arXiv:2303.06218v1 [math.GT] 10 Mar 2023

扭结霍普夫链环的 SU()特征簇分层

ÁNGEL GONZ´ALEZ-PRIETO、Marina Logares、JAVIER MART´INEZ 和 VICENTE MU˜NO Z

Abstract. 我们描述了霍普夫链环补空间的基本群到 SU(r) 的表示特征簇的几何，其中该霍普夫链环带有 n 个扭结，即 $\Gamma_n = \langle x, y \,|\, [x^n, y] = 1\rangle$。对于任意秩，我们给出了不可约表示与完全可约表示所在轨迹的几何描述。在 $r = 2$ 的情形下，我们完整地描述了该特征簇的几何，并证明这个 SU(2) 特征簇是更大的 SL(2，$\mathbb{C}$) 特征簇的变形收缩，这正如 Florentino 和 Lawton 所猜想的那样。在 $r = 3$ 的情形下，我们还根据表示的半单类型描述了 SU(3)特征簇的不同层。

谨以此文献给 *Peter E. Newstead*教授，以庆祝他的*80*岁生日。

1. Introduction

设 Γ 为有限生成群， G 为实或复代数群。从Γ 到 G 的表示是一个群同态 $\rho\colon \Gamma \to G$。考虑一个群表示 $\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \,|\, \{r_\lambda\}\rangle$，其中$\{r_\lambda\}$ 是 Γ的有限关系生成集。映射 ρ 完全由 k元组（A_1，.....，A_k）=（$\rho(\gamma_1)$.....，$\rho(\gamma_k)$）确定，并须满足关系 $r_\lambda(A_1$，.....，$A_k) = \mathrm{id}$，对所有 λ均成立。由此， Γ 到 G 的表示集合与代数集

$$R(\Gamma, G) = \{(A_1, \ldots, A_k) \in G^k \,|\, r_\lambda(A_1, \ldots, A_k) = \mathrm{id}, \forall \lambda\} \subset G^k\,.$$

若存在 $g \in G$ 使得对每个 $\gamma \in \Gamma$都有 $\rho'(\gamma) = g^{-1}\rho(\gamma)g$，则称表示 ρ 和 ρ' 等价。当 ρ 是到 $G \subset \mathrm{GL}(V)$中的忠实表示时，表示等价意味着 ρ 和 ρ' 经过对 V作 G基变换后是同一个表示。因此，表示模空间（或特征簇）可定义为 GIT 商

$$X(\Gamma, G) = R(\Gamma, G) /\!\!/ G\,.$$

一个重要的情形是 $G = \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$，此时我们可将线性表示这一经典概念还原为向量空间 $\mathbb{C}^r$ 上的 Γ-模结构。值得注意的是，当 Γ 是有限群时，向量空间 $\mathbb{C}^r$ 可配备一个 Γ-不变的厄米度量。因此，任意表示 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ 都可降至一个 U(r)-表示

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\ \rho\ } & \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \\ & \overset{\tilde{\rho}}{\searrow} & \uparrow \\ & & \mathrm{U}(r) \end{array}$$

换言之， $X(\Gamma, \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})) \cong X(\Gamma, \mathrm{U}(r))$。然而，在 Γ 仅有限生成的一般情形下，这样的不变度量可能不存在，因此 $X(\Gamma, \mathrm{U}(r))$ 只是 $X(\Gamma, \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}))$ 的一个实子簇。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14M35。次要分类：57K31。

Key words and phrases. 特征簇、表示簇、酉群、结、链环。

在固定表示的行列式的情形下，也可以进行类似的考察。因此，我们分析由包含映射 $\mathrm{SU}(r) \hookrightarrow \mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$ 诱导的表示的下降性质；该性质表明 $X(\Gamma,\ \mathrm{SU}(r))$ 是 $X(\Gamma,\ \mathrm{SL}(r,\ \mathbb{C}))$ 的一个实子簇。

对于非有限群 Γ，情况有所不同。文献 [5]，证明，当 Γ 是幂零群的自由积或星形右角阿廷群（右角阿廷群）时，对于任意约化群 G 及其极大紧子群，该包含映射 $X(\Gamma,K) \hookrightarrow X(\Gamma,G)$ 都是变形收缩（这一性质称为“有缺陷”）。相反，对于 $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$，即亏格为 $g \geq 2$ 的紧致可定向曲面的基本群 Σ_g，当 G 是约化且非阿贝尔时，这个包含映射绝非同伦等价（按照 [5] 的说法，Γ 是一个“无缺陷”群）。

关于结群情形下这些特征簇的同伦型研究始于 [12]。对于一个结 $K \subset S^3$，有限表示群 $\Gamma = \pi_1(S^3 - K)$ 是该结的重要不变，称为结群。文献中最早研究的一类非平凡结是类型为 $(m,\ n)$ 的环面结，其结群为 $\Gamma = \langle x, y \,|\, x^n = y^m \rangle$。对于环面结群，[10] 和 [12] 证明，在 $\mathrm{SU}(2) \hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C})$ 情形下，这种包含是变形收缩；[7]则证明，在 $\mathrm{SU}(3) \hookrightarrow \mathrm{SL}(3,\ \mathbb{C})$ 情形下也有相同结论。

本文旨在将这一研究计划推广到一类三维链环。与结的情形类似，给定一个链环 $L \subset S^3$，其链环群是其补空间的基本群 $\Gamma = \pi_1(S^3 - L)$。对于一个代数群 G，我们有该链环的 G-特征簇

$$X(L,G) = \mathrm{Hom}\left(\pi_1(S^3 - L), G\right) /\!\!/ G\,,$$

与之前一样。尽管结的表示簇研究已取得进展，但对于链环情形，人们所知甚少。一个显而易见的情形是平凡链环的特征簇，即自由群的表示。最近，人们开始研究更复杂的链环，例如文献 [3] 中关于博罗米恩链环的扭曲亚历山大多项式。在文献 [9]，中，作者探讨了将特征簇几何分析扩展至“扭曲”霍普夫链环 H_n 的问题：通过对经典霍普夫链环进行扭转，将其 2 个交叉变为 $2n$ 个交叉，如图 1 所示。

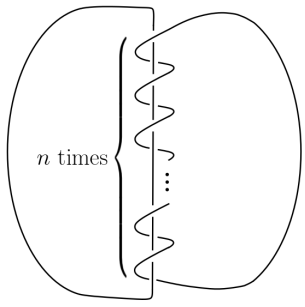


FIGURE 1. 经过 n 次扭转的扭曲霍普夫链环。

链环 H_n 的链环补空间的基本群可通过 Wirtinger 群表示 [9]，计算得到，从而得到群 $\Gamma_n = \langle a, b \,|\, [a^n, b] = 1 \rangle$。因此，相应的 G-特征簇为

$$X(H_n, G) = \left\{(A,B) \in G^2 \,|\, [A^n, B] = 1\right\} /\!\!/ G.$$

从这个意义上说，$X(H_n,G)$应理解为计数G中“超交换”元素的簇，它推广了通常霍普夫链环的 $n = 1$ 情形，后者对应于交换元素。

在此背景下，本文将说明如何根据半单分解的类型，对扭曲霍普夫链环的特征簇进行分层，讨论 G =SU(r)和 G =U(r)两种情形；这一方法最初见于 [8]。此外，我们将明确描述其不可约轨迹（第 2.3 节），以及完全分解为一维表示的表示轨迹（第 2.4 节）。这将引导我们探究其他辅助空间，例如环面的对称空间。在第 3 节中，我们将运用这些技巧描述 SU(2) 特征簇的整体几何。此外，在第 4 节中，我们将把它的拓扑与 SL(2，$\mathbb{C}$) 特征簇的拓扑进行比较；后者此前已在 [9]中研究过。这些分析将导出本文的主要结果。

定理。 扭曲霍普夫链环的 $\mathrm{SU}(2)$-特征簇是相应的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-特征簇的强变形收缩。此外，它们与$n$ 个2维球面的楔和同伦等价。

请注意，这一结果首次将 [5] 的结果以非平凡的方式推广到了链环群。在更高维的 U(2) 和 S U(3) 情形中，我们还全面描述了相应特征簇中的半单分层。尽管每个部分都得到了完整描述，但涉及的几何结构非常复杂，因此无法完整描述由此产生的交集模式。这使得我们无法进一步进行刻画这些簇同伦型所需的上同调计算。

尽管存在这一根本障碍，我们的结果表明，可以考虑采用另一种方法来解决比较 SU(r) 与 SL($r,\mathbb{C}$) 特征簇同伦型的问题。事实上，本文的方法表明，尽管收缩 $X(H_n$,SL(2,$\mathbb{C}$)) $\to X(H_n$,SU(2)) 并不保持半单分层，但会保持其闭包不变。因此，尽管我们不认为存在能够局部收缩每个分层的收缩，但若允许同伦利用闭包中的相邻分层，则这种变形收缩或许是可能的。基于这一想法，我们提出以下猜想。

猜想。对于任意 $r \geq 1$，扭曲霍普夫链环的 $\mathrm{SU}(r)$-特征簇是相应的 $\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$-特征簇的强变形收缩。

最后，我们想指出，尽管本文始终采用纯表示论的方法研究所有这些空间，但它们传统上与抛物丛模空间相关。事实上，Furuta 和 Steer [6] 的工作展示了一种代数几何方法，用于研究塞弗特纤维空间基本群到 SU(r) 的表示模空间的拓扑。这一思路适用于本文讨论的扭曲霍普夫链环。扭曲霍普夫链环是 (2，$2n$)-环面链环，也就是满足 Burde–Murasugi 定理 [2, 定理 1], 的二桥链，因此其补空间是一个以带有一个阶为 n的奇异点的轨形为底空间的塞弗特纤维化三维球面。

在 [1, 第 6 节中，7], Boden 证明，给定这样的塞弗特纤维化同调三维球面 M，存在一个轨形曲面 Σ，使得特征簇 $X(\pi_1(M)$，SU(2)) 与 $X^*(\pi_1^{\mathrm{orb}}(\Sigma)$，SU(2)) 同构；后者是该轨形曲面 Σ 的轨形基本群的不可约表示模空间。这个空间实际上可以理解为若干具有适当抛物数据的稳定抛物丛模空间之并 [11]。从这一视角来看，我们的工作是对 Newstead 在 [14]研究纤维丛模空间同伦性质的工作的致敬。

上述与抛物丛模空间之间的关系，借助 Nasatyr 和 Steer 的工作 [13]，通过塞弗特纤维化同调三维球面的 SL(2,$\mathbb{C}$) 特征簇与无迹抛物 Higgs 丛模空间之间的类似关系得以完善。这促使我们尝试从无迹抛物 Higgs 丛模空间到

