arXiv:2303.06205v2 [math.LO] 3 Jul 2023

偏序对与 amalgamation 性质

Paolo Lipparini

Abstract. 我们证明，偏序集、格、半格、布尔代数、带有另一种更粗偏序的海廷代数，以及带有线性化或辅助关系的上述结构的理论，都具有强 amalgamation 性质和 Fra¨ıss´e 极限；其中许多理论还具有 ω-范畴的模型完备化，并满足量词消去。Kronheimer 和 Penrose 的因果空间也具有同样的性质。另一方面，Urquhart 双序集不具有 amalgamation 性质。

我们的主要工具是超 amalgamation 性质（仅有强 amalgamation 性质并不足够），因此我们进一步提供论据，说明超 amalgamation 性质在纯模型论中同样有用，而不仅限于代数逻辑。

1. 引言

线序集理论和图论是关系语言中具有 amalgamation 性质的经典例子；它们也是允许有限模型存在 Fra¨ıss´e 极限的基本例子。它们的 Fra¨ıss´e 极限分别是有理数的有序集和随机图 [5, 8]。偏序集也具有 amalgamation 性质和 Fra¨ıss´e 极限 [5, 10]。

更一般地，考虑二元关系 R的以下性质：1. R 是传递的；2. R 是自反的；3. R 是对称的；4. R 是反自反的；5. R 是反对称的。在 [17] 中，我们证明，经典论证表明，对于每个 $P \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$，满足 P 中所列性质的二元关系理论都具有 amalgamation 性质。此外，正如以下定理所述，我们证明了这一结果可推广到可比较二元关系对，即使它们满足的性质集合可能不同。

定理 1.1. [17, 定理 3.1] 对于每一对 $P, Q \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$，满足 P 中性质的二元关系 R，以及满足 Q 中性质的更粗关系 S，其理论具有强 amalgamation 性质和超 amalgamation 性质，因此对于有限模型存在模型完备化和 Fra¨ıss´e 极限。

2020 *Mathematics Subject Classification*: 03C52；06A75；06F99。
Key words and phrases: 强 amalgamation 性质；超 amalgamation 性质；Fra¨ıss´e 极限；二元关系对；辅助关系；Urquhart 双序集；因果空间。在 G.N.S.A.G.A. 资助下完成。作者感谢 MIUR 部门项目对罗马第二大学数学系的资助，项目编号 CUP E83C18000100006。

定理 1.1 不适用于可比较关系三元组 [17,命题 3.5]；不过，它可以推广到任意一组具有任意指定可比较关系族 [18] 的传递关系。

这里我们给出定理 1.1 的推广，讨论具有超 amalgamation 性质且带有另一个二元关系的类。特别是，带有另一个更粗的偏序或线性化的格、半格、布尔代数和海廷代数都具有 amalgamation 性质。

我们还考察一些其 amalgamation 状态不在上述结果涵盖范围内的经典理论。若 S 是一个带有偏序 $\leq$ （下文简称偏序集）的集合，辅助关系 [4, Definition I-1.11]是一个反对称且传递的二元关系 $\ll$，它比该偏序更细，并满足以下条件

$$w \leq x \ll y \leq z \text{ implies } w \ll z. \tag{A}$$

辅助关系的典型例子是远低于关系 [4, I-1]，它是连续格和域理论中的重要工具；而连续格和域又在计算理论、程序语言语义以及数学的诸多分支中有广泛应用[4]。具有更多结构的有序集上的辅助关系也出现在其他不同背景中，与拓扑对偶、代数逻辑以及拓扑学的各种推广相关。综述请见 [3] 。

在第 3 节和第 4 节中，我们证明，带辅助关系的偏序集（或格、半格、布尔代数、海廷代数）理论具有强 amalgamation 性质；对于有限结构，在许多情况下还存在 Fra¨ıss´e 极限，以及模型完备化。对于因果空间理论，也有类似结果。该理论由 Kronheimer 和 Penrose 在 [15] 中提出，旨在探讨广义相对论中的基础问题。用一种等价的表述来说，因果空间是带有反自反辅助关系的偏序集。带辅助关系的偏序集理论与因果空间理论在形式上的相似之处或许有更深层的含义；参见 [20] 中的讨论。有关上述概念的更多细节，请参见第 3 节。

更明确地说，我们关于上述概念的主要结果陈述如下定理。

有序结构中的序关系通常记作 $\leq$。特别地，$\leq$ 表示由并半格、交半格、格或布尔结构自然诱导的序。为了具有联合嵌入性质，我们假设布尔代数和海廷代数是非平凡的（即 $0 \neq 1$），并且布尔代数和海廷代数中的辅助关系满足 $0 \ll 0$ 和 $1 \ll 1$。

定理 1.2. 假设 T^- 是以下理论之一：偏序理论、格、并半格、交半格、布尔代数或海廷代数。在添加了二元关系 $\ll$ 的语言中，设 T 是通过添加以下公理之一对 T^- 作出的任意扩张：

(1) $\ll$ 是比 $\leq$更粗的自反序关系，或 (2) $\ll$ 是 $\leq$ 的线性化，或 (3) $\ll$是辅助关系。

或者，令 T 为因果集理论。

那么 T 具有强 amalgamation 性质；更一般地，关于 $\leq$具有超 amalgamation 性质。

T 的有限模型类有一个 Fra¨ıss´e 极限 M。除格和海廷代数外，M 的一阶理论是 ω-范畴的，具有量词消去，并且是 T的模型完备化。

定理 1.2 的 (1) 和 (2) 部分将在第 2 节末尾证明。对于偏序，定理 1.2 (3) 是定理 3.2 的一个特例，该定理将在第 3 节证明。因果集理论的情况也一样。其余情况由第 4 节中的定理 4.2 得出。详细内容见第 4 节末尾。

定理 1.2 的证明中关键在于，格、半格等具有超 amalgamation 性质：一般而言，这一结果适用于任何此类理论。见下文定理 4.2。论证中需要超 amalgamation 性质：仅有强 amalgamation 性质是不够的。见注 6.1 和 6.2。迄今为止，超 amalgamation 性质的主要应用见于代数逻辑，例如 [7, 12,19]。我们的结果表明，超 amalgamation 性质也具有一定的模型论意义。类似的情况也出现在 [16], ，读者或许能在那里找到更多评论。

考虑另一种包含两个二元关系的理论，Urquhart [21] 在格的表示理论研究中引入了双序集。在第 5 节中，我们证明 Urquhart 双序集不具有 amalgamation 性质；更一般地，对于满足 Urquhart 条件的一对传递关系，amalgamation 性质也不成立。

现在回顾一些基本概念。这里的模型采用经典模型论意义上的定义 [8]。有序结构是带有偏序 $\leq$，并且可能还带有其他关系、函数和常量的模型。

如果同一类型的模型类 $\mathcal{K}$ 满足以下条件，则称其具有 amalgamation 性质（AP）：每当 A、B、C $\in \mathcal{K}$，且 $\iota_1 \colon \mathrm{C} \to \mathrm{A}$ 和 $\kappa_1 \colon \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ 是嵌入时，就存在一个模型 D $\in \mathcal{K}$ 以及嵌入 $\iota \colon \mathrm{A} \to \mathrm{D}$ 和 $\kappa \colon \mathrm{B} \to \mathrm{D}$，使得$\iota_1 \circ \iota = \kappa_1 \circ \kappa$。此外，如果总能以满足 $\iota(A) \cap \kappa(B) = (\iota_1 \circ \iota)(C)$ 的方式选取 D、 ι 和 κ，则称 $\mathcal{K}$具有强 amalgamation 性质（SAP）。关于 AP 经典结果的综述，见 [13] 。

进一步假设， $\mathcal{K}$ 是带有序关系 $\leq$的有序结构类。那么，对于 $\leq$，$\mathcal{K}$ 具有超 amalgamation 性质；或者在理解 $\leq$ 的情况下，简称为超 amalgamation 性质：此外，如果对于每个 $a \in A \setminus \iota_1(C)$ 和 $b \in B \setminus \kappa_1(C)$，当 $\iota(a) \leq_{\mathbf{D}} \kappa(b)$ 时，存在 $c \in C$，使得 $a \leq_{\mathbf{A}} \iota_1(c)$、 $\kappa_1(c) \leq_{\mathbf{B}} b$，并且相应的结论也成立

