arXiv:2303.06229v1 [math.PR] 10 Mar 2023

具有 Wick 多项式非线性项的随机演化方程

Tijana Levajković*、Stevan Pilipović†、Dora Seleši‡、Milica Žigić§

摘要

我们在白噪声分析框架下研究具有 Wick 幂和 Wick 多项式型非线性的非线性抛物型随机偏微分方程。这些方程包括随机 Fujita 方程、随机 Fisher-KPP 方程和随机 FitzHugh-Nagumo 方程等。通过将 C_0-半群和演化系统理论应用于无限维空间中的混沌展开理论，我们证明了这一类随机偏微分方程的解的存在性和唯一性。特别地，我们还研究线性非自治情形，并给出若干应用实例，即源于生物学、医学和物理学的随机反应扩散方程。

1 引言

我们研究如下形式的随机非线性演化方程

$$\begin{aligned} u_t(t,\omega) &= \mathbf{A}\, u(t,\omega) + \sum_{k=0}^{n} a_k u^{\Diamond k}(t,\omega) + f(t,\omega), \quad t \in (0,T] \\ u(0,\omega) &= u^0(\omega), \quad \omega \in \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $u(t,\omega)$ 是取值于 $X-$ 的广义随机过程； X 是某个巴拿赫代数，而 A 对应于一个 C_0- 半群的稠密定义无穷小生成元。非线性部分用 Wick 幂 $u^{\Diamond n} = u^{\Diamond n-1}\Diamond u = u\Diamond \ldots \Diamond u$, $n \in \mathbb{N}$ 表示，其中$\Diamond$ 表示 Wick 乘积。由于我们允许随机项同时出现在初始条件 u_0 和驱动力 f 中，因此会涉及 Wick 乘积。这会导致奇异解，使得普通乘法不再适用，而需要对乘法进行重整化；这通过在方程中引入 Wick 乘积来实现

*塞尔维亚贝尔格莱德大学，t.levajkovic@sf.bg.ac.rs

†塞尔维亚诺维萨德大学理学院，stevan.pilipovic@dmi.uns.ac.rs

‡塞尔维亚诺维萨德大学理学院，dora.selesi@dmi.uns.ac.rs§塞尔维亚诺维萨德大学理学院，milica.zigic@dmi.uns.ac.rs

。众所周知，Wick 乘积表示普通乘积 [16] 的最高阶随机逼近。

在我们之前的论文 [14] 中，我们研究了含有 Wick乘性噪声的线性随机抛物型方程，其中包括 $n = 1$.的情形。本文将 [14] 推广到非线性方程，其中非线性项由 Wick 多项式函数生成，从而得到 Fujita 型方程的随机版本 $u_t = \mathrm{A}u + u^{\Diamond n} + f$、FitzHugh-Nagumo 方程 $u_t = \mathrm{A}u + u^{\Diamond 2} - u^{\Diamond 3} + f$、Fisher-KPP方程$u_t = \mathrm{A}u + u - u^{\Diamond 2} + f$ 以及 Chaffee-Infante方程 $u_t = \mathrm{A}u + u^{\Diamond 3} - u + f$。这些方程在生态学、医学、工程学和物理学中有着广泛的应用。例如，FitzHugh-Nagumo 方程用于神经生理学中研究神经元的电活动，方法是对电脉冲沿神经轴突传导的过程进行建模。Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov方程可用于模拟流行病在人群中的传播，或有利基因在人群中的分布。医学领域的其他应用包括对引入毒素后细胞反应的建模，以及表皮伤口愈合过程的建模。在等离子体物理学中，该方程曾用于研究核反应堆中的中子通量；而在生态学中，它用于模拟火灾中的火焰传播。因此，研究这些方程的随机版本具有极其重要的意义：在这类版本中，某些输入因素受到外部噪声因素的扰动，因而变得随机。例如， [1] 和 [3], 研究了 FitzHugh-Nagumo 方程的一个随机版本，而 [10] 和 [19]研究了随机 Fisher-KPP 方程。

我们结合 Wiener-Itô 混沌展开方法与算子半群理论，以证明方程 (1) 解的存在性和唯一性。利用混沌展开方法，可以将任意随机偏微分方程转化为一个下三角无穷偏微分方程组（也称为传播子系统），并递归求解该系统。求解此系统即可得到方程 (1) 的解的系数。为求解传播子系统，我们利用了 Wick 乘积与卡特兰数之间的内在联系；[11] 中的作者在研究随机Burgers方程时发现了这种联系。我们在这些思路的基础上求解一类一般的随机非线性方程 (1)。

本文的安排如下：在引言部分，我们回顾 C_0–半群、演化系统和白噪声理论的基本概念，包括广义随机过程的混沌展开。第 2 节是本文的主要部分，我们证明在 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 且 $a_n = 1$的情况下，方程 (1) 的解存在且唯一。为简化技术处理、展示求解方法，并详细说明所涉及公式的所有组成部分，我们采用了这一规范化处理。第 3 节讨论方程 (1) 的一般情形，并给出一些具体示例。

1.1 演化系统

我们固定记号，并回顾一些关于演化系统的已知事实（见 [20, 第5]章）。设 X 为巴拿赫空间。设 $\{A(t)\}_{t\in[s,T]}$ 为 X中的一族线性算子

满足 $A(t)$: $D(A(t)) \subset X \to X$, $t \in [s,T]$ 并设 f 为一个取值于 X–的函数 f : $[s,T] \to X$. 考虑初值问题

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= A(t)u(t) + f(t), \quad 0 \le s < t \le T, \\ u(s) &= x. \end{aligned} \tag{2}$$

若对于所有 $t \in (s,T]$ 和 u, $u \in C([s,T],X) \cap C^1((s,T],X)$ $u(t) \in D(A(t))$, 且满足 (2), 则 u 是 (2) 的经典解。

若满足以下两个条件, 则称 X 上的有界线性算子二参数族 $S(t,s)$ $0 \le s \le t \le T$ 为演化系统:

1. $S(s,s) = I$ and $S(t,r)S(r,s) = S(t,s), \quad 0 \le s \le r \le t \le T$

2. $(t,s) \mapsto S(t,s)$ 对所有 $0 \le s \le t \le T$. 都强连续

显然, 若 $S(t,s)$ 是与齐次演化问题 (2) 相关联的演化系统, 即若 $f \equiv 0$, 则 (2) 的经典解由 $u(t) = S(t,s)x$, $t \in [s,T]$. 给出

称 $\{A(t)\}_{t\in[s,T]}$ 为 X 上 C_0- 半群的无穷小生成元族是稳定的, 若存在常数 $m \ge 1$ 和 $w \in \mathbb{R}$ （稳定性常数）, 使得 $(w,\infty) \subseteq \rho(A(t))$ $t \in [s,T]$, 并且

$$\Big\| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda : A(t_j)) \Big\| \le \frac{m}{(\lambda - w)^k}, \quad \lambda > w,$$

对于每个有限序列 $0 \le s \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le T$, $k = 1, 2, \ldots$.

设 $\{A(t)\}_{t\in[s,T]}$ 是一个无穷小生成元稳定族, 其稳定性常数为 m 和 w。设 $B(t)$ $t \in [s,T]$ 是 X 上的一族有界线性算子。若 $\|B(t)\| \le M$, $t \in [s,T]$, 则 $\{A(t) + B(t)\}_{t\in[s,T]}$ 是一个无穷小生成元稳定族, 其稳定性常数为 m 和 $w + Mm$.

设 $\{A(t)\}_{t\in[s,T]}$ 是 X 上 C_0–半群的一个无穷小生成元稳定族, 且定义域 $D(A(t)) = D$ 与 t 无关, 并且对每个 $x \in D$, $A(t)x$ 关于 X. 连续可微。若 $f \in C^1([s,T],X)$, 则对每个 $x \in D$, 演化问题 (2) 都有唯一的经典解 u, 其表达式为

$$u(t) = S(t,s)x + \int_s^t S(t,r)f(r)dr, \quad 0 \le s \le t \le T.$$

由 [20, 定理 5.3 的证明可得, 见第 147] 页

$$\frac{d}{dt}u(t) = A(t)S(t,s)x + A(t)\int_s^t S(t,r)f(r)dr + f(t), \quad s < t \le T.$$

由于 $t \mapsto A(t)$ 在 $B(D,X)$ 中连续, 且 $(t,s) \mapsto S(t,s)$ 对所有 $0 \le s \le t \le T$ 都强连续, 因此方程 (2) 的解 u 还具有正则性 $u \in C^1([s,T],X)$ 和 $\frac{d}{dt}u(t)|_{t=s} = A(s)x + f(s)$。回顾一下, 演化系统 $S(t,s)$ 满足:

1. $\|S(t,s)\| \le me^{w(t-s)}$, $0 \le s \le t \le T$; 2. $\frac{\partial^+}{\partial t}S(t,s)x\Big|_{t=s} = A(s)x$, $x \in D$, $0 \le s \le T$，这意味着 $\frac{\partial}{\partial t}S(t,s)x = A(t)S(t,s)x$，因为 $t \mapsto A(t)$ 在 $B(D,X)$ 中连续；3. $\frac{\partial}{\partial s}S(t,s)x = -S(t,s)A(s)x$, $x \in D$, $0 \le s \le t \le T$；4. $S(t,s)D \subseteq D$；5. $S(t,s)x$ 对所有 $0 \le s \le t \le T$ 都在 D 中连续，且 $x \in D$.

