arXiv:2303.06206v1 [math.CT] 10 Mar 2023

立方位点作为埃伦伯格–齐尔伯分类

TIMOTHY CAMPION

Abstract. 我们证明，不同的立方体范畴（不含对角线，但带有对称、连接或反转）都是 Eilenberg-Zilber 范畴。这推广了 Isaacson 关于某个特定立方站点的一项结果。我们的方法不涉及直接验证任何绝对推出图。借此机会，我们记录了带对角线的立方体范畴的一些公知描述，并准确判定其中哪些是 EZ 范畴。

首先，我们发展了一些关于 Eilenberg-Zilber 范畴的一般理论。我们证明，Berger 和 Moerdijk 所定义的 EZ 范畴的一个温和推广，事实上可由 Eilenberg-Zilber 引理成立这一条件来刻画（在一大类“广义 Reedy 范畴 ” 中），从而推广了 Bergner 和 Rezk 在严格 Reedy 情形下的一条定理。我们还引入了 Cisinski 的 *catégorie squelettique* 概念的一个温和加强，并证明任何此类范畴都满足 Eilenberg-Zilber 引理。正是这一工具使我们得以避免手动检验绝对推出。

Contents

0. 引言 1 0.1. 记号 3 0.2. 致谢 3 1. 广义 Reedy 范畴 3 2. 绝对余极限 5 3. 艾伦伯格-齐尔伯范畴 6 4. 与Berger-Moerdijk的比较 7 5. 强骨架广义 Reedy 范畴 8 6. 立方形位点 9 7. 不带对角线的立方形位点作为Eilenberg-Zilber范畴 10 8. 带对角线的立方体 site 14 参考文献 17

0. Introduction

基础性的 Eilenberg-Zilber 引理 [EZ50], 指出，单纯集合中的每个单形都能以唯一的方式表示为某个非退化单形的退化态射像！这一引理已通过多种方式推广到其他指标范畴。例如，Bergner 和 Rezk 的优雅 Reedy 范畴 [BR13] 恰好是其预层满足 Eilenberg-Zilber 引理的 Reedy 范畴。又如，Berger 和 Moerdijk 的 EZ 范畴 [BM11] 是一类广义 Reedy 范畴，其预层同样满足 Eilenberg-Zilber 引理。在这篇短文中，我们证明，对 EZ 范畴作一个温和的推广，

Date: 2023年3月14日。



FIGURE 1. 本文中出现的范畴类型。包含函子用“⊆”表示，其中一些包含函子实际上是等式，用长横线“=”表示。对于新的定义和蕴含关系（主要位于中间一列），我们给出参考文献；对于非新的定义，以及不显然的包含关系和等式，我们给出引文。图中的所有方块都是拉回；根据定义，除非给出了命题4.2的参考文献，否则均如此。

我们称之为 Eilenberg-Zilber 范畴（定义 3.1），事实上可由其满足 Eilenberg-Zilber 引理这一性质来刻画（在一大类“广义 Reedy 范畴”中）。 [BM11] 所述概念的区别仅在于，它还要求相关分解系统的右半部分与单态射类一致（命题 4.2）。对于专家而言，这些结果本不该令人意外；真正令人意外的或许是，想起 Berger 和 Moerdijk 在他们的工作中确实额外要求了单态射条件。应当将这项工作视为一项常规验证：单态射假设并非必要。

我们还引入了（定义5.3）Cisinski 对 cat´egorie squelettique[Cis06，定义8.1.1],这一概念的一个温和加强，并将其称为强骨架广义 Reedy 范畴。我们证明，任何此类范畴都满足 Eilenberg-Zilber 引理。这将 [Cis06] 在 Reedy 情形下的一个结果推广了。我们不知道每个 cat´egorie squelettique 是否都满足 Eilenberg-Zilber 引理。

作为一项应用，我们在定理 7.9 中证明，若干立方体范畴具有强骨架性，因此是 EZ 范畴。立方体集在高阶范畴论和同伦类型论中重新受到关注。我们研究的位点在第 6 节中回顾。此前， [Isa11] 证明了带一个连接和对称性的立方体 site 是 EZ 范畴；本文进一步将结果扩展到允许两个连接和／或反转的情形。利用强骨架性可以简化证明，即使对于 Isaacson 的位点也是如此：与 Isaacson 不同，我们无需手动构造任何绝对推出。不幸的是，带对角线的立方体 site 通常并非 EZ 范畴，而这类 site 通常是同伦类型论应用所必需的；我们将在第 8 节证明这一点。[1]

本文的结构如下。第 1 节给出一些基本定义后，我们在第 2 节回顾有关绝对余极限的一些背景知识，并在第 3 节据此定义 Eilenberg-Zilber 范畴。我们在第 4 节将此定义与 [BM11] 中的定义进行比较。第 5 节讨论对 Cisinski 骨架性条件的修改，以及它与 Eilenberg-Zilber 性质的关系。在最后两节中，我们将其应用于立方体集。第 6 节回顾必要的背景知识，第 7 节陈述主定理，指出其中若干位点是 Eilenberg-Zilber 范畴。第 8 节记录允许对角线时的情形。在

[1]我们将在研究立方体细分时应用我们的结果， [Cam22] ，并着眼于更多同伦论方面的应用。

所有这类情形中，要么存在非幂等完备性这一障碍，要么存在该范畴的另一种组合描述，从而可以直接推出 EZ 性质。对于非幂等完备的情形，我们将判定其幂等完备化是否具有 EZ 性质。

0.1. 记号。对于一个范畴 $\mathcal{C}$，我们将 $\widehat{\mathcal{C}} = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \text{集合范畴})$ 记为 $\mathcal{C}$ 上的预层范畴。我们用 $\text{ょ}_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ 表示米田嵌入。

0.2. 致谢。感谢 Denis-Charles Cisinski、Sina Hazratpour、Chris Ka- pulkin、Keith Kearnes、Emily Riehl、Maru Sarazola 和 Jonathan Weinberger 与我进行了有益的讨论。在撰写本文期间，我获得了美国国家科学基金会资助项目 DMS-1547292 的支持，并有幸得到数学科学研究所 2020年春季高阶范畴与范畴化项目的热情接待；此外，我也感谢美国陆军研究办公室通过 MURI资助项目W911NF-20-1-0082 提供的支持。

1. Generalized Reedy Categories

We 我们从以下“最小”定义开始，其中包含 [BM11] 的所有公理，唯独少了一条：

定义 1.1. 广义 Reedy 范畴是一个本质小范畴 A，配备

- 一个“次数”函数 $\deg : \mathrm{Ob}\, A \to \mathbb{N}$，它保持同构，并且
- 一个正交分解系统 (A_-, A_+)，

满足

- 每个 A_- 的非同构态射都会严格降低次数，并且
- A_+ 中的每个非同构态射都会严格提高次数。

（也就是说，如果 $(f \colon a \to b) \in A_-$，那么 $\deg(a) > \deg(b)$；且当且仅当 $(f \colon a \to b) \in A_+$时，$\deg(a) < \deg(b)$.）

这里，我们回顾一下

定义 1.2. 范畴 A 上的正交分解系统由 A 中的两类态射A_-、 A_+ 组成，满足

(i) 每个态射都可以分解为一个 A_- 中的态射，后接一个 A中的态射 $+$，
并且 (ii) A_- 的态射对 A_+的态射具有唯一的左提升性质。

Rec还要注意，在 (i) 成立的情况下，条件 (ii) 等价于 [Joy08, 附录 C] 中的
(ii’) A_-并且 A_+ 都包含同构，且在复合运算下封闭，并且分解
r- 化的(形式方式在唯一同构意义下唯一。

备注 1.3。文献中存在几种“广义 Reedy 范畴”的概念（参见 [BM11],[Cis06], [Shu15]）。我们并不声称此定义普遍适用，只是在本文中引入它以作比较。

我们验证，与 Reedy 情形 [RV14, Lemma 2.9], 一样，广义 Reedy 结构实际上仅取决于底层范畴和次数函数。

引理 1.4（参见 [RV14]）。设 A 为一个配备了“次数”函数 $\deg : \mathrm{Ob}\, A \to \mathbb{N}$ 的本质小范畴。那么，在 A 上至多存在一种与此次数函数相容的广义 Reedy 结构。

证明。假设 A 在给定的次数函数下具有广义 Reedy 结构。那么，A_- 可刻画为极端降次数态射的集合。也就是说，若 $a \xrightarrow{f} b$是 A中的一个态射，则 $f \in A_-$ 当且仅当满足：(1) $\deg b \leq \deg a$；(2) 对任意分解$a \xrightarrow{f} b = a \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} b$，若 $\deg c \leq \deg b$，则 h 是一个同构。当然， A_+ 也有对偶刻画。

对于一个方向，假设 f 满足 (1) 和 (2)，并将 $a \xrightarrow{f} b = a \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} b$ 分解为$g \in A_-$ 且 $h \in A_+$。那么 h必定弱增次数，因此 $\deg c \leq \deg b$，由 (2) 可知 h 是一个同构。由于 (A_-, A_+) 是正交分解系统，且其在同构下保持不变，因此因为 $g \in A_-$，我们有 $f \in A_-$。