当 $\iota(a) \geq_{\mathbf{D}} \kappa(b)$ 时。超 amalgamation 性质在代数逻辑中已得到重要应用 [7, 12]。注意，由于 $\leq$ 是传递的，超 amalgamation 性质在 ι_1(A) $\cup$ κ_1(B) 上唯一确定了 $\leq$。

我们也将使用上述定义，只需用任意二元关系 R 替代序 $\leq$即可。这种推广也有一定用途 [19]。

如果 $\mathcal{H}$ 是同一类型的另一个模型类，并且对于 $\mathcal{K}$ 中的任意 A、B、C 以及 ι_1，如上所述的 κ_1，都存在某个 D 属于 $\mathcal{H}$（但不一定属于 $\mathcal{K}$），以及如上所述的嵌入 ι、κ，那么我们称 $\mathcal{K}$ 在 $\mathcal{H}$ 中具有（强、超）amalgamation 性质。

2. 具有超 amalgamation 性质的有序结构

本节将证明定理 1.2 的第 (1)–(2) 部分。本节是对后续章节将用到的方法的良好介绍。

引理 2.1。设 $(D, \leq_D, \ll_D)$ 是一个带有两个偏序的集合，且 $\ll_D$ 比 $\leq_D$ 更粗。如果 $(E, \leq_E)$ 是扩张 $(D, \leq_D)$ 的一个偏序集，那么在 E 上存在一个序 $\ll_E$，使得 $\ll_E$ 比 $\leq_E$ 更粗，并且 $(E, \leq_E, \ll_E)$ 扩张 $(D, \leq_D, \ll_D)$。

证明。令 $e \ll_E f$ on E 当且仅当 $e \leq_E f$，或者存在 $h, k \in D$ 使得 $e \leq_E h \ll_D k \leq_E f$。根据构造，$\ll_E$ 比 $\leq_E$ 更粗。此外，$\ll_E$ 扩展了 $\ll_D$。事实上，若 $e, f \in D$ 且 $e \ll_D f$，则根据定义，并且由于 $\leq_E$ 是自反的，$e \ll_E f$。反过来，若 $e, f \in D$ 且 $e \ll_E f$ 由 $e \leq_E f$ 给出，则 $e \leq_D f$，因为 $e, f \in D$ 且 $\leq_E$ 扩展了 $\leq_D$，因此 $e \ll_D f$；根据假设，$\ll_D$ 比 $\leq_D$ 更粗。另一方面，若 $e, f \in D$ 且 $e \ll_E f$ 由 $e \leq_E h \ll_D k \leq_E f$ 给出，则 $e \leq_D h \ll_D k \leq_D f$，因为 $e, h, k, f \in D$。因此 $e \ll_D h \ll_D k \ll_D f$，由于 $\ll_D$ 比 $\leq_D$ 更粗，根据 $\ll_D$ 的传递性可得 $e \ll_D f$。

现在我们来验证 $\ll_E$ 是传递的。如果 $e \ll_E f \ll_E g$ 由以下对象见证：

$$e \leq_E h \ll_D k \leq_E f \leq_E p \ll_D q \leq_E g, \tag{2.1}$$

那么根据 $\leq_E$的传递性，$k \leq_E p$。由于 $k, p \in D$，于是 $k \leq_D p$，因此 $k \ll_D p$，因为 $\ll_D$ 比 $\leq_D$更粗。因此 $h \ll_D k \ll_D p \ll_D q$，所以 $h \ll_D q$，根据 $\ll_D$的传递性。于是（2.1）写作 $e \leq_E h \ll_D q \leq_E g$，这意味着根据定义有 $e \ll_E g$。其他情况由 $\leq_E$的传递性可立即得出。

还需检查 $\ll_E$ 是反对称的。假设 $e \ll_E f \ll_E e$ 由带有 $g = e$ 的 (2.1) 见证。我们已经证明 $h \ll_D k \ll_D p \ll_D q$。此外，$q \leq_E g = e \leq_E h$，因此 $q \leq_E h$、$q \leq_D h$ 和 $q \ll_D h$，因为 q、$h \in D$，且 $\ll_D$ 比 $\leq_D$ 更粗。于是 $h \ll_D k \ll_D p \ll_D q \ll_D h$，从而由 $\ll_D$ 的传递性和反对称性可得 $h = k = p = q$。最后，由 $h = k$、$p = q$ 以及带有 $g = e$ 的 (2.1)，我们得到 $e \leq_E h \leq_E f \leq_E p \leq_E e$，从而由 $\leq_E$ 的传递性和反对称性可得 $e = f$。其他情况要简单得多

。例如，若 $e \leq_E h \ll_D k \leq_E f \leq_E e$，则 $k \leq_E f \leq_E e \leq_E h$，因此 $k \leq_E h$、$k \leq_D h$、$k \ll_D h$，故由 $\ll_D$ 的反对称性可得 $k = h$。因此 $e \leq_E h \leq_E f \leq_E e$，故 $e = f$。□

下一个定理汇集了一些经典结果，其中有些并未明确陈述。该定理可由 [7, 10, 14] 中的一些证明推出。完整细节请参见[16, 定理 2.4] 的证明。

定理 2.2. 偏序集、交半格、并半格、格、布尔代数和海廷代数这些类都具有超 amalgamation 性质。有限的此类结构也同样如此。

注 2.3. 为简单起见，假设待融合的结构满足 $A \cap B = C$，且嵌入 ι_1 和 κ_1 都是包含映射。在定理 1.1 的证明中，每种情况下，amalgamation 模型都是在 $D = A \cup B$之上构造的。撇开具体证明不谈，这一事实无论如何都可由定理陈述推出，因为定理 1.1 讨论的是关系语言；如果某个普遍关系理论具有强（超） amalgamation 性质，那么它就具有“在并之上”的（超） amalgamation 性质：只需考虑一个适当的子结构即可。下面的定理 3.2 也有类似的说明。

有时，能够在 $D = A \cup B$ 上得到 amalgamation 模型会很有用 [18]。作为其他例子，下面的注记还将在下一个证明、定理 4.2 的证明以及下文的注 3.3(a) 中使用。

定理 1.2 的证明，第 (1) 部分：超 amalgamation。不失一般性，假设 A、B、C 是 T 的成员，使得 C $\subseteq$ A、B，且 $A \cap B = C$。令 $\mathbf{A}^-$、$\mathbf{B}^-$ 和 $\mathbf{C}^-$ 分别为 A、B 和 C 在 T^- 语言下的约化。由定理 2.2，存在一个模型 $\mathbf{E}^-$，在适当的类别（偏序集、半格等）中，使 $\mathbf{A}^-$ 和 $\mathbf{B}^-$ 在 $\mathbf{C}^-$ 上超 amalgamation。不失一般性，我们可以假设 $\mathbf{E}^-$ 同时扩张 $\mathbf{A}^-$ 和 $\mathbf{B}^-$。令$D = A \cup B$。由定理 1.1 和注 2.3，A 和 B 的 $\{\leq, \ll\}$-约化可以通过一个 amalgamation 结构 $(D, \leq, \ll)$ 在 D 上，与 C 的 $\{\leq, \ll\}$-约化进行超 amalgamation。特别地，设 $(A, \ll)$ 嵌入 $(D, \ll)$。

由于超 amalgamation 性质唯一确定了 $A \cup B$ 上的序，因此 $(D, \leq)$ 是 $(E, \leq)$ 的子结构。根据引理 2.1，存在 E 上的一个序 $\ll_E$，使得 $(D, \leq, \ll)$ 嵌入 $(E, \leq, \ll_E)$，且 $\ll_E$ 比 $\leq_E$ 更粗。若通过添加 $\ll_E$ 扩充 $\mathbf{E}^-$，便得到 T 的一个模型 E。由于 $(A, \ll)$ 嵌入 $(D, \ll)$，且 $(D, \ll)$ 嵌入 $(E, \ll_E)$，因此 $(A, \ll)$ 嵌入 $(E, \ll_E)$，$(B, \ll)$ 也同样如此。由于 $\mathbf{E}^-$ 同时扩充了 $\mathbf{A}^-$ 和 $\mathbf{B}^-$，这就处理了 T^- 的语言。因此，E 在 C 上超 amalgamation A 和 B。

（第二部分，超 amalgamation）如果 $\ll$ 是 A、B、C 中 $\leq$ 的线性化，那么特别地，$\ll$ 是比 $\leq$ 更粗的序。因此，我们可以应用 (1)，得到一个模型 E，使 A 和 B 在 C 上合并，其中 E 中的 $\ll_E$ 是一个（不一定是