次数为 0 的稳定抛物丛模空间构造一个变形收缩。我们并不认为这能实现，因为在非抛物情形下，事实正是如此（见 [4]）。原因或许相同：无迹抛物 Higgs 丛模空间收缩到其众所周知的幂零锥，而幂零锥包含次数为 0 的稳定抛物丛模空间作为其不可约分支之一，但它本身确实是可约的。尽管如此，我们将在未来的工作中探讨这个问题。

致谢。 第一作者获得了马德里自治区政府（马德里自治区—西班牙）的资助，该资助来自马德里康普顿斯大学多年期协议中面向青年博士的研究激励项目，属于第五期 PRICIT（区域研究与技术创新计划），项目编号为 PR27/21-029；此外，还获得了由 BBVA 基金会赞助的 COMPLEXFLUIDS 研究资助，以及西班牙科学与创新部项目 PID2021-124440NB-I00 的资助。第二作者获得了西班牙科学与创新部项目 PID2021-124440NB-I00、Santander-UCM PR44/21-29924 研究资助，以及美国国家科学基金会 DMS-1928930 号资助；她于 2022 年秋季学期驻留在伯克利的西蒙斯-劳弗数学科学研究所（原名 MSRI）期间获得了该项资助。第四作者获得了西班牙科学与创新部项目 PID2020-118452GB-I00 的部分资助。

2. Representation spaces and character varieties

我们在此固定记号，并概述本文中将用到的一些性质。考虑有限生成群 $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \,|\, r_\lambda(\gamma_1, \dots, \gamma_k)\rangle$，其中 $r_\lambda(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ 是生成元 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ 所满足关系的集合。给定代数线性群 G，Γ 的 G-表示簇是如下空间

$$R(\Gamma, G) = \mathrm{Hom}\,(\Gamma, G) = \{(g_1, \dots, g_k) \in G^k \mid r_\lambda(g_1, \dots, g_k) = \mathrm{id}\}.$$

就本文而言，我们将重点讨论经典矩阵情形 $G = \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(r, \mathbb{C}), \mathrm{U}(r)$ 和 $\mathrm{SU}(r)$。给定 $\rho \in R(\Gamma, G)$，若存在某个真线性子空间 $W \subset \mathbb{C}^r$，对所有 $\gamma \in \Gamma$ 都是不变的，也就是说，满足 $\rho(\Gamma)(W) \subset W$，则称 ρ 为可约；否则称 ρ 为不可约。若存在 ρ-等变分解 $\mathbb{C}^r = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$，将其分解为不可约分支，则称 ρ 为半单。

群 G 在 $R(\Gamma, G)$ 上有一个自然作用，由 $g \cdot \rho = g\rho g^{-1}$ 给出，其中 $g \in G$ 和 $\gamma \in \Gamma$，即共轭作用。若两个表示在共轭作用下属于同一个G-轨道，则称它们等价。Γ 的 G-表示的模空间是关于此作用的 GIT 商（有关这些代数商的介绍，参见 [15]），

$$X(\Gamma, G) = R(\Gamma, G) /\!\!/ G.$$

众所周知（参见 [15]），$X(\Gamma, G)$ 参数化了模去一种称为 S-等价的等价关系后的表示：若两个表示 ρ 和 ρ' 的 G-轨道闭包相交，则称它们 S-等价。事实证明，对于经典群 $G = \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(r, \mathbb{C})$，每个表示都与某个半单表示 S-等价。此外，在紧情形 $G = \mathrm{U}(r)$ 和 $\mathrm{SU}(r)$ 中，每个表示都是半单的（参见 [7, 命题 1]）。因此，在所有这些情形下，$X(\Gamma, G)$ 参数化了模去（经典）等价关系后的半单表示。

2.1. 扭曲霍普夫链环群的表示。我们在此研究以下群的表示。对于 $n \geq 1$，令 $H_n \subset S^3$ 为所谓的扭曲霍普夫链环，它是经典霍普夫链环的一种推广，其交叉数为 $2n$，而非 2，如图 1 所示。

利用其 Wirtinger 表示，在 [9, 命题 3.1] 中已证明，链环 H_n 补空间的基本群为

$$\Gamma_n = \pi_1(S^3 - H_n) = \langle a, b \mid [a^n, b] = 1 \rangle,$$

其中 $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ 表示群交换子。由此，相关的 G-表示簇为

$$R(\Gamma_n, G) = \mathrm{Hom}\,(\Gamma_n, G) = \{(A, B) \in G^2 \mid [A^n, B] = \mathrm{id}\}.$$

本文将研究 Γ_n 对于 $G = \mathrm{U}(r)$ 和 $G = \mathrm{SU}(r)$ 的相应表示空间与特征簇。我们将它们记作

$$X_r = X(\Gamma_n, \mathrm{U}(r)), \qquad \mathrm{S}X_r = X(\Gamma_n, \mathrm{SU}(r)).$$

2.2. **表示的分层**。 令 $r \geq 1$ 固定。回顾一下， r 的一个分拆 π 是一个分解

$$r = a_1 r_1 + \ldots + a_s r_s\,,$$

其中 $r_1 > r_2 > \ldots > r_s > 0$ 且 $a_i \geq 0$。我们将其记作 $\pi = (r_1, \overset{(a_1)}{\ldots\ldots}, r_1, \ldots\ldots, r_s, \overset{(a_s)}{\ldots\ldots}, r_s)$。与此分拆相关联，我们可以考虑类型为 π 的半单表示 ρ 的等价类： $\Gamma_n \to \mathrm{U}(r)$，其描述如下：

$$\rho = \bigoplus_{t=1}^{s} \bigoplus_{l=1}^{a_l} \rho_{tl}, \quad \rho_{tl} : \Gamma_n \to \mathrm{U}(r_t). \tag{1}$$

我们用 $X_r^\pi \subset X_r = X(\Gamma_n, \mathrm{U}(r))$ 表示这类表示的集合。类似地，对于 $\mathrm{SU}(r)$，我们设 $\mathrm{S}X_r^\pi = X_r^\pi \cap \mathrm{S}X_r$，它由 (1) 中满足 $\prod_{t,l} \det(\rho_{tl}) = 1$ 的那些表示组成。

因此，特征簇 X_r 和 SX_r 可分解为由 Π_r （即 r 的所有分拆的集合）索引的局部闭子簇：

$$X_r = \bigsqcup_{\pi \in \Pi_r} X_r^\pi, \qquad \mathrm{S}X_r = \bigsqcup_{\pi \in \Pi_r} \mathrm{S}X_r^\pi.$$

在所有可能的分拆中，以下两种情形尤为重要： $X_r^{\mathrm{TR}} = X_r^{\pi_1}$，即完全可约 表示的集合，它对应于 $\pi_1 = (1, \overset{(r)}{\ldots}, 1)$；以及 $X_r^* = X_r^{\pi_0}$，它表示不可约 表示的集合，其中 $\pi_0 = (r)$。对于 $\mathrm{SU}(r)$ 的对应情形，也将使用类似的记号。

最后，给定一个（实）代数簇 X，考虑由 r 个 X 的副本构成的对称积 $\mathrm{Sym}^r(X) = X^r/S_r$，其中对称群 S_r 通过置换各因子起作用。利用这个对称积，我们可以对等价意义下的半单表示作如下简单刻画。

引理 2.1. 对于任意分拆 $\pi = (r_1, \overset{(a_1)}{\ldots}, r_1, \ldots, r_s, \overset{(a_s)}{\ldots}, r_s) \in \Pi_r$，我们有一个同构

$$X_r^\pi \cong \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Sym}^{a_i}(X_{r_i}^*).$$

2.3. **不可约表示**。 首先，我们来观察扭结 Hopf 链环群的不可约表示具有以下有用性质。

引理 2.2。 设 $\rho = (A, B) : \Gamma_n \to G$ 是一个不可约表示。那么 A^n 是单位元的倍数。

证明。 Γ_n 中的关系表明， A^n 是从 $\mathbb{C}^r$ 到 $\mathbb{C}^r$的等变线性映射。因此，根据舒尔引理， A^n 是单位元的倍数。□

考虑自然投影映射

$$\omega : X_r^* \to \mathrm{Sym}^r(S^1).$$

它将每个不可约表示（A， B） $\in X_r^*$映射到矩阵 A的特征值集合。为了研究此映射，我们按照重特征值的数量对 $\mathrm{Sym}^r(S^1)$ 进行分层。具体而言，给定一个分拆 $\sigma = (r_1, {}_{(a_1)}\ldots\ldots, r_1, \ldots\ldots, r_s, {}_{(a_s)}\ldots\ldots, r_s) \in \Pi_r$，记 $\mathrm{Sym}^r_\sigma(S^1)$ 为满足以下条件的集合族：其中有 a_i 组各含 r_i 个相等的特征值（即重数为r_i的 a_i 个特征值）。特别地， $\sigma_0 = (1, {}_{(r)}\ldots\ldots, 1)$ 对应于特征值互不相同的情形。这样，给定$\sigma \in \Pi_r$，我们定义

$$X_\sigma^* = \omega^{-1}(\mathrm{Sym}^r_\sigma(S^1)).$$

这些是表示(A, B)的等价类，其中 A 具有由 σ给出的重特征值。因此，我们根据重特征值的数量，进一步对不可约轨迹 X_r^* 进行分层

$$X_r^* = \bigsqcup_{\sigma \in \Pi_r} X_\sigma^*. \tag{2}$$

请注意，在这种分解中，某些层 X_σ^* 可能为空。X_r^*的极大分支对应于特征值均不重复的分拆 $\sigma_0 = (1, {}_{(r)}\ldots, 1)$。若 $n \geq r$，则这一层非空：将 A 对角化后，表示的不可约性保证我们可以为 A 和 B的特征向量选取两个不重合的基，从而得到该层中的一个元素。

给定 $\sigma \in \Pi_r$，取 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \in \mathrm{Sym}^r_\sigma(S^1)$，并将对角矩阵 $A_\sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$的 $\mathrm{U}(r)$-稳定子记为 $\mathrm{Stab}(\sigma)$。请注意，$\mathrm{Stab}(\sigma)$并不依赖于特征值 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \in \mathrm{Sym}^r_\sigma(S^1)$的具体取值。事实上，若 $\sigma = (r_{1, (a_1)} \ldots, r_1, \ldots, r_{s, (a_s)} \ldots, r_s)$，则有如下显式描述

$$\mathrm{Stab}(\sigma) = \prod_{i=1}^{s} \mathrm{SU}(r_i)^{a_i}.$$

2.3.1. $\mathrm{SU}(r)$-不可约表示。 若取 $\mathrm{SU}(r)$ 这一情形，直接由引理 2.2 可得以下结论。

推论2.3。 设 $\rho = (A, B) : \Gamma_n \to \mathrm{SU}(r)$ 是一个不可约表示。那么 $A^n = \xi\,\mathrm{id}$，其中$\xi \in \boldsymbol{\mu}_r$ 是一个 r 次单位根。特别地， A 只有有限多个特征值。