注 1.1. 考虑依赖于 t 的无穷小生成元时，我们遵循 Yosida 的标准方法（参见 [24], [12]）。关于基于等价算子扩张问题的方法，请参见 [18]（另见 [18] 中的参考文献）。混沌展开方法是本文的核心，它要求传播子系统（即逐坐标的确定性柯西问题）具有存在性结果。为此，我们展示了 [20] 中给出的双曲型柯西问题的应用。

1.2 广义随机过程

记 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为高斯白噪声概率空间 $(S'(\mathbb{R}), \mathcal{B}, \mu)$，其中 $\Omega = S'(\mathbb{R})$ 表示温和分布空间，$\mathcal{B}$ 表示由 $S'(\mathbb{R})$ 上的弱拓扑生成的博雷尔σ代数，而 μ 表示与特征函数相对应的高斯白噪声测度

$$\int_{S'(\mathbb{R})} e^{i\langle\omega,\phi\rangle} d\mu(\omega) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right], \qquad \phi \in S(\mathbb{R}),$$

该特征函数由博赫纳-明洛斯定理给出。

我们回顾与 $L^2(\Omega, \mu)$ 相关的概念（见 [9]）。多重指标集合 $\mathcal{I}$ 是 $(\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}})_c$，即由非负整数序列组成的集合，其中只有有限个分量非零。特别地，我们用 $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \ldots)$ 表示所有项均为零的零多重指标；多重指标的长度为 $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$，其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \mathcal{I}$ 且 $\alpha! = \prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i!$. 我们约定，若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\alpha_n - \beta_n \ge 0$，即若 $\alpha - \beta \ge \mathbf{0}$.，则 $\alpha - \beta$ 有定义

维纳-伊藤定理（有时也称为卡梅隆-马丁定理）指出，可以定义 $L^2(\Omega, \mu)$ 的一个正交基 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$，其中 H_α 由厄米特正交多项式 h_n 和厄米特函数 ξ_n 构造而成，

$$H_\alpha(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} h_{\alpha_n}(\langle\omega, \xi_n\rangle), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots) \in \mathcal{I}, \quad \omega \in \Omega.$$

那么，每个 $F \in L^2(\Omega, \mu)$ 都可以通过所谓的混沌展开来表示

$$F(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha(\omega), \quad \omega \in S'(\mathbb{R}), \quad \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |f_\alpha|^2 \alpha! < \infty, \quad f_\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathcal{I}.$$

用 $\varepsilon_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ $k \in \mathbb{N}$ 表示第 k 个位置上取值为 1 的多重指标。用 $\mathcal{H}_1$ 表示由多项式 $H_{\varepsilon_k}(\cdot)$、 $k \in \mathbb{N}$ 张成的 $L^2(\Omega\ \mu)$ 的子空间。子空间 $\mathcal{H}_1$ 包含高斯随机过程，例如布朗运动可表示为混沌展开 $B(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \xi_k(s)ds\ H_{\varepsilon_k}(\omega)$。

将 $\mathcal{H}_m$ 记为 m 阶混沌空间，即由正交多项式 $H_\alpha(\cdot)$（其中 $|\alpha| = m,\ m \in \mathbb{N}_0$）张成的线性子空间在 $L^2(\Omega\ \mu)$ 中的闭包。Wiener-Itô 混沌展开表明， $L^2(\Omega\ \mu)$ $= \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m$，其中 $\mathcal{H}_0$ 是 $L^2(\Omega\ \mu)$ 中的常数集。

将 $L^2(\Omega\ \mu)$ 的拓扑改为较弱的拓扑后，T. Hida [8] 定义了广义随机变量空间，其中白噪声是布朗运动的弱导数。关于白噪声分析，参见 [8], [9]。

令 $(2\mathbb{N})^\alpha = \prod_{n=1}^{\infty}(2n)^{\alpha_n}$， $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in \mathcal{I}.$。我们将经常用到这样一个事实：级数 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(2\mathbb{N})^{-p\alpha}$ 对于 $p > 1$ 收敛。使用与 [9, 第 2] 章中相同的技巧，可以定义检验函数的巴拿赫空间 $(S)_{\rho,p}$ 及其拓扑对偶——随机分布空间 $(S)_{-\rho,-p}$，其中 $\rho \geq 0$ 和 $p \geq 0.$

定义 1.1。随机检验函数空间定义为

$$(S)_{\rho,p} = \{F = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha \in L^2(\Omega,\mu) :\ \|F\|^2_{(S)_{\rho,p}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (\alpha!)^{1+\rho}|f_\alpha|^2(2\mathbb{N})^{p\alpha} < \infty\},$$

对所有 $\rho \geq 0,\ \ p \geq 0.$

其 拓扑对偶，即随机分布空间，由形式和给出：

$$(S)_{-\rho,-p} = \{F = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha :\ \|F\|^2_{(S)_{-\rho,-p}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (\alpha!)^{1-\rho}|f_\alpha|^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty\},$$

对所有 $\rho \geq 0,\ \ p \geq 0.$

检验随机变量空间为 $(S)_\rho = \bigcap_{p\geq 0}(S)_{\rho,\ p}$， $\rho \geq 0$ 并赋予射影拓扑。

其对偶，即广义随机变量空间，是$(S)_{-\rho} = \bigcup_{p\geq 0}(S)_{-\rho,\ -p}$， $\rho \geq 0$ 并赋予归纳拓扑。

$F = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} b_\alpha H_\alpha \in (S)_{-\rho}$ 到$f = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} c_\alpha H_\alpha \in (S)_\rho$ 的作用定义为$\langle F,\ f\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (b_\alpha, c_\alpha)\alpha!$ 其中（b_α， c_α）表示 $\mathbb{R}.$中的内积。因此，它们构成一个 Gelfand 三元组。

$$(S)_\rho \subseteq L^2(\Omega,\mu) \subseteq (S)_{-\rho}, \quad \rho \geq 0.$$

显然，空间（S）$_{\rho,\ p}$ 和（S）$_{-\rho,\ -p}$ 是可分希尔伯特空间。此外，（S）$_\rho$和（S）$_{-\rho}$ 是核空间。

对于 $\rho = 0$，我们得到 Hida随机分布空间（S）$_{-0}$；对于 $\rho = 1$，则得到广义随机变量的 Kondratiev 空间（S）$_{-1}.$。有

$$(S)_1 \hookrightarrow (S)_0 \hookrightarrow L^2(\Omega,\mu) \hookrightarrow (S)_{-0} \hookrightarrow (S)_{-1},$$

其中 $\hookrightarrow$ 表示稠密嵌入。通常，为了在求解随机偏微分方程时建立 S–变换（见 [8], [9]），会将 ρ 的取值限制为 $\rho \in [0,1]$，但在我们的情形下，也可以考虑取值 $\rho > 1$。

布朗运动 $B(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \xi_k(s)ds$ $H_{\varepsilon_k}(\omega)$ 的时间导数以广义意义存在，并属于 Kondratiev 空间 $(S)_{-1,-p}$for $p \geq \frac{5}{12}$。我们将其称为 白噪声，其形式展开为 $W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)H_{\varepsilon_k}(\omega)$。

我们在 [21] 中将随机过程的定义扩展到具有混沌展开形式 $U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$ 的过程，其中系数 u_α 是某个函数巴拿赫空间 X 的元素。我们称 U 为 X取值于的广义随机过程，即 $U(t,\omega) \in X \otimes (S)_{-\rho}$，若存在 $p \geq 0$ 使得 $\|U\|^2_{X\otimes(S)_{-\rho,-p}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (\alpha!)^{1-\rho}\|u_\alpha\|^2_X (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty$。