线性）且比 $\leq_E$ 更粗的序。将 $\ll_E$ 替换为 $\ll_E$ 的线性化 $\ll_F$，便得到 F。唯一需要验证的是 F 扩张了 A 和 B。若 a、$b \in A$、$a \neq b$ 和 $a \ll_F b$，则 $b \ll_A a$ 并不成立，因为 $\ll_E$ 扩张了 $\ll_A$，而 $\ll_F$ 是反对称的，且比 $\ll_E$ 更粗。由于 $\ll_A$ 是一个线性序，因此 $a \ll_A b$。情形 $a \neq b \in B$ 的处理方式相同。因此，F 将 A 和 B 在 C 上合并。

（第（1）—（2）部分，Fra¨ıss´e 极限、量词消去与模型完备化）定理的其余结论可由刚刚证明的 amalgamation 性质，结合标准的模型论论证得出。

对于偏序、半格和格，联合嵌入性质可由 amalgamation 性质推出，因为我们可以将 C 视为空结构。对于布尔代数和 Heyting 代数，根据定理 1.2 之前陈述的假设，存在唯一的由 $\emptyset$ 生成的结构，可将其视为 C；因此，在这些情形下，amalgamation 性质同样保证了联合嵌入性质。注意，如果 A、B 和 C 都是有限的，那么根据定理 2.2 的最后一条结论，上述证明在每种情形下都给出了一个有限合并模型 D。因此，T 的有限模型类具有 amalgamation 性质和联合嵌入性质。

那么请参阅 [8, 第 7], 章，尤其是其中的定理 7.1.2 和 7.4.1。关于模型完备化的陈述，请参见 [11, 事实 2.1(3)]；此处的证明不适用于格和海廷代数，因为这类理论不是局部有限的。□

3. 带辅助关系的偏序集；因果空间

若 S $= (S, \leq)$ 是一个偏序集，则辅助序或辅助关系 [4,定义 I-1.11]在 S 上是一个二元关系 $\ll$，比序更细，并满足

$$w \leq x \ll y \leq z \text{ implies } w \ll z, \tag{A}$$

对所有 $w, x, y, z \in S$ 均成立。由于 $\ll$ 比 $\leq$ 更细，且 $\leq$ 是反对称的，因此 $\ll$ 也是反对称的。请注意，我们既不要求 $\ll$ 是自反的，也不要求它是反自反的。另一方面，我们假定 $\leq$ 是自反的。因此，(A) 等价于以下两个条件的合取。

$$w \leq x \ll y \text{ implies } w \ll y, \tag{A1}$$

$$x \ll y \leq z \text{ implies } x \ll z. \tag{A2}$$

由于 $\ll$ 比 $\leq$更细，因此 $\ll$ 是传递的。

正如我们所提到的，在辅助关系的定义中，我们不要求 $\ll$ 是反自反的。如果我们进一步要求 $\ll$ 是反自反的，那么按照 [15]中的术语，结构（S，$\leq$，$\ll$）就是一个因果空间。在这种情况下，$\ll$ 是一个严格偏序。在 [15] 中还考虑了另一个关系 $\rightarrow$，但它可以通过一个全称句用 $\leq$ 和 $\ll$ 来定义，因此

→ 不会改变嵌入的概念（但会改变同态的概念）。

在上述所有定义中，我们可以假设 S 是格（S、$\wedge$、$\vee$），或并半格（S、$\vee$），或交半格（S、$\wedge$）。从代数角度看，并半格与交半格并无区别；然而在前一种情况下，$a \leq b$ 由 $a \vee b = b$定义，而在后一种情况下，$a \leq b$ 由 $a \wedge b = a$定义。对于格，上述 $\leq$ 的定义是等价的。在每种情况下，辅助关系的定义都参照上文引入的序 $\leq$ 给出。

回返关系——辅助关系的典型例子——常见于格序结构 [4]中；另一方面，因果集的格序版本可能缺乏物理意义。我们还将讨论带有辅助关系的布尔代数和海廷代数。

条件（A）也曾在具有更多结构的模型中被研究，常称为从属关系，例如 [1, Definition 2.1], or [2, Definition 9], or [3, Definition 1] 中的条款（S4）。原始文献的出处及更多参考资料，请参见所引论文。

值得一提的是，条款（A）也源自一种非常一般的情形。设 S 是一个偏序集，K 是 S 上的一元运算，并令 $x \ll y$ if$Kx \leq y$。条件 (A2) 仅由 $\leq$ 的传递性即可推出。若 K 是扩张的，即对每个 $x \in S$ 都有 $x \leq Kx$，则 $x \ll y$ 比 $\leq$更细。若进一步假设 K 保序，则 (A1) 成立。总之，若 K 保序且扩张，则 $(S, \leq, \ll)$ 是一个带辅助关系的偏序集。对偶地，若 I 是一个保序且收缩的一元运算，则令 $x \ll y$ if $x \leq Iy$ 即可得到一个辅助关系。上述论述是对已有思想的一种变体，例如 [3,Remark 2]。

现在我们开始证明定理 1.2 的一个推广。证明将占用接下来的两节。本节主要讨论带有另一个二元关系的偏序集；该关系可以是一个可比较的序、辅助关系，或可能是满足一组不同性质的关系。在下一节中，我们将首先证明扩张引理 2.1。根据该引理，偏序集 P 上的一个附加二元关系可以提升到一个扩张 P 的偏序集上。这里考虑的所有理论都具有超 amalgamation 性质，因此我们可以用略微一般化的形式证明定理 1.2，其中允许附加关系 $\ll$ 满足多种可能的条件。

约定 3.1。我们将考察二元关系R的以下性质。

2. R是自反的；4. R
是反自反的；5. R是
反对称的。
（编号旨在与 [17, 18] 保持一致；这里所有关系始终是 1. 传递的，且从不假定为 3. 对称。）我们将

考虑两个二元关系 $\ll$ 和 $\leq$。F 和 C 分别表示条件：$\ll$ 比 $\leq$ 更细、更粗。

定理 3.2。设 P、$Q \subseteq \{2,4,5\}$ 和 $N \subseteq \{F, C, A1, A2\}$。进一步假设以下条件之一成立：
(a) $\{A1, A2\} \subseteq N$，或 (b) $A1 \notin N$、$A2 \notin N$，或 (c) 同时满足 (c1) $F \in N$，且 (c2) $5 \in P$、$4 \in Q$ 或 $5 \notin Q$。

令 $T = T_{P,\ Q,\ N}$ 为断言以下内容的理论：$\ll$ 和 $\leq$ 是传递二元关系，$\leq$ 满足 P中的性质，$\ll$ 满足 Q中的性质，并且 N 中的性质均成立。

那么，关于 $\leq$，T 具有超 amalgamation 性质。T 的有限模型类具有一个 Fra¨ıss´e 极限 M。M 的一阶理论是 ω- 范畴的，具有量词消去，并且是 T 的模型完备化。

注意，对于 P、Q 和 N 的某些组合，我们会得到平凡的结论，或者平凡的结构类。例如，如果 F、$C \in N$，那么必然有 $\ll$ 等于 $\leq$，因此无须证明（前提是单个关系的结果已知）。如果 $2 \in Q$ 且 $A1 \in N$ 或 $A2 \in N$，那么必然有 $\ll$ 比 $\leq$ 更粗，因此若还有 $F \in N$，则同样有 $\ll$ 等于 $\leq$。另一方面，P（或 Q）中不能同时包含 2 和 4。同样，我们不能有 $2 \in P$、$4 \in Q$ 和 $C \in N$。为使定理 3.2 的陈述在最后两种情形下形式上成立，我们允许空结构；否则，读者应排除这些情形。

证明。$A1 \notin N$ 和 $A2 \notin N$ 的情形由 [17, 定理 3.1] 涵盖，此处将其表述为定理 1.1。严格来说，定理 1.1 并未涉及 F、$C \notin N$ 的情形，但在这种情况下，$\leq$ 与 $\ll$ 之间没有联系，因此我们可以分别处理；单个关系的情形 [17, 命题 2.1] 已足够，应用两次即可。

现在我们将证明分成几种情形。

(I) $A1 \notin N$和 $A2 \in N$。因此，根据假设，$F \in N$，也就是说，$\ll$比 $\leq$ 更细。此外，(c2) 成立。

