $V_+ \in L^{d/2}(\mathbb{R}^d)$ 的 V；而这一渐近行为最初是在例如紧支集连续 V 的情形下得到的。对于排斥部分，只需假设 $V_- \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ [9]。

基于 V. Glaser、H. Grosse 和 A. Martin 关于径向势的早期工作，Y. Egorov 和 V. Kondratiev 在 [8] 将 CLR 不等式推广为加权界[12],

$$N(-\Delta - V) \lesssim_{d,\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} V(x)_+^{(d+\alpha)/2} |x|^\alpha \, \mathrm{d}x, \tag{3}$$

日期：2023年3月6日。2010 年数学主题分类。主要分类：35P15；次要分类：81Q10。

这些界在维数 $d \geqslant 3$ 下对任意 $\alpha > 0$ 均成立。在 [5], , M. Birman 和 M. Solomyak 证明，式 (3) 右侧出现的强 L^p 范数可以替换为弱范数，即

$$N(-\Delta - V) \lesssim_{d,\alpha} \sup_{t>0} t^{(d+\alpha)/2} \int_{|x|V(x)_+>t} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^d}, \tag{4}$$

它在维数 $d \geqslant 3$ 且满足 $\alpha > 0$ 时同样成立。注意，界 (3) 和 (4) 关于 V 齐次，次数为 $(d+\alpha)/2 > d/2,$ ；这与 (1) 的齐次性 $d/2$ 相反。后者的齐次性与 (2) 一致。尽管如此，正如 M. Birman 和 M. Solomyak [2], 所示，对于一类具有特定长程行为的势，在强耦合极限下，(4) 中的渐近增长阶 $(d+\alpha)/2$ 可以达到饱和。具体而言，若 $V_+ \in L^{d/2}_{\text{局部}}(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$V(x) = |x|^{-2} |\ln |x||^{-1/p} (1 + o(1)) \text{ as } |x| \to \infty \tag{5}$$

对于某个 $p > d/2,$ ，则可以证明

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-p} N(-\Delta - \lambda V) \text{ exists and is finite,}$$

而对于满足 $p = (d+\alpha)/2,$ 的 $\alpha > 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-p} \sup_{t>0} t^{(d+\alpha)/2} \int_{\lambda|x|^2 V(x)_+>t} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^d} = \sup_{t>0} t^p \int_{|x|^2 V(x)_+>t} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^d} \in (0,\infty).$$

迄今讨论的所有结果都局限于维数 $d \geqslant 3$ 的情形，而它们在维数 $d = 2$ 中的大多数直接类比结果都不成立。例如，(1)、(3) 和 (4) 的直接类比结果无一成立。此外，存在一些满足 $V \geqslant 0$ 的 $V \in L^1(\mathbb{R}^2)$，使得 (2) 左侧的极限要么为无穷大，要么有限但不同于右侧，参见 [4]。近年来，人们投入大量精力，试图证明关于 $d = 2$ 中 $N(-\Delta - V)$ 的界，并给出使界 $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} N(-\Delta - \lambda V) < \infty$ 成立或使 (2) 有效的充要条件。关于这一进展的部分参考文献见 [15, 24, 26, 13, 18, 19]。M. Solomyak [27] 撰写了一篇更早的重要论文；另见 [10]。

本文关注在阿哈罗诺夫–玻姆磁场存在的情况下，二维薛定谔算子的负特征值个数的界。我们将看到，当该磁场非平凡时，可以得到类似于上文所讨论的 n 维薛定谔算子情形的不等式，并且会发现二维情形的困难大多会消失。我们还将考察限制在反对称函数上的无磁薛定谔算子情形，并会看到，这种情形与阿哈罗诺夫–玻姆磁场的情形相似。

我们的结果支持这样的启发式观点：维数为 $d \geqslant 3$和 $d = 2$ 时的不同表现，源于二维拉普拉斯算子在零能量附近的谱不稳定性；这种不稳定性可以通过额外的排斥作用消除，其形式可以是磁场，也可以是对称性的存在。关于这一原理的其他例子，见 [17, 20]。

更具体地说，设

$$\mathbf{A}(x) = |x|^{-2}(x_2, -x_1) \qquad \text{for all } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

且对于 $\Phi \in \mathbb{R}$，令

$$D_\Phi = -i\nabla + \Phi\mathbf{A}\,.$$

我们考虑磁薛定谔算子

$$D_\Phi^2 - V \text{ in } L^2(\mathbb{R}^2)\,.$$

如下一节所述，在对 V 满足适当条件时，可以通过在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ 上取相应二次型的闭包，将该算子实现为自伴算子。当 $\Phi \in \mathbb{Z}$ 时，磁势可以通过规范变换消去，且该算子与 $-\Delta + V$ 酉等价。因此，以下我们将重点讨论 $\Phi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ 的情形。

A. Balinsky、W. Evans 和 R. Lewis [1], 证明了 CLR 不等式 (1) 的一个类似结果，即

$$N(D_\Phi^2 - V) \lesssim_\Phi \int_0^\infty \sup_{\omega\in\mathbb{S}} V(r\omega)_+ r\,\mathrm{d}r. \tag{6}$$

最近， [20] 推导出，当 V_+ 为径向非增时，可以将 (6) 右侧对角度取上确界替换为积分，即

$$N(D_\Phi^2 - V) \lesssim_\Phi \int_{\mathbb{R}^2} V(x)_+\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

然而，已知 [1] 对于一般的 $V \in L^1(\mathbb{R}^2)$，这种替换无法实现。

我们的主要结果是式 (3) 的以下磁性版本。

定理 1. 设 $\Phi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ 且 $\alpha > 0$。则存在一个常数 $C_{\Phi,\alpha} < \infty$，使得

$$N(D_\Phi^2 - V) \leqslant C_{\Phi,\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)_+^{1+\alpha/2} |x|^\alpha\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

对所有使右侧有限的 $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 均成立。此外，该不等式中的最优常数满足

$$C_{\Phi,\alpha} \sim_\alpha d(\Phi)^{-1-\alpha} \tag{9}$$

其中 $d(\Phi) :=$ 最小值$_{k\in\mathbb{Z}}\,|\Phi - k|$。

事实上，我们的证明给出了如下显式上界

$$C_{\Phi,\alpha} \leqslant \frac{\Gamma((1+\alpha)/2)}{4\pi^{3/2}\Gamma(1+\alpha/2)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n - \Phi|^{-1-\alpha}\,. \tag{10}$$