例如，设 $X = C^k[0,T], k \in \mathbb{N}$。我们已在 [22] 证明，随机过程的微分可在混沌展开中逐分量进行，即由于 $(S)_{-\rho}$ 是核空间，因此有 $C^k([0,T], (S)_{-\rho}) = C^k[0,T] \hat{\otimes} (S)_{-\rho}$，其中 $\hat{\otimes}$ 表示张量积的完备化；对于 ε–完备化和 π–完备化，该完备化相同。下文中，我们将使用记号 $\otimes$ 代替 $\hat{\otimes}$。因此， $C^k[0,T]\otimes(S)_{-\rho,-p}$和 $C^k[0,T]\otimes(S)_{\rho,p}$表示相应完备化的子空间。当 $C^k[0,T]$ 替换为另一个巴拿赫空间时，我们仍使用相同的记号。这意味着，随机过程 $U(t,\omega)$ 是 k次连续可微的，当且仅当它的所有系数 $u_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{I}$都属于 $C^k[0,T]$。

对于巴拿赫空间值随机过程，即属于 $C^k([0,T], X)\otimes(S)_{-\rho}$ 的元素，其中 X 是任意巴拿赫空间，结论同样成立。具体而言，

$$C^k([0,T], X \otimes (S)_{-\rho}) = C^k([0,T], X) \otimes (S)_{-\rho} = \bigcup_{p\geq 0} C^k([0,T], X) \otimes (S)_{-\rho,-p}.$$

此外，如果 X 是巴拿赫代数，那么随机过程 $F = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha$ 和 $G = \sum_{\beta\in\mathcal{I}} g_\beta H_\beta \in X \otimes (S)_{-\rho}$ 的 *Wick* 乘积, $_{-p}$ 为

$$F\Diamond G = \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} f_\alpha g_\beta H_\gamma = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{\beta\leq\alpha} f_\beta g_{\alpha-\beta} H_\alpha,$$

且对所有 $k > 1$， $F\Diamond G \in X \otimes (S)_{-\rho,\ -(p+k)}$（见 [9]）。第 n 个 Wick 幂定义为 $F^{\Diamond n} = F^{\Diamond(n-1)} \Diamond F$， $F^{\Diamond 0} = 1$。注意，对于 $n \in \mathbb{N}_0$， $H_{n\varepsilon_k} = H^{\Diamond n}_{\varepsilon_k}$ $k \in \mathbb{N}$。本文中我们将假设 X 是巴拿赫代数。

2 Fujita 型随机非线性演化方程

首先，我们考虑方程 (1)，其中 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 和 $a_n = 1$，即方程:

$$\begin{aligned} u_t(t,\omega) &= \mathbf{A}\, u(t,\omega) + u^{\Diamond n}(t,\omega) + f(t,\omega), \quad t \in (0,T] \\ u(0,\omega) &= u^0(\omega), \quad \omega \in \Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

设 $\mathbf{A}: \mathbb{D} \subset X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ 是一个逐坐标算子，它对应于一族确定性算子 $A_\alpha: D_\alpha \subset X \to X, \alpha \in \mathcal{I}$

$$\mathbf{A}u(t,\omega) = \mathbf{A}\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)\, H_\alpha(\omega)\right) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha u_\alpha(t)\ H_\alpha(\omega), \quad u \in \mathbb{D},$$

（见 [14, 第 2] 节）。我们将寻找方程（3）的一个解，它是一个取值于 X 的随机过程$u(t) \in X \otimes (S)_{-1}$, $t \in [0,T]$ 其表示形式为

$$u(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)\ H_\alpha(\omega), \quad t \in [0,T], \quad \omega \in \Omega. \tag{4}$$

Wick 平方的混沌展开表示为

$$\begin{aligned} u^{\diamondsuit 2}(t,\omega) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sum_{\gamma\le\alpha} u_\gamma(t)\ u_{\alpha-\gamma}(t)\Big) H_\alpha(\omega) \\ &= u_{\mathbf{0}}^2(t)\, H_{\mathbf{0}}(\omega) + \sum_{|\alpha|>0} \Big(2u_{\mathbf{0}}(t)\, u_\alpha(t) + \sum_{0<\gamma<\alpha} u_\gamma(t)\ u_{\alpha-\gamma}(t)\Big) H_\alpha(\omega), \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$。令 $u_\gamma^{\diamondsuit m}(t)$, $\gamma \in \mathcal{I}$, $m \in \mathbb{N}$ 表示 m 阶 Wick 幂的混沌展开系数，即 $u^{\diamondsuit m}(t,\omega) = \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} u_\gamma^{\diamondsuit m}(t) H_\gamma(\omega)$，其中 $m \in \mathbb{N}$。那么，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，可以证明 n 阶 Wick 幂为

$$\begin{aligned} &u^{\diamondsuit n}(t,\omega) = u^{\diamondsuit n-1}(t,\omega)\diamondsuit u(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sum_{\gamma\le\alpha} u_\gamma^{\diamondsuit n-1}(t)\ u_{\alpha-\gamma}(t)\Big) H_\alpha(\omega) \\ &= u_{\mathbf{0}}^n(t)\, H_{\mathbf{0}}(\omega) + \sum_{|\alpha|>0} \Bigg(\binom{n}{1} u_{\mathbf{0}}^{n-1}(t)\, u_\alpha(t) + \binom{n}{2} u_{\mathbf{0}}^{n-2} \sum_{0<\gamma_1<\alpha} u_{\alpha-\gamma_1}(t)\ u_{\gamma_1}(t) \\ &+ \binom{n}{3} u_{\mathbf{0}}^{n-3} \sum_{0<\gamma_1<\alpha} \sum_{0<\gamma_2<\gamma_1} u_{\alpha-\gamma_1}(t)\ u_{\gamma_1-\gamma_2}(t) u_{\gamma_2}(t) + \cdots + \\ &+ \binom{n}{n} \sum_{0<\gamma_1<\alpha} \sum_{0<\gamma_2<\gamma_1} \cdots \sum_{0<\gamma_{n-1}<\gamma_{n-2}} u_{\alpha-\gamma_1}(t)\ u_{\gamma_1-\gamma_2}(t) \ldots u_{\gamma_{n-2}-\gamma_{n-1}}(t) u_{\gamma_{n-1}}(t) \Bigg) H_\alpha(\omega) \\ &= u_{\mathbf{0}}^n(t)\, H_{\mathbf{0}}(\omega) + \sum_{|\alpha|>0} \Big(n\, u_{\mathbf{0}}^{n-1}(t)\, u_\alpha(t) + r_{\alpha,n}(t) \Big) H_\alpha(\omega), \end{aligned}$$

其中 $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$。函数 $r_{\alpha,n}(t)$ $t \in [0,T]$, $\alpha \in \mathcal{I}$, $n > 1$ 仅包含坐标函数 u_β, $\beta < \alpha$. 此外，我们回顾一下，随机过程 $u \in X \otimes (S)_{-1,-p}$ 的 Wick 幂 $u^{\diamondsuit n}$ 是 $X \otimes (S)_{-1,-q}$ 的一个元素，其中 $q > p + n - 1$，参见[9]。

我们将式 (3) 中出现的所有过程改写为相应的 Wiener-Itô 混沌展开形式，得到

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \frac{d}{dt}u_\alpha(t)\ H_\alpha(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha u_\alpha(t)\ H_\alpha(\omega) + \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sum_{\gamma\le\alpha} u_\gamma^{\diamond n-1}(t)\ u_{\alpha-\gamma}(t)\Big) H_\alpha(\omega) + \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha(t)\ H_\alpha(\omega)$$

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(0)\ H_\alpha(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha^0\ H_\alpha(\omega).$$

由于基 H_α 的正交性，这可化为无穷多个确定性柯西问题组成的系统:

1° 当 $\alpha = \mathbf{0}$

$$\frac{d}{dt}u_{\mathbf{0}}(t) = A_{\mathbf{0}}u_{\mathbf{0}}(t) + u_{\mathbf{0}}^n(t) + f_{\mathbf{0}}(t), \quad u_{\mathbf{0}}(0) = u_{\mathbf{0}}^0, \qquad \text{and} \tag{6}$$

2° 当 $\alpha > \mathbf{0}$

$$\frac{d}{dt}u_\alpha(t) = \big(A_\alpha + n\,u_{\mathbf{0}}^{n-1}(t)\,Id\big)\,u_\alpha(t) + r_{\alpha,n}(t) + f_\alpha(t), \quad u_\alpha(0) = u_\alpha^0. \tag{7}$$

其中 $t\in(0,T]$ 且 $\omega\in\Omega$。

Let

$$B_{\alpha,n}(t) = A_\alpha + n\,u_{\mathbf{0}}^{n-1}(t)\,Id \qquad \text{and} \qquad g_{\alpha,n}(t) = r_{\alpha,n}(t) + f_\alpha(t), \quad t\in[0,T]$$