不失一般性，假设要融合的模型为 C $\subseteq$ A、B，且 $A \cap B = C$。

将 $\leq$ 在 $D = A \cup B$ 上的定义为 $\leq_{\mathbf{A}}$、$\leq_{\mathbf{B}}$、$\leq_{\mathbf{A}} \circ \leq_{\mathbf{B}}$ 和 $\leq_{\mathbf{B}} \circ \leq_{\mathbf{A}}$的并。根据命题 2.1（A）的证明，情形 b], $(D, \leq)$ 将 A 和 B 在 C 上的 $\leq$-约化超融合。这是对引理 3.3]的重新考察。

将 $\ll$在 $D = A \cup B$上的定义为 $\ll_{\mathbf{A}}$、$\ll_{\mathbf{B}}$、$\ll_{\mathbf{A}} \circ \leq_{\mathbf{B}}$和 $\ll_{\mathbf{B}} \circ \leq_{\mathbf{A}}$的并，并考虑模型 D $= (D, \leq, \ll)$。为简化记号，未标下标的关系均指在 D 中的解释。

我们首先证明，例如，A 实际上是 D 的子结构。$\leq$部分可由前面提到的 [10, 17] 证明得出。如果 $a, a' \in A$ 和 $a \ll_{\mathbf{A}} a'$，那么$a \ll a'$，根据 $\ll$的定义。反过来，假设 $a, a' \in A$

并且 $a \ll a'$ 在 D 中成立，因为，例如，(a, a') 属于 $\ll_{\mathbf{A}} \circ \leq_{\mathbf{B}}$，也就是说，

$$a \ll_{\mathbf{A}} c \leq_{\mathbf{B}} a', \tag{3.1}$$

对于某个 $c \in D$。那么 $c \in A$，这是因为 $\ll_{\mathbf{A}}$ 关系；而 $c \in B$，这是因为 $\leq_{\mathbf{B}}$ 关系，因此 $c \in C$，因为 $C = A \cap B$。此外，根据 $\leq_{\mathbf{B}}$关系， $a' \in B$，因此 $a' \in C$。由于 c 和 a' 都属于 C，而 B 扩张了 C，因此 $c \leq_{\mathbf{C}} a'$。但 A 也扩张了 C，所以 $c \leq_{\mathbf{A}} a'$。于是 (3.1) 写作$a \ll_{\mathbf{A}} c \leq_{\mathbf{A}} a'$。根据 (A2)，由假设它在 A 中成立，因此有 $a \ll_{\mathbf{A}} a'$。其他情形类似或更简单。同样，B 是 D 的一个子结构。

现在我们证明 (A2) 在 D 中成立。可以通过分析所有可能的情形来给出证明，但我们将提供一种更统一的论证。假设$x \ll y$, $y \leq z$ 以及，比如说， $x \in A$。无论如何， $x \ll y$ 都可由形如 $x \ll_{\mathbf{A}} w$的关系见证，其中 $w \in D$可以是某个元素，后面还可能接上一个 $\leq_{\mathbf{A}}$ 或 $\leq_{\mathbf{B}}$关系。举例来说，如果 $x \ll y$ 由 $x \ll_{\mathbf{B}} c \leq_{\mathbf{A}} w$ 给出，其中 $c \in C$，那么 $x \in A \cap B = C$，因此 $x \ll_{\mathbf{A}} c$也成立，因为 C 可嵌入 A 和 B。此外， $y \leq z$ 仅由 $\leq_{\mathbf{A}}$ 和 $\leq_{\mathbf{B}}$ 关系见证。因此，若 $x \ll y \leq z$，那么 x 和 z 可以通过一条关系链相连，该关系链以 $\ll_{\mathbf{A}}$ 开头，右侧还可能接有若干 $\leq_{\mathbf{A}}$ 和 $\leq_{\mathbf{B}}$。现在我们说明如何缩短这类关系链。若 $x \ll_{\mathbf{A}} w \leq_{\mathbf{A}} v$，则根据 A 中的 (A2)，有$x \ll_{\mathbf{A}} v$ ，因此我们可以假设 $\leq_{\mathbf{A}}$ 不会紧接在 $\ll_{\mathbf{A}}$之后出现。若 $x \ll_{\mathbf{A}} w \leq_{\mathbf{B}} v \leq_{\mathbf{B}} u$，则根据 B 中 $\leq_{\mathbf{B}}$的传递性，有 $x \ll_{\mathbf{A}} w \leq_{\mathbf{B}} u$ 。若 $x \ll_{\mathbf{A}} w \leq_{\mathbf{B}} v \leq_{\mathbf{A}} u$，则 $w, v \in A \cap B$，因此，按照现在已很熟悉的论证，$w \leq_{\mathbf{A}} v$。于是上述关系可写为 $x \ll_{\mathbf{A}} w \leq_{\mathbf{A}} v \leq_{\mathbf{A}} u$，因此根据 A 中的 (A2)，有 $x \ll_{\mathbf{A}} u$ 。反复进行上述约化可得：若 $x \in A$且 $x \ll y \leq z$，则要么 $x \ll_{\mathbf{A}} z$，要么 $x \ll_{\mathbf{A}} w \leq_{\mathbf{B}} z$。情形 $x \in B$ 是对称的。每种情形下，根据 $\ll$的定义，均有 $x \ll z$。

由于在 A 和 B 中， $\ll$ 都比 $\leq$ 更细，因此在 D 中， $\ll$ 比 $\leq$ 更细。由已证明的条件 (A2)，即可推出 $\ll$ 的传递性。

如果 $\ll$ 在 A 和 B 中是反自反的，那么 $\ll$ 在 D 中也是反自反的，因为 $D = A \cup B$，且 A 和 B 都嵌入于 D 中，这一点我们已经证明。出于同样的原因，如果 $\ll$ 在 A 和 B 中是自反的，那么 $\ll$ 在 D 中也是自反的，

假设 $5 \in Q$，也就是说，假定 $\ll$ 是反对称的；特别地， $\ll$ 在 A 和 B 中是反对称的。根据假设（c2），要么 $4 \in Q$，也就是说， $\ll$ 是反自反的；要么 $5 \in P$，也就是说， $\leq$ 是反对称的。在前一种情况下， $\ll$ 必然是反对称的，因为它既是传递的，又是反自反的。在后一种情况下，如果 $x \ll y$, $y \ll x$，那么 $x \leq y$, $y \leq x$，因为 $\ll$ 比 $\leq$更细。因此，根据 $\leq$的反对称性， $x = y$。

(II) $A1 \in N$ 和 $A2 \notin N$。这种情形与 (I) 对称。

(III) $A1 \in N$ 和 $A2 \in N$。证明与 (I) 中的证明类似；不过，D 中 $\ll$ 的定义应针对这种情形作相应调整，并且我们需要说明如何在不满足假设 (c1) 和 (c2) 的情况下完成证明。

按上文 (I) 中的定义定义 D 和 $\leq$。在当前情形下，将 $\ll$ over $D = A \cup B$定义为 $\ll_{\mathbf{A}}$、 $\ll_{\mathbf{B}}$、 $\ll_{\mathbf{A}} \circ \ll_{\mathbf{B}}$、 $\ll_{\mathbf{B}} \circ \ll_{\mathbf{A}}$、 $\ll_{\mathbf{A}} \circ \leq_{\mathbf{B}}$、 $\leq_{\mathbf{A}} \circ \ll_{\mathbf{B}}$、 $\ll_{\mathbf{B}} \circ \leq_{\mathbf{A}}$ 和 $\leq_{\mathbf{B}} \circ \ll_{\mathbf{A}}$ 的并。

证明 D 同时扩张 A 和 B 的过程与 (I) 中的证明并无显著差异。例如，若 D 中有 a、$a' \in A$ 和 $a \ll a'$，那么这要么由 $a \ll_{\mathbf{A}} a'$见证（此时无需证明），要么由 $a \ll_{\mathbf{B}} a'$ 见证（于是 a、$a' \in C$，因此再次有 $a \ll_{\mathbf{A}} a'$），又或者由形如 $a \trianglelefteq_{\mathbf{A}} c \blacktriangleleft_{\mathbf{B}} a'$ 或 $a \trianglelefteq_{\mathbf{B}} c \blacktriangleleft_{\mathbf{A}} a'$的关系见证，其中 $\trianglelefteq$、$\blacktriangleleft$取适当的值。无论哪种情况，都有 $c \in C$；例如在前一种情形下，$a' \in B$，因此 $a' \in C$，于是可以在 A 中计算这些关系，再次得到 $a \ll_{\mathbf{A}} a'$，因为 (A1) 和 (A2) 在 A 中成立，并且 $\ll_{\mathbf{A}}$ 是传递的。