由此界我们立即得到式（9）中的上界$C_{\Phi,\ \alpha} \lesssim_\alpha d(\Phi)^{-1-\alpha}$。在定理1的证明中，我们将证明此界是精确的，从而得到当磁通量 Φ 趋近于整数值时常数的精确发散行为。

我们通过一个采用弱范数的该界的变体来补充定理 1。

推论 2. 设 $\Phi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ 和 $\alpha > 0$。那么存在一个常数 $C'_{\Phi,\,\alpha} < \infty$ 使得

$$N(D_\Phi^2 - V) \leqslant C'_{\Phi,\alpha} \sup_{t>0} t^{1+\alpha/2} \int_{|x|^2 V(x)_+ > t} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2} \tag{11}$$

对于所有使右侧有限的 $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ 。此外，常数可以选取得满足

$$C'_{\Phi,\alpha} \sim_\alpha d(\Phi)^{-1-\alpha}\,. \tag{12}$$

由于

$$\sup_{t>0} t^{1+\alpha/2} \int_{|x|^2 V(x)_+ > t} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2} \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} V(x)_+^{1+\alpha/2} |x|^\alpha \,\mathrm{d}x\,,$$

由 (11) 可得估计 (8)，而对于最佳常数，我们得到

$$C_{\Phi,\alpha} \leqslant C'_{\Phi,\alpha}\,. \tag{13}$$

不过，我们将采用不同的论证方式，并从定理 1 推导出推论 2。为此，我们使用一种秉承 M. Birman 和 M.Solomyak [5] 思路的插值论证。

与 $-\Delta - V$ 维数为 $d \geqslant 3$ 的情形相似，我们构造具有相同长程行为 (5) 的势的例子，它们在强耦合极限下使弱不等式 (11) 达到饱和。详情请参见第 4 节。特别是，我们将在那里证明，

$$C'_{\Phi,\alpha} \geqslant \frac{\Gamma((1+\alpha)/2)}{4\pi^{3/2}\Gamma(1+\alpha/2)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n-\Phi|^{-1-\alpha}\,, \tag{14}$$

这应与（10）进行比较。当然，这两个界与（13）一致。

接下来，我们介绍作用于反对称函数的二维薛定谔算子的结果。对于定义在 V 上的函数 $\mathbb{R}^2$ ，若其具有如下意义下的对称性：$V(x_1,\ x_2) = V(x_2,\ x_1)$ 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$ 成立，我们可以考虑 $-\Delta - V$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$中限制于反对称函数的算子，即在希尔伯特空间

$$L^2_{\mathbf{as}}(\mathbb{R}^2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) : u(x_1,x_2) = -u(x_2,x_1) \text{ for almost every } x \in \mathbb{R}^2\}\,.$$

我们将所得算子记为 $-\Delta_{\mathbf{as}} - V$。在假设 V径向非增的条件下，文献 [20],中给出了该算子对应的 CLR 不等式版本，即

$$N(-\Delta_{\mathbf{as}} - V) \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} V(x)_+ \,\mathrm{d}x.$$

然而，正如文献 [20, 的注 1]所指出的，对于一般的 V，该不等式并不成立。

我们的第二组主要结果是关于$-\Delta_{\mathbf{as}} - V$的强型和弱型加权CLR界，类似于我们为磁算子推导出的界。

定理 3. 设 $\alpha > 0$，则存在一个常数 $C_\alpha < \infty$，使得

$$N(-\Delta_{\mathbf{as}} - V) \leqslant C_\alpha \int_{\mathbb{R}^2} V(x)_+^{1+\alpha/2} |x|^\alpha \, \mathrm{d}x \tag{15}$$

对所有对称的 $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，只要右侧有限，结论均成立。

事实上，我们的证明给出了以下显式上界

$$C_\alpha \leqslant \frac{\Gamma((1+\alpha)/2)}{2\pi^{3/2}\Gamma(1+\alpha/2)} \, \zeta(1+\alpha) \,, \tag{16}$$

其中 ζ 是黎曼 ζ 函数。

推论 4. 令 $\alpha > 0$，则存在常数 $C'_\alpha < \infty$，使得

$$N(-\Delta_{\mathbf{as}} - V) \leqslant C'_\alpha \sup_{t>0} t^{1+\alpha/2} \int_{|x|^2 V(x)_+ > t} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2} \tag{17}$$

对所有对称的 $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，只要右侧有限，结论均成立。

此外，对于形式为 (5) 的长程势，在强耦合极限下可以达到推论中的界，从而得到下界

$$C'_\alpha \geqslant \frac{\Gamma((1+\alpha)/2)}{2\pi^{3/2}\Gamma(1+\alpha/2)} \, \zeta(1+\alpha) \,.$$

本文的安排如下：第 2 节给出定理 1 和 3 的证明。第 3 节推导上述不等式的弱形式。最后，第 4 节将说明，具有长程行为 (5) 的势在强耦合极限下可以达到这些界。

2. 定理 1 和 3 的证明

2.1. 阿哈罗诺夫–玻姆算子。 我们首先证明，当 $\Phi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ 且 V 满足定理 1 或推论 2 右侧有限时，算子 $D_\Phi^2 - V$ 在二次型意义下是良定义的。此论证的关键在于磁性哈代–索博列夫不等式

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D_\Phi u|^2 \, \mathrm{d}x \geqslant S_{\Phi,q} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^q}{|x|^2} \, \mathrm{d}x \right)^{2/q} \qquad \text{for all } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \,, \tag{18}$$

其中 $S_{\Phi,\,q} > 0$，且满足 $q \in [2,\ \infty)$。该不等式的证明可见[6, 第 3.1 节，步骤 1]，其依据是抗磁不等式以及适用于标量函数的卡法雷利–科恩–尼伦伯格不等式的一个特殊情形。或者，也可以用 [8]的方法推导该不等式。在特殊情形 $q = 2$ 下，具有最佳常数的不等式 (18) 由 [21]给出，形式如下