反过来，假设 $a \xrightarrow{f} b \in A_-$。若 f是同构，则 $\deg a = \deg b$，因为 deg 保持同构；若 f不是同构，则根据假设，$\deg b < \deg a$。因此 (1) 成立。为证明 (2) 成立，假设 $a \xrightarrow{f} b = a \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} b$，其中 $\deg c \leq \deg b$。先考虑 $a \xrightarrow{g} c \in A_-$ 且 $c \xrightarrow{h} b \in A_+$ 的情形。在这种情况下，由 (A_-, A_+) 分解的唯一性可知，h 是同构，正如所需。现在考虑 $a \xrightarrow{g} c \in A$ 任意且$c \xrightarrow{h} b \in A_+$ 的情形。于是我们可以将 $a \xrightarrow{g} c = a \xrightarrow{g_1} a_1 \xrightarrow{g_2} c$ 分解为 $g_1 \in A_-, g_2 \in A_+$。由于$hg_2 \in A_+$，由前一种情形可知 hg_2 是同构。由此可知 h, g_2 保持次数，因此 h 是同构，正如所需。最后，考虑 $a \xrightarrow{g} c \in A$ 和 $c \xrightarrow{h} b \in A$ 都任意的情形。将 $c \xrightarrow{h} b = c \xrightarrow{h_1} b_1 \xrightarrow{h_2} b$ 分解为 $h_1 \in A_-, h_2 \in A_+$。由于$h_2 \in A_+$，由前一种情形可知 h_2 是同构。因此 $h_1 \in A_+$ 弱增次数，所以 h_1 是同构。由此，$h = h_2 h_1$ 也同样是同构，正如所需。□

Jus与 Reedy 范畴一样，[BR13], 广义 Reedy 范畴是幂等完备的 :

引理 1.5（参见 [BR13]）。设 A 是一个广义 Reedy 范畴。那么幂等元在 A中可分裂。

证明。设 e是一个幂等元，并将 $e = gf$分解为 $f \in A_-$, $g \in A_+$。将 $fg = g'f'$分解为$f' \in A_-$, $g' \in A_+$。由等式 $e = e^2$，可得 $gf = gfgf = gg'f'f$。根据分解的唯一性，存在同构使得 $g = gg'$, $f = f'f$。因此，f', g'保持次数，且由于它们分别属于 A_-和 A_+，故为同构。因此 $fg = g'f'$是一个同构。同时，我们有 $(fg)^3 = f(gf)^2g = f(gf)g = (fg)^2$。但满足该等式的任何同构都是恒等映射，因此 $fg = 1$。故分解 $e = gf$ 是 e的一个分裂。□

广义 Reedy 范畴在切片下保持稳定，更一般地，在转到元素范畴时也保持稳定：

引理 1.6. 设 (A, A_-, A_+) 是一个广义 Reedy 范畴，并设 $X \in A$。那么，元素范畴 $A \downarrow X$ 是一个广义 Reedy 范畴，其次数函数定义如 A 所示。

证明。更一 般而言，因子分解系统在转到元素范畴时保持稳定。 □

在这种一般性下，Eilenberg-Zilber 分解的概念仍然有意义；可以陈述 Eilenberg-Zilber 引理，但它并不适用于所有广义 Reedy 范畴：

定义 1.7. 设 A 是一个广义 Reedy 范畴。对于 $X \in A$ 和 $a \in A$，我们记 $X_a := X(a) = \mathrm{Hom}(a, X)$ 为 X的 a-胞腔集合。若一个 a-胞腔 $a \to X$ 不能经由 A_-中的任何非同构态射 $a \to b$ 分解，则称其为非退化的。一个 a-胞腔 $a \to X$ 的 Eilenberg-Zilber 分解是一个分解 $a \to b \to X$，其中 $a \to b \in A_-$ 且 $b \to X$ 是非退化的。若对于任意两个这样的分解 $a \to b \to X, a \to b' \to X$，都存在唯一的同构 $b \to b'$ 使得 $a \to b \to b' = a \to b'$ 且 $b \to b' \to X = b \to X$，则称 Eilenberg-Zilber 分解本质唯一。我们称 A 满足 Eilenberg-Zilber 引理，若对于任意 $a \in A, X \in A$的 a-胞腔 $a \to X$，都存在一个本质唯一的 Eilenberg-Zilber 分解。

不过，与通常情况一样，Eilenberg-Zilber 引理的存在性部分在任意广义 Reedy 范畴中都成立：

引理 1.8. 设 A 为广义 Reedy 范畴。那么对于每个预层 $X \in A$ 和每个胞腔$x \in X_a$，都存在一个将 $x = x'f$ 经由一个最小度可表对象进行分解的分解。此外，

任何这样的分解都是 x 的 Eilenberg-Zilber 分解（它一般并非本质唯一）。

证明。第一条结论由次数集合是良序集这一事实得出。对于第二条结论，我们先证明：若 $x = x'f$ 是经由一个次数最小的可表对象的 x 分解，则 $f \in A_-$。否则，我们可以用 $g \in A_-$、$h \in A_+$ 对 $f = hg$ 进行分解。由次数的极小性可知，h 保次数，因而是同构。由于 $g \in A_-$，所以 $f \in A_-$。现在反设 $x = x'f$ 是经由一个次数最小的可表对象的分解，但它不是 Eilenberg-Zilber 分解。那么 x' 是退化的，因此 $x' = x''k$，其中 $k \in A_-$ 不是同构，故严格降低次数。但这样一来，$x = x''kf$ 就是经由一个次数更低的可表对象对 x 的分解，矛盾。因此，每个经由次数最小的可表对象对 f 的分解都是 Eilenberg-Zilber 分解。□

2. Absolute Colimits

回顾一下，范畴 $\mathcal{C}$ 中的余极限图称为绝对余极限，如果任意函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 到任意范畴 $\mathcal{D}$都保留该余极限；等价地，如果米田嵌入$\widehat{\ }$ よ$_{\mathcal{C}}$：$\mathcal{C} \to \mathcal{C}$保留该余极限。

如 [BM11] 和 [BR13], 所示，艾伦伯格-齐尔伯引理与绝对推出以及绝对（=分裂）满态射密切相关。我们在此回顾它们的一些性质。

引理 2.1. 设 $a \xrightarrow{f} b$ 是范畴 $\mathcal{C}$中的一个分裂满态射。若存在 $b \xrightarrow{g} c$ 使得 gf 是单态射，则 f 是同构。

证明。如果 gf 是单态射，那么 f 是单态射，而任何既是单态射又是分裂满态射的态射都是同构。□

引理 2.2. 设 $a \xrightarrow{f} b$ 是范畴 $\mathcal{C}$中的一个态射。那么以下条件等价：

(1) f 沿自身的推出存在且是绝对的。(2) f 是绝对满态射。(3) f 在米田嵌入下的像是满态射。(4) f 是分裂满态射。

证明。由于分裂满态射是满态射，且在函子作用下保持不变，因此它们是绝对满态射；故(4) $\Rightarrow$ (2)。显然，(2) $\Rightarrow$ (3)。对于(3) $\Rightarrow$ (4)，注意，若 よ$_{\mathcal{C}}(f)$ 是满态射，则 $\mathrm{Hom}(b,a) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(b,f)} \mathrm{Hom}(b,b)$ 是满射。特别地，id_b 属于该映射的像，即存在 $g \in \mathrm{Hom}(b,a)$ 使得 $fg = \mathrm{id}_b$，也就是说，f 是分裂满态射。

(2) $\Rightarrow$ (1)显然成立，因为若 f 是绝对满态射，则 $1f = 1f$ 是绝对推出方。反过来，假设(1)成立。由于米田嵌入保持推出，我们有 $\mathrm{Hom}(b \cup_a b, b \cup_a b) = \mathrm{Hom}(b \cup_a b, b) \cup_{\mathrm{Hom}(b \cup_a b, a)} \mathrm{Hom}(b \cup_a b, b)$。特别地，$\mathrm{id}_{b \cup_a b}$ 必定经由 b的某个副本分解，也就是说，映射 $b \to b \cup_a b$ 之一是分裂满态射（由对称性可知另一个也是）。因此，$\mathrm{Hom}(a,b) \to \mathrm{Hom}(a, b \cup_a b) = \mathrm{Hom}(a,b) \cup_{\mathrm{Hom}(a,a)} \mathrm{Hom}(a,b)$ 是满射。但显然，对于任意集合映射 ϕ，若 ϕ 沿自身的余基变换是满射，则 ϕ 本身已是满射。因此 $\mathrm{Hom}(a,a) \to \mathrm{Hom}(a,b)$ 是满射，即 f 是分裂满态射，故(1) $\Rightarrow$ (4)。□

推论 2.3. 设 $a \xrightarrow{f} b$ 是范畴 $\mathcal{C}$中的一个分裂满态射，并假设 f 沿 $a \xrightarrow{g} c$ 的推出存在且是绝对的。那么 $c \xrightarrow{f'} b \cup_a c$ 沿 g 对 f 的余基变换也是一个分裂满态射。

证明. 若 $a \xrightarrow{f} b$ 是一个分裂满态射，则 $よ_{\mathcal{C}}(f)$ 是一个满态射。由于绝对推出在 $よ_{\mathcal{C}}$ 下保持不变，且满态射在余基变换下稳定，因此 $よ_{\mathcal{C}}(f')$ 是一个满态射，从而根据引理 2.2，f' 是一个分裂满态射。□

3. Eilenberg-Zilber Categories

受 [BM11]，启发，我们作如下定义。与 [BM11] 的 EZ 范畴进行精确比较，见第 4 节。

定义 3.1. Eilenberg-Zilber 范畴是这样一种广义 Reedy 范畴：其中每一对具有共同定义域的态射在 A_- 中都有一个绝对推出。

引理 3.2. 设 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴。那么，A_- 的态射恰好是分裂满态射。