对所有 $\alpha > \mathbf{0}$ 均成立。于是，系统 (7) 可写为

$$\frac{d}{dt}u_\alpha(t) = B_{\alpha,n}(t)\,u_\alpha(t) + g_{\alpha,n}(t), \quad t\in(0,T]; \qquad u_\alpha(0) = u_\alpha^0. \tag{8}$$

注意，(8) 中的非齐次项 $g_{\alpha,n}$ 不包含函数 u_β、 $\beta<\alpha$ （当 $|\alpha|=1$ 时）；而当 $|\alpha|>1$ 时，它还涉及 u_β、 $\beta<\alpha$。因此，我们区分这两种情况。

(a) 令 $|\alpha|=1$，即 $\alpha=\varepsilon_k$, $k\in\mathbb{N}$. 于是 $g_{\varepsilon_k,n}=f_{\varepsilon_k}$, $k\in\mathbb{N}$ 因此 (8) 转化为

$$\frac{d}{dt}u_{\varepsilon_k}(t) = B_{\varepsilon_k,n}(t)\,u_{\varepsilon_k}(t) + f_{\varepsilon_k}(t), \quad t\in(0,T]; \qquad u_{\varepsilon_k}(0) = u_{\varepsilon_k}^0. \tag{9}$$

(b) 令 $|\alpha|>1$. 那么

$$\frac{d}{dt}u_\alpha(t) = B_{\alpha,n}(t)\,u_\alpha(t) + g_{\alpha,n}(t), \quad t\in(0,T]; \qquad u_\alpha(0) = u_\alpha^0.$$

方程 (3) 的每个解 u 都可以表示为形式 (4)，因此，对于 $\alpha > \mathbf{0}$，其系数 $u_{\mathbf{0}}$和 u_α 必须分别满足 (6) 和 (8)。反过来，如果对于 $\alpha > \mathbf{0}$，系数 $u_{\mathbf{0}}$和 u_α 分别满足 (6) 和 (8)，并且由这些系数组成的 (4) 中的级数存在于 $X \otimes (S)_{-1}$中，那么它就定义了方程 (3) 的一个解。

定义 *2.1.* 若一个取值于 $X-$ 的广义随机过程 $u(t) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t) H_\alpha \in X \otimes (S)_{-1}$，$t \in [0,T]$ 是方程 *(3)* 的逐坐标经典解，当且仅当 $u_{\mathbf{0}}$ 是方程 *(6)* 的经典解，并且对每个 $\alpha \in \mathcal{I} \setminus \{\mathbf{0}\}$，系数 u_α 都是方程 *(8)* 的经典解。若逐坐标解 $u(t) \in X \otimes (S)_{-1}$，$t \in [0,T]$ 满足 $u \in C([0,T], X) \otimes (S)_{-1}.$，则它是方程 *(3)* 的几乎经典解。若 $u \in C([0,T], X) \otimes (S)_{-1} \cap C^1((0,T], X) \otimes (S)_{-1}$，则几乎经典解就是经典解。

我们假设以下条件成立：

(A1) 算子 A_α、 $\alpha \in \mathcal{I}$ 是 C_0-半群 $\{T_\alpha(s)\}_{s\geq 0}$ 的无穷小生成元，它们具有一个公共定义域 $D_\alpha = D$、 $\alpha \in \mathcal{I}$，且在 $X.$ 中稠密。我们假设存在常数 $m \geq 1$ 和 $w \in \mathbb{R}$，使得

$$\|T_\alpha(s)\| \leq m e^{ws}, \ s \geq 0 \quad \text{for all} \quad \alpha \in \mathcal{I}.$$

A 的作用由下式给出

$$\mathbf{A}(u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha(u_\alpha) H_\alpha,$$

对于形式为 (4) 的 $u \in \mathbb{D} \subseteq D \otimes (S)_{-1}$，其中

$$\mathbb{D} = \Big\{ u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha \ H_\alpha \in D \otimes (S)_{-1} : \ \exists p_0 \geq 0, \ \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|A_\alpha(u_\alpha)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p_0\alpha} < \infty \Big\}.$$

(A2) 初值 $u^0 = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha^0 H_\alpha \in \mathbb{D}$，即对每个 $\alpha \in \mathcal{I}$ 都有 $u_\alpha^0 \in D$，且存在 $p \geq 0$ 使得

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha^0\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty,$$

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|A_\alpha(u_\alpha^0)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty.$$

(A3) 非齐次项 $f(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha(t) H_\alpha(\omega)$ $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$ 属于$C^1([0,T], X) \otimes (S)_{-1}$; 因此 $t \mapsto f_\alpha(t) \in C^1([0,T], X)$ $\alpha \in \mathcal{I}$，并且存在 $p \geq 0$ 使得

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|^2_{C^1([0,T],X)} (2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sup_{t\in[0,T]} \|f_\alpha(t)\|_X + \sup_{t\in[0,T]} \|f'_\alpha(t)\|_X \Big)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty.$$

(A4-n) 柯西问题

$$\frac{d}{dt}u_{\mathbf{0}}(t) = A_{\mathbf{0}}u_{\mathbf{0}}(t) + u_{\mathbf{0}}^{n}(t) + f_{\mathbf{0}}(t), \quad t \in (0,T]; \quad u_{\mathbf{0}}(0) = u_{\mathbf{0}}^{0},$$

存在一个经典解 $u_{\mathbf{0}} \in C^1([0,T], X)$。

注 2.1. 特别地，若 $A_{\mathbf{0}} = \Delta$ 是拉普拉斯算子且 $f_{\mathbf{0}} \equiv 0$，则 (6) 属于藤田方程这一类

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad u(0) = u_0, \tag{10}$$

由 Fujita、Chen 和 Watanabe 研究 [6, 7]。作者证明，对于非负初始条件 $u^0 \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$，方程 (10) 在某个 $[0,T_1)$ 上存在唯一的经典解。此外，若 $p > 1 + \frac{2}{N}$，则存在一个正的有界解。藤田方程 (10) 本身具有研究价值，同时也是更一般的超线性方程的缩放极限，这些方程的非线性项呈现多项式增长率。该方程最初用于描述经过离心和沉降处理的溶液中的分子浓度。

注 2.2. 一般而言，形如 (6) 的方程，即 α =0 的确定性方程，可以通过不动点定理 [25] 求解。因此，为了检验条件 (A4-n) 是否成立，必须运用不动点方法或其他成熟的确定性偏微分方程求解方法。方程 (6) 的解通常会在有限时间内爆破。尤其是，描述 Sobole夫超临界区域中的爆破是一项挑战，已有多篇论文对此进行了研究（例如，[7], [15] 针对藤田方程的研究）。我们强调，方程 (3) 以及由此得到的方程 (6) 定义在一个有限时间区间上，并假定其在整个区间内都有解（从一开始我们就将讨论范围限制在不会发生爆破的区间内）。

现在我们聚焦于求解 $\alpha > 0$ 的方程 (8)。

引理 2.3。 设假设 *(A1)-(A4-n)* 均成立。那么对每个 $\alpha > 0$ ，演化系统 (8) 都有唯一的经典解 $u_\alpha \in C^1([0,T],\ X)$。

证明。 首先，对于每个 $\alpha > 0$，我们考虑算子族 $B_{\alpha,\ n}(t) = A_\alpha + n\, u_{\mathbf{0}}^{n-1}(t)Id,\ t \in [0,T]$. 根据假设 (A1)，常值算子族 $\{A_\alpha(t)\}_{t\in[0,T]} = \{A_\alpha\}_{t\in[0,T]}$ 是 C_0–半群 $\{T_\alpha(s)\}_{s\geq 0}$ 上的无穷小生成元稳定族，该半群作用于X，满足 $\|T_\alpha(s)\| \leq me^{ws}$，其稳定性常数为 $m \geq 1$ 和 $w \in \mathbb{R}.$。令

$$M_n = \sup_{t\in[0,T]} \|u_0(t)\|_X. \tag{11}$$

扰动 $n\, u_{\mathbf{0}}^{n-1}(t)Id\colon\ X \to X,\ t \in [0,T]$ 是一族一致有界线性算子，满足

$$\|n\, u_{\mathbf{0}}^{n-1}(t)x\|_X = \|n\, u_{\mathbf{0}}^{n-1}(t)\|_X \|x\|_X \leq \sup_{t\in[0,T]} n\, \|u_{\mathbf{0}}(t)\|_X^{n-1}\|x\|_X \leq nM_n^{n-1}\|x\|_X,$$