这一结果意味着映射

$$\omega : \mathrm{S}X_r^* \to \mathrm{SSym}^r(S^1)$$

的像是有限集，其中 $\mathrm{SSym}^r(S^1) \subset \mathrm{Sym}^r(S^1)$ 是满足 $\lambda_1 \cdots \lambda_r = 1$ 的集合 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \in \mathrm{Sym}^r(S^1)$ 的全体。该像恰好是还满足 $\lambda_1^n = \lambda_2^n = \ldots = \lambda_r^n \in \boldsymbol{\mu}_r$ 的那些特征值。与前一种情形类似，我们也有如下分层

$$\mathrm{SSym}^r(S^1) = \bigsqcup_{\sigma \in \Pi_r} \mathrm{SSym}^r_\sigma(S^1), \qquad \mathrm{S}X_r^* = \bigsqcup_{\sigma \in \Pi_r} \mathrm{S}X_\sigma^*, \tag{3}$$

依据重特征值的数量进行划分。

给定 $\sigma \in \Pi_r$，记 N_σ为满足 $\lambda_1^n = \lambda_2^n = \ldots = \lambda_r^n = \xi \in \boldsymbol{\mu}_r$（且 $\lambda_1 \cdots \lambda_r = 1$）的集合 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \in \mathrm{SSym}^r_\sigma(S^1)$ 中元素的个数。固定 $\xi \in \boldsymbol{\mu}_r$ 后，可能性数为

在 [8, 推论 6.7] 中计算了 $\gcd(n,r) = 1$ 的情形。因此，考虑到 ξ 有 r 种选择，我们得到

$$N_\sigma = \frac{r}{n}\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_s},$$

至少当 n 和 r 互素时（推测对任意 n 和 r 均成立）。这里，我们使用了多项式系数

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_s} = \frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_s!(n-a_1-\ldots-a_s)!}.$$

引理 2.4。设 $\sigma \in \Pi_r$。我们有，SX^*_σ 是由 N_σ 个子空间的副本不相交并组成的

$$\mathrm{S}\mathbf{F}_\sigma \subset \mathrm{SU}(r)/\operatorname{Stab}(\sigma),$$

$\operatorname{Stab}(\sigma)$ 在 $\mathrm{SU}(r)$ 上的作用是通过共轭作用实现的。

证明。设 $(A,B) \in SX^*_\sigma$。由于 A 可对角化，(A,B) 有一个代表元，其矩阵为$A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$，其中 $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\} \in \mathrm{SSym}^r_\sigma(S^1)$。此形式在 $\mathrm{Stab}(A) = \mathrm{Stab}(\sigma)$ 通过共轭作用于 B 的作用下唯一，因此它如所述定义了 SU(r)/Stab(σ) 中的一个点。□

注2.5。与 $\mathbf{SF}_\sigma$ 对应的子空间 $\mathrm{S}X^*_\sigma$ 可以明确刻画如下。令 $\mathbf{SF}^0_\sigma$ 为 $\mathbf{SF}_\sigma$ 在投影映射 $\mathrm{SU}(r) \to \mathrm{SU}(r)/\mathrm{Stab}(\sigma)$ 下的原像。那么，$\mathbf{SF}^0_\sigma$ 由 SU(r) 中满足以下条件的矩阵类 $B \in$ 构成：B 与 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ 没有任何非平凡的不变子空间是共同的。注意，A 的不变子空间是由 $\mathbb{C}^r$ 的标准基向量生成的某些子空间，具体取决于分拆 σ。

2.3.2. SU(r)-特征值互异的不可约表示。本节将进一步研究分拆 $\sigma_0 = (1,_{(r)}\ldots,1)$对应的情形，此时特征值互不重复。在这种情况下，$\mathbf{SF}^0_{\sigma_0}$是 $\mathbb{C}^r$ 的体积为 1 的标准正交基 $\{b_1,\ldots,b_r\}$ 的集合，并且满足：对于任意真子集 $\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,r\}$，$\langle b_{i_1},\ldots,b_{i_k}\rangle \neq \langle e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\rangle$。此外，$\mathrm{Stab}(\sigma_0) = (S^1)^r$，其作用 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\cdot(b_{ij}) = (\lambda_i\lambda_j^{-1}b_{ij})$ 对于 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \in (S^1)^r$ 以及 $B = (b_{ij}) \in \mathrm{SU}(r)$ 成立。

我们先分析在前述作用下的空间 $\mathrm{SU}(r)/(S^1)^r$。回想一下，SU(r) 可以理解为以 S^{2r-1}（第一个基向量的选取）为底空间的纤维丛，其纤维是一个以 S^{2r-3}（第二个基向量的选取）为底空间的纤维丛；后者的纤维又是一个以 S^{2r-5} 为底空间的纤维丛，如此等等，直到最后一个基向量。原则上，最后一个基向量属于 S^1，但实际上由体积条件固定。

然而，$(S^1)^r$ 的作用使情况变得更加复杂。给定一个矩阵 $B = (b_1 \mid \ldots \mid b_r)$，其中$b_j = (b_{1j},\ .....,\ b_{rj})$ 是它的列向量，该作用允许我们对所有 $i \geq 2$ 排列 $b_{i1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。这样的代表元是唯一的，因此我们得到一个投影映射

$$\varphi : \mathrm{SU}(r)/(S^1)^r \longrightarrow B_r$$

映射到“粗正交域”（参见 [7,定理 10]）

$$B_r = \{(z,x_2,\ldots,x_r) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}^{r-1}_{\geq 0} \mid |z|^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 = 1\} \subset S^r \subset S^{2r-1}.$$

φ 在 $b = b_1 = (z,x_2,\ldots,x_r)$ 上的纤维，由 b 补全为体积为 1 的标准正交基的方式数决定。在 B_r 的内部，纤维 $\varphi^{-1}(b)$ 是一个迭代球面丛；但当 b 属于 B_r的边界时，仍存在 $G_b = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \in (S^1)^r \mid \lambda_1 = \lambda_i$ 对作用于 $S^{2r-3}\times\ldots\times S^3$上的 $2 \leq i \leq r\}$ 的剩余作用（若 $x_i = 0$）。

如果我们将注意力限制在 $\mathbf{SF}_{\sigma_0} = \mathbf{SF}^0_{\sigma_0}/(S^1)^r$，那么必须移除那些会导致可约表示的底空间。这些底空间仅出现在 B_r 的边界上，因此，前述描述对于 B_r 内部的 $\mathbf{SF}_{\sigma_0}$ 也成立。

2.3.3. U(r)-不可约表示。 U(r)-表示的情形与前一种类似，因此我们得到一个特征值映射

$$\omega : X_r^* \to \mathrm{Sym}^r(S^1).$$

然而，在这种情形下，该映射不再具有有限像，因为对于像中的一个特征值构型$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \in \mathrm{Sym}^r(S^1)$，元素 $\xi = \lambda_1^n = \lambda_2^n = \ldots = \lambda_r^n$可以是 S^1中的任意一点。我们从最简单的情形开始分析这些表示。

引理 2.6. 我们有 $X_1^* \cong S^1 \times S^1$。

证明。 由于 U(1) $= S^1$ 是一个阿贝尔群，任意一对 $(A,\ B) \in$ U(1) $\times$ U(1) $= S^1 \times S^1$ 都会给出一个扭曲霍普夫链环的表示。此外，由于它们是一维表示，因此自动是不可约的。□

高秩情形 $r > 1$ 更为复杂。作为第一步，我们得到一个与引理 2.4 类似的结果。

命题 2.7. 固定 $\sigma \in \Pi_r$。存在一个扎里斯基局部平凡纤维丛

$$\omega_\sigma : X_\sigma^* \to \mathrm{Sym}_\sigma^r(S^1)$$

其纤维为 $\mathbf{F}_\sigma \subset \mathrm{U}(r)/\mathrm{Stab}(\sigma)$，底空间为满足$\lambda_1^n = \lambda_2^n = \ldots = \lambda_r^n$的特征值集合 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \in \mathrm{Sym}_\sigma^r($ $S^1)$。

证明。 谱映射 σ : U(r) $\to$Sym$_\sigma^r(S^1)$ 在扎里斯基拓扑下局部平凡。事实上，在一个平凡化开集 $U \subset$ Sym$_\sigma^r(S^1)$ 上，我们可以对 $\omega_\sigma^{-1}(U)$ 中的每个表示 (A, B) 施以共轭，使其满足$A =$diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$。在这种形式下， $B \in$U(r) 在 Stab(A) =Stab(σ) 的共轭作用下唯一确定。□

注 2.8. 同注 2.5 中的情形完全类似，子空间 $\mathbf{F}_\sigma$ 也可以明确刻画，唯一的区别是，现在使用 $B \in$U(r)，而不是 $B \in$SU(r)。

为了更仔细地考察这个纤维化，我们考虑簇 $\hat{}X_r^* = X_r^* \times_{\mathrm{Sym}^r(S^1)} (S^1)^r$ ，它是以下拉回

$$\begin{array}{ccc} \hat{X}_r^* & \longrightarrow & X_r^* \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_\sigma} \\ (S^1)^r & \longrightarrow & \text{对称幂}^r(S^1) \end{array}$$

其中，$(S^1)^r \to$ Sym$^r(S^1)$ 是商映射。类似地，若要限制重合特征值的个数，我们令 $\hat{}X_\sigma^* = X_\sigma^* \times_{\mathrm{Sym}_\sigma^r($ $S^1)} (S^1)^r$ ，其中 $\sigma \in \Pi_r$；并将 $\Sigma_\sigma \subset (S^1)^r$ 记为 $\hat{}\ X_\sigma^* \to (S^1)^r$ 的像。

$\hat{}$**引理 2.9.** 纤维化 $X_\sigma^* \to \Sigma_\sigma$ 是平凡的，因此我们有一个同构

$$\hat{X}_\sigma^* \cong \mathbf{F}_\sigma \times \Sigma_\sigma. \tag{4}$$

证明. $\hat{}\ X_\sigma^*$的元素是元组 $(A,\ B,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_r) \in$ U$(r)^2 \times \Sigma_\sigma$，满足 $(A,\ B)$ 是一个不可约表示，且 A 的谱为 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$。任何这样的表示都有一个规范代表元，其 $A =$diag$(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_r)$，因此 $B \in \mathbf{F}\sigma$，从而得到所需的同构。□

在至少存在一个重数为一的特征值的情形下，我们可以用 SU(r) 对应的纤维来描述纤维化 (4) 的纤维。

命题 2.10. 若 $\sigma = (r_1, (a_1)\ldots, r_1, \ldots, r_s, (a_s)\ldots, r_s) \in \Pi_r$ 是一个分拆，且 $r_1 = 1$（即至少存在一个重数为一的特征值），则有一个同构

$$\mathbf{F}_\sigma \cong \mathrm{S}\mathbf{F}_\sigma \times S^1.$$

证明。固定特征值 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \in \mathrm{Sym}^r_\sigma(S^1)$。为简化记号，我们假设第一个特征值 λ_1 是单特征值。给定一个元素 $(A, B, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbf{F}_\sigma$，该表示可以共轭为如下形式

$$(A, B) = (\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r), (b_1 \,|\, b_2 \,|\, \ldots \,|\, b_r)),$$

其中 b_i 是 B 的列向量。此外，由于 λ_1 是单特征值，向量 b_1 在 S^1 的作用下仅在缩放意义下确定；S^1 是第一个特征向量的稳定子。这样，若设 $\mu = \det(B)$，则有 $B' = (\mu^{-1}b_1 \,|\, b_2 \,|\, \ldots \,|\, b_r) \in \mathrm{SU}(r)/\mathrm{Stab}(\sigma)$。因此，映射 $\mathbf{F}_\sigma \ni B \mapsto (B', \mu) \in \mathrm{S}\mathbf{F}_\sigma \times S^1$ 给出了所需的同构。□

关于 式（4）中纤维化的底空间，我们可以很容易地用组合术语将其描述如下 .

