arXiv:2303.06225v1 [math.PR] 10 Mar 2023

具有乘性噪声的随机演化方程

Tijana Levajković*、Stevan Pilipović†、Dora Seleši‡、Milica Žigić§

摘要

我们研究由两类算子驱动的抛物型随机偏微分方程（随机偏微分方程）：一个生成 C_0–半群的线性闭算子，以及一个采用 Wick 型乘法的线性有界算子；所有这些方程均置于白噪声分析的无限维空间框架中。我们证明了这类随机偏微分方程解的存在性与唯一性。特别地，我们还讨论时间导数等于零时的平稳情形。

1 引言与定义

我们考虑如下形式的随机柯西问题

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(t,x,\omega) &= \mathbf{A}U(t,x,\omega) + \mathbf{B}\diamondsuit U(t,x,\omega) + F(t,x,\omega) \\ U(0,x,\omega) &= U^0(x,\omega), \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $t \in (0,T]$, $\omega \in \Omega$，且 $U(t,\cdot,\omega)$ 属于某个巴拿赫空间 X。算子 A 是稠密定义的，并生成一个 C_0–半群；B 是一个线性有界算子，与 Wick 乘积 $\diamondsuit$结合后，会在方程中引入卷积型扰动。所有随机过程均在 Wiener-Itô 混沌展开的框架下考虑。第 2 节将全面说明算子 A 和 B 在该框架中的作用。

本文的研究受到 [12] 的启发，该文作者全面分析了如下形式的方程

$$\frac{d}{dt}u(t,x,\omega) = \mathbf{A}u(t,x,\omega) + \delta(\mathbf{M}u(t,x,\omega)) = \mathbf{A}u(t,x,\omega) + \int \mathbf{M}u(t,x,\omega)\diamondsuit W(x,\omega)\,dx,$$

*贝尔格莱德大学，塞尔维亚，t.levajkovic@sf.bg.ac.rs
†理学院，诺维萨德大学，塞尔维亚，stevan.pilipovic@dmi.uns.ac.rs
‡理学院，诺维萨德大学，塞尔维亚，dora.selesi@dmi.uns.ac.rs§理学院，诺维萨德大学，塞尔维亚，milica.zigic@dmi.uns.ac.rs

其中 δ 表示 Skorokhod 积分， W 表示空间白噪声过程。在命题 2.8 中，我们证明，对每个算子 M，都存在相应的算子 B，使得 B$\Diamond u = \delta$(Mu)。另一方面，算子 B 的类别要大得多。对于我们所考虑的算子 A 类别，这一点同样成立（所有算子的全面分析见第 2.1 节）。因此，我们将 [12] 和 [13] 的结果推广到更一般的一类随机微分方程，这类方程由两个线性乘法算子驱动：A 采用普通乘法，而 B$\Diamond$ 采用卷积型Wick乘积。

我们在此前的论文 [11], [18], [19] 中研究了椭圆型随机偏微分方程，特别是形如 L $\Diamond u + f = 0$ 的随机Dirichlet问题。作为这一系列论文的总结，我们研究形如 (3) 的抛物型随机偏微分方程。这类方程还包括形如 $\frac{d}{dt}u =$L$u + f$ 和 $\frac{d}{dt}u =$L$\Diamond u + f$ 的方程作为特例，其中 L 是严格椭圆二阶偏微分算子。这些方程描述了随机介质（非均匀各向异性材料）中的热传导，其中材料的性质由正定随机矩阵建模。

（ $\Delta u +\ \Diamond u$ 3 $i\hbar\ \frac{d}{dt}u = \Delta u +\ \Diamond u + f$ $\frac{d}{dt}u\ =$）的其 $\frac{d}{dt}u =$

他特例包括带随机势 B 的热方程、薛定谔方程 ( ) B、由白噪声驱动的输运方程 $\frac{d^2}{dx^2}u + W\Diamond\frac{d}{dx}u$（如 [20], 中所述）、广义朗之万方程 $\frac{d}{dt}u =$J$u+$C(Y')，其中 Y 是 Lévy 过程，J 是 C_0- 半群的无穷小生成元，C 是有界算子；该方程在 [1], 中也有研究；以及方程 $\frac{d}{dt}u =$L$u + W\Diamond u$，其中 L 是严格椭圆偏微分算子，相关研究见 [3] 和 [8]。

形式为 $\frac{d}{dt}u =$ A$u+$BW 的方程也曾在 [14] 和 [15], 中得到研究，其中 A 不一定生成 C_0-半群，也可能生成一个 r-积分半群或卷积半群。

为求解 (3)，我们采用维纳-伊藤混沌展开方法，也称为传播子方法。利用该方法，我们将随机偏微分方程化为一个无限的三角形偏微分方程组，并可通过归纳法求解。对展开中的所有系数求和，并证明其在适当的加权空间中收敛后，即可得到原随机偏微分方程的解。

我们还考虑定常方程 A$U +$B$\Diamond U + F = 0$ 的情形。特别是，椭圆型随机偏微分方程已在 [11], [13], [18] 和 [19] 中得到研究。利用混沌展开方法，也可以处理双曲型随机偏微分方程 [9] 和带有奇点的随机偏微分方程 [21]。这种方法的优点之一是能够以级数展开的形式给出显式解，而且易于应用于数值近似和计算机模拟。

1.1 C_0-半群

回顾一些后文将用到的众所周知的事实（见 [16]）。设 X 是一个巴拿赫空间。若 B 是 X 上的有界线性算子，且 A是满足条件 $||T_t||_{L(X)} \leq Me^{wt}$、 $t \geq 0$ 的 C_0-半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的无穷小生成元，其中 M、$w > 0$ 为某些参数，则 $A + B$ 是 C_0-半群 $\{S_t\}_{t\geq 0}$ 在 X 上的无穷小生成元，并满足

$$\|S_t\|_{L(X)} \leq Me^{(w+M\|B\|_{L(X)})t},\ t \geq 0.$$

设 $u(0) = u^0 \in D = Dom(A)$ 和 $f \in C([0,\infty)\ X)$。回忆一下，$u\colon [0,T] \to X$ 是定义在 $[0,T]$ 上的(经典)解，满足

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t),\ t \in (0,T], \quad u(0) = u^0, \tag{2}$$

如果 u 在 $[0,T]$上连续，在 $(0,T]$上连续可微，$u(t) \in D$，$t \in (0,T]$，且方程在 $(0,T]$ 上成立。如果 $f \in L^1((0,T)\ X)$，那么 $u(t) = T_t u^0 + \int_0^t T_{t-s} f(s)ds, t \in [0,T]$ 属于 $C([0,T],$ $X)$，并称为温和解。显然，在 $(0,T]$ 上连续可微的温和解是经典解。

设 $f \in L^1((0,T)\ X) \cap C((0,T],X)$ 且 $v(t) = \int_0^t T_{t-s} f(s)ds, t \in [0,T]$. 如果满足以下条件之一，则初值问题对每个 $u^0 \in D$ 都有一个解 u （参见 [16]）：

(i) v 在 $(0,T)$ 上连续可微。

(ii) $v(t) \in D$ 对于 $0 < t \leq T$，且 $Av(t)$ 在 $(0,T]$ 上连续。

如果初值问题在某个 $u^0 \in D$ 下于 $[0,T]$ 上有解，那么 $v(t)$ 满足 (i) 和 (ii)。注意，若 $f \in C^1([0,T],X)$，则条件 (i) 和 (ii) 均成立。此外，若 $f \in C^1([0,T],X)$ 且 $u^0 \in D(A)$，则对于方程 (2) 的解 u，有 $u \in C^1([0,T],X)$ 且 $\frac{d}{dt}u(0) = Au^0 + f(0)$。

1.2 广义随机过程

记 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 为高斯白噪声概率空间 $(S'(\mathbb{R})\ \mathcal{B}, \mu)$，其中 $S'(\mathbb{R})$ 表示缓增分布空间，$\mathcal{B}$ 是由 $S'(\mathbb{R})$ 上的弱拓扑生成的博雷尔σ代数，而 μ 是与特征函数对应的高斯白噪声测度

$$\int_{S'(\mathbb{R})} e^{i\langle\omega,\phi\rangle} d\mu(\omega) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right], \qquad \phi \in S(\mathbb{R}),$$

由博赫纳–明洛斯定理给出。

我们回顾与 $L^2(\Omega\ \mu)$ 相关的概念（见 [7]），其中 $\Omega = S'(\mathbb{R})$，且 μ 是高斯白噪声测度。定义多重指标集合 $\mathcal{I}$ 为 $(\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}})_c$，即由非负整数序列构成、且只有有限个非零分量的集合。特别地，我们用 $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \ldots)$ 表示所有分量均为零的多重指标。多重指标的长度为 $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$，其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \mathcal{I}$，且总是有限的。同样，$\alpha! = \prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i!$ 以及其他所有运算也都是按分量进行的。我们约定，当对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\alpha_n - \beta_n \geq 0$ 时，即当 $\alpha - \beta \geq \mathbf{0}$ 时，$\alpha - \beta$ 有定义；若对某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\alpha_n < \beta_n$，则不定义 $\alpha - \beta$。

维纳-伊藤定理（有时也称为卡梅隆-马丁定理）指出，可以定义 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ $L^2(\Omega\ \mu)$ 的一个正交基，其中 H_α 是通过厄米特正交多项式 h_n 和厄米特函数 ξ_n 构造的，

$$H_\alpha(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} h_{\alpha_n}(\langle\omega, \xi_n\rangle), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots) \in \mathcal{I}, \quad \omega \in \Omega = S'(\mathbb{R}).$$

那么，每个 $F \in L^2(\Omega,\ \mu)$ 都可以通过所谓的 混沌展开 来表示

$$F(\omega)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha(\omega),\quad \omega\in S'(\mathbb{R}),\quad \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}|f_\alpha|^2\alpha!<\infty,\quad f_\alpha\in\mathbb{R},\quad \alpha\in\mathcal{I}.$$

用 $\varepsilon_k=(0,0,\ldots,1,0,0,\ldots)$ $k\in\mathbb{N}$ 表示第 k 个位置上的元素为 1 的多重指标。用 $\mathcal{H}_1$ 表示由多项式 $H_{\varepsilon_k}(\cdot)$、 $k\in\mathbb{N}$张成的 $L^2(\Omega,\ \mu)$ 的子空间。子空间 $\mathcal{H}_1$ 包含高斯随机过程，例如，布朗运动可由混沌展开 $B(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \xi_k(s)ds\ H_{\varepsilon_k}(\omega)$给出。