对所有 $x \in X$, $t \in [0,T]$，即 $\|n\,u_0^{n-1}(t)Id\| \le nM_n^{n-1}$, $t \in [0,T]$. 因此，对每个 $\alpha > 0$，族 $\{A_\alpha + n\,u_0^{n-1}(t)Id\}_{t\in[0,T]}$ 是无穷小生成元稳定族，其稳定性常数为 m 和 $w + nM_n^{n-1}m$.。根据假设 (A4-n)，函数 $u_0 \in C^1([0,T],X)$，因此我们得到 $(A_\alpha + n\,u_0^{n-1}(t)Id)x$, $t \in [0,T]$ 对每个 $x \in D$ 以及每个 $\alpha > 0$. 均连续可微。此外，算子 $n\,u_0^{n-1}(t)Id$ 的定义域是整个空间 X，这意味着所有算子 $B_{\alpha,n}(t)$ $t \in [0,T]$ 都有一个公共定义域 $D(B_{\alpha,n}(t)) = D(A_\alpha) = D$，且不依赖于 t.。请注意，假设 (A1) 还为族 $\{B_{\alpha,n}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 的所有 $\alpha > 0$. 提供了相同的定义域 D

最后，可以将唯一的演化系统$S_{\alpha,\,n}(t,s)$，其中 $0 \le s \le t \le T$ 对所有 $\alpha > 0$，与系统 (8) 关联，使得

$$\|S_{\alpha,n}(t,s)\| \le me^{w_n(t-s)} \le me^{w_n(T-s)}, \quad 0 \le s \le t \le T, \quad \alpha > 0, \tag{12}$$

其中 $w_n = w + nM_n^{n-1}m$ 参见 [20, 定理 4.8，第 145] 页。不失一般性，我们可以假设 $w > 0$，因此将有 $w_n > 0$。

现在可以对多重指标 α的长度进行归纳，求解柯西问题 (8) 的无限系统。令 $|\alpha| = 1$. 由于 $f_{\varepsilon_k} \in C^1([0,T],X)$，我们得到 (9) 的唯一经典解 $u_{\varepsilon_k} \in C^1([0,T],X)$，其表达式为

$$u_{\varepsilon_k}(t) = S_{\varepsilon_k,n}(t,0)\,u^0_{\varepsilon_k} + \int_0^t S_{\varepsilon_k,n}(t,s)\,f_{\varepsilon_k}(s)\,ds, \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

现在，对每个 $\beta \in \mathcal{I}$，若 $0 < \beta < \alpha$，则 (8) 的唯一经典解满足$u_\beta \in C^1([0,T],X)$。那么对于固定的 $|\alpha| > 1$，非齐次项 $g_{\alpha,\,n} \in C^1([0,T],X)$，且 (8) 的解形式为

$$u_\alpha(t) = S_{\alpha,n}(t,0)\,u^0_\alpha + \int_0^t S_{\alpha,n}(t,s)\,g_{\alpha,n}(s)\,ds, \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

其中 $u_\alpha \in C^1([0,T],X)$。更多细节请参见 [20, 定理 5.3，第 147] 页。 □

现在我们将介绍四个后续内容中会用到的技术引理。

引理 2.4。设 $\alpha \in \mathcal{I}$. 则

$$\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \le (2\mathbb{N})^{2\alpha}.$$

证明。这直接由 [11, 命题 2.3] 得出。更确切地说，在 [11] 中，作者证明了：$|\alpha|! \le \mathfrak{q}^\alpha \alpha!$ 若一个序列 $\mathfrak{q} = (q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 满足

$$1 < q_1 \le q_2 \le \dots \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} < 1.$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24} < 1$，序列 $(2\mathbb{N})^2 = ((2k)^2)_{k\in\mathbb{N}}$ 满足所需的性质。

□

引理 2.5。 对于每个 $c>0$，都存在 $q>1$，使得以下结论成立

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} c^{|\alpha|}(2\mathbb{N})^{-q\alpha}<\infty.$$

证明。 设 $c>0$，并选择 $s\geq 0$ 使得 $c\leq 2^s$. 那么，对于 $q>s+1$,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} c^{|\alpha|}(2\mathbb{N})^{-q\alpha}\leq\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\prod_{i=1}^{\infty}(2^s)^{\alpha_i}\prod_{i=1}^{\infty}(2i)^{-q\alpha_i}\leq\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\prod_{i=1}^{\infty}(2i)^{(s-q)\alpha_i}=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(2\mathbb{N})^{(s-q)\alpha}<\infty. \quad \square$$

在下一个引理中，为了完整起见，我们给出众所周知的卡特兰数的一些有用性质，参见例如 [23]。

引理 2.6. 由递推关系定义的数列 $\{\mathbf{c}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\mathbf{c}_0=1,\quad \mathbf{c}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{c}_k\,\mathbf{c}_{n-1-k},\quad n\geq 1 \tag{15}$$

称为卡特兰数列。$\mathbf{c}_n$ 的闭式公式是二项式系数的倍数，即卡特兰递推关系(15) 的解为

$$\mathbf{c}_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\quad or\quad \mathbf{c}_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}.$$

卡特兰数满足如下增长估计

$$\mathbf{c}_n\leq 4^n,\ n\geq 0. \tag{16}$$

引理 2.7. *[11, p.21]*设 $\{R_\alpha:\alpha\in\mathcal{I}\}$ 为一个实数集合，满足 $R_{\mathbf{0}}=0$，R_{ε_k}，$k\in\mathbb{N}$ 已给定，且

$$R_\alpha=\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}R_\gamma R_{\alpha-\gamma},\quad |\alpha|>1.$$

Then

$$R_\alpha=\frac{1}{|\alpha|}\binom{2|\alpha|-2}{|\alpha|-1}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\prod_{k=1}^{\infty}R_{\varepsilon_k}^{\alpha_k},\quad |\alpha|>1.$$

证明。 给定 $\alpha\in\mathcal{I}$, $|\alpha|>1$。于是 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d,0,0,\ldots)$ 只有有限个非零分量，因此可以将其与一个 $d-$ 维向量 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{N}_0^d$. 对应起来。仿照经典卡塔兰数的证明， [11] 中的作者考虑了函数 $G(z)=\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^d}M_\beta z^\beta$，$z\in\mathbb{N}_0^d$，其中 $M_\beta=\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\beta}M_\gamma M_{\beta-\gamma}$ 和 $z^\beta=z_1^{\beta_1}\cdots z_d^{\beta_d}$.。函数 G 满足 $G^2(z)-G(z)+\sum_{k=1}^{d}M_{\varepsilon_k}z_k=0$，这意味着

$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{d} M_{\varepsilon_k} z_k\right)^n$.。最后，应用多项式定理 $\left(\sum_{k=1}^{d} M_{\varepsilon_k} z_k\right)^n = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^d,\ |\beta|=n} \frac{n!}{\beta!} \prod_{k=1}^{d} (M_{\varepsilon_k} z_k)^{\beta_k}$，得到

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^d} M_\beta z^\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^d,\,|\beta|=n} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \frac{n!}{\beta!} \prod_{k=1}^{d} M_{\varepsilon_k}^{\beta_k} \prod_{k=1}^{d} z_k^{\beta_k} \\
&= \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^d} \left(\frac{1}{|\beta|}\binom{2|\beta|-2}{|\beta|-1} \frac{|\beta|!}{\beta!} \prod_{k=1}^{d} M_{\varepsilon_k}^{\beta_k} \right) z^\beta .
\end{aligned}
$$

□

2.1 主定理的证明

主定理的陈述如下。

定理 2.8。 假设 $(A1)-(A4-n)$ 成立。那么存在唯一的几乎经典解 $u \in C([0,T],X) \otimes (S)_{-1}$ 满足 (3)。

证明。 定理 2.8 将通过对 $n \in \mathbb{N}$ 归纳来证明，详见定理 2.9 和定理 2.10。我们将在定理 2.9 中证明，主定理的陈述对 $n = 2.$ 成立。由于为任意 $n \in \mathbb{N}$ 写出归纳步骤的证明在技术上相当困难，因此在定理 2.10 中，证明针对 $n = 3$ 给出，方法是将问题化简为 $n = 2.$ 的情形。同理，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都可以将问题化简为 $n - 1.$ 的情形。