引理 2.11. 给定 $\sigma = (r_1, (a_1)\ldots, r_1, \ldots, r_s, (a_s)\ldots, r_s) \in \Pi_r$，设 $N = a_1 + \ldots + a_s$ 为不同特征值的个数。则有

$$\Sigma_\sigma \cong S^1 \times \Delta^{N-1}_{\boldsymbol{\mu}_n},$$

其中 $\Delta^{N-1}_{\boldsymbol{\mu}_n}$ 是 t 满足 $\epsilon_i \in \boldsymbol{\mu}_n^* = \boldsymbol{\mu}_n - \{1\}$ 的元组 $(\epsilon_2, \ldots, \epsilon_N)$ 的集合，其中 $\epsilon_i \neq \epsilon_j$ 使得对于 $i \neq j$.

证明。设 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ 是 Σ_σ 中某个元素按序排列的不同特征值。由于 $\lambda_1^n = \lambda_2^n = \ldots = \lambda_N^n$，对于 $i \geq 2$，我们可以唯一地写成 $\lambda_i = \lambda_1\epsilon_i$，其中存在某个 $\epsilon_i \in \boldsymbol{\mu}_n^*$，使得所有根 $\epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ 互不相同。因此，映射 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \mapsto (\lambda_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N)$ 给出了该同构。□

综合所有这些部分，我们终于得到了 X^*_σ 的明确描述，至少在存在单特征值的情形下是如此。

推论 2.12。 设 $\sigma = (r_1, (a_1)\ldots, r_1, \ldots, r_s, (a_s)\ldots, r_s) \in \Pi_r$ 是一个至少包含一个重数为一的特征值的分拆，并设 $N = a_1 + \ldots + a_s$ 为不同特征值的数量。那么我们有一个同构

$$X^*_\sigma = (\Sigma_\sigma \times \mathbf{F}_\sigma)/S_n = \left(S^1 \times \Delta^{N-1}_{\boldsymbol{\mu}_n} \times \mathrm{S}\mathbf{F}_\sigma \times S^1\right)/S_n,$$

其中，对称群 S_n 在 $S^1 \times \Delta^{N-1}_{\boldsymbol{\mu}_n}$ 上的作用由特征值的置换给出，在 $\mathbf{F}_\sigma = \mathrm{S}\mathbf{F}_\sigma \times S^1$ 上则由列的置换给出。

2.4. 完全可约表示。 本节分析对应于分拆 $\pi_1 = (1, (r)\ldots, 1)$ 的表示，也就是说，分别分析 U(r) 和 SU(r) 情形下完全可约表示的空间 X^{TR}_r 和 $\mathrm{S}X^{\mathrm{TR}}_r$。根据引理 2.6，对于 $G = \mathrm{U}(r)$

$$X^{\mathrm{TR}}_r = \mathrm{Sym}^r(X^*_1) = \mathrm{Sym}^r(S^1 \times S^1).$$

类似地，对于 $G = \mathrm{SU}(r)$，我们得到

$$\mathrm{S}X^{\mathrm{TR}}_r = \mathrm{SSym}^r(S^1 \times S^1),$$

其中，$\mathrm{SSym}^r(S^1 \times S^1)$ 是 $\mathrm{Sym}^r(S^1 \times S^1)$ 中由满足 $\lambda_1 \cdots \lambda_r = \mu_1 \cdots \mu_r = 1$ 的集合 $\{(\lambda_1, \mu_1)\ldots\ldots, (\lambda_r, \mu_r)\}$ 构成的子集。

我们的第一个 这一方向上的结果是，前一个空间是一个以后一个空间为纤维的纤维化 .

命题 2.13. 我们有一个 *Zariski* 局部平凡纤维化

$$\varpi_\sigma : \mathrm{Sym}^r_\sigma(S^1 \times S^1) \to S^1 \times S^1, \quad \varpi_\sigma(\{(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_r, \mu_r)\}) = (\lambda_1 \cdots \lambda_r, \mu_1 \cdots \mu_r),$$

其纤维同构于 $\mathrm{SSym}^r(S^1 \times S^1)$。

证明。 该纤维化的底空间由 $(t, s) = (\lambda_1 \cdots \lambda_r, \mu_1 \cdots \mu_r) \in S^1 \times S^1$ 参数化，显然 $\mathrm{SSym}^r(S^1 \times S^1) = \phi^{-1}(1, 1)$。全空间可在任意 $(t, s) \in S^1 \times S^1$ 上通过映射平凡化

$$\phi : \varpi_\sigma^{-1}(t, s) \times (S^1 - \{-t\}) \times (S^1 - \{-s\}) \to \varpi_\sigma^{-1}(S^1 - \{-t\} \times S^1 - \{-s\}),$$

由 $\phi(\{(\lambda_1, \mu_1) \dots, (\lambda_r, \mu_r)\}, te^{i\theta}, se^{i\alpha}) = \{(e^{i\theta/r}\lambda_1, e^{i\alpha/r}\mu_1) \dots, (e^{i\theta/r}\lambda_r, e^{i\alpha/r}\mu_r)\}$ 给出，其中 $\theta, \alpha \in (-\pi, \pi)$。□

现在，考虑向第一个分量的投影

$$\varpi : \mathrm{Sym}^r(S^1 \times S^1) \to \mathrm{Sym}^r(S^1).$$

与第 2.3.1 节中一样，给定一个分拆 $\sigma \in \Pi_r$，我们将关注由 σ 给出的、具有重合项的点的构型子集 $\mathrm{Sym}^r_\sigma(S^1) \subset \mathrm{Sym}^r(S^1)$，并令 $\mathrm{Sym}^r_\sigma(S^1 \times S^1) = \varpi^{-1}(\mathrm{Sym}^r_\sigma(S^1))$。我们类似地考虑行列式为 1 的情形，并用 $\mathrm{SSym}^r_\sigma(S^1 \times S^1)$ 表示相应的空间。

此外，给定 r 的一个分拆 $\sigma = (r_1, {}_{(a_1)}\dots, r_1, \dots, r_s, {}_{(a_s)}\dots, r_s) \in \Pi_r$，令 $S_\sigma = S^{a_1}_{r_1} \times \cdots \times S^{a_s}_{r_s} < S_r$ 为类型 σ 的置换子群。那么，我们定义

$$\mathrm{Sym}^\sigma(S^1) = (S^1)^r / S_\sigma,$$

对于满足 $\mu_1 \cdots \mu_r = 1$ 的构型 $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$，类似地定义 $\mathrm{SSym}^\sigma(S^1) \subset \mathrm{Sym}^\sigma(S^1)$。特别地，注意到 $\mathrm{Sym}^r(S^1) = \mathrm{Sym}^{(r)}(S^1)$，且 $\mathrm{SSym}^r(S^1) = \mathrm{SSym}^{(r)}(S^1)$。

命题 2.14. 固定的 $\sigma = (r_1, {}_{(a_1)}\dots, r_1, \dots, r_s, {}_{(a_s)}\dots, r_s) \in \Pi_r$，该纤维化

$$\mathrm{SSym}^r_\sigma(S^1 \times S^1) \to \mathrm{SSym}^r_\sigma(S^1). \tag{5}$$

是 *Zariski* 局部平凡的，其纤维为 $\mathrm{SSym}^\sigma(S^1)$。

证明. 固定对应于第一因子的 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \in \mathrm{SSym}^r_\sigma(S^1)$。 [7,命题 5] 中描述的算法 α 提供了一种唯一选择对数割线的方式，使得我们得到自然排序 $\lambda_{i_1} = e^{2\pi i(\alpha+\theta_1)}\lambda_{i_2} = e^{2\pi i(\alpha+\theta_2)} \dots, \lambda_{i_r} = e^{2\pi i(\alpha+\theta_r)}$，其中 $\theta_1 \le \theta_2 \le \dots \le \theta_r$。因此，纤维 $\varpi^{-1}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\})$ 的第二因子中的 r 点具有唯一排序，但第一因子中出现相同值的情形除外。因此，要消除这种排序，我们需要对 S_σ 的作用取商，正如所述。

注意，一旦重复值的配置固定，对数割线 α 就会随点 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ 呈代数变化。事实上， α 对应于其中一个点的辐角，而只有当所选值超过另一个值时，它才会改变。因此，如上所述，这一构造在扎里斯基拓扑下是局部平凡的。□

注记 2.15。 注意，底空间 $\mathrm{SSym}^r(S^1)$ 已在 [7, 命题 5] 中得到研究，并且可证明它与 $(r-1)$-单纯形同构

$$\Delta_{r-1} = \left\{ (u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r_{\ge 0} \;\middle|\; \sum_{i=1}^r u_i = 0 \right\}.$$

特别地，命题 2.14 中所有底空间 $\mathrm{SSym}^r_\sigma(S^1)$ 都是单纯形，因而可缩，所以纤维丛 (5) 在拓扑上是平凡的。

注记 2.16。 利用一些基本的代数几何知识，可以给出 $\mathrm{Sym}^r(S^1\times S^1)$ 的一种等价描述。我们在 $S^1\times S^1$ 上固定一个近复结构，从而使其成为一条椭圆曲线 Σ。在此设定下，$\mathrm{Sym}^r(S^1\times S^1)$ 的元素恰好对应于 Σ 上次数为 r 的有效因子。按照这种解释，若 $\mathrm{Pic}_r(\Sigma)$ 表示 Σ 上次数为 r 的（全纯）线丛集合，我们可以考虑映射

$$\mathrm{Sym}^r(S^1\times S^1)\to \mathrm{Pic}_r(\Sigma),\qquad D\mapsto \mathcal{O}(D) \tag{6}$$