证明. 根据 2.2，A_- 包含于分裂满态射之中。反过来，首先注意到 A_-、A_+ 没有非恒等幂等元，因为幂等元必为保次数态射；若它属于 A_- 或 A_+，便必为同构。其次，若 $f \in A_+$ 有一个截面 $s \in A$，则将 $s = hg$ 分解为 $g \in A_-$、$h \in A_+$。于是 $1 = (fh)g$ 是一个 (A_-, A_+) 分解；由唯一性，我们可以假设 $g = 1$ 且 $fh = 1$。若 f 不是同构，则 hf 是 A_+ 中的非恒等幂等元，矛盾；因此 f 是同构。最后，若 $f \in A$ 有一个截面 s，则将 $f = hg$ 分解为 $g \in A_-$、$h \in A_+$。于是 gs 是 $h \in A_+$ 的一个截面，因此根据前一步可知 h 是同构；由于 $g \in A_-$，可得 $f \in A_-$，如欲证。□

注 3.3. 由引理 3.2 可知，在不影响分解系统的次数函数修改意义下，一个范畴至多只能有一种 Eilenberg-Zilber 结构。

推论 3.4. 设 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴，且 $g'f = f'g$ 是 f、g的一个绝对推出，其中 f、$g \in A_-$。那么 f'、$g' \in A_-$ 也成立。

证明. 这由引理 3.2 和推论 2.3 得出。□

注 3.5. 由推论 3.4 可知，在定义 3.1 中，我们也可以等价地要求 A_-有所有的推出，这些推出在到 A的包含函子下保持不变，并且作为 A中的推出是绝对的。

定义 3.1 的目的是确保 Eilenberg-Zilber 引理成立。不仅如此（参见 [BM11]），反过来也成立，正如 [BR13]在 Reedy 情形下所示；下面的证明相同：

命题 3.6（参见 [BM11],[BR13]）。设 A 是一个广义 Reedy 范畴（定义 1.1）。那么A满足 Eilenberg-Zilber 引理（定义 1.7），当且仅当 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴（定义 3.1）。

证明。先证明一个方向，假设 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴。我们在引理 1.8 中已经看到，Eilenberg-Zilber 分解总是存在，因此只需证明它们本质唯一。设 $xf = yg$ 是同一个 a-胞腔的两个 Eilenberg-Zilber 分解。由于 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴，我们有一个绝对推出方 $g'f = f'g$，且有一个分解 z，使得 $x = zg'$、$y = zf'$。此外，由推论 3.4 可得 g'、$f' \in A_-$。但由于 xf 是一个经过分解 z（$g'f$）的 Eilenberg-Zilber 分解，我们必有 g' 是一个同构。类似地，f' 是一个同构。于是，同构（f'）$^{-1}g'$表明分解 xf和 yg 本质等价。根据 f、g 是满态射这一事实，该同构的唯一性随即成立。

反过来，假设 A 满足 Eilenberg-Zilber 引理。设 f、$g \in A_-$ 的定义域相同，并令 P 为它们在 A中的推出，其推出方块为 $g'f = f'g$。我们对 f'、g'取 Eilenberg-Zilber 分解；与 g、f复合后，这些分解给出 Eilenberg-Zilber 分解

$f'g = g'f$的分解；由唯一性，不失一般性地，我们可以假设这些分解都经过同一个非退化胞腔 $c \to P$。利用推出，我们得到一个映射 $P \to c$，并且很容易验证 $P \to c \to P$ 是恒等映射。因此 P 是 c的收缩，由引理 1.5 可得 $P \in A$。由于米田嵌入是全忠实的，推出方块本身就在 A中，并且该推出在米田嵌入下保持不变。因此 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴。□

4. Comparison to Berger-Moerdijk

Berger 和 Moerdijk 实际给出了一个与定义 3.1 略有不同的定义，我们将证明这个定义的限制更严格:

定义 4.1（[BM11]）。Berger-Moerdijk EZ 范畴是一个配备次数函数 $\deg : \mathrm{Ob}\, A \to \mathbb{N}$ 的小范畴，满足:

(1) 单态射保持次数（分别地，提高次数）当且仅当它可逆（分别地，不可逆）；(2) 每个态射都可分解为一个分裂满态射后接一个单态射；(3) 具有共同定义域的每对分裂满态射都有一个绝对推出。

命题 4.2。每个 Berger-Moerdijk EZ 范畴都是一个具有相同次数函数的 Eilenberg-Zilber 范畴。反过来，Eilenberg-Zilber 范畴 A 是 Berger-Moerdijk EZ 范畴，当且仅当 A_+ 的每个态射都是单态射。

证明。首先，设 A 是一个 Berger-Moerdijk EZ 范畴，并证明 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴，其中 A_- 为分裂满态射， A_+ 为单态射。

首先证明，分裂满态射保持（分别严格降低）次数，当且仅当它可逆（分别不可逆）。设 $a \xrightarrow{f} b$ 是一个分裂满态射，令 $b \xrightarrow{s} a$ 为其截面。由于 s 是一个分裂单态射，因此有 $s \in A_+$。我们有， f 保持（分别严格降低）次数，当且仅当 s保持（分别严格提高）次数，当且仅当 s 可逆（分别不可逆），当且仅当 f 可逆（分别不可逆）。

现在证明次数函数 $\deg : \mathrm{Ob}\, A \to \mathbb{N}$ 保持同构。设 $a \xrightarrow{f} b$ 是一个同构，并假设 $\deg a \neq \deg b$; 不失一般性，设 $\deg a < \deg b$。将 $a \xrightarrow{f} b = a \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} b$ 分解为 g 和 $h \in A_+$，其中 g 是一个分裂满态射。根据引理 2.1， g 是一个同构。由于 $g \in A_-$，根据前一部分可得 $\deg c = \deg a$。因此 $h \in A_-$ 严格提高次数，故不是同构。由于 $f = hg$ 且 g 是一个同构，这意味着 f 不是同构，矛盾。

现在我们证明，(A_-, A_+) 分解在同构意义下是唯一的。假设 $f = hg = h'g'$，其中 $g, g' \in A_-$，且 h, $h' \in A_+$。存在一个绝对推出方 $kg = k'g'$，根据推论 2.3，我们有 k, k' 是分裂满态射；因此只需证明 k, k' 是同构。还有一个诱导映射 h''，使得 $h''k = h, h''k' = h'$。将 $h'' = ml$ 分解为 $l \in A_-, m \in A_+$，得到一个分解 $h = mlk$。由于 h 是单态射，我们可以应用引理 2.1，得出 k 是所需的同构。

事实上，(A_-, A_+) 分解在唯一同构意义下是唯一的；这可由 A_- 由满态射构成或 A_+ 由单态射构成推出。由于 A_- 和 A_+ 对复合也封闭，因此 (A_-, A_+) 是一个正交分解系统，且 A 是一个广义 Reedy 范畴。根据 (3)，它是一个 EZ 范畴。

现在设 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴，且 A_+ 的每个态射都是单态射。假设 $a \xrightarrow{f} b$ 是一个单态射，并作分解 $a \xrightarrow{f} b = a \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} b$ ，其中 $g \in A_-$、 $h \in A_+$。由引理 2.1 可知， g 是一个同构。因此 $f \in A_+$。所以 A_+ 恰好由单态射组成。由引理 3.2 可知， A_- 恰好由分裂满态射组成。显然， A 是一个 Berger-Moerdijk EZ 范畴。□

例4.3. 设 A 是一个直范畴，其中并非每个态射都是单态射。那么 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴，但不是 Berger-Moerdijk EZ 范畴。我们不知道其他例子。

5. Strongly Skeletal Generalized Reedy Categories

本节中，我们引入强骨架广义 Reedy 范畴（定义5.3），并证明它们是 Eilenberg-Zilber 范畴（定理 5.6）。这些范畴的灵感来自 [Cis06]，的骨架广义 Reedy 范畴，我们先回顾其定义。

定义5.1（[Cis06]）。我们回顾 [Cis06] 中的一些术语：

- 骨架广义 Reedy 范畴（[Cis06，定义 8.1.1] “骨架范畴”）是一个广义 Reedy 范畴（A, A_-, A_+），满足：(1) A_- 中的每个态射都是 A 中的分裂满态射；(2) A_- 中任意两个不同的态射在 A 中的截面集合都不相同。

- 骨架 Reedy 范畴[2] 是一个既为 Reedy 范畴又为骨架广义 Reedy 范畴的范畴。
- 正则骨架 Reedy 范畴（[Cis06，定义 8.2.3]）是指每个 A_+ 态射都是单态射的骨架 Reedy 范畴。

尽管 [Cis06] 在广义情形下（即允许存在非平凡自同构）给出了这个定义，但除了非广义情形之外，似乎鲜有人研究骨架广义 Reedy 范畴。事实上，似乎要实质性地运用这一概念，就必须强化定义，将截面集替换为伪截面集，正如我们现在所定义的那样。

定义5.2. 若 $p\colon a \to b$ 是一个范畴中的态射，则称 $i\colon c \to a$ 是 p 的伪截面，若$pi\colon c \to b$ 是一个同构。若存在同构 $\phi\colon b \to b'$ 使得 $\phi p = p'$，则称两个映射 $p\colon a \to b$和 $p'\colon a \to b'$ 伪相等。