用 $\mathcal{H}_m$ 表示 m 阶混沌空间，即由正交多项式 $H_\alpha(\cdot)$（其中 $|\alpha|=m,\ m\in\mathbb{N}_0$）张成的线性子空间的闭包。维纳-伊藤混沌展开指出， $L^2(\Omega,\ \mu)=\bigoplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{H}_m$，其中 $\mathcal{H}_0$ 是 $L^2(\Omega,\ \mu)$ 中常数的集合。

众所周知，布朗运动的时间导数（白噪声过程）在经典意义下并不存在。然而，通过将 $L^2(\Omega,\ \mu)$ 上的拓扑改为较弱的拓扑，T. Hida [6]定义了包含白噪声的广义随机变量空间，其中白噪声是布朗运动的弱导数。关于白噪声分析（即确定性广义函数的施瓦茨理论在无限维情形下的类比），请参阅 [6], [7] 。

令 $(2\mathbb{N})^\alpha=\prod_{n=1}^{\infty}(2n)^{\alpha_n},\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots)\in\mathcal{I}$. 我们将经常用到如下事实：级数 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(2\mathbb{N})^{-p\alpha}$ 对 $p>1$ 收敛。定义巴拿赫空间

$$(S)_{1,p}=\{F=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha\in L^2(\Omega,\mu):\ \|F\|^2_{(S)_{1,p}}=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(\alpha!)^2|f_\alpha|^2(2\mathbb{N})^{p\alpha}<\infty\},\quad p\in\mathbb{N}_0.$$

其拓扑对偶空间为

$$(S)_{-1,-p}=\{F=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha:\ \|F\|^2_{(S)_{-1,-p}}=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}|f_\alpha|^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}<\infty\},\quad p\in\mathbb{N}_0.$$

广义随机变量的康德拉季耶夫空间为 $(S)_{-1}=\bigcup_{p\in\mathbb{N}_0}(S)_{-1,\ -p}$ 赋予归纳拓扑。它是 $(S)_{1}=\bigcap_{p\in\mathbb{N}_0}(S)_{1,\ p}$ 的强对偶空间；后者称为康德拉季耶夫检验随机变量空间，并赋予射影拓扑。因此，

$$(S)_1\subseteq L^2(\Omega,\mu)\subseteq(S)_{-1}$$

构成一个盖尔范德三元组。

布朗运动的时间导数在广义意义下存在，并属于 Kondratiev 空间 $(S)_{-1,-p}$，其中 $p\geq\frac{5}{12}$。我们称之为白噪声，其形式展开为 $W(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(t)H_{\varepsilon_k}(\omega)$。

我们在 [17] 中将随机过程的定义也扩展到了具有混沌展开形式的过程 $U(t,\omega)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$，其中系数 u_α 是某个巴拿赫空间 X 的元素。我们称 U 是一个取值于 的广义随机过程，即 $U(t,\omega)\in X\otimes(S)_{-1}$，如果存在 $p>0$ 使得 $\|U\|^2_{X\otimes(S)_{-1,-p}}=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|u_\alpha\|^2_X(2\mathbb{N})^{-p\alpha}<\infty$。

随机过程 $F=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}f_\alpha H_\alpha, G=\sum_{\beta\in\mathcal{I}}g_\beta H_\beta\in X\otimes(S)_{-1}$ 的 *Wick* 乘积 为

$$F\lozenge G=\sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\sum_{\alpha+\beta=\gamma}f_\alpha g_\beta H_\gamma=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sum_{\beta\leq\alpha}f_\beta g_{\alpha-\beta}H_\alpha,$$

而第 n 阶 Wick 幂定义为 $F^{\diamondsuit n}=F^{\diamondsuit(n-1)}\diamondsuit F$, $F^{\diamondsuit 0}=1$。注意，对于 $n\in\mathbb{N}_0$, $k\in\mathbb{N}$，有 $H_{n\varepsilon_k}=H_{\varepsilon_k}^{\diamondsuit n}$。

例如，令 $X=C^k[0,T]$, $k\in\mathbb{N}$。我们在 [18] 中证明，随机过程的微分可以在混沌展开中逐分量进行，也就是说，由于 $(S)_{-1}$ 是一个核空间，因此有 $C^k([0,T],(S)_{-1})=C^k[0,T]\otimes(S)_{-1}$。这意味着，随机过程 $U(t,\omega)$ 是 k 次连续可微的，当且仅当其所有系数 $u_\alpha(t)$, $\alpha\in\mathcal{I}$ 都属于 $C^k[0,T]$。

对于 Banach 空间值随机过程，即 $C^k([0,T],X)\otimes(S)_{-1}$中的元素，同样成立，其中 X 是任意巴拿赫空间。由于 $(S)_{-1}$具有核性，这些过程可以视为张量积空间中的元素

$$C^k([0,T],X\otimes(S)_{-1})=C^k([0,T],X)\otimes(S)_{-1}=\bigcup_{p=0}^{\infty}C^k([0,T],X)\otimes(S)_{-1,-p}.$$

2 随机算子

定义 2.1。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $\mathbf{O}:\ X\otimes(S)_{-1}\to X\otimes(S)_{-1}$ 是作用于随机过程空间上的一个算子。若存在一族算子 $o_\alpha:\ X\to X$, $\alpha\in\mathcal{I}$，使得对所有 $F=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}f_\alpha H_\alpha\in X\otimes(S)_{-1}$, 均有 $\mathbf{O}$ 满足逐坐标算子的定义：$\mathbf{O}(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}f_\alpha H_\alpha)\ =\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}o_\alpha(f_\alpha)H_\alpha$，则称 $\mathbf{O}$ 为一个逐坐标算子。

显然，并非所有算子都是逐坐标的，例如 $\mathrm{O}(F)\ =\ F^{\diamondsuit 2}$ 不能写成这种形式。

定义 2.2。简单逐坐标算子 这一子类由满足 $o_\alpha=o_\beta=o$, $\alpha,\beta\in\mathcal{I}$ 的算子组成；也就是说，它们可以写成$\mathbf{O}(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}f_\alpha H_\alpha)\ =\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}o(f_\alpha)H_\alpha$ 的形式，其中 $o:\ X\to X$ 是某个算子。

例如，微分算子 [18] 和傅里叶变换 [21] 是简单逐坐标算子。
Ornstein-Uhlenbeck 算子是逐坐标算子，但它不是简单的逐坐标算子。

请注意，即使所有 o_α, $\alpha\in\mathcal{I}$ 都是有界线性算子，逐坐标算子 O 本身也不一定有界。如果 o_α, $\alpha\in\mathcal{I}$ 被某个 $C>0$ 一致有界，那么 O 也是有界算子。这由下式可得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{O}(F)\|^2_{X\otimes(S)_{-1,-p}}&\le\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|o_\alpha\|^2_{L(X)}\|f_\alpha\|^2_X(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\&\le C^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|f_\alpha\|^2_X(2\mathbb{N})^{-p\alpha}=C^2\|F\|^2_{X\otimes(S)_{-1,-p}}<\infty,\end{aligned}$$

对于 $F\in X\otimes(S)_{-1,\ -p}$。

此条件是充分但非必要的，并且可以通过嵌入（S）$_{-1,\ -p}\subseteq$（S）$_{-1,\ -q}$, $q\ge p$予以放宽。

引理 2.3。 设**O** 为一个逐坐标算子，且所有 $o_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$ 均为多项式有界，即 $\|o_\alpha\|_{L(X)} \leq R(2\mathbb{N})^{r\alpha}$ 对某个 $r, R > 0$成立。那么，存在 $q \geq p$ 使得$\mathbf{O}: X \otimes(S)_{-1,-p} \to X \otimes (S)_{-1,-q}$ 有界。

证明。 设 $q \geq p + 2r$。那么，

$$\begin{aligned}\|\mathbf{O}(F)\|^2_{X\otimes(S)_{-1,-q}} &\leq R^2 \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{2r\alpha}\|f_\alpha\|^2_X (2\mathbb{N})^{-q\alpha} = R^2 \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|^2_X (2\mathbb{N})^{-(q-2r)\alpha} \\ &\leq R^2 \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|^2_X (2\mathbb{N})^{-p\alpha} = R^2\|F\|^2_{X\otimes(S)_{-1,-p}} < \infty.\end{aligned}$$

因此， $\|\mathbf{O}\|_{L(X)\otimes(S)_{-1}} \leq R$。 □

注意，条件 $\|o_\alpha\|_{L(X)} \leq R(2\mathbb{N})^{r\alpha}$ 对某些 $r, R > 0$ 成立，实际上等价于存在 $r > 0$ 使得 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|o_\alpha\|^2_{L(X)}(2\mathbb{N})^{-r\alpha} < \infty$。

本文中我们将考虑以下方程

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}U(t,\omega) = \mathbf{A}U(t,\omega) + \mathbf{B}\Diamond U(t,\omega) + F(t,\omega), \quad t \in (0,T], \omega \in \Omega, \\ &\quad U(0,\omega) = U^0(\omega),\end{aligned} \tag{3}$$

其中，算子 A 和 B 均假设为逐坐标算子，即分别由一族算子 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}, \{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$组成。假设算子 $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$ 是具有公共定义域 D （在 X 中稠密）的 C_0–半群的无穷小生成元，且 A 的作用由 $\mathbf{A}(U) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha(u_\alpha)H_\alpha$ 给出，其中 $U = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha \in Dom(\mathbf{A}) \subseteq D \otimes (S)_{-1}$，其中

$$Dom(\mathbf{A}) = \{U = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha \in D \otimes (S)_{-1} : \exists p_U > 0, \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|A_\alpha(u_\alpha)\|^2_X (2\mathbb{N})^{-p_U\alpha} < \infty\}.$$

假设算子 $B_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$ 在 X 上有界线性，且算子 $\mathbf{B}\Diamond: X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ 的作用定义为

$$\mathbf{B}\Diamond(U) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{\beta\leq\alpha} B_\beta(u_{\alpha-\beta})H_\alpha = \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} B_\alpha(u_\beta)H_\gamma.$$

接下来的两个引理给出了确保算子 B$\Diamond$ 定义良好的两个充分条件。这两个条件实际上都等价于 $B_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$ 多项式有界这一事实，但它们对 B$\Diamond$ 的定义域和值域的随机阶（Kondratiev 权重）提供了更精细的估计。

引理 2.4。 若算子 $B_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$ 满足 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|B_\alpha\|^2_{L(X)}(2\mathbb{N})^{-r\alpha} < \infty$，则 $\mathbf{B}\Diamond$可良定义为映射 $\mathbf{B}\Diamond: X \otimes(S)_{-1,-p} \to X \otimes (S)_{-1,-(p+r+m)}$, $m > 1$。