将每个因子 D 映射到其诱导线丛 $\mathcal{O}(D)$的映射。注意，由于 Σ 是椭圆曲线，$\mathrm{Pic}_r(\Sigma)$在拓扑上同胚于 $\cong S^1\times S^1$。此映射在 $\mathcal{O}(D)$处的纤维，恰好是与 D线性等价的有效线丛的集合，也就是复射影空间 $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(D)))$。利用 Σ 的典范因子 K 的次数为零这一事实，可知$K-D(\mathcal{O}(D))=r$没有全局全纯截面，因此由黎曼-罗赫定理可得 h^0。因此，(6) 是一个以$S^1\times S^1$ 为底空间、以 $\mathbb{CP}^{r-1}$为纤维的纤维丛。

2.4.1. 空间 $\mathrm{Sym}^2(S^1\times S^1)$ 和 $\mathrm{SSym}^2(S^1\times S^1)$。 本节将更仔细地研究 $S^1\times S^1$中的两点构形。首先，$\mathrm{SSym}^2(S^1\times S^1)$对应于集合 $\{(\lambda、\ \lambda^{-1})、(\mu、\ \mu^{-1})\}$的集合。我们按照分拆$\sigma\in\Pi_2$可能的重复情况对这个空间进行分层，如命题 2.14 所述。回顾注记 2.15，$\mathrm{SSym}^2(S^1)=\mathbf{I}=[-1,1]$，即闭区间。它的各层为 $\mathrm{SSym}^2_{(1,1)}(S^1)=\mathbf{I}=(-1、1)$，即开区间（不同特征值）；以及 $\mathrm{SSym}^2_{(2)}(S^1)=\{-1,1\}$，即端点（重特征值）。

(1) 对于 $\sigma=$(1,1)，第一个因子中的取值不同。在这种情形下，我们得到一个开圆柱，因为

$$\mathrm{SSym}^2_{(1,1)}(S^1\times S^1)=\mathrm{SSym}^2_{(1,1)}(S^1)\times \mathrm{SSym}^{(1,1)}(S^1)=\mathbf{I}\times S^1,$$

这里我们用到了 $\mathrm{SSym}^{(1,1)}(S^1)=S^1$，以及纤维丛在拓扑上是平凡的这一事实，因为底空间 $\mathbf{I}$ 是可缩的。

(2) 对于 $\sigma=$(2)，第一个因子中有重特征值。因此，我们得到

$$\mathrm{SSym}^2_{(2)}(S^1\times S^1)=\mathrm{SSym}^2_{(2)}(S^1)\times \mathrm{SSym}^2(S^1)=\{\pm1\}\times\bar{\mathbf{I}}.$$

因此，整体而言，$\mathrm{SSym}^2(S^1\times S^1)$ 是圆柱 $\mathbf{I}\times S^1$，¯其两条边界 $\{-1,1\}\times S^1$通过粘合使每个圆都收缩为一个区间。因此，$\mathrm{SSym}^2(S^1\times S^1)$ 在拓扑意义上（但非光滑意义上）是一个 2-球面：它是一个带有四个轨形点的枕形（见图 2）。

注记 2.17。 另一种理解 $\mathrm{SSym}^2(S^1\times S^1)$ 的方式，是将其视为商 $\mathrm{SSym}^2(S^1\times S^1)=(S^1\times S^1)/\mathbb{Z}_2$，其中 $\mathbb{Z}_2$ 作用定义为 $(\lambda,\mu)\mapsto(\lambda^{-1},\mu^{-1})$。将环面视为一个商后，该作用变为 $(s,t)\sim(1-s,1-t)$ $s,\ t\in[0,1]$，其商空间与 2-球面同胚。

对于空间 $\mathrm{Sym}^2(S^1\times S^1)$，注意到根据命题 2.13，我们可以将其描述为 S^2-纤维丛

$$S^2\to \mathrm{Sym}^2(S^1\times S^1)\to S^1\times S^1.$$

注意到，这与注 2.16 中的描述完全吻合，因为 $\mathbb{CP}^1\cong S^2$。该纤维丛的单值化由 $(\lambda,\ \mu)\mapsto(e^{i\pi}\lambda,\ e^{i\pi}\mu)=(-\lambda,\ -\mu)$ 给出。用坐标 $(s,\ t)$ 表示时，它由 $(s,\ t)\mapsto(s+1/2,\ t+1/2)$ 给出；该变换保定向，并将S^2 的四个轨形点两两互换。

2.4.2. 空间 $\mathrm{Sym}^3(S^1\times S^1)$ 和 $\mathrm{SSym}^3(S^1\times S^1)$。现在，我们来考察 3 重对称积 $\mathrm{SSym}^3(S^1\times S^1)$。我们根据第一个因子中重特征值的数量对该空间进行分层：

(1) $\sigma=(1,1,1)$（三个不同特征值）。在这种情形下，我们有

$$\mathrm{SSym}^3_{(1,1,1)}(S^1\times S^1)=\mathrm{SSym}^3_{(1,1,1)}(S^1)\times\mathrm{SSym}^{(1,1,1)}(S^1)=\mathbf{T}\times S^1\times S^1,$$

其中 $\mathbf{T}=\mathrm{SSym}^3_{(1,1,1)}(S^1)$ 是注记 2.15 所述的开二维三角形。

(2) $\sigma=(1,2)$（两个重合特征值）。这对应于上方三角形 $\mathbf{T}$ 各边的内部。在这种情形下，我们有

$$\mathrm{SSym}^3_{(1,2)}(S^1\times S^1)=\mathrm{SSym}^3_{(1,2)}(S^1)\times\mathrm{SSym}^{(1,2)}(S^1).$$

注意，解出最后一个特征值后，我们有 $\mathrm{SSym}^{(1,2)}(S^1)=\mathrm{Sym}^2(S^1)$，这是一个莫比乌斯带（见 [7, 推论 6]）。因此，在边 $\mathbf{T}$ 的每个内部点上，我们都能找到一个莫比乌斯带。

(3) $\sigma=(1,3)$（三个相等的特征值）。这对应于三角形 $\mathbf{T}$ 的顶点。现在，

$$\mathrm{SSym}^3_{(3)}(S^1\times S^1)=\mathrm{SSym}^3_{(3)}(S^1)\times\mathrm{SSym}^3(S^1),$$

其中，后一个空间是一个闭三角形。因此，我们在 $\mathbf{T}$ 的每个顶点上附接一个三角形。每个三角形都沿其边界与入射边的莫比乌斯带粘合。

关于全空间 $\mathrm{Sym}^2(S^1\times S^1)$，注意到由注 2.16 可知，我们可以将其描述为一个纤维丛

$$\mathbb{CP}^2\to\mathrm{Sym}^3(S^1\times S^1)\to S^1\times S^1.$$

3. SU(2)-CHARACTER VARIETY 表示簇

对于 $n=2$，只有两个分拆：$\pi_0=(2)$ 和 $\pi_1=(1,1)$，它们分别对应不可约表示集合和完全可约表示集合。

(1) 分拆 $\pi_0=(2)$ 给出不可约表示空间 $\mathrm{S}X^*_2$。注意，$\mathrm{S}X^*_2$ 的分层 (3) 中唯一的非空分层对应于 $\sigma=(1,1)$，因为在情形 $\sigma=(2)$ 下，表示 $\rho=(A,B)$ 的矩阵 A 是单位矩阵的倍数，因此每个表示都是可约的。

沿用第 2.3 节的记号，分拆 $\sigma=(1,1)$ 具有 $s=1$、$r_1=1$ 和 $a_1=2$。因此，根据引理 2.4，我们有 $\mathrm{S}X^*_{(1,1)}$ 的连通分支数与 $\mathrm{SF}^{(1,1)}$ 一样多

$$N_{(1,1)}=\frac{2}{n}\binom{n}{2}=\frac{2}{n}\frac{n!}{2!\,(n-2)!}=n-1.$$

该分层的稳定子为 $\mathrm{Stab}((1,1))=S^1\times S^1$。为确定空间 $\mathrm{SF}_{(1,1)}\subset\mathrm{SU}(2)/(S^1\times S^1)$，我们注意到，根据第 2.3.2 节的讨论，我们有一个纤维化

$$\varphi:\mathrm{SF}_{(1,1)}\to B_2\subset S^2.$$

在 B_2 的内部，这个映射是一个同构。在边界上，由于基的第一个向量必须与 e_1 共线，因此不存在不可约表示。因此，我们得到 $\mathrm{SF}^{(1,1)}$ 同胚于 $\mathbf{D}=\mathrm{Int}(B_2)$，这是一个二维开圆盘。

注 3.1。 还可以用以下方式描述 $\mathbf{SF}^{(1,1)}$ 。沿用注 2.5 中的记号，$\mathbf{SF}^0_{(1,1)}$ 是 $\mathbb{C}^2$ 的标准正交基的集合，其中各向量都不与典范基中的任何向量成比例。由于这些基由第一个向量确定，而该向量可视为一个元素 $(a,b)\in S^3\subset\mathbb{C}^2$，因此 $\mathbf{SF}^0_{(1,1)}=S^3-S^1$ 是去掉方程为 $b=0$ 的一维球面后的三维球面。现在，S^1 在 $(a,b)\in S^3\subset\mathbb{C}^2$ 上的作用为 $\lambda\cdot(a,b)=(a,\lambda b)$，因此其商是加权射影空间

$$\mathrm{S}\mathbf{F}^0_{(1,1)}/(S^1\times S^1)=(S^3-S^1)/S^1=\mathbb{CP}^1_{(0,1)}-\{[1:0]\}.$$

后一个空间可理解为满足 $b\in\mathbb{R}_{>0}$ 的 $(a,b)\in S^3\subset\mathbb{C}^2$ 集合，因此 $\mathbb{CP}^1_{(0,1)}-\{[1:\ 0]\}$ 是 S^2 的上半球，因而与圆盘同胚。

(2) 分拆 $\pi_1=(1,1)$ 对应于完全可约表示 $\mathrm{S}X_2^{\mathrm{TR}}$ 的集合。根据第 2.4 节的结果，我们有 $\mathrm{S}X_2^{\mathrm{TR}}=\mathrm{SSym}^2(S^1\times S^1)$，其拓扑上（但非光滑意义下）是一个 2-球面。

综上所述，我们有

$$\mathrm{S}X_2=\mathrm{S}X_2^{(1,1)}\sqcup\mathrm{S}X_2^{(2)}=\mathrm{S}X_2^{\mathrm{TR}}\sqcup\mathrm{S}X^*_{(1,1)}\,.$$