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D_\Phi u|^2 \, \mathrm{d}x \geqslant d(\Phi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x \,. \tag{19}$$

关于 $q > 2$ 的式 (18) 中最佳常数的一些结果可见于 [6]。

下面说明如何利用 (18) 定义算子 $D_\Phi^2 - V$。将 (18) 与赫尔德不等式结合，可得对于 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} V|u|^2 \,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} V_+^{1+\alpha/2}|x|^\alpha \,\mathrm{d}x\right)^{1/(1+\alpha/2)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^q}{|x|^2}\,\mathrm{d}x\right)^{2/q} \\ &\leqslant S_{\Phi,q}^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^2} V_+^{1+\alpha/2}|x|^\alpha \,\mathrm{d}x\right)^{1/(1+\alpha/2)} \int_{\mathbb{R}^2} |D_\Phi u|^2 \,\mathrm{d}x\,, \end{aligned} \tag{20}$$

其中 q 和 α 之间满足关系 $1/(1+\alpha/2) + 2/q = 1$。假设 $q < \infty$ 等价于 $\alpha > 0$。

现在，给定满足定理 1 中积分有限的 $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，并给定$\varepsilon > 0$，我们将 $V = V_1 + V_2$ 分解为 $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 和 $V_1 \geqslant 0$，使其满足

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_1^{1+\alpha/2}|x|^\alpha \,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

将 V_1 代入 (20)，可知 V 关于 D_Φ^2 是相对形式界为零的形式有界算子。因此，我们可以将 $D_\Phi^2 - V$定义为作用于 $L^2(\mathbb{R}^2)$上的自伴下半有界算子，其形式核为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$。

同时，给定使推论 2 中积分有限的$V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，并令 $\varepsilon > 0$。我们选取 $\tilde{q} \in (q, \infty)$，并通过 $1/(1+\tilde{\alpha}/2) + 2/\tilde{q} = 1$定义 $\tilde{\alpha} > 0$。我们可以将 $V = V_1 + V_2$ 分解为 $\||x|^2(V_2)_+\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant \varepsilon$ 和 $V_1 \geqslant 0$，使其满足

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_1^{1+\tilde{\alpha}/2}|x|^{\tilde{\alpha}} \,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

（事实上，我们只需取 $V_1 = |x|^{-2}(|x|^2V - \varepsilon)_+ - V_-$。）接下来像之前一样控制 V_1 部分，并利用 (19) 控制 V_2 部分，我们再次得到，V 相对于 D_Φ^2 是形式有界的，且相对界为零，因此 $D_\Phi^2 - V$是良定义的。

接下来，我们回顾一下，对于 $k \in \mathbb{Z}$，算子 $D_\Phi^2 - V$和 $D_{\Phi-k}^2 - V$是酉等价的，而算子 $D_\Phi^2 - V$和 $D_{-\Phi}^2 - V$是反酉等价的；例如参见 [6, 第 2.1]小节。因此，在下文中，我们可以只考虑 $\Phi \in (0,\ 1/2]$的情形。

W现在我们可以给出 $D_\Phi^2 - V$的加权CLR界的证明了。

定理 *1* 的证明。 固定 $\alpha > 0$ 并令 $V_+|x|^2 \in L^{1+\alpha/2}(\mathbb{R}^2;\ \mathrm{d}x/|x|^2)$。如上所述，我们可以假设 $\Phi \in (0,\ 1/2]$。此外，根据变分原理，我们可以假设 $V \geqslant 0$。根据 (20)，Birman–Schwinger 算子 $V^{1/2}(D_\Phi^2)^{-1}V^{1/2}$ 有定义且有界。改用极坐标和对数变量后，该算子变为 $\widetilde{V}_+^{1/2}(-\partial_t^2 + (\mathrm{i}\partial_\theta - \Phi)^2)^{-1}\widetilde{V}_+^{1/2}$ 在 $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$ 中，其中

$$\widetilde{V}(t,\theta) = e^{2t}V(e^t\cos\theta, e^t\sin\theta)\,.$$

应用 Birman–Schwinger 原理（参见例如 [11, 第 4.3 小节3]）和 Lieb–Thirring 不等式（参见 [23] 以及 [11, 定理 4.59]），我们得到：

$p = 1 + \alpha/2 > 1$

$$\begin{aligned} N(D_\Phi^2 - V) &= n_+(1, \widetilde{V}^{1/2}(-\partial_t^2 + (\mathrm{i}\partial_\theta - \Phi)^2)^{-1}\widetilde{V}_+^{1/2}) \\ &\leqslant \mathrm{Tr}(\widetilde{V}^{1/2}(-\partial_t^2 + (\mathrm{i}\partial_\theta - \Phi)^2)^{-1}\widetilde{V}^{1/2})^p \\ &\leqslant \mathrm{Tr}(\widetilde{V}^{p/2}(-\partial_t^2 + (\mathrm{i}\partial_\theta - \Phi)^2)^{-p}\widetilde{V}^{p/2}). \end{aligned} \tag{21}$$

为了计算迹，我们需要求算子 $(-\partial_t^2 +(\mathrm{i}\partial_\theta - \Phi)^2)^{-p}$的积分核，记为 $G_{\Phi,\ p}(t,\ \theta; \tau,\ \vartheta)$。注意到，通过连续傅里叶变换和离散傅里叶变换，$(-\partial_t^2 + (i\partial_\theta - \Phi)^2)$ in $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{S})$ 与在 $L^2(\mathbb{R})\times\ell_2(\mathbb{Z})$中乘以 $\xi^2 + (n-\Phi)^2$ 酉等价。因此，

$$G_{\Phi,p}(t,\theta;\tau,\vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathrm{i}n(\theta-\vartheta)}e^{\mathrm{i}\xi(t-\tau)}}{(\xi^2+(n-\Phi)^2)^p}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

鉴于 $\Phi \in (0,\ 1/2]$ 且 $p > 1$，上述求和收敛。此外，$g_{\Phi,\ p} := G_{\Phi,\ p}(t,\ \theta; t,\ \theta)$ 与 t和 θ无关，我们计算得

$$g_{\Phi,p} = \frac{\Gamma(p-1/2)}{4\pi^{3/2}\Gamma(p)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n-\Phi|^{1-2p} = \frac{\Gamma((1+\alpha)/2)}{4\pi^{3/2}\Gamma(1+\alpha/2)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n-\Phi|^{-1-\alpha}\,.$$