证明。 对于 $U \in X \otimes (S)_{-1,-p}$ 和 $q = p + r + m$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \| \sum_{\alpha+\beta=\gamma} B_\alpha(u_\beta)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-q\gamma} &\le \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \Big[\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \|B_\alpha\|_{L(X)} \|u_\beta\|_X \Big]^2 (2\mathbb{N})^{-(p+r+m)\gamma} \\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-m\gamma} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \|B_\alpha\|_{L(X)}^2 (2\mathbb{N})^{-r\gamma} \right) \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \|u_\beta\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} \right) \\ &\le M \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|B_\alpha\|_{L(X)}^2 (2\mathbb{N})^{-r\alpha} \right) \left(\sum_{\beta\in\mathcal{I}} \|u_\beta\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\beta} \right) < \infty,\end{aligned}$$

其中 $M = \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{-m\gamma} < \infty$，对于 $m > 1$。 □

引理 2.5. 若算子 B_α, $\alpha \in \mathcal{I}$ 满足 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|B_\alpha\|_{L(X)} (2\mathbb{N})^{-\frac{r}{2}\alpha} < \infty$，对于某个$r > 0$，则 $\mathbf{B}\Diamond$ 可良好定义为映射 $\mathbf{B}\Diamond : X \otimes (S)_{-1,-r} \to X \otimes (S)_{-1,-r}$。

证明。对于 $U \in X \otimes (S)_{-1,\ -r}$，由广义闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \| \sum_{\alpha+\beta=\gamma} B_\alpha(u_\beta)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-r\gamma} &\le \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \Big[\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \|B_\alpha\|_{L(X)} \|u_\beta\|_X \Big]^2 (2\mathbb{N})^{-r\gamma} \\ &\le \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \Big[\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \|B_\alpha\|_{L(X)} (2\mathbb{N})^{-\frac{r}{2}\alpha} \|u_\beta\|_X (2\mathbb{N})^{-\frac{r}{2}\beta} \Big]^2 \\ &\le \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|B_\alpha\|_{L(X)} (2\mathbb{N})^{-\frac{r}{2}\alpha} \right)^2 \sum_{\beta\in\mathcal{I}} \|u_\beta\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-r\beta} < \infty.\end{aligned}$$

□

2.1 特殊情形及与其他工作的关系

随机微积分中一些最重要的算子是 Malliavin 微积分的算子。我们回顾其在广义 $S'(\mathbb{R})$ 设置 [10] 中的定义。

- 作为沿白噪声方向的随机梯度，***Malliavin*** 导数，$\mathbb{D}$是一个线性连续映射 $\mathbb{D} : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes S'(\mathbb{R}) \otimes (S)_{-1}$，定义如下：

$$\mathbb{D}u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k\, u_\alpha \otimes \xi_k \otimes H_{\alpha-\varepsilon_k}, \quad \text{for } u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha \otimes H_\alpha.$$

  在量子理论中，它对应于降低混沌空间阶数的湮灭算子（ $\mathbb{D} : \mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_{m-1}$）。

- 作为 Itô 积分在非预见过程上的扩展，***Skorokhod*** 积分，δ 是一个线性连续映射 $\delta : X \otimes S'(\mathbb{R}) \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$，定义为

$$\delta(F) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{k\in\mathbb{N}} f_\alpha \otimes v_{\alpha,k} \otimes H_{\alpha+\varepsilon_k}, \quad \text{for } F = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha \otimes \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} v_{\alpha,k}\, \xi_k \right) \otimes H_\alpha.$$

它是 Malliavin 导数的伴随算子；从量子理论的角度看，它对应于使混沌空间阶数增加的产生算子（δ :$\mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_{m+1}$）。

• 作为前述算子 $\delta \circ \mathbb{D}$ 的复合，*Ornstein-Uhlenbeck* 算子（ $\mathcal{R}$）是拉普拉斯算子的随机类比。它是一个线性连续映射$\mathcal{R}$： $X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$，定义为

$$\mathcal{R}(u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} |\alpha| u_\alpha \otimes H_\alpha, \quad \text{for } u = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha \otimes H_\alpha.$$

在量子理论中，它对应于数算子。它是一个自伴算子 $\mathcal{R} : \mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_m$，其特征向量为基元素 H_α, $\alpha \in \mathcal{I}$，即 $\mathcal{R}(H_\alpha) = |\alpha| H_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{I}$。因此，期望为零的高斯过程是 Ornstein-Uhlenbeck 算子的唯一不动点。

显然，Ornstein-Uhlenbeck 算子是逐坐标算子，而 Malliavin 导数和 Skorokhod 积分则不是逐坐标算子。

Ornstein-Uhlenbeck 算子是半群 $T_t = e^{t\mathcal{R}}$, $t \geq 0$ 的无穷小生成元，该半群定义为 $T_t(u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} e^{-|\alpha| t} u_\alpha \otimes H_\alpha$，其中 $u = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha \otimes H_\alpha \in X \otimes (S)_{-1}$。

它还与 Ornstein-Uhlenbeck过程密切相关。Ornstein-Uhlenbeck过程是随机微分方程 $du(t,\omega) = -u(t,\omega)dt + dB(t,\omega)$, $u(0,\omega) = u_0(x,\omega)$ 的解，其表达式为 $u(t,\omega) = e^{-t}u_0(\omega) + \int_0^t e^{t-s} dB(s,\omega)$。它是一个马尔可夫过程，其转移半群为 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ [2]。广义热方程 $\frac{d}{dt}u + \mathcal{R}(u) = 0, u(0) = u_0$ 的解由 $u = T_t(u_0)$ 给出，即 $u(t,x) = (T_t u_0)(x)$ 且 $(T_t\varphi)(x) = E(\varphi(u(t,x)))$, 对任意 $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ 均成立，其中 u 是 Ornstein-Uhlenbeck过程。

现在我们转向方程

$$\frac{d}{dt}U(t,\omega) = \mathbf{A}U(t,\omega) + \mathbf{B}\Diamond U(t,\omega) + F(t,\omega), \tag{4}$$

其中，A 和 B 是第 2 节所述的逐坐标算子，分别由算子族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$、$\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ 构成，其中 A_α 是作用于 X 上的无穷小生成元，而 B_α 是作用于 X 上的有界线性算子；这两个算子族均为多项式有界，其作用方式如下：

$$\mathbf{A}U = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha(u_\alpha) H_\alpha, \qquad \text{for } U = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha, \tag{5}$$

$$\mathbf{B}\Diamond U = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{\beta \leq \alpha} B_\beta(u_{\alpha-\beta}) H_\alpha, \qquad \text{for } U = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha. \tag{6}$$

一些重要的特殊情形如下：

I) A 的特殊情形：

1) A 是一个简单的逐坐标算子，即 $A_\alpha = A, \alpha \in \mathcal{I}$，其中 A 是 X 上 C_0-半群的无穷小生成元。这类算子例如包括拉普拉斯算子 Δ，作用于 $X = W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$，或任意偶数阶 $P(x,D) = \sum_{|\iota|\le 2m} a_\iota(x)D^\iota$ 的严格椭圆线性偏微分算子。例如，二阶椭圆算子可以写成散度形式 $L = \nabla\cdot(Q\nabla\cdot + b) + c\nabla\cdot$，其中 Q 是一个正定函数矩阵。

2) $A_\alpha = A + R_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$，其中 A 与 1) 中相同，而 $R_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$是 X 上的有界线性算子，因此 R 是一个逐坐标算子

$$\mathbf{R}U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} R_\alpha u_\alpha(t) H_\alpha(\omega).$$

特别地，若我们取 $A = 0$ 和 R_α 为乘法算子 $R_\alpha(x) = r_\alpha \cdot x, x \in X$，则所得算子 R 是一个自伴算子，其特征值为 r_α，对应的特征向量为 H_α，因而构成 Ornstein-Uhlenbeck 算子的一种自然推广。对于 $r_\alpha = |\alpha|, \alpha \in \mathcal{I}$，我们便得到 Ornstein-Uhlenbeck 算子 $\mathcal{R}$。

最后，我们注意到，每个有界线性逐坐标算子 R 都可以写成 $Ru = \delta(Mu)$ 的形式，其中 M 是 Malliavin 导数的一种推广。这将在命题 2.6 中完成。

II) B 的特殊情形：

1) B 是一个算子，其作用方式为乘以一个确定性函数，即对于 $\alpha = (0,0,0,0,\ldots)$，有 $B_\alpha = b$，而对于所有其他 $\alpha \in \mathcal{I}$，有 $B_\alpha = 0$。因此，其作用为

$$\mathbf{B}\Diamond U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} b \cdot u_\alpha(t) H_\alpha(\omega).$$

例如，对于本质有界函数 b，我们可以取 $X = L^2(\mathbb{R}^n)$和 $b = b(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$。

2）B是 $X = L^2(\mathbb{R}^n)$上的空间白噪声乘法。令 $B_k := B_{\varepsilon_k} = \xi_k, k \in \mathbb{N}$，并令 $B_\alpha = 0$ for $\alpha \neq \varepsilon_k$，即 $B_k(v(x)) = \xi_k(x)\cdot v(x), \quad k \in \mathbb{N}$。那么，

$$\mathbf{B}\Diamond U(t,\omega) = W(x,\omega)\Diamond U(t,\omega).$$

显然，

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\Diamond U &= \sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\sum_{k\in\mathbb{N}} B_k(u_{\alpha-\varepsilon_k})H_\gamma = \sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{\alpha-\varepsilon_k}\xi_k H_\gamma \\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\sum_{\alpha+\varepsilon_k=\gamma} u_\alpha \xi_k H_\gamma = W\Diamond U.\end{aligned}$$

与空间白噪声相乘对应用很重要，因为它描述了平稳扰动。

3) B 具有 $B_{\varepsilon_k} = B_k$, $k \in \mathbb{N}$ 和 $B_\alpha = 0$ 对于 $\alpha \neq \varepsilon_k$ 的形式，其中 $B_k : X \to X$, $k \in \mathbb{N}$ 是有界线性算子。请注意，在这种情况下，形式为 B◊ 的算子与形式为 δ (Mu) 的算子一一对应，其中 M 是一个简单的逐坐标算子。这将在命题 2.8 中完成。4) B 是一个简单的逐坐标算子，即 $B_\alpha = B, \alpha \in \mathcal{I}$，其中 B 是作用在 X 上的有界线性算子。或者，我们也可以将算子视为 $B : X \to X'$，以使其有界；例如，散度 $\nabla\cdot$ 作为从 $X = W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ 到 $X' = W^{-1,2}(\mathbb{R}^n)$ 的映射就是这样的算子。5) B◊ $= \nabla \cdot (Q \diamond \nabla \cdot + b\diamond) + c\diamond\nabla\cdot$ 是一个具有随机系数的严格椭圆二阶算子。该算子是在 $B_\alpha = \nabla \cdot (Q_\alpha \nabla \cdot + b_\alpha) + c_\alpha \nabla \cdot, \alpha \in \mathcal{I}$ 的条件下得到的，并在 [18] 和 [19] 中进行了研究。