$\mathrm{S}X_2$ 的整体图景如下（另见图 2）。首先，空间 $\mathrm{S}X_2^{\mathrm{TR}}$ 是一个二维球面。我们在其上附加 $n-1$ 个开圆盘 $\mathbf{D}$，它们分别对应于 $\mathrm{S}X^*_{(1,1)}$ 的各个连通分支，并且每个圆盘都通过其边界 $S^1\subset\mathbf{D}$ 附着到 $\mathrm{S}X_2^{\mathrm{TR}}$ 上。这些边界对应于由 $A\sim\mathrm{diag}(\lambda,\lambda^{-1})$ 和 $B\sim\overline{\mathrm{diag}}(\mu,\mu^{-1})$ 给出的可约表示，其中 $\lambda\in\boldsymbol{\mu}^+_{2n}$、$\mu\in S^1$。它们都作为 $n-1$ 个互不相交的圆嵌入 $\mathrm{S}X_2^{\mathrm{TR}}$ 中。该空间在同伦意义下等价于 n 个 2-球面的楔和。

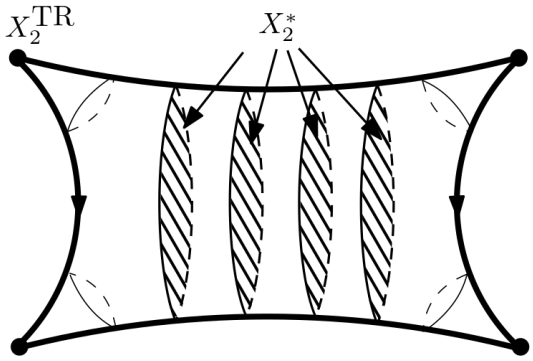


FIGURE 2. $X_2=X(\Gamma_n,\ \mathrm{SU}(2))$ 的整体图景。

4. Homotopy type of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-character variety of twisted Hopf links

本节研究扭曲霍普夫链环的 $\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C})$ 特征簇的同伦型。回顾一下，该簇是

$$X(\Gamma_n,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))=\mathrm{Hom}\,(\Gamma_n,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))/\!/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})=\{(A,B)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,|\,[A^n,B]=\mathrm{id}\}/\!/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

这是一个复代数簇，其动机此前已在 [9]中得到研究。本节旨在证明自然包含映射 $\mathrm{S}X_2=X(\Gamma_n,\mathrm{SU}(2))\hookrightarrow X(\Gamma_n,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ 是一个变形收缩。注意，$\mathrm{SU}(2)\hookrightarrow\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 是极大紧子群，而 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{SU}(2)$ 的复化 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})=\mathrm{SU}(2)_{\mathbb{C}}$。

与 SU(2) 情形一样，我们可以将 SL(2, ℂ)-特征簇分解为可约部分和不可约部分

$$X(\Gamma_n, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) = X^{\mathrm{TR}}(\Gamma_n, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) \sqcup X^*(\Gamma_n, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})).$$

与 SU(2) 情形截然不同，并非每个可约表示都是半单的。不过，事实证明，对于 SL(2， ℂ) 的共轭作用，每个表示的轨道闭包中都存在一个半单表示。这意味着，在 GIT 商中，每个可约表示都与一个半单表示等同，因此，特征簇 X^{TR}(Γ$_n$， SL(2， ℂ)) 的可约轨迹参数化了模等价的完全可约表示，这也使所采用的记号得到了合理解释。

关于不可约轨迹 X^*(Γ$_n$， SL(2， ℂ))，回顾 [9] 的结果可知，它有 $n-1$ 个连通分支，分别对应表示 (*A*， *B*) ∈X^*(Γ$_n$， SL(2， ℂ)) 的矩阵 A 可能具有的特征值。固定 A 的特征值 λ， $\lambda^{-1} \in \mathbb{C}^*$ 后，我们可以选取如下形式的代表

$$(A,B) \sim \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right),$$

由于 $bc \neq 0$ （A, B）是不可约的。这一代表元并不唯一，因为我们在 $\mathbb{C}^*$ 上得到一个剩余作用，即 $B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 上的作用由下式给出

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \lambda^{-1}c \\ \lambda b & d \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

因此，我们得到 X^*（Γ$_n$,SL(2, ℂ)）的每个连通分支都同构于空间

$$\mathrm{S}\mathbf{F}_{\mathbb{C}} := \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 \,|\, ad-bc=1, bc \neq 0 \right\} /\!\!/ \mathbb{C}^*.$$

不变　　坐标是此 $\mathbb{C}^*$ 作用下的 $p := bc$ 和 a, d，因此最终得到如下描述

$$\mathrm{S}\mathbf{F}_{\mathbb{C}} = \left\{ (a,d,p) \in \mathbb{C}^3 \,|\, ad-p=1, p \neq 0 \right\} \cong \mathbb{C}^2 - H,$$

其中 H 是双曲线 $H = \{ad = 1\} \cong \mathbb{C}^*$，而后一个同构为（$a, d, p$） $\mapsto$ （a, d）。在此簇中，SU(2) 特征簇的对应连通分支 SF （见第 3 节）是开圆盘

$$\mathrm{S}\mathbf{F} = \mathrm{S}\mathbf{F}_{(1,1)} = \left\{ (a, \bar{a}, |a|^2 - 1) \in \mathrm{S}\mathbf{F}_{\mathbb{C}} \mid |a| < 1 \right\} \cong \mathbf{D}.$$

事实上，给定（$a, \bar{a}, |a|^2 - 1$） ∈SF，对应的矩阵 B 为

$$B = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-|a|^2} \\ \sqrt{1-|a|^2} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

注4.1。空间 SF 和 $\mathrm{S}\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ 并不同伦等价。通过紧支撑上同调进行直接计算可知， H_c^k(SF$_{\mathbb{C}}$) = H_c^k($\mathbb{C}^2 - \mathbb{C}^*$) = $\mathbb{Z}$ 当 k = 2,3,4 时成立，而 H_c^k(SF$_{\mathbb{C}}$) = 0在其他情况下成立。因此，SF$_{\mathbb{C}}$ 的贝蒂数为 b_k(SF$_{\mathbb{C}}$) = 1 当 k = 0,1,2 时成立，而 b_k(SF$_{\mathbb{C}}$) = 0 当 $k \geq 3$ 时成立；这表明 SF$_{\mathbb{C}}$ 不可能是可缩的，因为 SF 是可缩的。

现在，在 SF$_{\mathbb{C}}$ 中，集合 $p = 0$ 恰好对应于不可约轨迹 X^*(Γ$_n$,SL(2, ℂ)) 边界上的完全可约表示。因此，其闭包

$$\overline{\mathrm{S}\mathbf{F}}_{\mathbb{C}} := \left\{ (a,d,p) \in \mathbb{C}^3 \,|\, ad-p=1 \right\} \cong \mathbb{C}^2,$$

坐标为 (*a*, *d*) ∈ ℂ^2 的表示集合，是 (*A*, *B*) ∈ X^*(Γ$_n$,SL(2, ℂ)) 中的表示集合，其中 A 具有固定特征值 λ, λ^{-1}。因此，SU(2) 特征簇中该分支的相应闭包是闭圆盘

$$\overline{\mathrm{S}\mathbf{F}} = \left\{ (a, \bar{a}, |a|^2 - 1) \in \overline{\mathrm{S}\mathbf{F}}_{\mathbb{C}} \mid |a| \leq 1 \right\} \cong \overline{\mathbf{D}},$$

其坐标为 (*a*， $\bar{a}$) ∈ ℂ^2。

引理 4.2. 设 $\mathrm{SF}'_{\mathbb{C}} = \{(a,d) \in \mathrm{SF}_{\mathbb{C}} \mid |a| = |d|\}$。存在一个光滑同伦

$$H_t : \overline{\mathrm{SF}}_{\mathbb{C}} \to \overline{\mathrm{SF}}_{\mathbb{C}},$$

对于 $t \in [0,1]$，其中 $H_0 = \mathrm{id}_{\overline{\mathrm{SF}}_{\mathbb{C}}}$，$H_1(\overline{\mathrm{SF}}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathrm{SF}'_{\mathbb{C}}$，且对所有 t，$H_t|_{\mathrm{SF}'_{\mathbb{C}}} = \mathrm{id}_{\mathrm{SF}'_{\mathbb{C}}}$。在此同伦下，$\mathrm{SF}_{\mathbb{C}} - \mathrm{SF}_{\mathbb{C}}$ 的空间中，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 可约表示的部分保持不变，并被缩放至 $\mathrm{SF} - \mathrm{SF}$ 的 *SU(2)* 可约表示空间。

证明。给定 $(a,d) \in \overline{\mathrm{SF}}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$，我们使用极坐标 $a = re^{i\alpha}$ 和 $d = se^{i\beta}$，其中 $r,s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$。考虑由下式给出的辅助连续同伦 $h^1, h^2 \colon \mathbb{R}^2_{\geq 0} \times [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$h^1_t(r,s) = \begin{cases} (1-t)r + t\sqrt{rs} & \text{for } r \geq s, \\ \frac{rs}{(1-t)s + t\sqrt{rs}} & \text{for } s > r, \end{cases} \qquad h^2_t(r,s) = \begin{cases} \frac{rs}{(1-t)r + t\sqrt{rs}} & \text{for } r > s, \\ (1-t)s + t\sqrt{rs} & \text{for } s \geq r. \end{cases}$$

注意，对所有 $r,s \geq 0$，都有 $h^1_0(r,s) = r$, $h^2_0(r,s) = s$, $h^1_1(r,s) = h^2_1(r,s) = \sqrt{rs}$。此外，对所有 $t \in [0,1]$，都有 $h^1_t(r,r) = h^2_t(r,r) = r$，且 $h^1_t(r,s) \cdot h^2_t(r,s) = rs$。

在此设定下，我们考虑同伦 $H \colon \mathrm{SF}_{\mathbb{C}} \times [0,1] \to \overline{\mathrm{SF}}_{\mathbb{C}}$，其定义如下

$$H_t(a,d) = \left(h^1_t(r,s)e^{i\alpha}, h^2_t(r,s)e^{i\beta}\right).$$

注意，即使当 $r = 0$ 或 $s = 0$ 时，该映射仍有意义，因为在这些情形下，$h^1_t(0,s) = 0$ 且 $h^2_t(r,0) = 0$，分别成立。该映射满足以下性质：

(1) 当 $t = 0$ 时，对于任意 $(a,d) \in \mathrm{SF}_{\mathbb{C}}$，我们得到

$$H_0(a,d) = \left(re^{i\alpha}, se^{i\beta}\right) = (a,d).$$

因此，$H_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{SF}_{\mathbb{C}}}$。

(2) 对于 $t = 1$，我们得到：对任意 $(a,d) \in \overline{\mathrm{SF}}_{\mathbb{C}}$，

$$H_1(a,d) = \left(\sqrt{rs}\, e^{i\alpha}, \sqrt{rs}\, e^{-i\beta}\right).$$

特别地，对所有 $a,d \in \mathrm{SF}_{\mathbb{C}}$，均有 $H_1(a,d) \in \mathrm{SF}'_{\mathbb{C}}$。