回到（21）中的估计，我们得出

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\widetilde{V}_+^{p/2}(-\partial_t^2 + (\mathrm{i}\partial_\theta - \Phi)^2)^{-p}\widetilde{V}_+^{p/2}) &= g_{\Phi,p}\int_{\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{V}(t,\theta)_+^p\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= g_{\Phi,p}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)_+^p|x|^{2p-2}\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

由此便完成了（8）的证明，其中常数由（10）给出。这立即推出（9）中的上界。下界则由以下注释得出。□

注5。标准论证表明，CLR型不等式 (8) 和磁性Hardy-Sobolev不等式 (18) 中的最佳常数满足

$$S_{\Phi,q} \geqslant C_{\Phi,\alpha}^{-2/(\alpha+2)} \qquad \text{with } \frac{2}{\alpha+2} + \frac{2}{q} = 1\,. \tag{22}$$

特别地，(10) 推出

$$S_{\Phi,q} \geqslant \left(\frac{\Gamma(1/2+2/(q-2))}{4\pi^{3/2}\Gamma(1+2/(q-2))}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n-\Phi|^{-1-4/(q-2)}\right)^{-(q-2)/q}$$

而 (9) 中的上界推出

$$S_{\Phi,q} \gtrsim_q d(\Phi)^{1+2/q}\,. \tag{23}$$

下面证明此上界是最优的，即

$$S_{\Phi,q} \lesssim_q d(\Phi)^{1+2/q}\,. \tag{24}$$

鉴于式 (22)，这将证明式 (9) 中的下界，从而完成定理 1 的证明。

我们固定 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 并定义

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \varphi((\ln r)/\ell)\, e^{in\theta}\,,$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$ 满足 $d(\Phi) = |n - \Phi|$。然后，对数坐标变换后，由 (18) 得

$$\ell^{-1}\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(t)|^2\,\mathrm{d}t + d(\Phi)^2\ell\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t \geqslant S_{\Phi,q}\left(\ell\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{2/q}.$$

取 $\ell = d(\Phi)^{-1}$，即可得到 (24)。

2.2. **反对称算子**。同样的构造和论证也适用于反对称算子。在这种情况下，Hardy–Sobolev 不等式 (18) 被以下不等式取代：

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \geqslant S_q\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^q}{|x|^2}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}} \qquad \text{for all antisymmetric } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \tag{25}$$

其中 $S_q > 0$，条件是 $q \in [2,\ \infty)$。该不等式的证明可见 [14]。在特殊情形 $q = 2$ 下，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{for all antisymmetric } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \tag{26}$$

其中最佳常数等于 1。

对于对称的 V，只要定理 3 或推论 4 中的右侧有限，我们就可以类似于 Aharonov– Bohm 情形定义算子 $-\Delta_{\mathbf{as}} - V$ 于 $L^2_{\mathbf{as}}(\mathbb{R}^2)$ 中。

定理 *3* 的证明。我们固定 $\alpha > 0$ 并取 $0 \leqslant V \in L^{1+\alpha/2}(\mathbb{R}^2;\ \mathrm{d}x/|x|^2)$，如前所述。$L^2_{\mathbf{as}}(\mathbb{R}^2)$ 中的 Birman–Schwinger 算子 $V^{1/2}(-\Delta_{\mathbf{as}})^{-1}V^{1/2}$ 与算子 $\widetilde{V}^{1/2}(-\partial_t^2 - \partial_\theta^2)^{-1}\widetilde{V}^{1/2}$ 酉等价，后者作用于函数 $u \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)\widetilde{\ }$组成的子空间，并满足 $u(t,\ \theta) = -u(t,\ \pi/2-\theta)$。这里，$V$的定义与定理 3 的证明中相同。像之前一样应用 Birman–Schwinger 原理和 Lieb–Thirring 不等式后，我们只需求出相应于作用于该子空间中的 $(-\partial_t^2 - \partial_\theta^2)^{-p}$的积分核 $G_p(t,\ \theta;\ \tau,\ \vartheta)$。为此，我们像之前一样，利用关于反对称角谐波 $\varphi_n(\theta) = \pi^{-1/2}\sin(n(\theta - \pi/4)),n \in \mathbb{N}$ 的傅里叶分解进行推导。由此可得

$$\begin{aligned} G_p(t,\theta;t,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^\infty \varphi_n(\theta)^2\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\xi^2+n^2)^p}\,\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant \frac{\Gamma(p-1/2)}{2\pi^{3/2}\Gamma(p)}\left(\sum_{n=1}^\infty n^{1-2p}\right) = \frac{\Gamma(p-1/2)}{2\pi^{3/2}\Gamma(p)}\,\zeta(2p-1)\,, \end{aligned}$$

其中 ζ 表示黎曼 ζ 函数。由此证明定理 3。 □

3. 插值与推论 2 和 4 的证明

本节分别由定理 1 和 3 推导出推论 2 和 4。我们采用 Birman 和 Solomyak [5], 所提出的一种插值论证变体，但避免明确提及插值理论或紧算子理想。

推论 *2* 的证明。我们固定 $\alpha > 0$，并回顾一下，我们可以假设 $0 < \Phi \leqslant 1/2$ 且 $V \geqslant 0$。取两个待定参数 $s > 0$ 和 $0 < \theta < 1$，我们写为

$$D_\Phi^2 - V = \theta(D_\Phi^2 - \theta^{-1} s|x|^{-2}) + (1-\theta)(D_\Phi^2 - (1-\theta)^{-1}|x|^{-2}(|x|^2 V - s))\,.$$

假设 $\theta^{-1} s \leqslant \Phi^2$，我们可以利用磁性 Hardy 不等式 (19) 来估计

$$D_\Phi^2 - V \geqslant (1-\theta)(D_\Phi^2 - (1-\theta)^{-1}|x|^{-2}(|x|^2 V - s)_+)\,.$$

因此，由变分原理可得

$$N(D_\Phi^2 - V) \leqslant N(D_\Phi^2 - (1-\theta)^{-1}|x|^{-2}(|x|^2 V - s)_+)\,.$$