命题 2.6. 设$\mathbf{R} : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ 是一个有界线性逐坐标算子，由$\mathbf{R}u(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} R_\alpha u_\alpha(t) H_\alpha(\omega)$定义。

1. 存在一个算子$\mathbf{M} : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes S'(\mathbb{R}) \otimes (S)_{-1}$，其形式为

$$\mathbf{M}u = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}_k u \otimes \xi_k, \quad u \in X \otimes (S)_{-1},$$

for 一些逐坐标算子$\mathbf{M}_k : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$, $k \in \mathbb{N}$，使得 t

$$\mathbf{R}u = \delta(\mathbf{M}u)$$

成立。

2. 特别地，若$\mathbf{R}$ 是自伴算子，则$\mathbf{M}$ 是 *Malliavin* 导数的一种推广。

证明。 a) 在 [10] 中我们证明了 Skorokhod 积分是可逆的，也就是说，形如 $\delta(v) = f$的方程存在唯一解。考虑方程 $\delta(\mathbf{M}u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} R_\alpha u_\alpha H_\alpha$，并应用 [10], 中的结果，我们得到形式如下的 $\mathbf{M}u$

$$\mathbf{M}u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{k\in\mathbb{N}} (\alpha_k + 1) \frac{R_{\alpha+\varepsilon_k}(u_{\alpha+\varepsilon_k})}{|\alpha + \varepsilon_k|} \otimes \xi_k \otimes H_\alpha.$$

通过定义

$$\mathbf{M}_k u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (\alpha_k + 1) \frac{R_{\alpha+\varepsilon_k}(u_{\alpha+\varepsilon_k})}{|\alpha + \varepsilon_k|} \otimes H_\alpha, \quad k \in \mathbb{N},$$

即可得到该结论。

b) 设 R 是一个自伴算子，其特征值为 r_α，特征向量为 H_α、 $\alpha \in \mathcal{I}$，即形式为 R $u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_\alpha u_\alpha H_\alpha$ 的算子。假设 $r_\alpha = \sum_{k\in\mathbb{N}} r_{k,\alpha}$ 对某个 $r_{k,\alpha} \in \mathbb{R}$、 $k \in \mathbb{N}$、 $\alpha \in \mathcal{I}$ 是值 r_α 的任意分解。

定义

$$\mathbf{M}_k u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_{k,\alpha} u_\alpha \otimes H_{\alpha-\varepsilon_k}.$$

那么 $\mathbf{M}u = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{M}_k u \otimes \xi_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_{k,\ \alpha} u_\alpha \otimes H_{\alpha-\varepsilon_k} \otimes \xi_k$ 且

$$\delta(\mathbf{M}u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_{k,\alpha} u_\alpha \otimes H_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_\alpha u_\alpha \otimes H_\alpha.$$

□

备注 2.7。 反之则不成立。即使每个$\mathbf{M}_k$, $k \in \mathbb{N}$都是简单的逐坐标算子（$\mathbf{M}$也如此），$\mathbf{R} := \delta \circ \mathbf{M}$ 也不一定是逐坐标算子。这要求系统 $R_\alpha(u_\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_k(u_{\alpha-\varepsilon_k})$, $\alpha \in \mathcal{I}$在给定函数 $m_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$的情况下，对 $R_\alpha(\cdot)$ 有解，但一般而言这并不成立。

命题 2.8。 设$\mathbf{M}$: $X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes S'(\mathbb{R}) \otimes (S)_{-1}$ 具有如下形式

$$\mathbf{M}u = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}_k u \otimes \xi_k, \quad u \in X \otimes (S)_{-1}, \tag{7}$$

其中， $k \in \mathbb{N}$为某些简单的逐坐标算子$\mathbf{M}_k$: $X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$。那么，存在一个逐坐标算子$\mathbf{B}$ 使得 $B_\alpha = 0$ 对 $\alpha \neq \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$成立，并且

$$\delta(\mathbf{M}u) = \mathbf{B}\Diamond u$$

成立。

反过来，对于任意满足 $B_\alpha = 0$ *for* $\alpha \neq \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$ 的逐坐标算子 $\mathbf{B}$ ，存在一个形如 $\mathbf{M}u = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}_k u \otimes \xi_k$ 的算子 $\mathbf{M}$，其中 $\mathbf{M}_k$, $k \in \mathbb{N}$ 是某些简单逐坐标算子 $\mathbf{M}$，且满足 $\delta(\mathbf{M}u) = \mathbf{B}\Diamond u$ 。

证明。 设 $\mathbf{M}$ 是上述算子。由于 $\mathbf{M}_k$ 是简单逐坐标算子，我们可以将其写成

$$\mathbf{M}_k(u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} m_k(u_\alpha) H_\alpha, \qquad u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha,$$

对于某些算子 m_k : $X \to X$, $k \in \mathbb{N}$。因此,

$$\mathbf{M}u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} m_k(u_\alpha) H_\alpha \otimes \xi_k$$

这进一步意味着

$$\delta(\mathbf{M}u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} m_k(u_\alpha) H_{\alpha+\varepsilon_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} m_k(u_{\alpha-\varepsilon_k}) H_\alpha. \tag{8}$$

另一方面，如果 B 满足 $B_\alpha = 0$ 对 $\alpha \neq \varepsilon_k$、 $k \in \mathbb{N}$，并且我们用$B_k := B_{\varepsilon_k}$, $k \in \mathbb{N}$表示作用于 X 上的算子，那么

$$\mathbf{B}\diamondsuit u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sum_{k=1}^{\infty} B_k(u_{\alpha-\varepsilon_k})H_\alpha. \tag{9}$$

由 (8) 和 (9) 可知， δ(Mu) =B$\diamondsuit u$ 当且仅当 $m_k = B_k$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。因此，算子 B$\diamondsuit$ 与 $\delta \circ$M 之间存在一一对应关系。 □

注 2.9. 在 *[12]* 和 *[13]* 中，*Rozovskii* 和 *Lototsky* 考虑了方程 $\frac{d}{dt} = \mathbf{A}u + \delta(\mathbf{M}u) + f$, 其中 $\mathbf{M}$ 具有形式 (7)。他们隐含地假设，他们所有的算子 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{M}_k$, $k \in \mathbb{N}$ 都属于我们的简单逐坐标算子类。这对应于我们的特殊情形 *I-1)* 和 *II-3)*。

(4) 所涵盖的随机微分方程的一些特殊情形包括以下几种:

- 随机势热方程

$$\frac{d}{dt}u = \Delta u + \mathbf{B}\diamondsuit u.$$

特别是，如果随机势由平稳扰动建模，我们可以采用空间白噪声作为模型，并得到 $\frac{d}{dt}u = \Delta u + W\diamondsuit u$。这对应于算子的特殊选择 I-1) 和 II-2)。

- 随机（非均匀且各向异性）介质中的热方程，其中介质的物理性质由随机矩阵 Q 建模。这对应于情形 I-1)，其中 A $= 0$ 以及 II-5) 导出的方程形式为

$$\frac{d}{dt}u = \nabla\cdot\diamondsuit(Q\diamondsuit\nabla\cdot u + b\diamondsuit u) + c\diamondsuit\nabla\cdot u + f.$$

- 取 A $= 0$ 和 $B_k := B_{\varepsilon_k} = \xi_k\nabla\cdot$, $k \in \mathbb{N}$, （参见特殊情形 II-2) 和 II-4)），可得到由白噪声驱动的输运方程

$$\frac{d}{dt}u = \Delta u + W\diamondsuit\nabla\cdot u.$$

- 朗之万方程

$$\frac{d}{dt}u = -\lambda u + W(t),$$

$\lambda > 0$，对应于情形 I-1)，其中 $A = -\lambda$、 $f = W$ 和 B $= 0$。其解是 Ornstein-Uhlenbeck过程，描述了黏度为 λ 的流体中布朗粒子的空间位置。

在 [1] 中，作者考虑了广义朗之万方程，该方程导出了由莱维过程驱动的广义奥恩斯坦-乌伦贝克算子

$$\frac{d}{dt}u = Ju + C(\frac{d}{dt}Y),$$

其中 Y 是一个 Lévy过程， J 是一个 C_0–半群的无穷小生成元， C 是一个有界算子。所有过程都取值于希尔伯特空间。这对应于我们的情形，其中 X 是该希尔伯特空间，A $= J$，B $= 0$，且 $f = C(Y')$。

- 方程 $\frac{d}{dt} = \mathrm{A}u + \delta(\mathrm{M}u) + f$，曾在 [12] 和 [13]中得到广泛研究。这对应于我们的特殊情形 I-1) 和 II-3)。
- 方程

$$\frac{d}{dt}u = Lu + W\Diamond u,$$

其中 L 是一个严格椭圆偏微分算子，相关研究见 [3] 和 [8]。这对应于特殊情形 I-1) 和 II-2)。

3 随机演化方程

现在我们转向一般形式的随机柯西问题： $\frac{d}{dt}U(t,\omega) = \mathrm{A}U(t,\omega) + \mathrm{B}\Diamond U(t,\omega) + F(t,\omega)$ $t \in (0,T]$, $\omega \in \Omega$，初值为 $U(0,\omega) = U^0(\omega)$,$\omega \in \Omega$，且所有过程都取值于巴拿赫空间 X中的 X。

定义 3.1。 若 U是方程 *(3)* 的一个解，且 $U \in C([0,T],X) \otimes (S)_{-1} \cap C^1((0,T],X) \otimes (S)_{-1}$，并且 U满足 *(3)*，则称 U是方程 *(3)* 的解。

定理3.2。 设 **A** 是形式如 *(5)* 的逐坐标算子，其中算子A_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, 定义在同一稠密定义域 D 上， X, 是C_0–半群 $(T_t)_\alpha$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathcal{I}$, 的无穷小生成元，且这些半群一致有界，其界为

$$\|(T_t)_\alpha\|_{L(X)} \leq Me^{wt},\ t \geq 0, \quad for\ some\ \ M, w > 0. \tag{10}$$