定义5.3. 强骨架广义 Reedy 范畴是指满足以下条件的广义 Reedy 范畴（A, A_-, A_+）：(1) A_- 中的每个态射都是 A 中的分裂满态射；(2) 对于 A_- 中任意两个具有相同定义域的态射$p\colon a \to b$和 $p'\colon a \to b'$，若 p, p' 在 A中具有相同的伪截面集，则 p, p' 伪相等。

注5.4. 不难证明，任意强骨架广义 Reedy 范畴（A, A_-, A_+）都是骨架广义 Reedy 范畴（事实上，若 $p, p'\colon a \to b$是任意范畴中具有共同定义域和陪域的态射，且 p, p' 具有相同的截面集，则它们也具有相同的伪截面集）。若（A, A_-, A_+）实际上是 Reedy 范畴，则反向结论成立，因为 A 没有非恒等同构。因此，任意骨架 Reedy 范畴都是强骨架性的。作者不知道是否存在不是强骨架性的骨架广义 Reedy 范畴，但怀疑这样的范畴确实存在。

引理 5.5（参见 [Cis06, 8.1.6]）。设 (A, A_-, A_+) 是一个强骨架广义 Reedy 范畴，并且令 $X \in A$。那么切片范畴 $A \downarrow X$ 是一个强骨架广义 Reedy 范畴，其次数函数如 A 中所定义。

证明。由引理 1.6 可知， $A \downarrow X$ 是一个广义 Reedy 范畴。注意， $A \downarrow X$ 中一个态射的伪截面集，与 A中底层态射的伪截面集存在典范同一。此外，注意，若某个范畴中的满态射 π, π' 伪相等，那么它们在任意切片范畴中也伪相等。□

定理 5.6（参见 [Cis06, 8.1.24]）。设 (A, A_-, A_+) 是一个强骨架广义 Reedy 范畴。那么 A 是一个 Eilenberg-Zilber 范畴。

[2]这与 [Cis06] 依据 [Cis06, 命题 8.1.37]所得的 *catégorie squelettique normale* 一致。

证明。设 $\sigma\colon a \to X$ 是一个胞腔，并设 $a \to b \to X, a \to b' \to X$ 是两个 Eilenberg-Zilber 分解；我们要证明它们等价（回顾引理 1.8，Eilenberg-Zilber 分解总是存在）。根据引理 5.5，我们可以转到 $A \downarrow X$，从而假设 X 是终对象。在此假设下，b 和 b' 成为非退化对象，这意味着 A_- 中的每个映射 $b \to c$ 或 $b' \to c$ 都是同构。由于 $a \to b, a \to b'$ 属于 A_-，它们有截面。通过复合，我们得到映射 $b \to b'$ 和 $b' \to b$；根据 b, b' 的非退化性，这些映射必属于 A_+。由于这两个映射的次数都不减，因此 b, b' 的次数相同。由此可知，映射 $b \to b', b' \to b$ 是同构。因此，不失一般性，我们可以假设 $b = b'$。

因此，只需证明：若 A 是一个强骨架广义 Reedy 范畴，且 $b \in A$ 是一个非退化对象，那么任意两个映射 $p, p'\colon a \rightrightarrows b$ in A_- 都存在一个位于a下的自同构使它们相关，即它们伪相等（因为 p, p' 是满态射，该自同构必然唯一）。根据强骨架性，只需证明 p, p' 具有相同的伪截面集。事实上，我们声称，$b'' \to a$ 是 b 的伪截面，当且仅当它是 a的伪截面；这又当且仅当存在一个同构 $b'' \cong b$。在一个方向上，对于 p 或 p'的任意伪截面 $b'' \to a$，都有 $b \cong b''$。反过来，假设 $b'' \cong b$。那么 b'' 是非退化的，且与 b的次数相同，因此任意映射$b'' \to b$ 都是同构。因此，每个映射 $b'' \to a$ 都是任意映射 $a \to b$的伪截面。□

6. Cubical sites

我们回顾 [GM03] 和 [BM17] 中介绍的若干“立方体”范畴，以及与之相关的“立方集合”预层范畴。术语和记号并不统一；我们的表述最接近 Isaacson[Isa11] 的用法。[BM17] 运用 [Mau17]，的幺半逻辑或子结构逻辑框架，对立方位点进行了全面分类。我们最关注 [GM03]，中考察的位点，但也更一般地考虑 [BM17] 术语中具有弱化而不具有收缩的立方位点。

令 $\square_*$ 为 Set 的满子范畴，其对象是形如 $\{0,1\}^n$ 的集合，其中 n 是有限的。我们将 $\{0,1\}^n$ 与幂集格 $P(\{1,\dots,n\})$ 通过双射 $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n) \mapsto \{i \mid \epsilon_i = 1\}$ 自由地视为同一对象，并记作 $\square^n$。注意，$\square_*$ 是（笛卡尔）对称幺半范畴，且 $\square^m \otimes \square^n = \square^{m+n}$。我们所用的所有立方体范畴都是 $\square_*$ 的非满、非笛卡尔、通常非对称的宽幺半子范畴。

朴素立方集合。令 $\square$ 为由两个基本面映射 $\iota^0, \iota^1\colon \square^0 \rightrightarrows \square^1$ 和基本投影映射 $\pi\colon \square^1 \to \square^0$生成的 $\square_*$ 宽幺半子范畴。因此，映射 $\square^m \to \square^n$是映射 $\square^{m_i} \to \square^1$ 的 n重张量积，其中 $m_1 + \cdots + m_n = m$；而映射 $\square^{m_i} \to \square^1$ 要么恒等于 0 或 1，要么是到某个因子的投影。等价地（[Cis06, 8.4.5], [GM03]），$\square$ 是由基本面映射和$\widehat{\ }$投影映射生成的双对象范畴上的自由幺半范畴。朴素立方集合的范畴是预层范畴 $\square$。

带连接的立方集合。令 $\square_c$ 为由 $\square$ 以及基本连接映射 $\gamma_\vee, \gamma_\wedge\colon \square^2 \rightrightarrows \square^1$ 生成的 $\square_*$ 的宽幺半子范畴。这里，$\gamma_\vee$ 是格 $\square^1 = P(\{1\})$ 中的并集，而 $\gamma_\wedge$ 是交集。同样，映射 $\square^m \to \square^n$ 是映射 $\square^{m_i} \to \square^1$ 的 n 重张量积。注意，$\gamma_\vee$（分别为 $\gamma_\wedge$）是结合的，其单位元为 ι^0（分别为 ι^1），吸收元为 ι^1（分别为 ι^0）；这样的结构称为立方幺半群。等价地，[GM03], $\square_c$ 是由一个立方幺半群生成的自由幺半范畴。带连接的立方集合范畴是预层范畴$\frown\square_c$。

还有一些子范畴 $\square_{c^\wedge}, \square_{c^\vee}$，它们只有一种类型的连接（当然彼此等价，但不是在 $\square$ 下）。它们在 [Mal09],[Cis14],[Isa11],[BM17],[KLW19] 中以及其他地方都有研究。

带连接与对称的立方集合。令 $\square_{c,\ s}$ 为由 $\square_c$ 以及基本对称映射（在 [BM17]中也称为交换）生成的 $\square_*$ 的宽幺半子范畴

或在 [GM03]中称为延拓映射） $\sigma\colon \square^2 \to \square^2, (x,y) \mapsto (y,x)$。等价地， [GM03], $\square_{c,\ s}$是由对称立方幺半群生成的自由幺半范畴（即带有对合 σ的立方幺半群 M，其中对合定义在 $M^{\otimes 2}$ 上，且满足 $\gamma_{\pm}\sigma = \gamma_{\pm}$）。或者，根据 [GM03] 的研究可知，$\square_{c,\ s}$ 是由 $\square_c$生成的 $\square_*$ 的对称幺半子范畴，或者是建立在对称立方幺半群之上的自由对称幺半范畴（此时， σ 取为对称幺半范畴的对称同构）。带连接与对称的立方集合范畴是预层$\widehat{\ }$范畴 $\square_{c,\ s}$。

还有一些子范畴 $\square_s$,$\square_{c^\wedge,\ s}$,$\square_{c^\vee,\ s}$ 具有对称，但不具有连接，或者只具有一种类型的连接。位点$\square_{c^\wedge,\ s}$,$\square_{c^\vee,\ s}$ （它们当然是等价的）在 [Isa11] 中进行了研究。

带连接、对称与反转的立方集合。令$\square_{c,s,r}$ 为 $\square_*$ 的宽幺半子范畴，它由$\square_{c,s}$ 以及基本反转映射 $\rho\colon \square^1 \to \square^1, 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$ 生成。等价地， [Mau17], $\square_{c,s,r}$ 是由对称对合立方幺半群生成的自由幺半范畴（也就是说，一个对称立方幺半群 M 配备了一个对合 ρ，作用于 M，且满足 $\rho\iota^0 = \iota^1$, $\pi\rho = \pi$，以及 $\rho\gamma_{\pm}(\rho \otimes \rho) = \gamma_{\mp}$ 和 $(\rho \otimes \mathrm{id})\sigma = \sigma(\mathrm{id} \otimes \rho)$）。另一种说法是，它是由$\square_{c,s}$ 和 ρ 在 $\square_*$ 中生成的对称幺半子范畴；此外，由 [Mau17] 的工作还可得知，$\square_{c,s,r}$ 是由对合对称立方幺半群生成的自由对称幺半范畴（这里同样将 σ 视为对称幺半范畴的对称同构）。带连接、对称与反转的立方集合范畴是预层范畴 $\square_{c,s,r}$。