证明 D 也满足 (A1) 和 (A2)，与 (I) 中证明 D 满足 (A2) 的证明相比，并无显著差异。例如，若 $x \leq y$ and$y \ll z$，那么这些关系可由一系列关系见证，这些关系要么形如 $u \ll_{\mathbf{X}} v$，要么形如 $u \leq_{\mathbf{Y}} v$，其中 X 和 Y 均为 A 或 B，并且见证 $y \ll z$ 的关系中至少出现一个 $\ll_{\mathbf{X}}$。接着，采用与 (I) 中证明 (A2) 时类似的化简方法，可知我们至多可以将其化简为两个关系，其中至少出现一次 $\ll_{\mathbf{X}}$。事实上，相邻的带 A 下标的关系可以在 A 中求值，因此可利用 (A1)、(A2) 或 $\leq_{\mathbf{A}}$ 的传递性或 $\ll_{\mathbf{A}}$ 的传递性，将它们化简为单个关系。相邻的带 B 下标的关系也同样如此。如果我们有一条形如下式的链

$$w \trianglelefteq_{\mathbf{A}} v \blacktriangleleft_{\mathbf{B}} u \sqsubseteq_{\mathbf{A}} t, \tag{3.2}$$

那么必然有 $v, u \in A \cap B = C$，因此可以在 A 中计算 $v \blacktriangleleft u$，于是 (3.2) 化简为 A 中的一个关系。由于在上述化简中我们使用了 (A1)、(A2) 以及 $\ll$ 的传递性，因此化简后的表达式中至少会出现一个 $\ll$；因为正如我们所提到的，见证 $y \ll z$ 的原始关系中至少出现一个 $\ll$。

上一段中的证明也给出了 $\ll$ 的传递性。现在我们来说明当前情形与情形 (I) 的区别。在情形 (I) 中，我们使用 (c1) 来证明 $\ll$ 的传递性；现在解释一下，为什么同时具备 (A1) 和 (A2) 时不需要额外的假设（c1）。典型例子是 $x, z \in A$, $y \in B$，其中 $x \ll y \ll z$ 由 $x \ll_{\mathbf{A}} c \leq_{\mathbf{B}} y$ 和 $y \ll_{\mathbf{B}} d \leq_{\mathbf{A}} z$ 给出。注意，若要使 (A2) 在 D 中成立，上述关系意味着 $x \ll y$ 和 $y \ll z$；换言之，要满足 (A2)，$\ll_{\mathbf{A}} \circ \leq_{\mathbf{B}}$ 和 $\ll_{\mathbf{B}} \circ \leq_{\mathbf{A}}$ 必须出现在 D 中 $\ll$ 的定义里。另一方面，由上述条件可得 $c \leq_{\mathbf{B}} y \ll_{\mathbf{B}} d$，并且我们需要在 B 中使用 (A1)（而不是 (A2)！）才能得到 $c \ll_{\mathbf{B}} d$，因此照例有 $c \ll_{\mathbf{A}} d$。现在由 $x \ll_{\mathbf{A}} c \ll_{\mathbf{A}} d \leq_{\mathbf{A}} z$，通过 $\ll$ 的传递性以及 A 中的 (A2)，可得 $x \ll z$。然而，执行上述计算需要用到 (A1)，因此这一论证无法推广到情形 (I)。

现在我们来处理反对称性。假设 $\ll$ 在 A 和 B 中是反对称的，且 $x \ll y \ll x$。如果 x 和 y 都在 A中，那么根据 $\ll$ 在 A 中的反对称性，$x = y$；B 中的情况也类似。因此，不妨设 $x \in A$ 和 $y \in B$。我们先处理这样的情形：$x \ll y \ll x$ 由 $x \ll_{\mathbf{A}} c \ll_{\mathbf{B}} y$ 和$y \ll_{\mathbf{B}} d \ll_{\mathbf{A}} x$见证，其中 $c, d \in C$；随后我们将说明其他所有情形都可以归结为前一种情形。由 $c \ll_{\mathbf{B}} y \ll_{\mathbf{B}} d$ 可得 $c \ll_{\mathbf{B}} d$，这是根据

$\ll_{\mathbf{B}}$ 的传递性，然后得到 $c \ll_{\mathbf{C}} d$。对称地， $d \ll_{\mathbf{C}} c$，因此根据 $\ll_{\mathbf{C}}$的反对称性， $c = d$。于是 $x \ll_{\mathbf{A}} c = d \ll_{\mathbf{A}} x$，因此根据 $\ll_{\mathbf{A}}$的反对称性， $x = c$。对称地， $y = c$，因此 $x = y$. 现在假设 $x \leq_{\mathbf{A}} c$ 出现在见证 $x \ll y$的关系中。由于我们已经证明 $\ll$具有传递性，因此 $x \ll x$；而且该关系可以在 A 中求值，因为我们已经证明 A 嵌入 D。由 $x \ll_{\mathbf{A}} x \leq_{\mathbf{A}} c$ 根据 A 中的 (A2) 可得 $x \ll_{\mathbf{A}} c$。对称地，若 $d \leq_{\mathbf{A}} x$，则 $d \leq_{\mathbf{A}} x \ll_{\mathbf{A}} x$，因此根据 (A1)， $d \ll_{\mathbf{A}} x$。关于 y进行对称的计算后，我们就能将所有 $\leq$ 关系归结为 $\ll$ 关系。这意味着我们总能将问题归结为已经处理过的情形。

如果在所有待融合的模型中， $\ll$ 比 $\leq$ 更细（更粗），那么根据定义， $\ll$ 在 D 中比 $\leq$ 更细（更粗）。至此，我们已讨论完所有情形。

定理的最后两句话由 [8, 定理 7.1.2 和 7.41] 以及 [11, 事实 2.1(3)]推出。请比较第 2 节末尾定理 1.2(1)(2)证明的最后部分。□

注 3.3. (a) 定理 3.2 中的 amalgamation 性质，在添加保持 $\leq$的一元运算族，以及同时保持 $\leq$和$\ll$的一元运算族后，仍然成立。

事实上， D 可以取为 A 与B （像）的并这一事实意味着，分别定义在 A 和 B 上（并且在 C 上一致）的任意两个一元运算 $f_{\mathbf{A}}$ 和 $f_{\mathbf{B}}$，都可以唯一地扩展为 D 上的运算 f。强 amalgamation 保证了 f 定义良好。

此外，超 amalgamation 意味着 f 在 D 上保持 $\leq$，因为例如，若 $a \in A$, $b \in B$ 和 $a \leq_{\mathbf{D}} b$，则对于某个 $c \in C$，有 $a \leq_{\mathbf{A}} c \leq_{\mathbf{B}} b$，因此$f_{\mathbf{A}}(a) \leq_{\mathbf{A}} f_{\mathbf{A}}(c)$ 且 $f_{\mathbf{B}}(c) \leq_{\mathbf{B}} f_{\mathbf{B}}(b)$，这意味着在 D 中 $f(a) \leq f(c)$，因为$c \in C$，所以 $f_{\mathbf{A}}(c) = f_{\mathbf{B}}(c)$。类似地，定理 3.2 的证明中关于 D 上 $\ll$ 的定义表明，若 $f_{\mathbf{A}}$ 和 $f_{\mathbf{B}}$ 都保持 $\leq$和 $\ll$，那么它们在 D 上唯一的公共扩张将保持 $\leq$和 $\ll$。

许多类似的论证见 [17, 18]。

(b) 上述评注不适用于只保持 $\ll$的函数。设 C 是一个有 3 个元素的偏序集，其中有三个 $\leq$-不可比元素 c, c_1 和 c_2，且不存在 $\ll$-关系。通过添加两个新元素 a_1和 a_2，将 C 扩张为 A，其中 $c_i \leq a_i, c_i \ll a_i, i = 1, 2$，且没有其他非平凡关系。通过添加两个新元素 b_1 和 b_2，将 C 扩张为 B，其中 $b_1 \leq c_1, c \leq b_2$，且不存在$\ll$-关系。因此，A、B 和 C 都是带辅助关系的偏序集，实际上是因果集（情形 $P = \{2, 5\}, Q = \{4\}, N = \{A1, A2, F\}$）。