设 **B**$\Diamond$ 具有形式 *(6)*，其中 B_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, 是定义在 X 上的有界线性算子，因此存在 $p > 0$ 使得

$$K := \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \|B_\alpha\|(2\mathbb{N})^{-p\frac{\alpha}{2}} < \infty. \tag{11}$$

设初值 $U^0 \in X \otimes (S)_{-1}$ 满足 $U^0 \in Dom(\mathbf{A})$，即

$$U^0(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha^0 H_\alpha(\omega) \in X \otimes (S)_{-1,-p},\ satisfies \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \|u_\alpha^0\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty; \tag{12}$$

and

$$\mathbf{A}U^0(\omega)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}A_\alpha u_\alpha^0 H_\alpha(\omega)\in X\otimes(S)_{-1,-p},\ \textit{satisfies}\quad \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|A_\alpha u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}<\infty. \tag{13}$$

此外，设

$$F(t,\omega)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}f_\alpha(t)H_\alpha(\omega)\in C^1([0,T],X)\otimes(S)_{-1},\quad t\mapsto f_\alpha(t)\in C^1([0,T],X),\ \alpha\in\mathcal{I},$$
$$\textit{so that}\ \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|f_\alpha\|^2_{C^1([0,T],X)}(2\mathbb{N})^{-p\alpha}=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\Big(\sup_{t\in[0,T]}\|f_\alpha(t)\|_X+\sup_{t\in[0,T]}\|f'_\alpha(t)\|_X\Big)^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}<\infty. \tag{14}$$

那么，随机柯西问题 *(3)* 在 $C^1([0,T],X)\otimes(S)_{-1,-p}$ 中有唯一解 U。

证明。 我们设解的形式为 $U(t,\omega)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$。那么，柯西问题 (3) 等价于以下无限系统：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_\alpha(t)&=A_\alpha u_\alpha(t)+\sum_{\beta\le\alpha}B_\beta u_{\alpha-\beta}(t)+f_\alpha(t),\quad t\in(0,T],\\ u_\alpha(0)&=u_\alpha^0\in D,\quad \alpha\in\mathcal{I}.\end{aligned} \tag{15}$$

令 $\mathbf{0}$ 为多重指标 $\mathbf{0}=(0,0,\ldots)$。我们将 (15) 改写为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_\alpha(t)&=(A_\alpha+B_{\mathbf{0}})u_\alpha(t)+\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha}B_\beta u_{\alpha-\beta}(t)+f_\alpha(t),\quad t\in(0,T],\\ u_\alpha(0)&=u_\alpha^0\in D,\quad \alpha\in\mathcal{I}.\end{aligned} \tag{16}$$

接下来，$A_\alpha+B_{\mathbf{0}}$ 是 C_0- 半群 $(S_t)_\alpha$ 在 X 上的无穷小生成元，使得

$$\|(S_t)_\alpha\|\le Me^{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)t},\ t\ge0,\ \alpha\in\mathcal{I}. \tag{17}$$

根据第1.1小节，如果 $f_\alpha,\ \alpha\in\mathcal{I}$ 满足条件 (i) 或 (ii)，则非齐次初值问题 (16) 有一个解 $u_\alpha(t)\in C([0,T],X)\cap C^1((0,T],X),\ \alpha\in\mathcal{I}$，其表达式为

$$\begin{aligned}u_{\mathbf{0}}(t)&=(S_t)_{\mathbf{0}}u_{\mathbf{0}}^0+\int_0^t(S_{t-s})_{\mathbf{0}}f_{\mathbf{0}}(s)ds,\quad t\in[0,T]\\ u_\alpha(t)&=(S_t)_\alpha u_\alpha^0+\int_0^t(S_{t-s})_\alpha\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha}B_\beta u_{\alpha-\beta}(s)+f_\alpha(s)\Big)ds,\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{18}$$

由于 $f_\alpha \in C^1([0,T],X)$，对 α 进行归纳可得

$$\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha} B_\beta u_{\alpha-\beta}(s) + f_\alpha(s) \in C^1([0,T],X), \quad \text{for all} \quad \alpha\in\mathcal{I}.$$

因此，$u_\alpha \in C^1([0,T],X)$ 和 $\frac{d}{dt}u_\alpha(0) = (A_\alpha + B_0)u_\alpha^0 + \sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha} B_\beta u_{\alpha-\beta}^0 + f_\alpha(0)$ $\alpha\in\mathcal{I}$.

注意，对于每个固定的 $\alpha\in\mathcal{I}$，$u_\alpha(t)$ 对所有 $t\in[0,T]$ 都存在，并且它是在整个区间 $[0,T]$ 上唯一的（经典）解。剩下要证明的是，$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$ 在 $C^1([0,T],X)\otimes(S)_{-1,\ -p}$ 中收敛。

首先，我们证明 $U(t,\omega)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega) \in C^1([0,T_0],X)\otimes S_{-1,\ -p}$ 对适当的 $T_0\in(0,T]$，即我们证明

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha\|^2_{C^1([0,T_0],X)}(2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X + \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X \Big)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty. \tag{19}$$

稍后我们将证明，若在（19）中对区间 $[T_0,2T_0]$、$[2T_0,3T_0]$ 等取上确界，结论仍然成立。由于 $[0,T]$ 可以由有限个形如 $[kT_0,(k+1)T_0]$、$k\in\mathbb{N}_0$ 的区间覆盖，因此我们得出

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha\|^2_{C^1([0,T],X)}(2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X + \sup_{t\in[0,T]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X \Big)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty. \tag{20}$$

为此，我们引入多重指标子集的记号

$$\mathcal{I}_{n,m} = \{\alpha\in\mathcal{I}:\ |\alpha|\le n \wedge \mathrm{Index}(\alpha)\le m\},\ n,m\in\mathbb{N},$$

其中，对于 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,0,0,\dots)\in\mathcal{I}$，有 $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$，而 $\mathrm{Index}(\alpha)$ 是 α 中最后一个非零项所在的坐标。为便于后文引用，我们引入函数

$$C(t) = \frac{M^2}{(w+M\|B_0\|)^2}(e^{(w+M\|B_0\|)t}-1)^2 \tag{21}$$

并固定 $T_0\in(0,T]$，使得 $C(T_0)<\frac{1}{5K^2}$。

首先，我们证明

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha(t)\|^2_{C([0,T_0],X)}(2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|^2_X (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty,$$

通过证明部分和 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|^2_X(2\mathbb{N})^{-p\alpha}$，$n,m\in\mathbb{N}$，有上界。

利用 (18) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha}\|B_\beta u_{\alpha-\beta}(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\|f_\alpha(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}.\end{aligned}$$

右端的第一项，对于所有 $t\in[0,T_0]$，结合 (12) 和 (17)，满足

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\le M^2e^{2(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)T_0}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}:=Q_1<\infty. \quad (22)\end{aligned}$$

类似地，对于所有 $t\in[0,T_0]$，利用 (14) 和 (17)，第三项满足

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\|f_\alpha(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\|f_\alpha(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\le \Big[\int_0^t Me^{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)(t-s)}ds\Big]^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{s\in[0,t]}\|f_\alpha(s)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\le \frac{M^2}{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)^2}\Big(e^{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)T_0}-1\Big)^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T]}\|f_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}:=G<\infty. \quad (23)\end{aligned}$$

注意，在 (23) 中，我们取了整个区间 $[0,T]$ 上的上确界。

对于第二项，利用 (11)、(17)、(21) 和广义闵可夫斯基不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\|B_\beta\|\|u_\gamma(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\le \frac{M^2}{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)^2}\Big(e^{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)t}-1\Big)^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\sup_{s\in[0,t]}\|B_\beta\|\|u_\gamma(s)\|_X\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\le C(T_0)\Big(\sum_{\beta\in\mathcal{I}_{n,m}}\|B_\beta\|(2\mathbb{N})^{-p\frac{\beta}{2}}\Big)^2\Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\gamma(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\gamma}\Big)\\ &\le C(T_0)K^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}. \quad (24)\end{aligned}$$

最后，对于所有 $n,m\in\mathbb{N}$，我们得到

$$\frac{1}{3}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\le Q_1+G+C(T_0)K^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}.$$

由于 $\frac{1}{3}-C(T_0)K^2>\frac{1}{5}-C(T_0)K^2>0$，我们有

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\le\frac{Q_1+G}{\frac{1}{3}-C(T_0)K^2}. \tag{25}$$

设 $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个趋于无穷大的任意正整数序列。那么，

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}=\lim_{n\to\infty}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m_n}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\le\frac{Q_1+G}{\frac{1}{3}-C(T_0)K^2},$$

由于它是一个正数级数，因此求和顺序不会影响其结果。现在我们证明

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_{C([0,T_0],X)}^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}<\infty.$$

为此，我们对 (18) 关于 t 求导，得到

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u_{\mathbf{0}}(t)&=(S_t)_{\mathbf{0}}(A_{\mathbf{0}}+B_{\mathbf{0}})u_{\mathbf{0}}^0+\int_0^t(S_{t-s})_{\mathbf{0}}\frac{d}{ds}f_{\mathbf{0}}(s)ds+(S_t)_{\mathbf{0}}f(0),\quad t\in[0,T],\\
\frac{d}{dt}u_\alpha(t)&=(S_t)_\alpha(A_\alpha+B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0+\int_0^t(S_{t-s})_\alpha\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha}B_\beta\frac{d}{ds}u_{\alpha-\beta}(s)+\frac{d}{ds}f_\alpha(s)\Big)ds\\
&\quad+(S_t)_\alpha\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha}B_\beta u_{\alpha-\beta}(0)+f_\alpha(0)\Big),\quad t\in[0,T],\quad \alpha\in\mathcal{I}.
\end{aligned}\tag{26}$$

接下来，我们估计 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}$ 的部分和。因此，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}&\le\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|(A_\alpha+B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&\quad+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha}\|B_\beta\frac{d}{ds}u_{\alpha-\beta}(s)\|_Xds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&\quad+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\|\frac{d}{ds}f_\alpha(s)\|_Xds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&\quad+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\Big[\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha}\|B_\beta u_{\alpha-\beta}(0)\|_X\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&\quad+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|f_\alpha(0)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}.
\end{aligned}$$

根据 (12) 和 (13)，我们得到 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(A_\alpha + B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0 H_\alpha(\omega) \in X \otimes (S)_{-1,\,-p}$。因此，右端的第一项可以通过以下方式计算