还有一个子范畴$\square_{c,r}$，它具有连接和反转，但没有对称；还有一个子范畴 $\square_r$，它具有反转，但没有连接或对称。这些见于 [BM17]。请注意，如果一个立方站点具有反转和一种连接，它就自动具有两种连接。

具有对角线、连接、对称和反转的立方体集。令$\square_{d,c,s,r}$ 为由$\square_{c,s,r}$ 以及对角映射 $\delta\colon \square^n \to \square^{2n}, x \mapsto (x,x)$生成的 $\square_*$ 的宽幺半子范畴。实际上，我们有$\square_{d,c,s,r} = \square_*$。 [BM17] 将对角映射称为收缩。

还有一些子范畴$\square_{d,s}$, $\square_{d,s,r}$, $\square_{d,c^\wedge,s}$, $\square_{d,c^\vee,s}$, $\square_{d,c,s}$。请注意，如果一个立方站点具有对角映射，它就自动具有对称，这些对称由先施加对角映射、再施加投影得到：$(a,b) \mapsto (a,b,a,b) \mapsto (b,a)$。

$\widehat{\ }$约定。若 $\square_\bullet$ 是一个立方站点且 $X \in \square_\bullet$，我们将 X_n 记作 $X_{\square^n} = X(\square^n)$。我们用 $\gamma_{\pm}$ 表示 $\gamma_\vee$ 或 $\gamma_\wedge$，并约定在给定的表达式中， $\pm$ 的含义保持不变；当 $\gamma_{\pm}$是 $\gamma_\wedge$时，我们用 $\gamma_{\mp}$表示 $\gamma_\vee$，反之亦然。我们用 $\iota^{i,\epsilon}$表示 $\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \iota^{\epsilon} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}$，其中 ι^{ϵ} 位于第 i 个槽中；类似地，我们记 π^i, $\gamma^i_{\pm}$, ρ^i。我们将态射$s\colon \square^n \to \square^n$（由 σ及其张量复合构成）与对称群 Σ_n中的元素自由地视为相同。我们有时也用 $\iota^{i_1,\epsilon_1,\ldots,i_k,\epsilon_k}$表示 $\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \iota^{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes \iota^{\epsilon_k} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}$，其中 ι^{ϵ_j}位于第 i_j 个槽中；类似地，我们记 $\pi^{i_1,\ldots,i_k}$, $\rho^{i_1,\ldots,i_k}$。我们还用 $\gamma_{\pm}$表示 $\gamma_{\pm}(\gamma_{\pm} \otimes \mathrm{id}) \ldots (\gamma_{\pm} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})$。

其他立方位点。在 [BM17], 中，也讨论了不带投影的立方位点（或按其术语称为弱化）；这些位点上的预层是半立方集。除少数括号中的说明外，我们不会讨论这类位点。

7. Cubical sites without diagonals as Eilenberg-Zilber categories

我们将着手证明定理 7.9，表明所有不带对角线的立方站点都是强骨架广义 Reedy 范畴。一个极大的助益是，在没有对角线的情况下，映射 $f\colon \square^n \to \square^m$ 的每个输出变量至多依赖于一个输入变量；我们将在定义 7.3 中对此作出精确定义。

定义 7.1. 设 $\square_\bullet$ 是一个立方站点。令 $(\square_\bullet)_- \subset \square_\bullet$ 为由投影以及 $\square_\bullet$ 中存在的任意连接、对称和反转生成的幺半子范畴，并令 $(\square_\bullet)_+$ 为由面映射以及 $\square_\bullet$ 中存在的任意对称和反转生成的幺半子范畴。

事实 7.2. 设 $\square_\bullet$ 是一个没有连接的立方站点。根据 [GM03] 的结果（例如 [GM03，方程 (58)]），我们有每个态射 f 在 $\square_\bullet$ 中都可以分解为如下形式

$$f = icsrp$$

其中

- i 是面映射的复合；
- c 是 $\square_\bullet$中连接映射的复合；
- s 是 $\square_\bullet$中对称映射的复合；
- r 是 $\square_\bullet$中反转映射的复合；
- p 是若干投影的复合。

我们也可以将 $f = icr'sp$ 分解，其中 r' 是 $\square_\bullet$中若干反转的（通常不同的）复合。

定义 7.3. 设 $\square_\bullet$ 是一个立方站点，并设 $f\colon \square^n \to \square^m$ 是 $\square_\bullet$中的一个态射。对于 $j \le n$和 $i \le m$，如果存在 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$ 和 $j \le n$，使得 i，我们称 f 的第 i个输出变量依赖于其第 j个输入变量

$$f_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}, 0, \epsilon_j, \dots, \epsilon_{n-1}) \neq f_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}, 1, \epsilon_j, \dots, \epsilon_{n-1}).$$

我们称 f 依赖于它的所有输入变量，若对于每个输出变量 i，都存在一个输入变量 j 使得 i号输出变量取决于 f 的 j号输入变量。

对于一个输入变量 j，暂且记作 $X_j = \{i \mid$ 。 i号输出变量取决于 j号输入变量$\}$。若 j 且若 j 和 k 是输入变量，且 $X_j = X_k$ 是一个至多含有一个元素的集合，则称 j和 k 共依赖。

观察 7.4。设 $\square_\bullet$ 是一个立方站点。

(1) 当且仅当 $i = j$时，$\mathrm{id}_{\square^n}$ 的第 i个输出变量取决于$\mathrm{id}_{\square^n}$ 的第 j个输入变量。(2) 设 $\square^p \xrightarrow{g} \square^n \xrightarrow{f} \square^m$ 是其中若干映射的复合。设 $k \in (0,p], i \in (0,m]$ 是变量。那么，当且仅当存在 $j \in (0,n]$，使得 f 的第 i个输出变量取决于 f的第 j个输入变量，且 g 的第 j个输出变量取决于 g 的第 k个输入变量时，fg 的第 i个输出变量才取决于 fg 的第 k个输入变量。(3) 设 $\square^{n'} \xrightarrow{f'} \square^{m'}$ 是另一个映射，并设 $j \in (0, n+n'], i \in (0, m+m']$。当且仅当 $i \le m$且 $j \le n$且 f 的第 i 个输出变量取决于 f'的第 j个输入变量，或者 $i > m$ 且 $j > n$且 f' 的第 $i-m$个输出变量取决于 f'的第 $j-n$个输入变量时，$f \otimes f'$的第 i个输出变量才取决于 $f \otimes f'$的第 j个输入变量。(4) 特别地，取决于其所有输入变量的映射类在恒等映射、复合和张量积下封闭。它也包含恒等映射，因此这类映射张成 $\square_\bullet$的一个宽幺半子范畴。

引理 7.5. 设 $\square_\bullet$ 是一个立方站点，且 $c\colon \square^n \to \square^1$ 是 $\square_\bullet$ 中由连接、对称和反转构成的复合。则 c 依赖于其所有输入变量。此外，对于每个输入变量 $j \le n$，都存在 $\square_\bullet$ 中 f 的一个伪截面 ι，它关于输出变量 j 非恒定。

证明。注意，基本连接、反转和对称都依赖于其所有输入变量。因此，第一个结论由观察 7.4(4) 得出。对于第二个结论，若 $f(\epsilon_1, \dots, -, \dots, \epsilon_{n-1})$ 依赖于第 j 个变量，那么面映射 ι 在 $j' \neq j$ 处取常值、且关于输出变量 j 非恒定，因此是 f 的一个伪截面（因为 $f\iota$ 或是恒等映射，或是反转；后一种情形下，f 中必定出现某些反转（否则 f 就会是保序的），因此 $\square_\bullet$ 中也必定有反转。）□

推论 7.6. 设 $\square_\bullet$ 是一个没有对角线的立方站点，并设 $f\colon \square^n \to \square^m$ 是一个退化态射。那么，共依赖是 f 的输入变量上的一个等价关系。相应的划分

按相应的输出变量自然排序。我们称这个相应的（有序）划分为与 f 相关联的（有序）依赖划分，而那些不依赖于任何输出变量的输入变量的等价类称为平凡部分。此外，在事实 7.2 的分解 $f = crsp$ 中，以下结论成立：

(1) 复合 cr 分解为 $cr = f_1 \otimes \cdots \otimes f_m$，其中 f_i 是唯一的：$\square^{n_i} \to \square^1$，它们是 $\square_\bullet$ 中连接与反转的复合。cr 的有序依赖划分具有如下形式：$\{\{1, 2, \ldots, n_1\}, \{n_1+1, \ldots, n_1+n_2\}, \ldots, \{\ldots, n_1+\cdots+n_m\}\}$，且平凡部分为空。(2) 复合 crs 的有序依赖划分具有如下形式：$\{s^{-1}(\{1, 2, \ldots, n_1\})\ s^{-1}(\{n_1+1, \ldots, n_1+n_2\}) \ldots, s^{-1}(\{\ldots, m\})\}$，且平凡部分为空。(3) $f = crsp$ 的有序依赖划分与复合 crs 的有序依赖划分不同之处在于，平凡部分中穿插着变量。投影 p 恰好投影掉平凡部分中的变量。