(3) 对于任意形如 $(a = re^{i\alpha}, d = re^{i\beta}) \in \mathrm{SF}'_{\mathbb{C}}$ 的点，我们得到

$$H_t(a,d) = \left(re^{i\alpha}, re^{i\beta}\right) = (a,d)$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。特别地，$H_t|_{\mathrm{SF}'_{\mathbb{C}}} = \mathrm{id}_{\mathrm{SF}'_{\mathbb{C}}}$。

(4) 对于形如 $(a = re^{i\alpha}, a^{-1} = r^{-1}e^{-i\alpha}) \in \mathrm{SF}_{\mathbb{C}} - \mathrm{SF}_{\mathbb{C}}$ 的点（等价地，对于 $p = 0$），我们有

$$H_t(a, a^{-1}) = \left(h^1_t\left(r, r^{-1}\right)e^{i\alpha}, h^2_t\left(r, r^{-1}\right)e^{-i\alpha}\right)$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。因此，由于 $h^1_t(r,\ r^{-1}) \cdot h^2_t(r,\ r^{-1}) = 1$ 对所有 t 均成立，我们有 $H_t(a, a^{-1}) \in \mathrm{SF}_{\mathbb{C}} - \mathrm{SF}_{\mathbb{C}}$ 对所有 t 均成立；换言之，$\mathrm{SF}_{\mathbb{C}} - \mathrm{SF}_{\mathbb{C}}$ 是不变的。这里的同伦是通过重新缩放得到的。

因此，性质 (1) 表明，该映射定义了 $H_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{SF}_{\mathbb{C}}}$ 与 H_1 之间的同伦等价。此外，由性质 (2) 和 (3)，H 定义了到 $\mathrm{SF}'_{\mathbb{C}}$ 上的强变形收缩。根据 (4)，该同伦在 $\mathrm{SF}_{\mathbb{C}} - \mathrm{SF}_{\mathbb{C}}$ 上具有所需性质。□

注 4.3。由于 $\mathrm{SF} \subset \mathrm{SF}'_{\mathbb{C}}$，该空间在先前的收缩下保持不变。

图 3 展示了引理 4.2 证明中象限（$r,\ s$）内同伦的几何解释：对于常数 k，双曲线 $rs = k$ 通过自然的 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-作用 $\lambda \cdot (r,\ s) = (\lambda^{-1}r,\ \lambda s)$（$\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$）收缩到平面 $\{s = r\}$。特别地，双曲线 $\mathrm{SF}_{\mathbb{C}} - \mathrm{SF}_{\mathbb{C}} = \{rs = 1\}$ 保持不变，而平面 $\mathrm{SF}'_{\mathbb{C}} = \{r = s\}$ 保持固定。

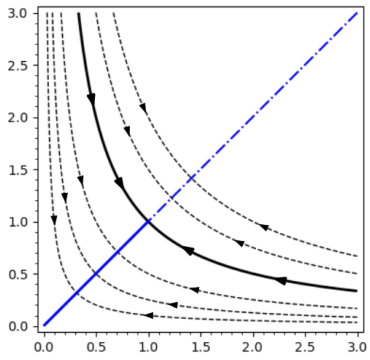


FIGURE 3. 在（r,s）平面上将 $\mathbf{SF}_{\mathbb{C}}$ 变形收缩到 $\mathbf{SF}'_{\mathbb{C}}$。

引理4.4. 设$\mathbf{SF}''_{\mathbb{C}} = \{(a,\bar{a}) \in \mathbf{SF}_{\mathbb{C}}\}$。存在一个光滑同伦

$$H_t : \overline{\mathbf{SF}}'_{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbf{SF}}_{\mathbb{C}},$$

对于 $t \in [0,1]$，其中 $H_0 = \mathrm{id}_{\mathbf{SF}'_{\mathbb{C}}}$，$H_1(\mathbf{SF}'_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbf{SF}''_{\mathbb{C}}$，且对所有 t，$H_t|_{\mathbf{SF}''_{\mathbb{C}}} = \mathrm{id}_{\mathbf{SF}''_{\mathbb{C}}}$。

证明。记 $a = re^{i\alpha}$ 和 $d = re^{i\beta}$，其中 $r,s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\alpha,\beta \in [0,2\pi)$。我们考虑如下同伦$H$：$\mathbf{SF}'_{\mathbb{C}} \times \overline{[0,1]} \to \mathbf{SF}_{\mathbb{C}}$

$$H_t(a,d) = \begin{cases} \left(re^{i\alpha}, r\left((1-t)e^{i\beta} + te^{-i\alpha}\right)\right) & \text{if } a,d \neq 0, \\ (0,0) & \text{if } a = d = 0. \end{cases}$$

注意，由于 $|a| = |d|$ 属于 $\mathbf{SF}'_{\mathbb{C}}$，因此它们中的任意一个为零，当且仅当二者均为零。

显然，我们有 $H_0 = \mathrm{id}_{\mathbf{SF}'_{\mathbb{C}}}$ 和 $H_1(a,d) = (a,\bar{a}) \in \mathbf{SF}''_{\mathbb{C}}$。此外，形如（$a = re^{i\alpha}$，$\bar{a} = re^{-i\alpha}$）的点保持不动，因此我们直接得到 H 就是所需的同伦。□

注记 4.5。由于 $\mathbf{SF} \subset \mathbf{SF}''_{\mathbb{C}}$，这个空间在先前的收缩下保持不变

注记 4.6。注意，在引理4.4的同伦过程中，第二个分量的范数会变化，因此这个同伦的目标空间是整个 $\mathbf{SF}_{\mathbb{C}}$，而不是子空间 $\mathbf{SF}'_{\mathbb{C}}$。这与下面的事实有关。设 $\Delta = \{(a,a)\} \subseteq \mathbf{SF}'_{\mathbb{C}}$ 为对角线。空间 $\mathbf{SF}'_{\mathbb{C}} - \Delta$ 可以通过用连接 d 与 $\bar{a}$ 的最短弧连接（a,d）和（$a,\bar{a}$），轻易地收缩到 $\mathbf{SF}''_{\mathbb{C}}$。然而，在 $\Delta = \mathbb{C}$上，将其收缩到 $\mathbf{SF}''_{\mathbb{C}}$，等同于将共轭映射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(a) = \bar{a}$ 同伦到恒等映射。如果我们将其限制到 $f|_{S^1} : S^1 \to S^1$，这是不可能的；但若允许同伦通过 $0 \in \mathbb{C}$，则作为$\mathbb{C}$ 上的映射，这是可以通过简单的线性同伦实现的。

现在注意到，$\mathbf{SF}''_{\mathbb{C}} = \{(a,\bar{a})\}$ 沿径向收缩到圆盘 $\mathbf{SF} = \mathbf{SF}''_{\mathbb{C}} \cap \{|a| \leq 1\}$上。因此，我们证明了以下结果。

命题 4.7。 $\mathbf{SF}_{\mathbb{C}}$ 中的每个连通分支，也就是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-特征簇的不可约轨迹闭包，都强收缩到 $\mathbf{SF}$ 中的对应连通分支，即 $\mathrm{SU}(2)$-特征簇的不可约轨迹闭包。在完全可约表示集合 $\mathbf{SF}_{\mathbb{C}} - \mathbf{SF}_{\mathbb{C}}$上，该同伦只是线性缩放到 $\mathbf{SF} - \mathbf{SF}$。

注 4.8。从注 4.1 来看，命题 4.7 有着清晰的解释：当我们重新粘合完全可约表示的双曲线 $\{ad = 1\}$ 时，$H_1(\mathbf{SF}_{\mathbb{C}})$ 和 $H_2(\mathbf{SF}_{\mathbb{C}})$ 中的非平凡元素都会被消去。因此，只有取闭包之后，包含映射 $\mathbf{SF} \hookrightarrow \mathbf{SF}_{\mathbb{C}}$ 才成为同伦等价。

另一方面，我们可以轻松证明，自然包含映射 $\mathrm{S}X_2^{\mathrm{TR}} \hookrightarrow X^{\mathrm{TR}}(\Gamma_n,\ \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C}))$ 是一个变形收缩。

命题 4.9。 $\mathrm{S}X_2^{\mathrm{TR}}$ 是 $\mathrm{SU}(2)$-特征簇的全可约轨迹，它通过线性缩放强变形收缩为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-特征簇 $X^{\mathrm{TR}}(\Gamma_n,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ 的可约轨迹。

证明。 [9], 可约轨迹由若干对 $(\lambda,\mu)\in(\mathbb{C}^*)^2$ 构成，并对识别 $(\lambda,\mu)\sim(\lambda^{-1},\mu^{-1})$ 的 $\mathbb{Z}_2$-作用取商。将 $(\mathbb{C}^*)^2$ 径向变形收缩到 $(S^1)^2$，可下降为将 $(\mathbb{C}^*)^2/\mathbb{Z}_2$ 变形收缩到 $\mathrm{S}X_2^{\mathrm{TR}}\cong \mathrm{SSym}^2(S^1\times S^1)$（参见注 2.17），因为它与$\mathbb{Z}_2$-作用交换。□

现在，注意在完全可约表示的公共区域上（这些表示位于不可约表示的闭包中），命题 4.7 和 4.9 的同伦彼此一致。因此，我们可以将它们拼接起来，得到一个整体同伦 $H\colon\ X(\Gamma_n,\ \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C}))\times[0,1]\to X(\Gamma_n,\ \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C}))$，使得 $H_0=\mathrm{id}_{X(\Gamma_n,\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C}))}$，$H_t|_{X(\Gamma_n,\mathrm{SU}(2))}=\mathrm{id}_{X(\Gamma_n,\mathrm{SU}(2))}$，并且 $H_1(X(\Gamma_n,\ \mathrm{SL}(2,\ \mathbb{C})))\subseteq X(\Gamma_n,\ \mathrm{SU}(2))$。因此，我们证明了以下结果。

定理 4.10. 扭曲霍普夫链环的 $\mathrm{SU}(2)$ 特征簇 $\mathrm{S}X_2=X(\Gamma_n,\mathrm{SU}(2))$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 特征簇 $X(\Gamma_n,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ 的强变形收缩。

5. U(2) 与 SU(3)

本节将利用第 2.3 节和第 2.4 节的结果，描述特征簇 $X_2=X(\Gamma_n,\ \mathrm{U}(2))$ 和 $\mathrm{S}X_3=X(\Gamma_n,\ \mathrm{SU}(3))$ 的分层。正如我们将看到的，这些情形会出现复杂得多的几何结构，许多层之间存在相互作用，并呈现非平凡交叠模式。