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \|(S_t)_\alpha\|^2\|(A_\alpha + B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|(S_t)_\alpha\|^2\|(A_\alpha + B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\ &\le M^2 e^{2(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)T_0}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|(A_\alpha + B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} := Q_1' < \infty. \end{aligned} \tag{27}$$

第三项对所有 $t \in [0, T_0]$ 均满足

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \Big[\int_0^t \|(S_{t-s})_\alpha\|\|\frac{d}{ds}f_\alpha(s)\|ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big[\int_0^t \|(S_{t-s})_\alpha\|\|\frac{d}{ds}f_\alpha(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\ &\le \frac{M^2}{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)^2}\Big(e^{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)T_0} - 1\Big)^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]}\|\frac{d}{ds}f_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} := G' < \infty. \end{aligned} \tag{28}$$

对于第四项，利用 (11)、(12)、(17) 和广义闵可夫斯基不等式，可将其估计为

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \|(S_t)_\alpha\|^2\Big[\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha} \|B_\beta u_{\alpha-\beta}(0)\|_X\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|(S_t)_\alpha\|^2\Big[\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \|B_\beta u_\gamma^0\|_X\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\ &\le M^2 e^{2(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)t}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\Big[\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \|B_\beta\|\|u_\gamma^0\|_X\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\ &\le M^2 e^{2(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)T_0}\Big(\sum_{\beta\in\mathcal{I}} \|B_\beta\|(2\mathbb{N})^{-p\frac{\beta}{2}}\Big)^2\Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \|u_\gamma^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\gamma}\Big) := H_1' < \infty. \end{aligned} \tag{29}$$

对于第五项，利用 (14) 和 (17)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \|(S_t)_\alpha\|^2\|f_\alpha(0)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|(S_t)_\alpha\|^2\|f_\alpha(0)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\ &\le M^2 e^{2(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)T_0}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]}\|f_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} := N' < \infty. \end{aligned} \tag{30}$$

最后，对于第二项，利用 (11)、(17)、(21) 和广义闵可夫斯基不等式，

我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\|B_\beta\|\|\frac{d}{ds}u_\gamma(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&\quad\le\frac{M^2}{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)^2}\Big(e^{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)t}-1\Big)^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\sup_{s\in[0,t]}\|B_\beta\|\|\frac{d}{ds}u_\gamma(s)\|_X\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&\quad\le C(t)\Big(\sum_{\beta\in\mathcal{I}_{n,m}}\|B_\beta\|(2\mathbb{N})^{-p\frac{\beta}{2}}\Big)^2\Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{s\in[0,t]}\|\frac{d}{dt}u_\gamma(s)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\gamma}\Big)\\
&\quad\le C(T_0)K^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}.
\end{aligned}\tag{31}$$

最后，对于所有 n、$m\in\mathbb{N}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\le&Q_1'+G'+H_1'+N'\\
&+C(T_0)K^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}.
\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{5}-C(T_0)K^2>0$，我们有

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\le\frac{Q_1'+G'+H_1'+N'}{\frac{1}{5}-C(T_0)K^2}.\tag{32}$$

再次，取 $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为任意一个趋于无穷大的正整数序列，我们有

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}=\lim_{n\to\infty}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m_n}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\le\frac{Q_1'+G'+H_1'+N'}{\frac{1}{5}-C(T_0)K^2}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&U(t,\omega)\in C^1([0,T_0],X)\otimes(S)_{-1,-p},\ \text{i.e.}\\
&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\Big(\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X+\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X\Big)^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\le\\
&2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\Big(\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X^2+\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2\Big)(2\mathbb{N})^{-p\alpha}<\infty.
\end{aligned}\tag{33}$$

接下来，我们考虑式 (33) 在区间 $[T_0,2T_0]$ 上的上确界。在 $[T_0,2T_0]$ 上，可以将初值问题 (15) 改写为以下等价形式：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,v_\alpha(t)=A_\alpha v_\alpha(t)+\sum_{\beta\le\alpha}B_\beta v_{\alpha-\beta}(t)+f_\alpha(T_0+t),\quad t\in(0,T_0]\\
&v_\alpha(0)=v_\alpha^0:=u_\alpha(T_0),\quad\alpha\in\mathcal{I}.
\end{aligned}\tag{34}$$

式 (34) 中与生成元 $A_\alpha + B_{\mathbf{0}}$ 对应的半群仍然是半群 $(S_t)_\alpha$, $t \geq 0$。利用式 (15) 和 (33)，可得 $U(t,\omega) \in Dom(\mathrm{A})$，对所有 $t \in [0,T_0]$ 均成立，且 $\mathrm{A}U(t,\omega) \in X \otimes (S)_{-1,\,-p}$, $t \in [0,T_0]$. 据此可得 $V^0(\omega) = U(T_0,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha^0 H_\alpha(\omega) \in Dom(\mathrm{A})$，且 $\mathrm{A}V^0(\omega) \in X \otimes (S)_{-1,\,-p}$. 因此，

$$v_\alpha(t) = (S_t)_\alpha v_\alpha^0 + \int_0^t (S_{t-s})_\alpha \Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} B_\beta v_{\alpha-\beta}(s) + f_\alpha(T_0+s) \Big) ds, \quad t \in [0,T_0],$$

并且显然 $v_\alpha(t) = u_\alpha(T_0+t)$ $t \in [0,T_0]$, $\alpha \in \mathcal{I}$。

在近似 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|v_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha}$ 的部分和时，与先前对 $u_\alpha(t)$ 的计算相比，只有常数 Q_1 会有所不同。这里我们将其记为 Q_2，于是再次得到

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|v_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[T_0,2T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \leq \frac{Q_2 + G}{\frac{1}{3} - C(T_0)K^2}.$$

类似地，对于导数 $\frac{d}{dt}V(t,\omega)$，我们得到

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt} v_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \leq \frac{Q_2' + G' + H_2' + N'}{\frac{1}{5} - C(T_0)K^2},$$

与 $\frac{d}{dt}U(t,\omega)$ 的估计相比，只有常数 Q_1' 和 H_1' 发生了变化，我们在此将它们分别记为 Q_2' 和 H_2'。

对于任意 $T > 0$，都可以用形如 $[kT_0, (k+1)T_0]$, $k \in \mathbb{N}_0$ 的区间覆盖区间 $[0,T]$，且有限步内即可完成（例如用 l 步）。因此我们有

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \leq \frac{Q + G}{\frac{1}{3} - C(T_0)K^2},$$

其中 $Q = \max_{1\leq k\leq l}\{Q_k\}$。因此，

$$U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t) H_\alpha(\omega) \in C([0,T], X) \otimes (S)_{-1,-p}.$$

此外，

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|\frac{d}{dt} u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \leq \frac{Q' + G' + H' + N'}{\frac{1}{5} - C(T_0)K^2},$$

其中 $Q' = \max_{1\leq k\leq l}\{Q_k'\}$, $H' = \max_{1\leq k\leq l}\{H_k'\}$。由于 $\frac{d}{dt}u_\alpha(t) \in C([0,T], X)$, $\alpha \in \mathcal{I}$，我们有

$$\frac{d}{dt}U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \frac{d}{dt} u_\alpha(t) H_\alpha(\omega) \in C([0,T], X) \otimes (S)_{-1,-p}.$$

因此， $U(t,\omega) \in C^1([0,T], X) \otimes (S)_{-1,\,-p}$ 因此， U 是式 (3) 的一个解，其意义见定义 3.1。

解 U 是唯一的，这是因为式（18）中的逐坐标（经典）解 u_α 具有唯一性，而且维纳-伊藤混沌展开也具有唯一性。

□

注意，根据前述定理，解 U 仍属于同一个随机阶空间（S）$_{-1,\ -p}$，输入数据 U^0、A U^0 和 F 也属于该空间。

例3.3。 我们给出方程(3) 的三个例子，其中**A** 是一个一致有界的（非简单）逐坐标算子。考虑巴拿赫空间 $X = L^p(\mathbb{R})\ \ 1 \leq p < \infty$, 以及随机柯西问题

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(t,x,\omega) &= \mathbf{A}U(t,x,\omega) + W\Diamond U(t,x,\omega) + F(t,x,\omega), \\ U(0,x,\omega) &= U^0(x,\omega), \end{aligned} \tag{35}$$

其中算子$\mathbf{A}:\ Dom(\mathbf{A}) \to X \otimes (S)_{-1}$ 是由一族形如 $A_\alpha = a_\alpha D,\ \alpha \in \mathcal{I}$的闭算子 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ 构成的逐坐标算子，其中函数$a_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})\ \ \alpha \in \mathcal{I}$, 一致有界，即$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_\alpha(x)| \leq M,$ $\alpha \in \mathcal{I},$ 对于某个$M > 0,$并且 D是以下微分算子之一：$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}$或 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}$，而 $W = \sum_{k\in\mathbb{N}} \xi_k H_{\varepsilon_k}$ 表示空间白噪声。于是，*(35)*等价于无限系统

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_\alpha(t,x) &= A_\alpha u_\alpha(t,x) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \xi_k(x) u_{\alpha-\varepsilon_k}(t,x) + f_\alpha(t,x) \\ u_\alpha(0,x) &= u^0_\alpha(x), \quad \alpha \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

与闭算子 D 对应的 C_0-半群，分别记为 $T_t,\ t \geq 0,$，为

$$\begin{aligned} &T_t g(x) = g(t+x),\ \ g \in L^p(\mathbb{R}), \qquad for\ \ D = \frac{\partial}{\partial x}, \\ &T_t g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-\frac{y^2}{4t}} dy,\ \ g \in L^p(\mathbb{R}), \qquad for\ \ D = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ &T_t g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-\frac{(y+t)^2}{4t}} dy,\ \ g \in L^p(\mathbb{R}), \qquad for\ \ D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

在所有情况下，利用杨氏不等式可得，$\|T_t\| \leq 1,\ t \geq 0.$ 与算子 $A_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{I}$ 对应的 C_0-半群具有形式 $(S_t)_\alpha = a_\alpha T_t$。因此，$\|(S_t)_\alpha\| \leq M,\ \alpha \in \mathcal{I}$。算子 $B_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{I}$ 由 $B_{\varepsilon_k} = \xi_k,$ $k \in \mathbb{N}$ 和 $B_\alpha = 0,\ \alpha \neq \varepsilon_k.$ 给出。因此，$\|B_\alpha\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\xi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1,\ \alpha \in \mathcal{I}$。现在，根据定理*3.2*，方程 *(35)* 有唯一解 $U(t,x,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t,x) H_\alpha(\omega)$，其中

$$u_\alpha(t,x) = (S_t)_\alpha u^0_\alpha(x) + \int_0^t (S_{t-s})_\alpha \Big(\sum_k \xi_k(x) u_{\alpha-\varepsilon_k}(s,x) + f_\alpha(s,x)\Big) ds,\ \alpha \in \mathcal{I}.$$