□

首先考虑 $n = 2$ 对应的 (3)，即

$$
\begin{aligned}
u_t(t,\omega) &= \mathbf{A}\, u(t,\omega) + u^{\Diamond 2}(t,\omega) + f(t,\omega), \quad t \in [0,T] \\
u(0,\omega) &= u^0(\omega),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Wick 平方的混沌展开表示由 (5) 给出。将 Wiener-Itô 混沌展开应用于非线性随机方程 (17)，可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \frac{d}{dt} u_\alpha(t)\ H_\alpha(\omega) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha u_\alpha(t)\ H_\alpha(\omega) + \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sum_{\gamma\le\alpha} u_\gamma(t)\ u_{\alpha-\gamma}(t) \Big) H_\alpha(\omega) \\
&\quad + \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha(t)\ H_\alpha(\omega) \\
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(0)\ H_\alpha(\omega) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha^0\ H_\alpha(\omega).
\end{aligned}
$$

这将化为无穷多个确定性柯西问题组成的系统：

1° 当 $\alpha = \mathbf{0}$

$$\frac{d}{dt}u_{\mathbf{0}}(t) = A_{\mathbf{0}}u_{\mathbf{0}}(t) + u_{\mathbf{0}}^2(t) + f_{\mathbf{0}}(t), \quad u_{\mathbf{0}}(0) = u_{\mathbf{0}}^0, \qquad \text{and} \tag{18}$$

2° 对于 $\alpha > \mathbf{0}$

$$\frac{d}{dt}u_\alpha(t) = \left(A_\alpha + 2u_{\mathbf{0}}(t)\, Id\right) u_\alpha(t) + \sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha} u_\gamma(t)\ u_{\alpha-\gamma}(t) + f_\alpha(t), \quad u_\alpha(0) = u_\alpha^0. \tag{19}$$

其中 $t \in (0, T]$ 和 $\omega \in \Omega$。

回顾

$$B_{\alpha,2}(t) = A_\alpha + 2u_{\mathbf{0}}(t)\, Id \qquad \text{and} \qquad g_{\alpha,2}(t) = \sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha} u_\gamma(t)\ u_{\alpha-\gamma}(t) + f_\alpha(t), \quad t \in [0, T]$$

对所有 $\alpha > \mathbf{0}$均成立，因此系统 (19) 可写为

$$\frac{d}{dt}u_\alpha(t) = B_{\alpha,2}(t)\, u_\alpha(t) + g_{\alpha,2}(t), \quad t \in (0, T]; \qquad u_\alpha(0) = u_\alpha^0. \tag{20}$$

定理 2.9. 假设$(A1) - (A4-2)$成立。则存在唯一的几乎经典解 $u \in C([0, T], X) \otimes (S)_{-1}$，满足 (17)。

证明. 根据引理 2.3，对每个 $\alpha > \mathbf{0}$，演化方程 (20) 都有唯一的经典解 $u_\alpha \in C^1([0, T], X)$。因此，广义随机过程 $u(t, \omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$ $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ 的系数均为相应确定性方程 (20) 的经典解；因此，为了证明 u是方程 (17) 的几乎经典解，只需证明 $u \in C([0, T], X) \otimes (S)_{-1}$.

设 $u^0 \in X \otimes (S)_{-1}$是满足假设 (A2) 的初始条件，该假设指出存在 $\tilde{p} \geq 0$ 和 $\tilde{K} > 0$ 使得 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha^0\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-\tilde{p}\alpha} = \tilde{K}$. 那么还存在$p \geq 0$和 $K \in (0, 1)$，使得 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha^0\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} = K^2$，或者等价地

$$(\exists p \geq 0)\ (\exists K \in (0, 1))\ (\forall \alpha \in \mathcal{I}) \quad \|u_\alpha^0\|_X \leq K(2\mathbb{N})^{p\alpha}. \tag{21}$$

非齐次项 $f \in C^1([0, T], X) \otimes (S)_{-1}$ 满足假设 (A3)，该假设指出存在 $\tilde{p} \geq 0$使得 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|f_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-\tilde{p}\alpha} < \infty$.那么存在$p \geq 0$ 和 $K \in (0, 1)$，使得

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f_\alpha(t)\|_X \leq K(2\mathbb{N})^{p\alpha}, \quad \alpha \in \mathcal{I}. \tag{22}$$

解 u 的系数 u_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, $\alpha > \mathbf{0}$ 由 $n = 2.$的 (13) 和 (14) 给出。记

$$L_\alpha := \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X, \quad \alpha \in \mathcal{I}.$$

首先，对于 $\alpha=\mathbf{0}$，利用 (11) 可得

$$L_{\mathbf{0}}=\sup_{t\in[0,T]}\|u_{\mathbf{0}}(t)\|_X=M_2, \tag{23}$$

因为方程 (18) 的解满足假设 (A4-2)。令 $|\alpha|=1$. 于是 $\alpha=\varepsilon_k$, $k\in\mathbb{N}$，利用 (13) 可得

$$\|u_{\varepsilon_k}(t)\|_X\le\|S_{\varepsilon_k,2}(t,0)\|\|u^0_{\varepsilon_k}\|_X+\int_0^t\|S_{\varepsilon_k,2}(t,s)\|\|f_{\varepsilon_k}(s)\|_X ds,\quad t\in[0,T].$$

由 (12) 可得

$$\int_0^t\|S_{\alpha,2}(t,s)\|ds\le\int_0^t me^{w_2(t-s)}ds=m\frac{e^{w_2t}-1}{w_2}\le\frac{m}{w_2}e^{w_2T},\quad t\in[0,T],\quad \alpha>\mathbf{0} \tag{24}$$

现在，由 (12)、(21) 和 (22) 可推出

$$\begin{aligned}L_{\varepsilon_k}=\sup_{t\in[0,T]}\|u_{\varepsilon_k}(t)\|_X&\le\sup_{t\in[0,T]}\Big\{\|S_{\varepsilon_k,2}(t,0)\|\|u^0_{\varepsilon_k}\|_X+\sup_{s\in[0,t]}\|f_{\varepsilon_k}(s)\|_X\int_0^t\|S_{\alpha,2}(t,s)\|ds\Big\}\\&\le me^{w_2T}K(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k}+\frac{m}{w_2}e^{w_2T}K(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k}=m_2e^{w_2T}K(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k},\quad t\in[0,T],\quad k\in\mathbb{N},\end{aligned} \tag{25}$$

其中 $m_2=m+\frac{m}{w_2}$.

对于 $|\alpha|>1$，我们考虑 L_α. 的两种可能性。首先，若对所有 $|\alpha|>1$ 都有 $L_\alpha\le\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}$，则定理的结论直接成立，因为对于 $q>2p+1$，并结合 (23) 和 (25)，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-q\alpha}&=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}L_\alpha^2(2\mathbb{N})^{-q\alpha}=L_{\mathbf{0}}^2+\sum_{k\in\mathbb{N}}L_{\varepsilon_k}^2(2\mathbb{N})^{-q\varepsilon_k}+\sum_{|\alpha|>1}L_\alpha^2(2\mathbb{N})^{-q\alpha}\\&\le M_2^2+(m_2e^{w_2T}K)^2\sum_{k\in\mathbb{N}}(2\mathbb{N})^{(2p-q)\varepsilon_k}+K\sum_{|\alpha|>1}(2\mathbb{N})^{(2p-q)\alpha}<\infty,\end{aligned}$$

即 $u\in C([0,T],X)\otimes(S)_{-1,-q}$.

在下文中，我们假设 $L_\alpha>\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}$，其中 $\alpha\in\mathcal{I}$, $|\alpha|>1$. 。记 $\mathcal{I}_*$ 为所有满足 $L_\alpha>\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}$ 的多重指标 $\alpha\in\mathcal{I}$, $|\alpha|>1$ 的集合。于是由 (14) 得到

$$u_\alpha(t)=S_{\alpha,2}(t,0)u^0_\alpha+\int_0^t S_{\alpha,2}(t,s)\Big[\sum_{0<\gamma<\alpha}u_{\alpha-\gamma}(s)u_\gamma(s)+f_\alpha(s)\Big]ds,\quad t\in[0,T].$$

由此可得

$$\begin{aligned}
L_\alpha &= \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X \\
&\le \sup_{t\in[0,T]} \Bigg\{ \|S_{\alpha,2}(t,0)\|\|u_\alpha^0\|_X + \int_0^t \|S_{\alpha,2}(t,s)\| \Big\| \sum_{0<\gamma<\alpha} u_{\alpha-\gamma}(s)u_\gamma(s) \Big\| ds \\
&+ \int_0^t \|S_{\alpha,2}(t,s)\|\|f_\alpha(s)\|_X ds \Bigg\} \\
&\le \sup_{t\in[0,T]} \Bigg\{ me^{w_2 t}\|u_\alpha^0\|_X + \sup_{s\in[0,t]} \sum_{0<\gamma<\alpha} \|u_{\alpha-\gamma}(s)\|_X \|u_\gamma(s)\|_X \cdot \int_0^t \|S_{\alpha,2}(t,s)\| ds \\
&+ \sup_{s\in[0,t]} \|f(s)\|_X \int_0^t \|S_{\alpha,2}(t,s)\| ds \Bigg\}.
\end{aligned}$$