证明。我们先证明 (1)。根据定义，分解 $cr = f_1 \otimes \cdots \otimes f_m$ 及其唯一性成立，因为初等连接和反转的陪域都是 $\square^1$，其余所有内容都由它们通过张量积和复合构成。由引理 7.5 可得 $m = 1$ 的情形。再由归纳法，利用观察 7.4(3) 可得一般 m 的情形。因此 (1) 成立，特别地，当 $p = s = \mathrm{id}_{\square^n}$ 时，共依赖是一个等价关系。

由此，根据观察 7.4(2) 可得 (2)。特别地，我们看到，当 $p = \mathrm{id}_{\square^n}$ 时，共依赖是一个等价关系。

对于 (3)，首先注意到，$f = p$ 的情形显然成立（或者可以通过理解初等投影，利用观察 7.4 拼接得出），而由 (2) 可知，p 为平凡情形时结论成立。现在由观察 7.4(2) 可得一般情形。□

引理 7.7. 设 $\square_\bullet$ 是一个立方站点，且 $\square^n \xrightarrow{f} \square^m$ 是其中的一个退化态射。那么

(1) 假设 $\iota\colon \square^m \to \square^n$ 是 f 的一个截面，其中 ι 在输出变量 $j_1 < \cdots < j_m$ 上不是常值的。那么对每个 $i \le m$，f 的第 i 个输出变量都必须依赖于 f 的第 j_i 个输入变量。(2) 假设 ι：$\square^m \to \square^n$ 是 f 的一个伪截面，其中 ι 在输出变量 $j_1 < \cdots < j_m$ 上不是常值的。存在唯一的对称 $s \in \Sigma_m$，使得对每个 $i \le m$，f 的第 i 个输出变量都依赖于 f 的第 $j_{s^{-1}(i)}$ 个输入变量。（如果 $\square_\bullet$ 中不存在对称，则 s 为恒等映射。）(3) 假设 $1 \le j < k \le n$ 是依赖划分中同一部分里的不同输入变量。那么，如果 ι 在输出变量 j 和 k 上不是常值的，则 ι 不是 f 的伪截面。(4) 假设 $1 \le j < k \le n$ 是依赖划分中不同非平凡部分里的不同输入变量。那么存在 f 的一个伪截面 ι，它在输出变量 j 和 k 上不是常值的。(5) 假设 $1 \le j \le n$ 是依赖划分中平凡部分里的一个输入变量。那么，如果 ι 在输出变量 j 上不是常值的，则 ι 不是 f 的伪截面。(6) 假设 $1 \le j \le n$ 是依赖划分中一个非平凡部分里的输入变量。那么存在 f 的一个伪截面 ι，它在输出变量 j 上不是常值的。

证明。对于 (1)，如果 f 的第 i 个输出变量不依赖于 f 的第 j_i 个输入变量，那么 $f\iota$ 会压缩第 i 个坐标，因此它不是同构。

对于 (2)，如果 ι 是 f 的伪截面，那么 $\iota(f\iota)^{-1}$ 是 f 的截面。写作 $f\iota = rs$，其中 r 由 $\square_\bullet$ 中的反转复合而成，s 由 $\square_\bullet$ 中的对称复合而成。根据 (1) 和观察 7.4(2)，s 具有所需的性质。

对于 (5)，注意在这种情况下， $f\iota$ 将由 ι_S 携带到第 j 个坐标的坐标投影掉，因此不是同构。

对于 (6)，我们按照事实 7.2 分解 $f = crsp$，并按照推论 7.6(1) 写出 $cr = f_1 \otimes \cdots \otimes f_m$。设 i 是 f 的输出变量，且 j 依赖于该变量。那么 $p(s(j)) - n_1 - \cdots - n_{i-1}$ 是 f_i 所依赖的一个输入变量。根据引理 7.5，存在一个依赖于该输入变量的 f_i 的伪截面 ι_i。为其他 $f_{i'}$ 任选伪截面 $\iota_{i'}$。于是， $\iota_1 \otimes \otimes \iota_m$ 是 cr 的伪截面，而 $s^{-1}(\iota_1 \otimes \cdots \otimes \iota_m)$ 是 crs 的伪截面。与 p 的任意一个截面复合后，我们便得到一个具有所需性质的 f 的伪截面。

对于 (3)，注意在这种情况下， $f\iota$ 必须将变量 j、k 压缩为一个变量，因此它不是同构。

对于 (4)，我们的推理与 (6) 相同，只是现在 ι_i 和 ι_h 都是非任意选取的（其中 i依赖于 j，而 h 依赖于 k）。□

推论 7.8. 设 $\square_\bullet$ 是一个立方站点，且 f 是其中的一个退化态射。那么， f 的无序依赖划分及其平凡部分由f的伪截面集确定。若 $\square_\bullet$中不存在对称，则 f 的有序依赖划分由 f的伪截面集确定。

证明。由引理 7.7(3 和 4)，我们准确知道哪些输入变量属于平凡部分，即每个伪截面都为常数的那些变量。由引理 7.7(5 和 6)，我们进而准确知道哪些非平凡输入变量对是共依赖的。因此，我们可以恢复无序依赖划分及其平凡部分。若 $\square_\bullet$中不存在对称，由于根据推论 7.6(2)，我们知道非平凡部分是按照输出变量的顺序排列的区间，因此可以推断出哪个部分对应哪个输出变量。□

我们感谢 Denis-Charles Cisinski 提出了以下定理的证明思路 :

定理 7.9（参见 [Isa11]）。设 $\square_\bullet$ 是一个没有对角线的立方站点。那么 $(\square_\bullet, (\square_\bullet)_-, (\square_\bullet)_+)$ 是一个强骨架广义 Reedy 范畴，因而特别是一个 Eilenberg-Zilber 范畴。若 $\square_\bullet$ 没有对称或反转，则它甚至是一个正则骨架 Reedy 范畴。

证明。由事实 7.2 的 $icsrp$分解可知， $\square_\bullet$ 是一个广义 Reedy 范畴（其中 $\deg(\square^n) = n$）。由于 $i \in (\square_\bullet)_+$ 且 $csrp \in (\square_\bullet)_-$，这便给出了分解的存在性。对于分解的唯一性，首先注意，若 ϕ 是 $\square_\bullet$ 中的一个自同构，且 i 是面映射的复合，则对另一个 ψ 中自同构 $\phi i = i\psi$ 也成立。因此，若 $f = iq = i'q'$ 且 $i, i' \in (\square_\bullet)_+$，则我们可以假设 i, i' 是面映射的复合。于是必有 $i = i'$，因为 i 由 f的像确定。由于面映射的复合是单态射，可得 $q = q'$。

现在我们来证明 $\square_\bullet$ 具有强骨架性。首先注意到，$(\square_\bullet)_-$ 的任意态射都是分裂满态射。我们必须证明，$(\square_\bullet)_-$ 中每个分裂满态射 $\psi\colon \square^n \to \square^m$ 都由其伪截面集在伪相等意义下唯一确定。我们分两步论证：

情形 1： $m = 1$。当 $m = 1$ 时， ψ 的伪截面可伪唯一地确定 ψ。先考虑 $\square_\bullet$ 没有反转的情形。在这种情况下，伪截面与截面相同，而伪相等与相等相同。注意， $\psi\colon \square^n \to \square^1$ 是一个布尔函数，由映射到 0 的顶点集 A 及映射到 1 的补集 B 唯一确定（由于 ψ 是满射，这两个集合都非空）。令 E 为 $\square^n$ 中连接一个顶点属于 A、另一个顶点属于 B的边集。由于 ψ 是满射， A 和 B 都非空。若 $v \in A$，则相邻顶点属于 A 还是 B，取决于它们之间的边是否属于 E。由于$\square^n$ 的 1-骨架是连通的，我们可以从 $v_0 \in A$出发，继而沿图向外推进，逐一判定哪些顶点属于 A、哪些属于 B，从而由其截面集确定 ψ。

现在考虑 $\square_\bullet$ 具有反转的情形。像之前一样定义 A、B。那么， ψ 由划分 $\{A, B\}$ 决定，且仅确定到伪相等。按照之前的相同步骤，我们可以从某个

顶点 v_0 开始，通过观察 E，准确确定哪些顶点与 v_0 属于划分的同一部分，哪些属于另一部分。因此，我们已经确定了 A 和 B，但因子交换除外；也就是说，可能需要将 ψ 变为与其伪相等的 $\rho\psi$，正如所要求的那样。

情形 2：一般情形。由推论 7.8，ψ 的伪截面集确定了 ψ 的依赖划分及其平凡部分。由推论 7.6，平凡部分确定了 p。通过与 $\square_\bullet$中的一个对称复合，我们可以转到一个伪相等 ψ，使得其依赖划分由互不交错的区间组成（平凡部分除外）。在此情形下，由推论 7.6(2)，在事实 7.2 的分解 $\psi = crsp$ 中，有 $s = s_1 \otimes \cdots \otimes s_m$，其中 $s_j\colon\ \square^{n_j} \to \square^{n_j}$是 $\square_\bullet$中的一个对称。因此，我们归结到存在一个张量分裂 $\psi = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_m$，其中$\psi_j\colon\ \square^{n_j} \to \square^1$的情形。在此情形下，$\iota$是 $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_m$的伪截面，当且仅当 $\iota = (\iota_1 \otimes \cdots \otimes \iota_m)$，其中每个 ι_j都是 ψ_j的伪截面，而 a 是 $\square_\bullet$中的一个自同构。因此，若 $\psi = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_m$与 $\psi' = \psi'_1 \otimes \cdots \otimes \psi'_m$具有相同的伪截面集，则可推出存在一个属于 $\square_\bullet$ 的置换 s'，使得 ψ_j 与 ψ'_j具有相同的伪截面集。由第一部分可知，ψ_j 伪相等于$\psi'_{s'(j)}$，即$\psi'_{s'(j)} = b_j\psi_j$，其中 b_j 是 $\square_\bullet$中的一个自同构。因此，令 $b = b_1 \otimes \cdots \otimes b_m$，便有 $\psi' = ba\psi$，从而 ψ 与 ψ' 如所求地伪相等。