例3.4。 考虑柯西问题

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(t,\omega) &= \mathbf{A}U(t,\omega) + \mathbf{B}\Diamond U(t,\omega) + F(t,\omega) \\ U(0,\omega) &= U^0(\omega), \end{aligned}$$

其中，$\mathbf{A}$ 是一个简单的逐坐标算子 $A_\alpha = A$, $\alpha \in \mathcal{I}$，生成一个 C_0−半群，$B_\alpha \neq 0$仅当 $\alpha = \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$, 满足$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|B_{\varepsilon_k}\|(2k)^{-\frac{p}{2}} < \infty$ 时成立，而 U^0和 F是确定性函数，即 $u^0_\alpha = 0$ 且对所有 $\alpha \in \mathcal{I} \setminus \{\mathbf{0}\}$均有 $f_\alpha = 0$ 。

根据定理*3.2*，该系统的解

$$u_{\mathbf{0}}(t) = T_t u^0_{\mathbf{0}} + \int_0^t T_{t-s} f_{\mathbf{0}}(s) ds,$$
$$u_\alpha(t) = \int_0^t T_{t-s}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} B_{\varepsilon_k} u_{\alpha-\varepsilon_k}(s)\Big) ds, \quad \alpha \in \mathcal{I} \setminus \mathbf{0},$$

与 *[12]* 中得到的形式相同。

我们对定理3.2作两种推广：一种是允许算子B_α 依赖时间变量 t （但 $B_{\mathbf{0}}$ 除外，它必须与 t无关）。例如，这包括由期望为零（因而与 t无关）的时空噪声驱动的随机偏微分方程。另一种是允许 $B_{\mathbf{0}}$ 无界，但满足某些性质，使得 $A_\alpha + B_{\mathbf{0}}$ 成为 C_0−半群的无穷小生成元。例如，若 $A_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$且 $B_{\mathbf{0}} = \frac{\partial}{\partial x}$，那么尽管 B_0 无界， $A_\alpha + B_{\mathbf{0}}$ 仍是压缩半群的生成元。按照 [4] ，我们将列出一些充分条件，以确保 $A_\alpha + B_{\mathbf{0}}$ 是一个 C_0−半群的生成元。

注3.5. 在定理*3.2*中，可以考虑算子 $B_\alpha(t)$ $\alpha \in \mathcal{I} \setminus \{\mathbf{0}\}$，它们依赖于 t，使得 $B_\alpha \in C^1([0,T], L(X))$ $\alpha \in \mathcal{I} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $B_{\mathbf{0}}(t) = B_{\mathbf{0}} \in L(X)$，对所有 $t \in [0,T]$，以及

$$\begin{aligned} K :&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{I},\\ \alpha>\mathbf{0}}} \|B_\alpha\|_{C^1([0,T],L(X))}(2\mathbb{N})^{-p\frac{\alpha}{2}} \\ &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{I},\\ \alpha>\mathbf{0}}} \Big(\sup_{t\in[0,T]} \|B_\alpha(t)\|_{L(X)} + \sup_{t\in[0,T]} \|\frac{d}{dt} B_\alpha(t)\|_{L(X)}\Big)(2\mathbb{N})^{-p\frac{\alpha}{2}} < \infty. \end{aligned} \tag{36}$$

将 *(11)* 替换为 *(36)*，并保留定理*3.2*的所有其他假设，可以再次得到相应柯西问题 *(3)* 的唯一解 U*in* $C^1([0,T], X) \otimes (S)_{-1,-p}$。

解为 $U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t) H_\alpha(\omega)$ $u_\alpha(t) \in C^1([0,T], X)$， $\alpha \in \mathcal{I}$，其中（见 *(18))*

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{0}}(t) &= (S_t)_{\mathbf{0}} u^0_{\mathbf{0}} + \int_0^t (S_{t-s})_{\mathbf{0}} f_{\mathbf{0}}(s) ds, \quad t \in [0,T], \\ u_\alpha(t) &= (S_t)_\alpha u^0_\alpha + \int_0^t (S_{t-s})_\alpha \Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} B_\beta(s) u_{\alpha-\beta}(s) + f_\alpha(s)\Big) ds, \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{37}$$

其导数为 $\frac{d}{dt}U(t,\omega)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\frac{d}{dt}u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$，其中（见（*26*））

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u_{\mathbf{0}}(t)&=(S_t)_{\mathbf{0}}(A_{\mathbf{0}}+B_{\mathbf{0}})u_{\mathbf{0}}^0+\int_0^t(S_{t-s})_{\mathbf{0}}\frac{d}{ds}f_{\mathbf{0}}(s)ds+(S_t)_{\mathbf{0}}f(0),\quad t\in[0,T],\\
\frac{d}{dt}u_\alpha(t)&=(S_t)_\alpha(A_\alpha+B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0\\
&\quad+\int_0^t(S_{t-s})_\alpha\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha}\Big(B_\beta(s)\frac{d}{ds}u_{\alpha-\beta}(s)+\frac{d}{ds}B_\beta(s)u_{\alpha-\beta}(s)\Big)+\frac{d}{ds}f_\alpha(s)\Big)ds\\
&\quad+(S_t)_\alpha\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha}B_\beta(0)u_{\alpha-\beta}(0)+f_\alpha(0)\Big),\quad t\in[0,T],\quad \alpha\in\mathcal{I}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

证明可按照定理*3.2*中的相同方法进行。现在令 $T_0\in(0,T]$足够小，使得 $C(T_0)<\frac{1}{6K^2}$, 因为现在式（*38*）中有六项，而式（*26*）中此前只有五项。

注3.6. 在定理*3.2*中，可以考虑算子 $B_{\mathbf{0}}$ 为无界算子，在 D 上稠密定义（所有 A_α共有的相同定义域），使得以下条件之一成立：

(i) A_α, $\alpha\in\mathcal{I}$生成压缩半群（即 $M=1$, $w=0$），且 $B_{\mathbf{0}}$ 是耗散的， $A_\alpha-$有界，并且 $a_\alpha^0<1$ （即存在 $a_\alpha,b_\alpha>0$ 使得 $\|B_{\mathbf{0}}x\|\le a_\alpha\|A_\alpha x\|+b_\alpha\|x\|$, $x\in D$，且 $a_\alpha^0=$下确界$\{a_\alpha>0\colon\exists b_\alpha>0,\forall x\in D,\|B_{\mathbf{0}}x\|\le a_\alpha\|A_\alpha x\|+b_\alpha\|x\|\}$），对所有 $\alpha\in\mathcal{I}$，

(ii) $B_{\mathbf{0}}$ 可闭、耗散且 $A_\alpha-$紧（即 $B\colon(D,\|\cdot\|_{A_\alpha})\to X$ 是紧的，其中 $\|\cdot\|_{A_\alpha}$ 表示图范数），对所有 $\alpha\in\mathcal{I}$，

(iii) A_α 生成解析半群（即 $w<0$）， $\alpha\in\mathcal{I}$，且 $B_{\mathbf{0}}$ 可闭，$A_\alpha-$紧。

那么，对于所有$\alpha\in\mathcal{I}$， $A_\alpha+B_{\mathbf{0}}$ 是一个 C_0-半群的无穷小生成元（记为$(S_t)_\alpha$）。如果与 A_α 对应的半群$(T_t)_\alpha$ 在 α中一致有界，那么$(S_t)_\alpha$也如此。保留定理*3.2*的所有其他假设，现在我们按照相同的证明思路，使用半群$(S_t)_\alpha$、 $\|(S_t)_\alpha\|\le\tilde{M}e^{\tilde{w}t}$，其中 $\tilde{M}\ge1$、$\tilde{w}\in\mathbb{R}$与 α无关。

最后我们注意到，在情形 *(i)* 和 *(ii)* 下， $A_\alpha+B_{\mathbf{0}}$ 将生成压缩半群；而在情形 *(iii)* 下，它们将生成解析半群。

4 定常方程

本节考虑如下形式的定常方程

$$
\mathbf{A}U+\mathbf{B}\diamondsuit U+F=0,
\tag{39}
$$

其中 $\mathbf{A}: X\otimes(S)_{-1}\to X\otimes(S)_{-1}$ 和 $\mathbf{B}\Diamond: X\otimes(S)_{-1}\to X\otimes(S)_{-1}$ 是如 (5) 和 (6) 中所示的逐坐标算子。我们假设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ 和 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ 是有界算子，且 A_α 具有如下形式

$$A_\alpha=\widetilde{A}_\alpha+C_\alpha,\quad \alpha\in\mathcal{I},$$

其中 $B_{\mathbf{0}}$，且 A_α、$\alpha\in\mathcal{I}$ 是紧算子；对于所有$\alpha\in\mathcal{I}$，C_α 均为自伴算子。记与正交特征向量族H_α对应的特征值为 r_α，即 $C_\alpha(H_\alpha)=r_\alpha H_\alpha$，$\alpha\in\mathcal{I}$。利用椭圆型偏微分方程和弗雷德霍姆择一定理的经典结果（见 [5]），我们证明了方程 (39) 的解存在且唯一。

定理 4.1。设 X 为巴拿赫空间。设 $\mathbf{A}: X\otimes(S)_{-1}\to X\otimes(S)_{-1}$ 和 $\mathbf{B}\Diamond: X\otimes(S)_{-1}\to X\otimes(S)_{-1}$ 为逐坐标算子，并满足以下假设：

1. $\mathbf{A}$ 具有如下形式：$\mathbf{A}=\widetilde{\mathbf{A}}+\widetilde{\mathbf{C}}+\widetilde{\mathbf{C}}$，其中 $\mathbf{A}(U)=\sum A_\alpha(u_\alpha)H_\alpha$ 和 $A_\alpha: X\to X$ 对于所有 $\alpha\in\mathcal{I}$均为紧算子，$\mathbf{C}(U)=\sum r_\alpha u_\alpha H_\alpha$、$r_\alpha\in\mathbb{R}$、$\alpha\in\mathcal{I}$，并且 $\mathbf{B}$ 具有$\alpha\in\mathcal{I}$形式 *(6)*，其中 $B_{\mathbf{0}}: X\to X$ 为紧算子。假设存在 $K>0$使得：

$$-\|\widetilde{A}_\alpha\|-\|B_{\mathbf{0}}\|-r_\alpha\geq 0,\quad \textit{for all}\quad \alpha\in\mathcal{I},\tag{40}$$

and

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{I}}\left(\frac{1}{-r_\alpha-\|\widetilde{A}_\alpha\|-\|B_{\mathbf{0}}\|}\right)<K.\tag{41}$$