利用 (24) 可得

$$\begin{aligned}
L_\alpha &= \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X \\
&\le me^{w_2 T}\|u_\alpha^0\|_X + \frac{m}{w_2} e^{w_2 T} \sum_{0<\gamma<\alpha} \sup_{t\in[0,T]} \|u_{\alpha-\gamma}(t)\|_X \sup_{t\in[0,T]} \|u_\gamma(t)\|_X \\
&+ \frac{m}{w_2} e^{w_2 T} \sup_{s\in[0,t]} \|f(s)\|_X \\
&\le m_2 e^{w_2 T} K(2\mathbb{N})^{p\alpha} + \frac{m}{w_2} e^{w_2 T} \sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha} L_{\alpha-\gamma} L_\gamma,
\end{aligned}$$

其中同样有 $m_2 = m + \frac{m}{w_2}$. 由于 $m_2 \ge \frac{m}{w_2}$，不难得到

$$L_\alpha \le m_2 e^{w_2 T} \Big(K(2\mathbb{N})^{p\alpha} + \sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha} L_{\alpha-\gamma} L_\gamma \Big). \tag{26}$$

~令 L_α、 $\alpha > \mathbf{0}$、 $\alpha \in \mathcal{I}_*$ 由下式给出

$$\tilde{L}_\alpha := 2m_2 e^{w_2 T} \Big(\frac{L_\alpha}{\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}} + 1 \Big), \quad \alpha > \mathbf{0},\ \alpha \in \mathcal{I}_*.$$

因此，由（25）可知，对于所有 $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{\varepsilon_k} = 2m_2 e^{w_2 T} \Big(\frac{L_{\varepsilon_k}}{\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k}} + 1 \Big) &\le 2m_2 e^{w_2 T} \Big(\frac{m_2 e^{w_2 T} K(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k}}{\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k}} + 1 \Big) \\
&= 2m_2 e^{w_2 T} (m_2 e^{w_2 T} \sqrt{K} + 1).
\end{aligned} \tag{27}$$

˜ ˜接下来，我们估计给定 $|\alpha|>1$、 $\alpha\in\mathcal{I}_*$. 时的项 $\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}L_\gamma L_{\alpha-\gamma}$

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}\tilde{L}_\gamma\tilde{L}_{\alpha-\gamma}&=\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}(2m_2e^{w_2T})^2\Big(\frac{L_\gamma}{\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\gamma}}+1\Big)\Big(\frac{L_{\alpha-\gamma}}{\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p(\alpha-\gamma)}}+1\Big)\\&\geq(2m_2e^{w_2T})^2\Big(\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}\frac{L_\gamma L_{\alpha-\gamma}}{K(2\mathbb{N})^{p\alpha}}+1\Big)\\&=\frac{(2m_2e^{w_2T})^2}{K(2\mathbb{N})^{p\alpha}}\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}L_\gamma L_{\alpha-\gamma}+(2m_2e^{w_2T})^2.\end{aligned}$$

利用不等式（26），我们得到

$$\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}\tilde{L}_\gamma\tilde{L}_{\alpha-\gamma}\geq\frac{(2m_2e^{w_2T})^2}{K(2\mathbb{N})^{p\alpha}}\Big(\frac{L_\alpha}{m_2e^{w_2T}}-K(2\mathbb{N})^{p\alpha}\Big)+(2m_2e^{w_2T})^2=\frac{4m_2e^{w_2T}}{K(2\mathbb{N})^{p\alpha}}L_\alpha.$$

现在，由于 $L_\alpha>\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}$ 对于 $\alpha\in\mathcal{I}_*$ 成立，且由于 $K<1$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}\tilde{L}_\gamma\tilde{L}_{\alpha-\gamma}&\geq\frac{4m_2e^{w_2T}}{\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}}L_\alpha=\frac{2m_2e^{w_2T}}{\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}}L_\alpha+\frac{2m_2e^{w_2T}}{\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}}L_\alpha\\&\geq2m_2e^{w_2T}\Big(\frac{L_\alpha}{\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}}+1\Big)=\tilde{L}_\alpha.\end{aligned}$$

因此，对于所有的 $\alpha\in\mathcal{I}_*$、 $|\alpha|>1$，我们得到

$$\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}\tilde{L}_\gamma\tilde{L}_{\alpha-\gamma}\geq\tilde{L}_\alpha.$$

令 R_α、 $\alpha>\mathbf{0}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}R_{\varepsilon_k}&=\tilde{L}_{\varepsilon_k},\quad k\in\mathbb{N},\\R_\alpha&=\sum_{\mathbf{0}<\gamma<\alpha}R_\gamma R_{\alpha-\gamma},\quad|\alpha|>1.\end{aligned}$$

这是由数 R_α、 $\alpha>\mathbf{0}$ 的定义直接得出的，也可以通过对多重指标 $\alpha>\mathbf{0}$ 的长度进行归纳证明（见 [11, 第 5] 节）

$$\tilde{L}_\alpha\leq R_\alpha,\quad\alpha>\mathbf{0}.\tag{28}$$

引理 2.7 表明，数值 R_α, $\alpha>\mathbf{0}$ 满足

$$R_\alpha=\frac{1}{|\alpha|}\binom{2|\alpha|-2}{|\alpha|-1}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\prod_{i=1}^{\infty}R_{\varepsilon_i}^{\alpha_i},\quad\alpha>\mathbf{0}.$$

进一步地，由式 (27) 可得，

$$\prod_{i=1}^{\infty} R_{\varepsilon_i}^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{\infty} \tilde{L}_{\varepsilon_i}^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^{\infty} (2m_2 e^{w_2 T}(m_2 e^{w_2 T}\sqrt{K}+1))^{\alpha_i}.$$

设 $c = 2m_2 e^{w_2 T}(m_2 e^{w_2 T}\sqrt{K}+1)$。则

$$R_\alpha \leq \mathbf{c}_{|\alpha|-1}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}c^{|\alpha|}, \quad \alpha > \mathbf{0}, \tag{29}$$

其中，$\mathbf{c}_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, $n \geq 0$ 表示第 n 个卡特兰数（关于卡特兰数的更多信息见引理 2.6）。利用引理 2.4、(28)、(29) 和 (16)，我们得到对于 $\alpha \in \mathcal{I}_*$, $|\alpha| > 1$ ，估计

$$\tilde{L}_\alpha \leq R_\alpha \leq 4^{|\alpha|-1}(2\mathbb{N})^{2\alpha}c^{|\alpha|}$$

˜成立。最后，根据 L_α, $\alpha > \mathbf{0}$ 的定义，我们得到

$$L_\alpha \leq \Big(\frac{4^{|\alpha|-1}(2\mathbb{N})^{2\alpha}c^{|\alpha|}}{2m_2 e^{w_2 T}} - 1\Big)\sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha} \leq \frac{\sqrt{K}}{8m_2 e^{w_2 T}}(4c)^{|\alpha|}(2\mathbb{N})^{(p+2)\alpha}.$$

注意，上界估计对 $|\alpha| > 1, \alpha \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{I}_*$ 也成立。事实上，如果 $L_\alpha < \sqrt{K}(2\mathbb{N})^{p\alpha}$，那么也有 $L_\alpha < \frac{\sqrt{K}}{8m_2 e^{w_2 T}}(4c)^{|\alpha|}(2\mathbb{N})^{(p+2)\alpha}$，因此我们得到

$$L_\alpha \leq \frac{\sqrt{K}}{8m_2 e^{w_2 T}}(4c)^{|\alpha|}(2\mathbb{N})^{(p+2)\alpha}, \quad \text{for all } \alpha \in \mathcal{I},\ |\alpha| > 1.$$

现在我们可以证明 $u(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega) \in C([0,T], X) \otimes (S)_{-1}$。记 $H = \frac{\sqrt{K}}{8m_2 e^{w_2 T}}$。则