因此，$\square_\bullet$ 是一个强骨架广义 Reedy 范畴。若 $\square_\bullet$ 没有对称或反转，那么显然 $\square_\bullet$ 是一个骨架 Reedy 范畴。它是正则的，因为面映射是单态射。□

这使我们无需直接验证绝对推出图，就能重获并推广 Isaacson 的一个结果：

推论 7.10（[Isa11]，关于$\square_\bullet = \square_{c^\wedge,\ s}$、$\square_{c^\vee,\ s}$）。设 $\square_\bullet$ 是一个没有对角线的立方站点。那么（$\square_\bullet$，($\square_\bullet$)$_-$，($\square_\bullet$)$_+$）是一个 Eilenberg-Zilber 范畴。

证明。由定理 7.9 和定理 5.6 可得。 □

8. 带对角线的立方站点

最后，我们来看看带对角线的立方体 site。其中有些是 EZ 的，有些则不是（定理 8.12）。为了展开分析，我们将介绍这些位点的几种描述，其中一些是公知结果。

命题 8.1. $\square_{d,c^\wedge,s}$（分别地，$\square_{d,c^\vee,s}$）与有限布尔代数范畴及保二元交的映射（分别地，保二元并的映射）范畴存在典范同构。

注意，$\square_{d,c^\wedge,s}$ 中的映射通常不保最大元 $\top$。对偶地，$\square_{d,c^\vee,s}$ 中的映射通常不保最小元 $\bot$。

证明. 我们将证明$\square_{d,c^\wedge,s}$的情形；$\square_{d,c^\vee,s}$ 的情形是对偶的。我们以自然方式将 $\square^n$ 识别为布尔代数 2^n，即 $\{1,\dots,n\}$的幂集，其中顶点（$v_1,\dots,v_n$）对应于子集 $\{i \mid v_i = 1\} \subseteq \{1,\dots,n\}$。在此识别下，$\square_{d,c^\wedge,s}$的态射是保二元交的映射；要看出这一点，只需在生成元上验证。这对投影和对角线显然成立。对于 γ_- 和 ι^1，这是因为极限与极限可交换；对于 ι^0，则是因为常值与非空极限可交换。

反过来，给定一个保持二元交的映射 $f\colon\ 2^m \to 2^n$，我们希望将 f 分解为由$\square_{d,\ c^\wedge,\ s}$的生成元构成的映射。由于$\square_{d,\ c^\wedge,\ s}$ 到二元交半格的包含函子是强笛卡尔幺半的，我们可以将问题归结为情形 $n = 1$。对于 $m = 0$，结论显然。由二元交保持性，对于 $m \geq 1$，我们有 $f(v_1,\dots,v_m) = f((v_1,1,\dots,1) \wedge \cdots \wedge (1,\dots,1,v_m)) = f(v_1,\dots,1) \wedge \cdots \wedge f(1,\dots,1,v_m)$，这使我们可以将问题归结为情形 $m = 1$，这也显然成立。□

命题 8.2。$\square_{d,\ c^\wedge,\ s}$（分别地，$\square_{d,\ c^\vee,\ s}$）是由一个半立方幺半群生成的自由笛卡尔幺半范畴。

证明。再次，我们将 $\square_{d,\ c^\wedge,\ s}$ 作为讨论对象，因为 $\square_{d,\ c^\vee,\ s}$ 是其对偶。在 [BM17], 中证明了，在此签名下，$\{0,1\}$ 的笛卡尔幺半理论与 $[0,1]$ 的理论一致。文中给出了一种公理化。根据定义，在此签名下，$\{0,1\}$ 的理论恰好由我们的范畴 $\square_{d,\ c^\wedge,\ s}$ 中成立的方程构成。给出的公理恰好是半立方幺半群的公理。□

我们谨向 Keith Kearnes 致谢，他指出了以下命题的证明：

命题 8.3。$\square_{d,\ c^\wedge,\ s}$（分别地，$\square_{d,\ c^\vee,\ s}$）不具有分裂幂等元。其 Karoubi 包络可自然地识别为有限分配格与二元交半格映射（分别为二元并半格映射）所构成的范畴。

证明。我们再次处理 $\square_{d,\ c^\wedge,\ s}$，因为 $\square_{d,\ c^\vee,\ s}$ 是其对偶。回忆 Birkoff 表示定理 [Bir37]指出，有限格是分配格，当且仅当它同构于某个有限偏序集 P 上的下闭集所构成的格。对于任意这样的格 2^P，遗忘函子 $2^P \to 2^{|P|}$ 同时具有左伴随和右伴随，其中 $|P|$ 是偏序集 P 的底集。通过与右伴随复合，我们得到 2^P 是布尔代数 $2^{|P|}$ 在保交映射下的一个收缩。

反过来，[HK71] 将有限分配格刻画为有限内射二元交半-半格，so 有限分配格在收缩下封闭。□

命题 8.4. $\square_{d,\ s}$ 是以一个双基点对象为生成元的自由笛卡尔幺半范畴 t.

证明。在 [BM17], 中已证明，此签名下的 $\{0,1\}$ 的笛卡尔幺半理论与此签名下的 $[0,1]$ 的理论一致。文中给出了一个公理化。根据定义，此签名下 $\{0,1\}$ 的理论恰好由我们的范畴 $\square_{d,\ s}$ 中成立的方程构成。所给出的公理恰好是一个配备两个点 0、1 的对象的公理。□

命题 8.5. $\square_{d,\ s,\ r}$ 是带对合的带基点对象上的自由笛卡尔幺半范畴.

证明。在 [BM17], 中，已证明此签名下 $\{0,1\}$ 的笛卡尔幺半理论与此签名下 $[0,1]$ 的理论相一致，并给出了公理化。根据定义，此签名下 $\{0,1\}$ 的理论恰好由我们的范畴 $\square_{d,\ s,\ r}$ 中成立的方程组成。给出的公理恰好是一个配备了点 0 和对合的对象所满足的公理。□

命题 8.6. $\square_{d,\ c,\ s}$ 是一个立方幺半群上的自由笛卡尔幺半范畴。

证明。在 [BM17], 中，已证明此签名下 $\{0,1\}$ 的笛卡尔幺半理论与此签名下 $[0,1]$ 的理论相一致，并给出了公理化。根据定义，此签名下 $\{0,1\}$ 的理论恰好由我们的范畴 $\square_{d,\ c,\ s,\ r}$ 中成立的方程组成。给出的公理恰好是一个配备了立方幺半群结构的对象所满足的公理。□

命题 8.7（Kapulkin）。$\square_{d,c,s}$ 与有限布尔代数及保序映射构成的范畴有典范的对应关系。

证明。显然，$\square_{d,c,s}$ 的每个映射都是保序的。反之，若 $f\colon \square^n \to \square^1$ 是保序的，则可写作 $f(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_{n-1},0) \vee (f(x_1,\dots,x_{n-1},1) \wedge x_n)$。对于 $\varepsilon = 0$，$(n-1)$ 元函数 $f(x_1,\dots,x_{n-1},\varepsilon)$ 在 1 处保序，因此由对 n 的归纳法可知它属于 $\square_{d,c,s}$。因此，f 也属于 $\square_{d,c,s}$。□

命题 8.8（Sattler）。$\square_{d,\ c,\ s}$ 没有分裂幂等元。其 Karoubi 包络可自然地识别为有限格及其保序映射所构成的范畴。

证明。根据 Knaster–Tarski不动点定理 [Kna28], , 格上保序幂等映射的每个收缩都是有限的。因此，$\square_{d,c,s}$ 的幂等完备化包含于有限格范畴中。反过来，每个有限格都可通过米田嵌入其下闭集格中，而右伴随是一个保序收缩。下闭集格又嵌入

所有子集构成的布尔代数中，而左伴随是一个保序收缩。因此，每个有限格都是有限布尔代数的保序收缩，正如所期望的那样。□

命题 8.9. $\square_{d,\ c,\ s,\ r}$ 是以布尔代数为基础的自由笛卡尔幺半范畴 $a.$

证明。显然， $\square^1$ 是一个布尔代数。此外， $\square^n$ 是由 n 个生成元生成的自由布尔代数。因此，如果由布尔运算构造的两个态射 $\square^n \rightrightarrows \square^1$ 相等，那么这可由布尔代数理论推出。因此，在$\square_{d,\ c,\ s,\ r}$中不存在其他成立的关系。□

命题 8.10. $\square_{d,\ c,\ s,\ r}$ 等价于由有限幂集及所有集合映射构成的范畴 $\square_*$ 。

证明。B 通过任意布尔运算，很显然我们可以构造出 $\square_*$的所有映射。 □

命题 8.11. $\square_{d,\ c,\ s,\ r}$ 没有分裂幂等元。其 Karoubi 包络等价于有限非空集合范畴。

证明. 这由命题 8.10 得出 □

现在给出本节的主要定理。

定理 8.12. (1) 立方站点 $\{\square_{d,\ s}$,$\square_{d,\ s,\ r}\}$ 是强骨架性广义 Reedy 范畴，具有显然的次数函数，因此也是 Eilenberg-Zilber 范畴。