对于任意 $0 < \beta < \alpha$，我们可以应用定理 1 并得到

$$N(D_\Phi^2 - V) \leqslant C_{\Phi,\beta}(1-\theta)^{-1-\beta/2} \int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 V(x) - s)_+^{1+\beta/2} \, \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2}\,.$$

简记 $[V] := \sup_{t>0} t^{1+\alpha/2} \int_{|x|^2 V(x) > t} \frac{x}{|x|^2}$，并使用层蛋糕表示，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2 V(x) - s)_+^{1+\beta/2} \, \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2} &= (1+\beta/2) \int_0^\infty \int_{|x|^2 V(x) - s > \sigma} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2} \, \sigma^{\beta/2} \, \mathrm{d}\sigma \\
&\leqslant (1+\beta/2)\,[V] \int_0^\infty (\sigma + s)^{-1-\alpha/2} \, \sigma^{\beta/2} \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{\Gamma(2+\beta/2)\,\Gamma((\alpha-\beta)/2)}{\Gamma(1+\alpha/2)} \, s^{(\beta-\alpha)/2} \, [V]\,.
\end{aligned}$$

在上一步计算中，我们使用了贝塔函数恒等式。为使这个界达到最小，我们选择 $s = \theta\Phi^2$，得到

$$N(D_\Phi^2 - V) \leqslant \frac{\Phi^{\beta-\alpha} \, C_{\Phi,\beta}}{\sup_{0<\theta<1} (1-\theta)^{1+\beta/2} \theta^{(\alpha-\beta)/2}} \frac{\Gamma(2+\beta/2)\,\Gamma((\alpha-\beta)/2)}{\Gamma(1+\alpha/2)} \, [V]\,.$$

还可以通过关于 $\beta \in (0,\alpha)$ 优化这个界。这就证明了（11）。取一个固定的 β（例如 $\beta = \alpha/2$），并注意到根据（9），$C_{\Phi,\beta} \lesssim_\beta \Phi^{-1-\beta}$，由此可得（12）中的上界。下界由（13）以及（9）中的下界推出。□

推论 4 的证明与推论 2 的证明类似，故略去。

4. 长程势与常数的行为

本节中，我们为任意的 $\alpha > 0$ a V 构造一个对象，它在强耦合极限下达到弱界 (11) 和 (17)。我们沿用针对维数 $d \geqslant 3$ in [2, 3, 16] 所进行的论证。

定理 6. 设 $\Phi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$，设 $p > 0$，并假设 $V \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 满足

$$V(x) = |x|^{-2}(\ln|x|)^{-1/p}\,(1 + o(1)) \qquad as\ |x| \to \infty\,.$$

那么对于 $p > 1$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-p} N(D_\Phi^2 - \lambda V) = \frac{\Gamma(p - 1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(p)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n - \Phi|^{2p-1}}\,,$$

对于 $p = 1$

$$\lim_{\lambda\to\infty} (\lambda \ln\lambda)^{-1} N(D_\Phi^2 - \lambda V) = \frac{1}{2}\,,$$

并且对于 $p < 1$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} N(D_\Phi^2 - \lambda V) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)_+\,\mathrm{d}x\,.$$

在定理中，我们清楚地看到了长程情形 $p \geqslant 1$ 与短程情形 $p < 1$之间的区别。在前一种情形下，渐近行为不受 V 局部行为的影响，而完全由其渐近行为决定；在后一种情形下，渐近行为则主要由 V的局部行为决定。

注意，若 V满足定理中关于 $p > 1$的条件，则有 $\alpha = 2(p - 1)$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-p} \sup_{t>0} t^{1+\alpha/2} \int_{\lambda|x|^2 V(x)_+ > t} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2} = \sup_{t>0} t^p \int_{|x|^2 V(x)_+ > t} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2} \in (0, \infty)\,.$$

因此，定理 6 表明，当 $\lambda \to \infty$时，势 λV 使弱界 (11) 达到饱和。

此外，$p = 1$ 的渐近行为表明，我们不能指望存在一个关于 V的一次齐次弱不等式 (11) 版本。

注 7。作为比较，若 $\Phi = 0$ 且 V 满足定理 6 中关于 $p > 1/2$ 的条件，则对所有 $\lambda > 0$都有 $N(-\Delta - \lambda V) = \infty$。对于 $p = 1/2$，只要 $\lambda > 1/4$，结论也同样成立；见命题 4。21]

证明。我们主要关注情形 $p \geqslant 1$，并在最后讨论情形 $p < 1$。令W_p 定义为

$$W_p(x) := \begin{cases} |x|^{-2}(\ln|x|)^{-1/p}, & |x| > e\,, \\ 0, & |x| \leqslant e\,. \end{cases} \tag{27}$$

我们将证明 $p \geqslant 1$ 在特殊情形 $V = W_p$ 下的定理。通过简单的逼近论证，即可推出一般情形下的结论。

我们首先简化问题。考虑算子 $D_\Phi^2 - \lambda W_p$ 在区域 $\{x$上的限制：$|x| > e\}$，并施加狄利克雷边界条件和诺伊曼边界条件，

分别记为 $H_\Phi^D(\lambda W_p)$ 和 $H_\Phi^N(\lambda W_p)$。于是，由于 $W_p \equiv 0$ 对 $|x| \leqslant e$成立，根据变分原理，

$$N(H_\Phi^D(\lambda W_p)) \leqslant N(D_\Phi^2 - \lambda W_p) \leqslant N(H_\Phi^N(\lambda W_p))\,. \tag{28}$$

由此可知，利用对数坐标 $r = e^{t+1}$ 以及 W_p的定义，我们只需估计算子

$$-\partial_t^2 + (\mathrm{i}\partial_\theta - \Phi)^2 - \lambda(t+1)^{-1/p} \text{ in } L^2((0,\infty)\times\mathbb{S}^1),$$