在上述每个模型中添加一个由 $f(c) = c, f(x_1) = x_2$和 $f(x_2) = x_1$定义的一元函数 f，其中 $x_i = a_i, b_i, c_i$，因此 f在上述所有模型中都保持 $\ll$，但在 B 中不保持 $\leq$。在任何满足 (A1) 的合并模型中，我们都应有 $\kappa(b_1) \ll \iota(a_1)$，因此，若要使 f 保持 $\ll$，还应有 $\kappa(b_2) = \kappa(f(b_1)) = f(\kappa(b_1)) \ll f(\iota(a_1)) = \iota(f(a_1)) = \iota(a_2)$。由于 κ应当是一个嵌入，我们也应有 $\kappa(c) \leq \kappa(b_2)$。由 (A1),

并且由于 ι 和 κ 在 C上应当一致， $\iota(c) = \kappa(c) \ll \iota(a_2)$。但是 $c \ll a_2$ 在 A 中不成立，因此 ι 不是一个嵌入。

在定理 3.2 中，对 P、 Q 和 N 作某些假设是必要的。参见下文备注 6.4。

4. 具有超 amalgamation 性质的有序结构（续）

本节将说明，定理 3.2 的一个版本更一般地适用于有序结构类，前提是超 amalgamation 性质成立。我们始终假设 $\mathcal{K}$ 是同一类型的非空有序结构类，且 $\mathcal{K}$ 在同构下封闭。这里大量运用了上一节中的证明。

回顾上一节中的条件 (A1)、(A2) 以及约定 3.1。

引理 4.1。假设 $Q \subseteq \{2, 4, 5\}$ 和 $N \subseteq \{F, C, A1, A2\}$。

设 $(D, \leq_D)$ 和 $(E, \leq_E)$ 是偏序集，并假设 $(E, \leq_E)$ 扩张了 $(D, \leq_D)$。若 $\ll_D$ 是 D 上的二元传递关系，且 Q 和 N 在 $(D, \leq_D, \ll_D)$ 中成立，那么 E 上存在一个传递关系 $\ll_E$，使得 Q 和 N 在 $(E, \leq_E, \ll_E)$ 中成立；此外，$(E, \leq_E, \ll_E)$ 扩张了 $(D, \leq_D, \ll_D)$。

证明。我们再次考虑各种情况。

(0) $A1 \notin N$ 和 $A2 \notin N$。此情形分为两个子情形。(0i)$C \notin N$。该子情形很简单；只需在 E 上定义 $e \ll_E f$，使其成立当且仅当 e、$f \in D$ 和 $e \ll_D f$ 在 D 中成立（若 $2 \in Q$，此外还令 $e \ll_E e$对所有$e \in E$成立）。根据构造， $\ll_E$ 扩张了 $\ll_D$。由于 $\ll_D$ 在 D上是传递的，因此新关系 $\ll_E$ 是传递的。同理，若 $\ll_D$ 是反对称的，那么 $\ll_E$也是反对称的。假设 $F \in N$，即要求 $\ll$ 比$\leq$更细。若这在 D 中成立，那么在 E 中也成立。

(0ii) $C \in N$。这实质上就是引理 2.1 的内容。只需注意，在那里， $\ll_D$ 的反对称性仅用于证明 $\ll_E$的反对称性。

(I) $A1 \notin N$和 $A2 \in N$。首先请注意，如果 $C \in N$，即假设 $\ll$比 $\leq$更粗，那么只要$\ll$ 是传递的，(A2)（以及(A1)）就会自动成立。因此，鉴于上文的 (0ii)，下文中我们可以假设 $C \notin N$。

在 E 上令 $e \ll_E f$，若 $e \in D$，且存在 $g \in D$ 使得 $e \ll_D g \leq_E f$（同样地，若 $2 \in Q$，则我们还令 $e \ll_E e$，对所有 $e \in E$）。条件 (A2) 得到验证，因为 $\leq_E$ 是传递的。实际上，E 扩张了 D，因为若 $e \ll_D f$，则取 $g = f$ 可得 $e \ll_E f$。反过来，若 $f \in D$ 且 $e \ll_E f$，如 $e \ll_D g \leq_E f$ 所证，则 $g \leq_D f$，因为 $(E, \leq_E)$ 扩张了 $(D, \leq_D)$。因此 $e \ll_D g \leq_D f$，故由 D 中的 (A2) 可得 $e \ll_D f$。特别地，若 $\ll_D$ 是反自反的，则 $\ll_E$ 是反自反的，因为此时 $2 \notin Q$

并且若 $e \ll_E e$，则 $e \in D$。若 $\ll_D$ 比 $\leq_D$ 更细，则由 $\leq_E$ 的传递性可知，$\ll_E$ 比 $\leq_E$ 更细。

现在我们检查 $\ll_E$的传递性。若 $e \ll_D g \leq_E f \ll_D h \leq_E k$，则$e, g, f, h \in D$，因此由 (A2) 以及 D 中 $\ll$的传递性可得 $e \ll_D h$，从而$e \ll_D h \leq_E f$，也就是说，$e \ll_E f$。这证明了 $\ll_E$的传递性。

还需在 $5 \in Q$时处理反对称性。若 $e \ll_E f \ll_E e$ 由 $e \ll_D g \leq_E f \ll_D h \leq_E e$ 见证，则 $e, g, f, h \in D$，因此 $e \ll_D g \leq_D f \ll_D h \leq_D e$，因为 $\leq_E$ 扩张了 $\leq_D$，于是由 D 中的 (A2) 得到 $e \ll_D f \ll_D e$。接着由 $\ll_D$的反对称性可得$e = f$。

(II) $A1 \in N$ 和 $A2 \notin N$ 的情形可通过对称性证明。

(III) $A1 \in N$ 和 $A2 \in N$。此情形与 (I) 类似：若存在 h、$g \in D$ 使得 $e \leq_E h \ll_D g \leq_E f$，则在 E 上设置 $e \ll_E f$（照例，若 $2 \in Q$，则对所有 $e \in E$，还令 $e \ll_E e$）。我们指出主要区别。

$\ll_E$ 的传递性只需稍作调整。若

$$e \leq_E h \ll_D k \leq_E f \leq_E p \ll_D q \leq_E g \tag{4.1}$$

那么 $k \leq_E p$，因此 $k \leq_D p$，因为 k、$p \in D$。由 $h \ll_D k \leq_D p \ll_D q$，根据 (A2) 及 $\ll_D$的传递性可得$h \ll_D q$。因此 $e \leq_E h \ll_D q \leq_E g$，这正是我们要证明的。

在 $4 \in P$的情形中，还需处理一个小细节。若反设，对于某个 $e \in E$，有 $e \ll_E e$，即对于某个 h，有 $e \leq_E h \ll_D g \leq_E e$、$g \in D$，那么 $g \leq_E e \leq_E h$，因此 $g \leq_E h$、$g \leq_D h$，进而 $h \ll_D g \leq_D h$，于是根据 (A2) 得 $h \ll_D h$，这与 $\ll_D$的反自反性矛盾，也就是说，与 $4 \in P$矛盾。

证明若 $\ll_D$ 具有反对称性，则 $\ll_E$ 具有反对称性，要复杂一些。假设 $e \ll_E f \ll_E e$ 由 (4.1) 和 $g = e$ 见证。于是 k、$p \in D$、$k \leq_E p$，故 $k \leq_D p$，因此由 (A2) 和 $h \ll_D k \leq_D p$ 得到 $h \ll_D p$。对称地，$p \ll_D h$，故由 $\ll_D$ 的反对称性得到 $h = p$，进而也得到 $h \ll_D p = h$。类似地，利用 (A1) 可得 $k = q$。由 (4.1)，并回想此时 $g = e$，我们有 $k = q \leq_E g = e \leq_E h$，从而 $k \leq_D h$。接着由 $h \ll_D h$ 和 (A1) 得到 $k \ll_D h$。又因为 $h \ll_D k$，由 $\ll_D$ 的反对称性得到 $h = k$。于是 (4.1) 可写为 $e \leq_E h = k \leq_E f \leq_E p = h = k = q \leq_E g = e$，因此由 $\leq_E$ 的传递性和反对称性得到 $e = f$。□

定理 4.2. 假设 $\mathcal{K}$ 是有序结构的一个类，且 $\mathcal{K}$ 具有超 amalgamation 性质。设 $Q \subseteq \{2, 4, 5\}$ 和 $N \subseteq \{F, C, A1, A2\}$。进一步假设以下条件之一成立：

(a) $\{A1, A2\} \subseteq N$,
或 (b) $A1 \notin N$、$A2 \notin N$,
或 (c1) $F \in N$。