5.1. U(2) **特征簇**。与第 3 节一样，由分拆 $\pi_0=(2)$ 和 $\pi_1=(1,\ 1)$ 导致的可能情形仍有两种。

(1) $\pi_0=(2)$ 对应于不可约表示 X_2^*，并且与 SU(2) 的情形一样，唯一有贡献的特征值构型是 $\sigma=(1,\ 1)$（按第 2.3 节的记号，其参数为 $r_1=1$ 和 $a_1=2$）。因此，不同特征值的个数为 $N=a_1=2$，由推论 2.12 可得

$$X_2^*=X_{(1,1)}^*=(S^1\times\boldsymbol{\mu}_n^*\times\mathbf{F}_{(1,1)})/\mathbb{Z}_2,$$

其中我们用到了 $\Delta^1_{\boldsymbol{\mu}_n}=\boldsymbol{\mu}_n^*$。 $\mathbb{Z}_2$ 在 $S^1\times\boldsymbol{\mu}_n^*\times\mathbf{F}^{(1,1)}$ 上的作用为 $(\lambda,\epsilon,B)\mapsto(\lambda\epsilon,\epsilon^{-1},P_0BP_0^{-1})$，其中 P_0 是交换 B 各列的置换矩阵。我们有两种选择：

(a) 若 n 为奇数，则存在唯一代表元 (λ,ϵ,B)，使得 $\mathrm{Im}(\epsilon)>0$。因此，利用 $\mathbf{F}^{(1,1)}=\mathbf{SF}_{(1,1)}\times S^1=\mathbf{D}\times S^1$，其中 $\mathbf{D}$ 是一个开二维圆盘（参见第 3 节），我们得到

$$X_2^*=S^1\times\boldsymbol{\mu}_n^+\times\mathbf{D}\times S^1,$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_n^+=\{\epsilon\in\boldsymbol{\mu}_n\mid\mathrm{Im}(\epsilon)>0\}$。这些是 $(n-1)/2$ 个 $S^1\times\mathbf{D}\times S^1$的副本。

(b) 若 n 为偶数，我们仍得到 $(n-2)/2$ 份 $S^1\times\mathbf{D}\times S^1$，对应于满足 $\mathrm{Im}(\epsilon)>0$ 的单位根。不过，对于 $\epsilon=-1$，我们得到 $\mathbb{Z}_2$ 在 $S^1\times\mathbf{D}\times S^1$ 上的剩余作用。由于 S^1 的第一份中的作用是 $\lambda=e^{2\pi i\theta}\mapsto-\lambda=e^{2\pi i(\theta+1/2)}$，因此存在一个满足 $0\le\theta<1/2$ 的唯一代表。因此，在这种情形下，我们得到一个贡献 $\mathbf{I}_0\times\mathbf{D}\times S^1$，其中 $\mathbf{I}_0=[0,1/2)$。

(2) $\pi_1 = (1,1)$ 对应于完全可约表示 $X_2^{\mathrm{TR}} = \mathrm{Sym}^2(S^1 \times S^1)$ 的集合。正如第 2.4.1 节所证明的，我们有一个 S^2-纤维化

$$S^2 \to \mathrm{Sym}^2(S^1 \times S^1) \to S^1 \times S^1.$$

该纤维化的单值化为 $(\lambda, \mu) \mapsto (e^{i\pi}\lambda, e^{i\pi}\mu) = (-\lambda, -\mu)$，也就是说，这是一个保定向作用，它将 S^2 的四个轨形点两两互换。

5.2. **SU(3)-特征簇**。在此情形下，与分拆 $\pi_0 = (3)$、$\pi_1 = (1,1,1)$ 和 $\pi_2 = (1,2)$ 对应的半单类型共有三种。

- 对于 $\pi_0 = (3)$，我们得到不可约表示 $\mathrm{S}X_3^*$。我们按照表示 $(A, B) \in \mathrm{S}X_3^*$ 的矩阵 A 中重特征值的情况进行分层，如 (3) 所示：

$$\mathrm{S}X_3^* = \mathrm{S}X_{(1,1,1)}^* \sqcup \mathrm{S}X_{(1,2)}^* \sqcup \mathrm{S}X_{(3)}^*.$$

(1) $\sigma = (1,1,1)$（三个不同特征值）。根据第 2.3.2 节的结果，空间 $\mathrm{S}X_{(1,1,1)}^*$ 是由

$$N_{(1,1,1)} = \frac{3}{n}\binom{n}{3} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

某个子空间 $\mathbf{SF}_{(1,1,1)} \subset \mathrm{SU}(3)/(S^1)^3$ 的多个副本。
对于投影映射到粗正交域 $\varphi : \mathrm{SU}(3)/(S^1)^3 \to B_3 = \{(z, x_2, x_3) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2_{\geq 0} \,|\, |z|^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset S^3$，在 B_3 的内部，其原像恰好是 $\mathbf{SF}_{(1,1,1)}$，且纤维为 S^3。在 ∂B_3 的一条边上，假设是满足 $x_2 = 0$ 的那条边，固定第一列 $(z, 0, x_3) \in \partial B_3$，纤维同构于空间 $S^1 \times S^1$ 在作用下的商

$$\left\{ (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; w_3 = -\frac{w_1 \bar{z}}{x_3},\ |w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 = 1,\ (A, B) \text{ is irreducible} \right\}.$$

由于 (A, B) 必须是不可约的，因此我们有 $w_1, w_3 \neq 0$，于是利用 $S^1 \times S^1$ 的作用，我们找到轨道中一个满足 $w_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ 的唯一点。因此，$\mathbf{SF}_{(1,1,1)}$ 在一条边上的纤维是正交域 $B_2 \subset S^3$，它是一个二维圆盘。最后，不包括正交域的顶点，否则该表示将是可约的。

(2) $\sigma = (1, 2)$（两个重合的特征值）。在这种情形下，空间 $\mathrm{S}X_{(1,2)}^*$ 由以下集合构成：

$$N_{(1,2)} = \frac{3}{n}\binom{n}{2\,1} = \frac{3(n-1)(n-2)}{2}$$

某个子空间 $\mathbf{F}_{(1,2)} \subset \mathrm{SU}(3)/(\mathrm{U}(2) \times S^1)$ 的若干个副本，其中 $\mathrm{U}(2) \times S^1$ 是类型 $\sigma = (2, 1)$ 的稳定子。利用该稳定子的作用，任意表示 (A, B) 都可以化为 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$ 的形式，并且

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

这种矩阵形状的稳定子现在是 $(S^1)^3$, ，其作用如第 2.3.2 节所述。这恰好对应于情形 (1) 中的一条边，因此我们得到 $\mathbf{F}_{(1,2)} \cong \mathbf{I} \times B_2$。

(3) $\sigma =$(3)（三个相等的特征值）。这个分层中没有元素，因为它们都是可约的。

- 对于 $\pi_1 = (1,1,1)$，我们得到完全可约表示，它们是 $\mathrm{S}X_{\mathrm{TR}^3} = \mathrm{SSym}^3(S^1 \times S^1)$。该空间在第 2.4.2 节中有描述。
- 对于 $\pi_2 = (1, 2)$，我们得到 $\mathrm{S}X_{(1,\ 2)\ 3} = X_2$。第 5.1 节描述了这个空间。

尽管这种描述准确地呈现了几何图景，但其中描述的交集模式过于复杂，无法据此计算这些特征簇的同伦类型。未来的一项研究方向是寻找其他方法，完整刻画这些交集，从而能够在这一高秩情形下有效地进行同调与同伦计算。

References

[1] H.U. Boden, *Representations of orbifold groups and parabolic bundles*,《Comment. Math. Helv.》66 (1991) 389–447.[2] G. Burde and K. Murasugi, *Links and Seifert fiber spaces*,《Duke Math. J.》37 (1970) 89–93.[3] H. Chen and T. Yu, *The* SL(2, $\mathbb{C}$)*-character variety of the Borromean link*, arXiv:2202.07429.[4] C. Florentino, P. Gothen and A. Nozad, *Homotopy type of moduli spaces of G-Higgs bundles and reducibility of thenilpotent cone*,《Bull. Sci. Math.》150 (2019) 84–101.[5] C. Florentino and S. Lawton, *Flawed groups and the topology of character varieties*, arXiv:2012.08481.[6] M. Furuta and B. Steer, *Seifert Fibred Homology* 3*-Spheres and the Yang-Mills equations on Riemann surfaces withmarked points*,《Adv. Math.》96 (1992) 38-102.[7] ´A. Gonz´alez-Prieto, J. Mart´ınez and V. Mu˜noz, *Geometry of* SU(3) *-character varieties of torus knots*,《Topology and its Applications》. 为纪念 J.M.R. Sanjurjo 70 岁生日的特刊。即将出版[8] ´A. Gonz´alez-Prieto and V. Mu˜noz, *Motive of the* SL_4*-character variety of torus knots*,《Journal of Algebra》610 (2022) 852–895.[9] ´A. Gonz´alez-Prieto and V. Mu˜noz, *Representation varieties of twisted Hopf links*,《Mediterranean Journal of Mathematics》, 2023, 文章 89.[10] J. Mart´ınez and V. Mu˜noz, *The* SU(2) *-character varieties of torus knots*,《Rocky Mountain J. Math.》(2) 45 (2015) 583–600.[11] V.B. Mehta and C.S.Seshadri, *Moduli of Vector Bundles on Curves with Parabolic Structures*,《Math. Ann.》248 (1980) 205–240.[12] V. Mu˜noz, *The* SL(2, $\mathbb{C}$)*-character varieties of torus knots*,《Rev. Mat. Complut.》22 (2009) 489–497.[13] B. Nasatyr and B. Steer, *Orbifold Riemann surfaces and the Yang-Mills-Higgs equations*,《Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.》(4) 22 (1995) 595–643.[14] P.E. Newstead, *Topological properties of some spaces of stable bundles*,《Topology》6 (1967) 241–262.[15] P.E. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*,《TIFR Lect. Notes》, 51 (1978)。

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Com-plutense de Madrid, Plaza Ciencias 3, 28040 Madrid Spain.

Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UCM-UC3M), C. Nicolás Cabrera 13-15, 28049 Madrid Spain .

Email address: angelgonzalezprieto@ucm.es

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Com-plutense de Madrid, Plaza Ciencias 3, 28040 Madrid Spain.

Email address: mlogares@ucm.es

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica. E.S. Ciencias Experimentales y Tecnología, Universidad Rey Juan Carlos, C. Tulipán 0, 28933 Móstoles, Madrid Spain.

Email address: javier.martinezmar@urjc.es

Instituto de Matemática Interdisciplinar (IMI) and Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Plaza Ciencias 3, 28040 Madrid Spain.

Email address: vicente.munoz@ucm.es