从上方和下方的负特征值数目，其中算子分别取在 $t = 0$处满足诺伊曼和狄利克雷边界条件的情形。

现在我们进一步进行夹逼论证。固定 $L > 0$，并对 $k \in \mathbb{N}_0$，用 $H_{k,L}^D(V)$ 和 $H_{k,L}^N(V)$ 表示 $-\partial_t^2 + (\mathrm{i}\partial_\theta - \Phi)^2 - V(t)$ 在区间$(kL,(k+1)L)$ 上的限制，分别满足狄利克雷和诺伊曼边界条件。然后，在 $(kL,(k+1)L)$上利用 $((k+1)L+1)^{-1/p} \leqslant (t+1)^{-1/p} \leqslant (kL+1)^{-1/p}$，

$$N(H_\Phi^D(\lambda W_p)) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} N(H_{k,L}^D(\lambda(t+1)^{-1/p})) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} N(H_{k,L}^D(\lambda((k+1)L+1)^{-1/p})) \tag{29}$$

and

$$N(H_\Phi^N(\lambda W_p)) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} N(H_{k,L}^N(\lambda(t+1)^{-1/p})) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} N(H_{k,L}^N(\lambda(kL+1)^{-1/p}))\,. \tag{30}$$

接下来需要估计这些量中的每一个，我们首先考虑 $p > 1$ 的情形。从下界入手，利用 (29) 可得

$$\begin{aligned} N(H_\Phi^D(\lambda W_p)) &\geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \#\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\colon \frac{\pi^2 m^2}{L^2} + (n-\Phi)^2 < \lambda((k+1)L+1)^{-1/p})\} \\ &\geqslant \sum_{m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}} \left(L^{-1}\lambda^p\left(\pi^2 m^2/L^2 + (n-\Phi)^2\right)^{-p} - 1 - L^{-1}\right)_+ = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II})\,, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}) &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{Z}} \left(L^{-1}\lambda^p\left(\pi^2 m^2/L^2 + (n-\Phi)^2\right)^{-p} - 1 - L^{-1}\right)_+ \\ &\geqslant \lambda^p \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty \left(\left(\pi^2\tau^2 + (n-\Phi)^2\right)^{-p} - \lambda^{-p}(L+1)\right)_+ \mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (\mathrm{II}) &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(L^{-1}\lambda^p|n-\Phi|^{-2p} - 1 - L^{-1}\right)_+ \\ &\geqslant -L^{-1}\lambda^p \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n-\Phi|^{-2p}. \end{aligned}$$

与此同时，对于上界 (30)，我们发现

$$\begin{aligned} N(H_\Phi^N(\lambda W_p)) &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \#\{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}\colon \frac{\pi^2 m^2}{L^2}+(n-\Phi)^2<\lambda(kL+1)^{-1/p}\} \\ &= (\mathrm{III})+(\mathrm{IV}), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} (\mathrm{III}) &= \#\{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}\colon \frac{\pi^2 m^2}{L^2}+(n-\Phi)^2<\lambda\} \\ &\leqslant \#\{n\in\mathbb{Z}\colon (n-\Phi)^2<\lambda\}+\sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi^{-1}L\left(\lambda-(n-\Phi)^2\right)_+^{1/2} \\ &\leqslant (2\sqrt{\lambda}+1)+2\pi^{-1}L(\lambda-\Phi^2)_+^{1/2}+\pi^{-1}L\int_{\mathbb{R}}(\lambda-(t-\Phi)^2)_+^{1/2}\,\mathrm{d}t \\ &= (2\sqrt{\lambda}+1)+2\pi^{-1}L(\lambda-\Phi^2)_+^{1/2}+2^{-1}L\lambda \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (\mathrm{IV}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \#\{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}\colon \frac{\pi^2 m^2}{L^2}+(n-\Phi)^2<\lambda(kL+1)^{-1/p}\} \\ &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{Z}} \left(L^{-1}\lambda^p\left(\pi^2m^2/L^2+(n-\Phi)^2\right)^{-p}-L^{-1}\right)_+ \\ &\leqslant \lambda^p\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \left(\left(\pi^2\tau^2+(n-\Phi)^2\right)^{-p}-\lambda^{-p}\right)_+\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

取 $\lambda\to\infty$ 时的上极限和下极限，再取极限 $L\to\infty$，我们得到

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda\to\infty}\lambda^{-p}N(H_\Phi^D(\lambda W_p)) &\geqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \left(\pi^2\tau^2+(n-\Phi)^2\right)^{-p}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\Gamma(p-1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(p)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|n-\Phi|^{2p-1}}, \end{aligned}$$

类似地

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda^{-p}N(H_\Phi^N(\lambda W_p)) \leqslant \frac{\Gamma(p-1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(p)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|n-\Phi|^{2p-1}}.$$

这就证明了所声称的关于 $p>1$ 的界。

对于 $p=1$ 的情形，我们仔细考察会产生对数发散的项。在这种情况下，区间的选择并不重要，因此我们取 $L=1$。

首先利用 (29) 得到

$$\begin{aligned} N(H_\Phi^D(\lambda W_1)) &\geqslant \lambda \sum_{m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}} \Big(\big(\pi^2 m^2 + (n-\Phi)^2\big)^{-1} - 2\lambda^{-1} \Big)_+ \\ &\geqslant \lambda \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \int_1^\infty \Big(\big(\pi^2\tau^2 + (t-\Phi)^2\big)^{-1} - 2\lambda^{-1} \Big)_+ \,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t - O(\lambda) \\ &\geqslant \lambda(2\pi)^{-1} \iint\limits_{\sigma^2+s^2>R_1^2} \Big(\big(\sigma^2+s^2\big)^{-1} - 2\lambda^{-1} \Big)_+ \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s - O(\lambda), \end{aligned}$$

其中 $R_1^2 := (\pi^2 + (1-\Phi)^2)/2$。在推导最后一行时，我们扩大了第一项中的积分区域，并注意到增加的积分为 $O(\lambda)$。对于上界 (30)，在上述分解中，项 (III) 的阶为 $O(\lambda)$，当 $\lambda \to \infty$ 时，因此我们得到

$$\begin{aligned} N(H_\Phi^N(\lambda W_1)) &\leqslant O(\lambda) + (\mathrm{IV}) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{Z}} \#\{k\in\mathbb{N}\colon k < \lambda \left(\pi^2 m^2 + (n-\Phi)^2\right)^{-1} - 1\} + O(\lambda) \\ &= \lambda \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\{1\},n\in\mathbb{Z}} \Big(\big(\pi^2 m^2 + (n-\Phi)^2\big)^{-1} - \lambda^{-1} \Big)_+ + O(\lambda) \\ &\leqslant \lambda(2\pi)^{-1} \iint\limits_{\sigma^2+s^2>R_2^2} ((\sigma^2+s^2)^{-1} - \lambda^{-1})_+ \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s + O(\lambda) \end{aligned}$$