令 $\mathcal{K}_{Q,\ N}$ 为语言 $\mathcal{K}$ 的模型在增加一个二元关系 $\ll$ 后所得的扩张类，并满足以下条件：$\ll$ 是传递的，$\ll$ 满足 Q 中的性质，且 N 中的性质成立。

那么 $\mathcal{K}_{Q,N}$ 相对于 $\leq$具有超 amalgamation 性质。

证明。与第 2 节末尾给出的定理 1.2 (1) 的证明中关于超 amalgamation 的证明相比，这里的证明没有实质性区别。这里只需考虑 $\mathcal{K}$ 的成员（分别为 $\mathcal{K}_{Q,N}$），而不是 T^- 的模型（分别为 T），并用更一般的定理 3.2 和引理 4.1 代替定理 1.1 和引理 2.1。注意，在当前讨论的情形中，$P = \{2, 5\}$，因此定理 3.2 中的条件 (c2) 自动满足。□

定理 1.2 的证明（续）。第 (3) 部分的 amalgamation 是定理 4.2 的特殊情形 $Q = \emptyset$ 和 $N = \{F, A1, A2\}$。对于因果集理论，只需改用 $Q = \{4\}$。第 2 节末尾关于 Fra¨ıss´e 极限等存在性的证明，在当前情形下同样适用。□

5. Urquhart 双序集

根据 Urquhart [21], ，双序集是一个集合 X，其上赋有两个预序 $\leq_1$ 和 $\leq_2$，满足 X

$$\text{for all } x, y \in X, \text{ if } x \leq_1 y \text{ and } x \leq_2 y, \text{ then } x = y. \tag{U}$$

在后来的文献中，条件 (U) 经常被省略 [9], ；此后，我们将把满足 (U) 的两个预序集称为 Urquhart 双预序集。关于更多参考文献以及对受限和非受限概念应用的综述，请参见前述著作 [9]。请注意，在上述定义中，我们明确使用了“预序”一词；当我们谈到双序集 X 时，意指集合 X 上赋有两个偏序（而不仅仅是预序）。

定理 5.1. Urquhart 双预序集类不具有 amalgamation 性质。

证明. 设 C 是一个包含两个元素 c 和 d 的模型，二者既不满足 $\leq_1$ 关系，也不满足 $\leq_2$ 关系。设 A 是一个底集为 $A = C \cup \{a\}$ 的模型，其中 a 是一个新元素，与 c 和 d 不同；此外，我们假设 $a \leq_1 c$ 和 $a \leq_2 d$ 在 A 中成立，且不存在其他非平凡的 $\leq_1$ 或 $\leq_2$ 关系。设 $B = C \cup \{b\}$，其中 b 仍是一个新元素，$c \leq_1 b$ 和 $d \leq_2 b$ 在 B 中成立，并且同样不存在其他非平凡的 $\leq_1$ 或 $\leq_2$ 关系。A、B 和 C 都是 Urquhart 双预序集，实际上是有序集。令 $\iota_1 : \mathrm{C} \to \mathrm{A}$ 和 $\kappa_1 : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ 为包含映射。

在任何 amalgamation 模型中，我们必须有 $\iota(a) \leq_1 \iota(c) = \kappa(c) \leq_1 \kappa(b)$，并且$\iota(a) \leq_2 \iota(d) = \kappa(d) \leq_2 \kappa(b)$，因为 ι 和 κ 被认为是嵌入，尤其是同态；并且因为 $\iota(c)$、 $\iota(d)$被认为等于，

分别等于 $\kappa(c)$ 和 $\kappa(d)$。

$$\kappa(b)$$

$$\iota(c) \qquad\qquad \iota(d)$$

$$\iota(a)$$

因此，在任意 amalgamation 模型中，根据 $\leq_1$ 和 $\leq_2$的传递性，有 $\iota(a) \leq_1 \kappa(b)$ 且 $\iota(a) \leq_2 \kappa(b)$。由条件 (U)，$\iota(a) = \kappa(b)$，因此 $\kappa(b) = \iota(a) \leq_1 \iota(c) = \kappa(c)$，因为假设 $a \leq_1 c$ 和 ι 是嵌入，尤其是同态。由于假设 κ 是嵌入，由 $\kappa(b) \leq_1 \kappa(c)$ 可得 $b \leq_1 c$；但这一不等式在 B 中不成立，因此不存在 amalgamation 模型。□

事实上，上述证明揭示了更多内容。

推论 5.2. 有限 Urquhart 双序集类在满足 Urquhart 条件 (U) 的两个传递关系的集合类中不具有 amalgamation 性质。

特别是，Urquhart 双序集类不具有 amalgamation 性质。特别是，满足 Urquhart 条件 (U) 的两个传递关系的集合类不具有 amalgamation 性质。

注 5.3。定理 5.1 的证明中必须使用传递性。若假设 $\leq_1$ 和 $\leq_2$ 具有反对称性（或对称性、自反性、反自反性），但不一定具有传递性，那么不失一般性地，假设要合并的模型为 C $\subseteq$A, B，且满足 $A \cap B = C$，则可在 $D = A \cup B$ 上构造一个强合并结构，令 $\leq_i^{\mathbf{D}} = \leq_i^{\mathbf{A}} \cup \leq_i^{\mathbf{B}}$，其中 $i = 1, 2$。这意味着 $x \leq_i^{\mathbf{D}} y$ 当且仅当以下情况之一成立：x、$y \in A$ 和 $x \leq_i^{\mathbf{A}} y$，或 x、$y \in B$ 和 $x \leq_i^{\mathbf{B}} y$。一般而言，对于关系语言，若类似构造能够提供 amalgamation，则模型类通常称为具有自由合并。参见例如 [6]；不过请注意，文献中的术语并不统一。当类 $\mathcal{K}$ 具有自由合并时，对于某对二元关系，若我们考虑其中满足 (U) 的模型子类 $\mathcal{K}$，则自由合并性质得以保留，因为若 $x \leq_1 y$ 和 $x \leq_2 y$ 属于 D，则要么 x、$y \in A$，要么 x、$y \in B$。两种情况下，$x = y$，因为假设 A 和 B 满足 (U)。

6. 补充说明

注 6.1. 在此注中，我们说明，即使假设 $\ll$ 是偏序，定理 4.2 的情形 (b) 中仍然需要超 amalgamation 性质。换言之，在定理 1.2 的证明中，我们确实需要定理 2.2。

(a) 我们首先注意到，可表示为链之并的偏序理论 T_{uc} 具有超 amalgamation 性质。理论 T_{uc} 是一阶全称理论：只需在偏序理论中加入以下句子

$$\forall xyz(x \geq z \,\&\, y \geq z \Rightarrow x \geq y \text{ or } y \geq x), \tag{6.1}$$

及其对偶

T_{uc} 的超 amalgamation 性质可由线性序集理论的超 amalgamation 性质推出。对于 amalgamation 基 C 中的每条链，按照线序集的情形合并每组三条对应的链。如果 A 和 B 还有更多与 C 中元素不相连的链，只需在合并后的模型 D 中取它们的不交并。

（b）另一方面，如果我们添加另一个二元关系 $\ll$，并在 T_{uc} 中添加公理，断言 $\ll$ 是传递的且比 $\leq$ 更粗，那么 AP 不成立。

假设 $C = \{c, d, e\}$ 中所有元素两两不可比较，这对于 $\leq$ 和 $\ll$ 均成立，且 $\leq$、$\ll$ 均为自反的。令 $A = C \cup \{a\}$ 满足 $d \leq a$、$d \ll a$、$c \ll a$、$a \ll a$，且不存在其他 $\ll$ 关系，尤其不满足 $e \ll a$。令 $B = C \cup \{b\}$ 满足 $d \leq b$、$d \ll b$、$e \ll b$、$b \ll b$，但不满足 $c \ll b$。

若 D 是一个由 $\leq$ 链之并构成的 amalgamation 结构，则 a 和 b 应当 $\leq$可比较，例如 $a \leq b$。若 $\ll$ 在 D 上比 $\leq$ 更粗，则 $b \ll a$。若 $\ll$ 是传递的，则 $e \ll a$ 在 D 中成立，但这与 A 嵌入 D 的要求矛盾，因为 $e \ll a$ 在 A 中不成立。

这说明，在定理 4.2 中，假设 $\mathcal{K}$ 具有超 amalgamation 性质是必要的。

(c) 更一般地，上文 (b) 中的反例表明，由至多 3 条链之并构成、且带有一个额外的更粗偏序的偏序集类，在由链之并构成、且带有一个额外的更粗传递二元关系的偏序集类中不具有 AP。