2. $\mathbf{B}$ 具有形式 *(6)*，其中 $B_\beta: X\to X$、$\beta\in\mathcal{I}\setminus\{\mathbf{0}\}$ 是有界算子，并且存在 $p>0$ 使得

$$K\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{I}\\ \beta>\mathbf{0}}}\|B_\beta\|\,(2\mathbb{N})^{\frac{-p\beta}{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}}.\tag{42}$$

3. 对于每个 $\alpha\in\mathcal{I}$

$$\mathrm{Ker}\left(\widetilde{A}_\alpha+(1+r_\alpha)\mathrm{Id}+B_{\mathbf{0}}\right)=\{0\}.\tag{43}$$

于是，对于每个 $F\in X\otimes(S)_{-1,\,-p}$ 都存在方程 (39) 的唯一解 $U\in X\otimes(S)_{-1,\,-p}$。

证明。方程 (39) 等价于 $U-(\mathbf{A}(U)+\mathbf{C}U+U+\mathbf{B}\Diamond U)=F$并且

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\left(u_\gamma-\widetilde{A}_\gamma u_\gamma-(1+r_\gamma)\,u_\gamma-\sum_{\alpha+\beta=\gamma}B_\alpha(u_\beta)\right)H_\gamma=\sum_{\gamma\in\mathcal{I}}f_\gamma H_\gamma.$$

由于维纳-伊藤混沌展开的唯一性，这等价于

$$u_\gamma-\left(\widetilde{A}_\gamma+(1+r_\gamma)Id+B_{\mathbf{0}}\right)u_\gamma=f_\gamma+\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\gamma}B_\beta(u_{\gamma-\beta}),\quad \gamma\in\mathcal{I}.\tag{44}$$

由 (43) 可知，对于每个 $\gamma \in \mathcal{I}$，齐次方程

$$u_\gamma - \left(\widetilde{A}_\gamma + (1+r_\gamma)Id + B_{\mathbf{0}}\right) u_\gamma = 0$$

仅有平凡解 $u_\gamma = 0$。由于算子 $A_\gamma + (1+r_\gamma)Id + B_{\mathbf{0}}$ 是紧的，经典的弗雷德霍姆择一定理表明，对每个 $\gamma \in \mathcal{I}$，都存在唯一的 u_γ，使其满足（44），且其形式为

$$u_\gamma = (Id - ((r_\gamma+1)\,Id + \widetilde{A}_\gamma + B_{\mathbf{0}}))^{-1}\left(f_\gamma + \sum_{\beta>\mathbf{0}} B_\beta(u_{\gamma-\beta})\right), \qquad \gamma \in \mathcal{I},$$

因此

$$\|u_\gamma\|_X \le \frac{1}{-r_\gamma - \|\widetilde{A}_\gamma\| - \|B_{\mathbf{0}}\|} \cdot \left(\|f_\gamma\|_X + \sum_{\beta>\mathbf{0}} \|B_\beta\|\|u_{\gamma-\beta}\|_X\right), \quad \gamma \in \mathcal{I}.$$

我们将证明 $\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} u_\gamma \otimes H_\gamma$ 在 $X \otimes (S)_{-1}$ 中收敛。事实上，

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \|u_\gamma\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} &\le K^2 \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \left(\|f_\gamma\|_X + \sum_{\gamma=\alpha+\beta,\alpha>\mathbf{0}} \|B_\alpha\|\|u_\beta\|_X\right)^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} \\
&\le 2K^2 \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \|f_\gamma\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} + \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \Big(\sum_{\gamma=\alpha+\beta,\alpha>\mathbf{0}} \|B_\alpha\|\|u_\beta\|_X\Big)^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma}\right) \\
&\le 2K^2 \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \|f_\gamma\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} + \Big(\sum_{\alpha>\mathbf{0}} \|B_\alpha\|(2\mathbb{N})^{-\frac{p\alpha}{2}}\Big)^2 \sum_{\beta\in\mathcal{I}} \|u_\beta\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\beta}\right).
\end{aligned}$$

因此，

$$(1 - 2K^2(\sum_{\alpha>\mathbf{0}} \|B_\alpha\|(2\mathbb{N})^{-\frac{p\alpha}{2}})^2) \cdot \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \|u_\gamma\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} \le 2K^2 \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \|f_\gamma\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma}.$$

根据假设（42），我们有 $M = 1 - 2K^2(\sum_{\alpha>\mathbf{0}} \|B_\alpha\|(2\mathbb{N})^{-\frac{p\alpha}{2}})^2 > 0$。这意味着

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \|u_\gamma\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} \le \frac{2K^2}{M} \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \|f_\gamma\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} < \infty.$$

□

例4.2。 我们给出方程 (39) 的一些特殊情形。

1. 如果对所有 $\alpha \in \mathcal{I}$ 和 B_α, $\alpha \in \mathcal{I}$ 都是散度形式的二阶严格椭圆偏微分算子

$$B_\alpha = \sum_{i=1}^{n} D_i(\sum_{j=1}^{n} a_\alpha^{ij}(x)D_j + b_\alpha^i(x)) + \sum_{i=1}^{n} c_\alpha^i(x)D_i + d_\alpha(x) \tag{45}$$

具有本质有界系数时，方程（39）便化为椭圆方程

$$\mathbf{B}\Diamond U = F,$$

该方程已在 [18] and [19] 中求解。

~2. 设对所有 $\alpha \in \mathcal{I}$ 均有 $A_\alpha = 0$，并设 B_α、 $\alpha \in \mathcal{I}$ 是散度形式（45）中的二阶严格椭圆偏微分算子。令 C $= cP(\mathcal{R})$，其中 $c \in \mathbb{R}$， $\mathcal{R}$ 为 Ornstein-Uhlenbeck 算子， P 为具有实系数且次数为 m 的多项式，而 $P(\mathcal{R})$ 为微分算子 $P(\mathcal{R})$ $= p_m\mathcal{R}^m + p_{m-1}\mathcal{R}^{m-1} + ... + p_1\mathcal{R} + p_0 Id$。于是，相应的特征值为 $r_\alpha = cP(|\alpha|)$、 $\alpha \in \mathcal{I}$。因此，方程（39）转化为一个带扰动项的椭圆方程，该扰动项由 Ornstein-Uhlenbeck 算子的多项式驱动

$$\mathbf{B}\Diamond U + cP(\mathcal{R})U = F,$$

该方程已在 [11] 中求解。

参考文献

[1] Applebaum, D.: 希尔伯特空间中带跳跃的 Ornstein-Uhlenbeck 过程的无穷小生成元。*Potential Anal.* **26**，(2007)，79–100。[2] Bogachev, V. I.: 可微测度与 Malliavin 微积分。*American Math-ematical Society*，普罗维登斯，2010。[3] Catuogno, P., Olivera, C.: 关于随机广义函数。***Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*****14(2)**，(2011)，237–260。[4] Engel, K.J., Nagel, R.: 线性演化方程的单参数半群。*Springer-Verlag*，纽约，2000。[5] Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: 二阶椭圆偏微分方程。*Springer-Verlag*，柏林，1998。[6] Hida, T., Kuo, H.-H., Pothoff, J., Streit, L.: 白噪声：无穷维微积分。*Kluwer Academic Publishers Group*，多德雷赫特，1993。[7] Holden, H., Øksendal, B., Ubøe, J., Zhang, T.: 随机偏微分方程：建模与白噪声泛函方法。第二版。*Springer*，纽约，2010。

[8] Hu, Y.: 白噪声势下热方程的混沌展开。*PotentialAnal.* **16**，(2002)，45–66。[9] Kalpinelli, E., Frangos, N., Yannacopoulos, A.: 双曲型随机偏微分方程的维纳混沌方法。*Stoch. Anal. Appl.* **29**，(2011)，237–258。[10] Levajković, T., Pilipović, S., Seleši, D.: 高阶 Malliavin 算子基本方程。*Stochastics: An International Journal of Probability and Stochas-tic Processes*，已接受发表。[11] Levajković, T., Pilipović, S., Seleši, D.: Ornstein-Uhlenbeck 算子驱动的随机Dirichlet问题：混沌展开的弗雷德霍姆择一定理方法。*Stoch. Anal. Appl.* **29**，(2011)，317-331。[12] Lototsky, S., Rozovskii, B.: 纯空间噪声驱动的随机偏微分方程。*SIAM J. Math. Anal.***41(4)**，(2009)，1295–1322。[13] Lototsky, S., Rozovskii, B.: 双线性随机椭圆方程。*Quad. Mat.* **25**，(2010)，207–221。[14] Melnikova, I.V., Alshanskiy, M.A.: 无穷维随机问题的正则化解与广义解。*Sb. Math.* **202(11)**，(2011)，1565–1592。[15] Melnikova, I.V., Alshanskiy, M.A.: 抽象随机问题的广义解。*Oper. Theory Adv. Appl.* **231**，(2013)，341–352。[16] Pazy, A.: 线性算子半群及其在偏微分方程中的应用。*Springer-Verlag*，纽约，1983。[17] Pilipović, S., Seleši, D.: 广义随机过程、Wick 乘积及其在随机微分方程中的应用的展开定理。***Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*****10(1)**，(2007)，79–110。[18] Pilipović, S., Seleši, D.: 关于广义随机Dirichlet问题——第一部分：随机弱最大值原理。*Potential Anal.* **32**，(2010)，363-387。[19] Pilipović, S., Seleši, D.: 关于广义随机Dirichlet问题——第二部分：可解性、稳定性与Colombeau情形。*Potential Anal.* **33**，(2010)，263-289。[20] Proske, F.: Lévy白噪声驱动的随机输运方程。*Commun.Math. Sci.***2(4)**，(2004)，627–641。[21] Seleši, D.: 奇异随机偏微分方程的基本解。*Chaos Solitons Fractals* **44**，(2011)，526–537。

致谢

本文得到项目 建模与调和分析方法及含奇点偏微分方程（编号：174024）和项目 基于电力牵引车辆、以能耗标准优化的交通运行控制建模与研究方法（编号：TR36047）的资助；这两个项目均由塞尔维亚共和国科学部资助。此外，本文还得到沃伊伏ϖina科学省秘书处资助的项目（编号：114-451-3605/2013）的资助。