其中 $R_2^2 := \pi^2 + (1-\Phi)^2$。对于 $R = R_1,\ R_2$ 我们计算得

$$\iint\limits_{\sigma^2+s^2>R^2} ((\sigma^2+s^2)^{-1} - \lambda^{-1})_+ \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_R^{\sqrt{\lambda}} (r^{-2} - \lambda^{-1}) r \,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\ln\lambda + O(1)\,.$$

这证明了所声称的 $p = 1$ 界。

最后，我们讨论 $p < 1$ 的情形。显然有

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} N(D_\Phi^2 - \lambda V) \geqslant \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)_+ \,dx\,. \tag{31}$$

事实上，对于给定的、充分大的 $R > 0$，我们对 $V \geqslant V\mathbb{I}(|x| < R)$ 作出界（这里我们利用了 V 在某个有界集之外非负这一事实），然后在 $|x| = R$ 处施加狄利克雷条件，从而用区域 $\{|x| < R\}$ 上相应狄利克雷算子的负特征值个数给出 $N(D_\Phi^2 - \lambda V)$ 的下界。根据 [10, 推论 1.2]，后一个算子满足韦尔渐近行为。由于 $R > 0$ 可以任意大，我们得到 (31)。

为证明

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1} N(D_\Phi^2 - \lambda V) \leqslant \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} V(x)_+ \,dx\,, \tag{32}$$

我们对所有 $R>1$, $\widetilde{W}_p(x)=\mathbb{I}(|x|>R)|x|^{-2}(\ln|x|)^{-1/p}+\mathbb{I}(|x|\leqslant R)R^{-2}(\ln R)^{-1/p}\}$ 设定。对于 $0<\theta<1$ 和 $\varepsilon>0$，我们分解

$$D_\Phi^2-\lambda V=\theta\left(D_\Phi^2-\theta^{-1}(1+\varepsilon)\lambda\widetilde{W}_p\right)+(1-\theta)\left(D_\Phi^2-(1-\theta)^{-1}\lambda(V-(1+\varepsilon)\widetilde{W}_p)\right)$$

并得到

$$N(D_\Phi^2-\lambda V)\leqslant N(D_\Phi^2-\theta^{-1}(1+\varepsilon)\lambda\widetilde{W}_p)+N(D_\Phi^2-(1-\theta)^{-1}\lambda(V-(1+\varepsilon)\widetilde{W}_p)_+)\,.$$

由于 $\widetilde{W}_p$ 是径向非增的，由 (6) 或 (7) 可知

$$N(D_\Phi^2-\theta^{-1}(1+\varepsilon)\lambda\widetilde{W}_p)\lesssim_\Phi\theta^{-1}(1+\varepsilon)\lambda\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{W}_p\,\mathrm{d}x\lesssim_{\Phi,p}\theta^{-1}(1+\varepsilon)(\ln R)^{1-1/p}\lambda\,.$$

同时，根据假设，存在一个 $R_\varepsilon<\infty$，使得对所有 $|x|\geqslant R_\varepsilon$，都有 $V(x)\leqslant(1+\varepsilon)|x|^{-2}(\ln|x|)^{-1/p}$。因此，势 $(V-(1+\varepsilon)\widetilde{W}_p)_+$ 支撑在一个球内，并利用 [27] 可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}N(D_\Phi^2-(1-\theta)^{-1}\lambda(V-(1+\varepsilon)\widetilde{W}_p)_+)=\frac{1}{4\pi}(1-\theta)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}(V-(1+\varepsilon)\widetilde{W}_p)_+\,\mathrm{d}x\,.$$

因此，我们已经证明

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}N(D_\Phi^2-\lambda V)\leqslant\frac{1}{4\pi}(1-\theta)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}(V-(1+\varepsilon)\widetilde{W}_p)_+\,\mathrm{d}x+C_{\Phi,p}\theta^{-1}(1+\varepsilon)(\ln R)^{1-1/p}.$$

令 $R\to\infty$，利用 V和 $p<1$的可积性，可得

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}N(D_\Phi^2-\lambda V)\leqslant\frac{1}{4\pi}(1-\theta)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}V_+\,\mathrm{d}x\,.$$

由于 $\theta\in(0,\ 1)$ 是任意的，我们得到（32）。证明至此完成。 □

注 8。 我们利用定理 6 证明 $C'_{\Phi,\ \alpha}$上的下界（12）。设 $\alpha>0$和 $p=1+\alpha/2>1,$，则对于证明定理 6 时的 W_p

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-p}\sup_{t>0}t^p\int_{\lambda W_p|x|^2>t}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^2}=\sup_{t>0}t^p\int_{W_p|x|^2>t}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^2}=2\pi,$$

因此，由定理 6 中的渐近公式可得，

$$C'_{\Phi,\alpha}\geqslant\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N(D_\Phi^2-\lambda W_p)}{\sup_{t>0}t^p\int_{\lambda W_p|x|^2>t}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^2}}=\frac{\Gamma(\alpha/2+1/2)}{4\pi^{3/2}\Gamma(1+\alpha/2)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n-\Phi|^{-1-\alpha}.$$

这就证明了（12）。

最后，我们指出，通过几乎完全相同的论证，相应的结果在反对称情形下也成立。我们在下文陈述这些结果而不予证明。

定理9。 设 $p\geqslant1$，并令 V如定理 6 中所述。则对于 $p>1$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-p}N(-\Delta_{\mathbf{as}}-\lambda V)=\frac{\Gamma(p-1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)}\,\zeta(2p-1)$$

以及对于 $p=1$

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda\ln\lambda)^{-1}N(-\Delta_{\mathbf{as}}-\lambda V)=\frac{1}{2}\,.$$

致谢。 谨此感谢美国国家科学基金会资助项目 DMS-1954995（R.L.F）以及德国研究联合会卓越战略资助项目 EXC-2111-390814868（R.L.F.）提供的部分支持。