备注 6.2. 类似的论证可用于为 [16] 中的结果提供一个简单的反例。

(a) 我们首先注意到，对于每个 $n \geq 1$，由至多 n 条链的并构成的偏序之理论 T^n_{uc} 具有超 amalgamation 性质。再者，T^n_{uc} 是一阶全称理论：只需在 T_{uc} 中加入一个断言不存在基数为 $n+1$ 的反链的句子（也就是说，对于任意 $n+1$ 个元素，其中至少有两个元素可比较）。

T^n_{uc} 的超 amalgamation 性质可由线性序集理论的超 amalgamation 性质和联合嵌入性质推出。如果 C 已经有 n 条（互不相同的非空）链，那么 A 和 B 中就不能再有更多链。与上文注 6.1(a) 类似，按照线性序集的情形合并每一组三条对应的链。如果 A 和 B 的链数都多于 C，则如上所述，合并那些在 C 中有代表元的链。利用联合嵌入性质处理 A 和 B 中的其他链，并确保合并模型中的链数始终不超过 n。

（b）如果 $n > 1$，我们在语言中再加入一个一元运算 f，并断言 f 是保序的，那么 T^n_{uc} 的这个扩张不具有 amalgamation 性质。

只需令 $C = \{c\}$、 $A = \{c, a\}$、 $B = \{c, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ 在每个模型中所有元素两两不可比。令 $f(c) = c$, $f(b_1) = b_1$, ..., $f(b_{n-1}) = b_{n-1}$，且 $f(a) = c$。在任何 amalgamation 模型中， a 必须与某个 b_i 可比（否则我们就会得到 $n+1$ 条链）；但这样一来， $f(a) = c$ 和 $f(b_i) = b_i$ 就与保序性矛盾，因为 c 和 b_i 不可比。

注 6.3。与上文备注 6.2(a) 相反，若 $n \geq 2$，则不存在基数为 $> n$ 的反链的偏序理论不具有 AP。

事实上，设 $C = \{c, c_1, c_2\}$，其中 c_1、 c_2 不可比，且 $c \geq c_1$、 $c \geq c_2$。令 $A = \{a, c, c_1, c_2\}$，其中 $a \geq c_1$ 与 a 均与 C 中的其他所有元素不可比。令 $B = \{c, c_1, c_2, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$，其中各个 b_i 两两不可比，$b_i \geq c_2$，对每个 $i = 1$, ..., $n-1$，且每个 b_i 都与 C 中的其他所有元素不可比。在任何合并模型中，集合 $\{a, c, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ 都有 $n+1$ 个元素，因此不可能构成反链，所以 a 应当与某个 b_i 可比。比如，若 $a \geq b_i$，则由传递性可得 $a \geq c_2$，但这与 $a \geq c_2$ 在 A 中不成立矛盾。

注 6.4。在定理 3.2 中，对 P、 Q 和 N 的某些假设是必要的。例如，我们证明，当 $P = \emptyset$、 $Q = \{5\}$ 和 $N = \{F, A2\}$ 时，amalgamation 性质不成立（因此 (c2) 不成立）。

我们先举例说明强合并性质不成立的论证。设 C 是一个具有 $c \leq c$ 和 $c \not\ll c$ 的单元素模型。通过添加满足 $a_i \ll a_i$、 $a_i \ll c$ 且与所有元素 $\leq$ 相关的新元素 $a_i \in A_i$，将 C 扩张为 $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2)$。那么，在所有模型中，(A2) 都成立， $\ll$ 比 $\leq$ 更精细，并且 $\ll$ 是传递且反对称的。若 D 是一个带有嵌入 λ_1 和 λ_2 的 amalgamation 模型，那么由 $a_1 \ll c$ 和 $c \leq a_2$ 可得 $\lambda_1(a_1) \ll \lambda_2(a_2)$；根据 (A2)，对称地可得 $\lambda_2(a_2) \ll \lambda_1(a_1)$，因此根据 $\ll$ 的反对称性， $\lambda_1(a_1) = \lambda_2(a_2)$。所以强合并性质不成立。

可以修改上述论证，以证明 amalgamation 性质不成立。考虑上文中的 C，再加入一个元素 d，使得 $d \leq c$，而非 $c \leq d$，且不存在其他 $\ll$ 关系。令 $a_1 \ll d$、 $a_1 \leq d$ 属于 $\mathbf{A}_1$，而 $a_2 \ll d$ 不属于 $\mathbf{A}_2$。上述论证表明，对于由 amalgamation 性质的实现所给出的任意一对嵌入，都有 $\lambda_1(a_1) = \lambda_2(a_2)$。但若这些 λ_i是嵌入，则我们既有 $\lambda_1(a_1) \ll \lambda_1(d) = \lambda_2(d)$，又有 $\lambda_1(a_1) = \lambda_2(a_2) \not\ll \lambda_2(d)$，这就造成了矛盾。

References

[1] Bezhanishvili, G., Bezhanishvili, N., Santoli, T., Venema, Y., *A strict implication calculus for compact Hausdorff spaces* **170**, 102714, 29 ,《纯粹与应用逻辑年刊》, (2019)。[2] Celani, S. A., *Subordination Tarski algebras*,《非经典逻辑应用杂志》29, 288–306 (2019)。[3] Celani, S., Jansana, R., *Bounded distributive lattices with two subordinations*, 收录于 Mojtahedi, M., Rahman, S., Zarepour, M. S.,（编）, *Mathematics logic and their philosophies—essays in honour of Mohammad Ardeshir* , , ,《逻辑、认识论与科学统一》49, 217–252, 施普林格， 查姆 (2021)

[4] Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M., Scott, D. S., *Continuous lattices and domains*,《数学及其应用百科全书》93，剑桥大学出版社，剑桥 (2003) [5] Fra¨ıss´e, R., *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*, 高等师范学院科学年刊 (3), 71, 363–388 (1954)。[6] Fra¨ıss´e, R., *Theory of relations. Revised edition with an appendix by N. Sauer*,《逻辑与数学基础研究》145，阿姆斯特丹：北荷兰出版社 (2000)。[7] Gabbay, D. M., Maksimova, L., *Interpolation and definability. Modal andintuitionistic logics*, 牛津逻辑指南 46，克拉伦登出版社，牛津大学出版社，牛津 (2005)。[8] Hodges, W., *Model theory*,《数学及其应用百科全书》42，剑桥大学出版社，剑桥，1993。[9] Holliday, W. H., *Three roads to complete lattices: orders, compatibility, polarity*, 普遍代数82，论文编号 26, 14 (2021)。[10] J´onsson, B., *Universal relational systems*, 斯堪的纳维亚数学杂志 4, 193–208 (1956)。[11] Kaplan, I., Simon, P., *Automorphism groups of finite topological rank*, 美国数学会汇刊 372, 2011–2043 (2019)。[12] Kihara, H., Ono, H., *Interpolation properties Beth definability properties and , amalgamation properties for substructural logics* **20**, 823 杂志 –875 (2010)。[13] Kiss, E. W., M´arki, L., Pr¨ohle, P., Tholen, W., *Categorical algebraic properties. Acompendium on amalgamation, congruence extension, epimorphisms, residualsmallness, and injectivity*, 匈牙利数学科学研究 18, 79–140 (1982)。[14] Koppelberg, S., *Handbook of Boolean algebras. Vol. 1*, 北荷兰出版公司，阿姆斯特丹 (1989)。[15] Kronheimer, E. H., Penrose, R., *On the structure of causal spaces*, 剑桥哲学学会会刊 63, 481–501 (1967)。[16] Lipparini, P., *Preservation of superamalgamation by expansions* 2203 10570 3 , 1 42 2023 arXiv: . v – ( )。[17] Lipparini, P., *Comparable binary relations and the amalgamation property*, arXiv:2301.12482v1, 1–13 (2023)。[18] Lipparini, P., *The strong amalgamation property into union*, arXiv:2103.00563, 1–36 (2021)。[19] Madar´asz, J. X., *Interpolation and amalgamation; pushing the limits. I*, 逻辑研究 61, 311–345 (1998)。[20] Panangaden, P., *Causality in physics and computation* **546**, , 理论 10 16 2014 计算机科学, – ( )。[21] Urquhart, A., *A topological representation theory for lattices* **8**, , 普遍 45 58 1978 代数 – ( )。

Paolo Lipparini代数数学系，科学研究大道，罗马第二大学`，I-00133 意大利罗马，
https://orcid.org/0000-0003-3747-6611