(2) 立方站点 $\{\square_{d,\ c^\wedge,\ s}$,$\square_{d,\ c^\vee,\ s}$,$\square_{d,\ c,\ s}\}$ 不是幂等完备的（因此不是广义 Reedy 范畴）。即使经过幂等完备化，分裂满态射也不构成幂等完备化位点上的正交分解系统的左半部分，因此这些幂等完备化位点对于任何次数函数都不是 Eilenberg-Zilber 范畴。(3) 立方站点 $\square_{d,\ c,\ s,\ r}$ 不是幂等完备的（因此不是广义 Reedy 范畴）。但经过幂等完备化后，幂等完备位点就是有限非空集合范畴，并且是具有显然次数函数的强骨架性广义 Reedy 范畴，因此也是 Eilenberg-Zilber 范畴。

证明。$\square_{d,s}$ 是由一个双基点对象生成的自由笛卡尔幺半范畴（命题 [Cis06] 8.4.5,[GM03]）。该 Lawvere 理论中有限秩自由 Set-模型所成的范畴，是由有限集构成的范畴 Fin_{**} ，其中每个有限集都配备一对有序且互不相同的基点（$*_0, *_1$）。因此，$\square_{d,s} \simeq \mathrm{Fin}_{**}^{\mathrm{op}}$ 与对偶范畴等价。在 Fin_{**}中，存在正交的（单态射，满态射）分解系统，且每个单态射都分裂。两个单态射伪相等，当且仅当它们具有相同的像；伪直缩恰好是指在该像上限制为双射的映射。因此，两个单态射伪相等，当且仅当它们具有相同的伪直缩集合，并且$\square_{d,\ s}$ 是强骨架性的。

$\square_{d,s,r}$ 是由一个带有对合和一个点的对象自由生成的笛卡尔幺半范畴（[GM03]）。该 Lawvere 理论的有限秩自由集合范畴模型构成范畴 $\mathrm{Fin}^{C_2,\text{自由}C_2/}$ ，其对象是有限自由 C_2-集合，并配备一个来自 C_2 的等变映射。因此，$\square_{d,s,r} \simeq (\mathrm{Fin}^{C_2,\text{自由}C_2/})^{\mathrm{op}}$是其对偶范畴。在 $\mathrm{Fin}^{C_2,\text{自由}C_2/}$ 中，存在一个正交的 (Mono,Epi) 分解系统（因为自由 C_2-集合和有限 C_2-集合对子对象封闭），且每个单态射都可分裂。伪直缩和伪相等的描述与 Fin_{**} 中的类似，因此 $\square_{d,s,r}$ 具有强骨架性。

立方形位点 $\{\square_{d、\ c^\wedge、\ s}$、$\square_{d、\ c^\vee、\ s}\}$ 彼此等价；我们讨论后者。它等价于以二元交半格同态为态射的有限布尔代数范畴。这个范畴并非幂等完备；其幂等分裂是有限分配格范畴 $\mathrm{FinDist}^\wedge$ ，其中态射为二元交半格同态（命题 8.3）。请注意，$\mathrm{FinDist}^\wedge$ 中的所有满射都可分裂：有限布尔代数是自由半格，很容易看出，这意味着它们在二元交半格范畴中是投射的，而 $\mathrm{FinDist}^\wedge$ 中的每个对象都是某个此类对象的收缩

这些对象的收缩。FinDist^ 中的任何态射 $X \to Y$，只要它对分裂满态射右正交，就特别对投影 $\square^1 \to \square^0$右正交；由于格是连通的，这意味着 $X \to Y$是单态射。反过来，分裂满态射对每个单态射都左正交。因此，如果 FinDist^是艾伦伯格-齐尔伯范畴，它就会有一个分裂满态射／单态射分解系统。但取一个非分配的有限交半格 P。令 $D \to P$为一个满射交半格同态， $P \to 2^P$为米田嵌入。那么复合映射 $D \to P \to 2^P$是 FinDist^中的一个态射，我们声称它不具有分裂满态射／单态射分解。因为它在交半格范畴中的满射／单态射分解为 $D \to P \to 2^P$，且不能经由分配格分解；而 FinDist^ 中的分裂满态射／单态射分解必然会给出交半格范畴中另一个不同的满射／单态射分解，这与此类分解的唯一性相矛盾。

立方站点 $\square_{d,c,s}$ 等价于以保序映射为态射的有限布尔代数范畴（命题 8.7）。该范畴不是幂等完备的；其幂等分裂是以保序映射为态射的有限格范畴 FinLat$^{\leq}$ （命题 8.8）。与前面一样，分裂满态射的右正交补由单态射构成。令 W 为偏序集 $y_1 > p < x > q < y_2$，并令 $P = 2^W/(y_1 \sim y_2)$，其中我们将 W中的元素与它们在下闭集（米田）嵌入 $W \to 2^W$下的像等同起来，并再次与它们在P中的像等同起来。另令 y表示 y_1, y_2在 P中的公共像。那么 P不是格。因为若它是格，由于 $p, q \leq x, y$在 P中，就存在 $a \in P$使得 $p, q \leq a \leq x, y$。我们不可能有 $a = y$，因为$y \not\leq x$，所以 a在 2^W中有唯一的提升。因此 $p, q \leq a$意味着 $p \vee q \leq a$在 2^W中。但 $p \vee q \not\leq y_1$且$p \vee q \not\leq y_2$在 2^W中；由此可得 $p \vee q \not\leq y$在 P中。若存在这样的 a，就会有 $p \vee q \leq a \leq y$，这与假设矛盾。因此 P 不是格。现在，考察映射 $2^W \to P \to 2^P$ 与米田嵌入的复合。这是有限格之间的一个保序映射，其商映射／单射分解为 $2^W \to P \to 2^P$；若它还存在经过某个格的分裂满态射／单射分解，就会违背偏序集商映射／单射分解的唯一性。因此，该映射不存在分裂满态射／单射分解，所以 FinLat$^{\leq}$ 不是 Eilenberg-Zilber 范畴。

立方站点 $\square_{d,\ c,\ s,\ r}$ 等价于有限布尔代数范畴，其中态射为所有集合映射（命题 8.10）。该范畴不是幂等完备的；其幂等分裂是有限非空集合范畴 Fin$_{\neq\emptyset}$，其中态射为集合映射（命题 8.11）。该范畴具有唯一的（分裂满态射，单态射）分解，并且相对于显然的次数函数是 EZ 范畴。□

References

[Bir37] Garrett Birkhoff. 集合环。 *Duke Mathematical Journal*, 3(3):443–454, 1937。[BM11] Clemens Berger 和 Ieke Moerdijk。关于 Reedy 范畴概念的一种扩展。 *Mathematische Zeitschrift*, 269 3 4 977 1004, 2011 (-): – 。[BM17] Ulrik Buchholtz 和 Edward Morehouse。立方体集的簇。载于 *International Conference on Relational and Algebraic Methods in Computer Science* 77 92 2017 ，页码 – 。施普林格，。[BR13] Julia E Bergner 和 Charles Rezk。Reedy 范畴与 Θ-构造。 *Mathematische Zeitschrift*, 274(1- 2):499–514, 2013。[Cam22] Tim Campion。单纯与立方体同伦论中的立方体近似。 *In preparation*, 2022。[Cis06] Denis-Charles Cisinski。 *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*。法国数学学会，2006。[Cis14] Denis-Charles Cisinski。适用于优雅同伦类型模型的单价宇宙。 *arXiv preprint arXiv:1406.0058* 2014 ，。[EZ50] Samuel Eilenberg 和 Joseph A Zilber。半单纯复形与奇异同调。 *Annals of Mathematics* 499 ，页码 –513, 1950。[GM03] Marco Grandis 和 Luca Mauri。立方体集及其位点。 *Theory Appl. Categ*, 11(8):185–211, 2003。[HK71] Alfred Horn 和 Naoki Kimura。半格范畴。 *Algebra Universalis*, 1(1):26–38, 1971。[Isa11] Samuel B. Isaacson。对称立方体集。 *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215(6):1146–1173, 2011年6月。[Joy08] Andr´e Joyal。拟范畴理论及其应用。2008。

[KLW19] Krzysztof Kapulkin、Zachery Lindsey 和 Liang Ze Wong。立方体集到单纯集合的一个余反射及其在模型结构中的应用。 *New York J. Math*，25:627–641，2019。[Kna28] B. Knaster。关于集合函数的一个定理。 *Ann. Soc. Polon. Math.*，6:133–134，1928。[Mal09] Georges Maltsiniotis。带联结的立方范畴是一个严格测试范畴。，，（）：–。[Mau17] Luca Mauri。幺半范畴中的代数理论。 *arXiv preprint arXiv:1705.09202*，2017。[Ree74] Christopher L Reedy。模型范畴的同伦论。 *Unpublished manuscript*，1974。[RV14] Emily Riehl 和 Dominic Verity。Reedy 范畴的理论与实践。 *Theory and Applications of Categories* 29 9 256 301, 2014 ，（）：–。

[Shu15] Michael Shulman。Reedy 范畴及其推广。 *arXiv preprint arXiv:1507.01065*，2015。