参考文献

[1] A. A. Balinsky、W. D. Evans 和 R. T. Lewis, 《关于带阿哈罗诺夫–玻姆磁场的薛定谔算子的负特征值数》。Proc. Roy. Soc. London 457 (2001), 2481–2489.[2] M. S. Birman 和 M. Z. Solomyak, 《大耦合常数下薛定谔算子的负离散谱：定性讨论》。载于《量子系统中的有序、无序与混沌》，第 3–16 页。Birkhäuser Basel，巴塞尔，1990.[3] M. S. Birman 和 M. Z. Solomyak, 《薛定谔算子：将束缚态数视为函数论问题的估计》。第 1–54 页。1992 年第 3 期.[4] M. S. Birman 和 A. Laptev, 《二维薛定谔算子的负离散谱》。Comm. Pure Appl. Math. 49 (1996), 967–997.[5] M. S. Birman 和 M. Z. Solomyak, 《薛定谔算子负特征值数的插值估计》。载于 Pavel Exner（编），《薛定谔算子：标准与非标准》，第 3–18 页，杜布纳，1988。World Scientific.[6] D. Bonheure、J. Dolbeault、M. J. Esteban、A. Laptev 和 M. Loss, 《二维阿哈罗诺夫–玻姆磁场不等式中的对称性结果》。Comm. Math. Phys., 375 (2020), (3) 2071–2087.[7] M. Cwikel, 《奇异值及薛定谔算子束缚态数的弱型估计》。Ann. of Math. 106 (1997), 93–100.[8] Y. V. Egorov 和 V. A. Kondrat'ev, 《关于薛定谔算子负谱点数的估计》。Math. USSR-Sb. 62 (1989), 551–566.[9] R. L. Frank, 《最小假设下的韦尔定律》，载于 M Brown 等（编）：《从复分析到算子理论：全景》，即将出版。预印本（2022）：arXiv:2202.00323.[10]R. L. Frank、A. Laptev, 《区域上二维薛定谔算子负特征值数的界》。《代数与分析》30 (2018), 第 3 期，250–272；重印于《圣彼得堡数学杂志》30 (2019), 第 3 期，573–589.[11] R. L. Frank、A. Laptev 和 T. Weidl, 《薛定谔算子：特征值与 Lieb–Thirring 不等式》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2022.[12] V. Glaser、H. Grosse 和 A. Martin, 《薛定谔算子特征值数的界》。Comm. Math. Phys. 59 (1978), 197–212..[13] A. Grigor'yan 和 N. Nadirashvili, 《二维薛定谔算子的负特征值》。《理性力学与分析档案》217 (2015), 第 3 期，975–1028.[14] T. Hoffmann-Ostenhof 和 A. Laptev, 《反对称函数的 Hardy 不等式》。《函数分析及其应用》55 (2021), 122–129.[15] N. N. Khuri、A. Martin 和 T. T. Wu, 《 n 维中的束缚态（尤其是 $n = 1$ 和$n = 2$）》《少体系统》31 (2002), 83–89.[16] A. Laptev, 《大耦合常数下一类薛定谔算子负离散谱的渐近行为》。《美国数学会会刊》119 (1993), 第 2 期，481–488..[17] A. Laptev、Yu. Netrusov, 《一类薛定谔算子的负特征值》。载于：《微分算子与谱理论》，173–186 页，美国数学会译丛（第二辑）189，《数学科学进展》41，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999.[18] A. Laptev、M. Solomyak, 《径向势二维薛定谔算子的负谱》。《数学物理通讯》314 (2012), 第 1 期，229–241。

[19] *A. Laptev*、*M. Solomyak*，《二维薛定谔算子的谱估计》。《谱理论杂志》*3 (2013)*，第 *4* 期，*505–515*.[20] *A. Laptev*、*L. Read* 和 *L. Schimmer*，《二维 *Calogero* 型界》。《理性力学与分析档案》*245 (2022), 1491–1505*.[21] *A. Laptev* 和 *T. Weidl*，《磁狄利克雷型的 *Hardy* 不等式》。载于《算子理论：进展与应用》*108 (1999), 299–305*.[22] *E. H. Lieb*，《拉普拉斯算子和薛定谔算子特征值的界》。《美国数学会通报》*82 (1976), 751–753*.[23] *E. H. Lieb* 和 *W. E. Thirring*，《薛定谔哈密顿量特征值矩的不等式及其与索博列夫不等式的关系》。载于：《数学物理研究》，第 *269–303* 页，*1976*.[24] *S. Molchanov* 和 *B. Vainberg*，《一般薛定谔算子计数函数的 *Bargmann* 型估计》。《数学分析问题》*65 (2012), 77–118*；英文译文见《数学科学杂志》*184 (2012)*，第 *4* 期，*457–508*.[25] *G. V. Rozenblum*，《奇异微分算子离散谱的分布》。《苏联科学院学报》*202 (1972), 1012–1015*.[26] *E. Shargorodsky*，《二维薛定谔算子的负特征值》。《伦敦数学会会刊》*108 (2014), 441–483*.[27] *M. Solomyak*，《来自 $H^l((0、1)^d)$、$2l = d$的函数的分段多项式逼近及其在薛定谔算子谱理论中的应用》。《以色列数学杂志》*86 (1994)*，第 *1–3* 期，*253–275*。（*Rupert L. Frank*）慕尼黑大学数学研究所，*Theresienstr. 39, 80333* 慕尼黑，德国；慕尼黑量子科学与技术中心，*Schellingstr. 4, 80799* 慕尼黑，德国；以及加州理工学院数学系 *253-37*, 帕萨迪纳，加利福尼亚州 *91125*，美国。电子邮箱： r.frank@lmu.de（*Ari Laptev*）伦敦帝国理工学院数学系，伦敦 *SW7 2AZ*，英国；以及天狼星数学中心，天狼星科技大学，*1 Olympic Ave, 354340*，索契，俄罗斯。电子邮箱： a.laptev@imperial.ac.uk（*Larry Read*）伦敦帝国理工学院数学系，伦敦 *SW7 2AZ*，英国。电子邮箱： l.read19@imperial.ac.uk