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} &= \sup_{t\in[0,T]} \|u_{\mathbf{0}}(t)\|_X^2 + \sum_{\alpha>\mathbf{0}} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \\
&= M_2^2 + \sum_{k\in\mathbb{N}} L_{\varepsilon_k}^2 (2\mathbb{N})^{-q\varepsilon_k} + \sum_{|\alpha|>1} L_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \\
&\leq M_2^2 + (m_2 e^{w_2 T}K)^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} (2\mathbb{N})^{(2p-q)\varepsilon_k} + H^2 \sum_{|\alpha|>1} \Big((4c)^{|\alpha|}(2\mathbb{N})^{(p+2)\alpha}\Big)^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \\
&= M_2^2 + (m_2 e^{w_2 T}K)^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} (2\mathbb{N})^{(2p-q)\varepsilon_k} + H^2 \sum_{|\alpha|>1} (16c^2)^{|\alpha|}(2\mathbb{N})^{(2p+4-q)\alpha}.
\end{aligned}$$

取 $s > 0$ 使得 $2^s \geq 16c^2$，根据引理 2.5，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \leq\ & M_2^2 + (m_2 e^{w_2 T}K)^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} (2\mathbb{N})^{(2p-q)\varepsilon_k} \\
& + H^2 \sum_{|\alpha|>1} (2\mathbb{N})^{(2p+4+s-q)\alpha} < \infty
\end{aligned}$$

对于 $q > 2p + s + 5$. □

接下来，我们将证明该柯西问题的几乎经典解的存在性

$$\begin{aligned} &u_t(t,\omega) = \mathbf{A}\, u(t,\omega) + u^{\Diamond 3}(t,\omega) + f(t,\omega), \quad t \in [0,T] \\ &u(0,\omega) = u^0(\omega), \end{aligned} \tag{30}$$

注意

$$\begin{aligned} &u^{\Diamond 3}(t,\omega) = u^{\Diamond 2}(t,\omega) \Diamond u(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{\beta\le\alpha} \sum_{\gamma\le\beta} u_{\alpha-\beta}(t)\, u_{\beta-\gamma}(t)\, u_\gamma(t)\, H_\alpha(\omega) \\ &= u_{\mathbf{0}}^3(t)\, H_{\mathbf{0}}(\omega) \\ &+ \sum_{|\alpha|>0} \Big(3u_{\mathbf{0}}^2 u_\alpha(t) + 3u_{\mathbf{0}} \sum_{0<\beta<\alpha} u_{\alpha-\beta}(t) u_\beta(t) + \sum_{0<\beta<\alpha} \sum_{0<\gamma<\beta} u_{\alpha-\beta}(t) u_{\beta-\gamma}(t) u_\gamma(t) \Big) H_\alpha(\omega), \end{aligned} \tag{31}$$

对于 $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$。将 Wiener-Itô 混沌展开方法应用于非线性随机方程 (30)，可将其化为由无穷多个确定性柯西问题构成的系统:

1° 对于 $\alpha = \mathbf{0}$

$$\frac{d}{dt} u_{\mathbf{0}}(t) = A_{\mathbf{0}} u_{\mathbf{0}}(t) + u_{\mathbf{0}}^3(t) + f_{\mathbf{0}}(t), \quad u_{\mathbf{0}}(0) = u_{\mathbf{0}}^0, \qquad \text{and}$$

2° 对于 $\alpha > \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_\alpha(t) = \big(A_\alpha + 3u_{\mathbf{0}}^2(t) Id \big) u_\alpha(t) + 3u_{\mathbf{0}} \sum_{0<\beta<\alpha} u_{\alpha-\beta}(t) u_\beta(t) + \\ + \sum_{0<\beta<\alpha} \sum_{0<\gamma<\beta} u_{\alpha-\beta}(t) u_{\beta-\gamma}(t) u_\gamma(t) + f_\alpha(t), \\ u_\alpha(0) = u_\alpha^0. \end{aligned} \tag{32}$$

其中 $t \in (0,T]$ 且 $\omega \in \Omega$。

Let

$$\begin{aligned} &B_{\alpha,3}(t) = A_\alpha + 3u_{\mathbf{0}}^2(t)\, Id \qquad \text{and} \\ &g_{\alpha,3}(t) = 3u_{\mathbf{0}} \sum_{0<\beta<\alpha} u_{\alpha-\beta}(t) u_\beta(t) + \sum_{0<\beta<\alpha} \sum_{0<\gamma<\beta} u_{\alpha-\beta}(t) u_{\beta-\gamma}(t) u_\gamma(t) + f_\alpha(t), \quad t \in [0,T] \end{aligned} \tag{33}$$

对所有 $\alpha > \mathbf{0}$，此时系统 (32) 可写为

$$\frac{d}{dt} u_\alpha(t) = B_{\alpha,3}(t)\, u_\alpha(t) + g_{\alpha,3}(t), \quad t \in (0,T]; \qquad u_\alpha(0) = u_\alpha^0. \tag{34}$$

定理 2.10. 假设$(A1)\ -(A4-3)$ 均成立。则存在唯一的几乎经典解 $u\in C([0,T],X)\otimes(S)_{-1}$，满足(30)。

证明。 根据引理 2.3，对于每个 $\alpha>\mathbf{0}$，演化方程 (34) 都有一个唯一的经典解 $u_\alpha\in C^1([0,T],X)$，其形式由 (14) 给出。因此，以混沌展开形式 (4) 表示的广义随机过程 $u(t,\omega)$，其系数都是相应确定性方程 (34) 的经典解。因此，为了证明 u 是 (30) 的几乎经典解，必须证明 $u\in C([0,T],X)\otimes(S)_{-1}$.

我们假设初始条件 $u^0\in X\otimes(S)_{-1}$ 满足假设 $(A2)$，即估计式 (21) 成立。非齐次项 $f\in C^1([0,T],X)\otimes(S)_{-1}$ 满足假设 $(A3)$，即估计式 (22) 对某个 $p\geq 0$ 成立。此外，解 u 的系数u_α, $\alpha\in\mathcal{I}$, $\alpha>\mathbf{0}$ 由 (13) 和 (14) 给出，其中 $n=3.$。现在，对于所有 $\alpha\in\mathcal{I}$，我们将估计

$$L_\alpha=\sup_{t\in[0,T]}\|u_\alpha(t)\|_X.$$

显然，对于 $\alpha=\mathbf{0}$，由 $(A4-3)$ 可得 $L_{\mathbf{0}}=\sup_{t\in[0,T]}\|u_{\mathbf{0}}(t)\|=\qquad M_3.$

对于 $|\alpha|=1$，即对于 $\alpha=\varepsilon_k,\quad k\in\mathbb{N}$ 由 (13) 可得

$$\|u_{\varepsilon_k}(t)\|_X\leq\|S_{\varepsilon_k,3}(t,0)\|\|u^0_{\varepsilon_k}\|_X+\int_0^t\|S_{\varepsilon_k,3}(t,s)\|\|f_{\varepsilon_k}(s)\|_X ds,\quad t\in[0,T].$$

由 (12) 可得

$$\int_0^t\|S_{\alpha,3}(t,s)\|ds\leq\int_0^t me^{w_3(t-s)}ds\leq\frac{m}{w_3}e^{w_3T},\quad t\in[0,T],\quad \alpha>\mathbf{0}. \tag{35}$$

由 (21)、(22)、(12) 和 (35) 可得

$$\begin{aligned}L_{\varepsilon_k}&=\sup_{t\in[0,T]}\|u_{\varepsilon_k}(t)\|_X\leq\sup_{t\in[0,T]}\left\{\|S_{\varepsilon_k,3}(t,0)\|\|u^0_{\varepsilon_k}\|_X+\sup_{s\in[0,t]}\|f_{\varepsilon_k}(s)\|_X\int_0^t\|S_{\alpha,3}(t,s)\|ds\right\}\\&\leq me^{w_3T}K(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k}+\frac{m}{w_3}e^{w_3T}K(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k},\end{aligned}$$

从而得到估计

$$L_{\varepsilon_k}\leq m_3e^{w_3T}K(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k},\quad k\in\mathbb{N}, \tag{36}$$

其中 $m_3=m+\frac{m}{w_3}$.

对于 $|\alpha|=2$，多重指标有两种不同形式。首先，对于 $\alpha=2\varepsilon_k$，由 (33) 中的 $k\in\mathbb{N}$ 可得非齐次项的形式 $g_{2\varepsilon_k,\ 3}(t)\ =3u_{\mathbf{0}}(t)\ u^2_{\varepsilon_k}(t)+f_{2\varepsilon_k}(t)$，其中

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,t]}\|g_{2\varepsilon_k,3}(s)\|_X&\leq 3M_3L^2_{\varepsilon_k}+\sup_{s\in[0,t]}\|f_{2\varepsilon_k}(s)\|_X\\&\leq 3M_3m_3^2e^{2w_3T}K^2(2\mathbb{N})^{2p\varepsilon_k}+K(2\mathbb{N})^{2p\varepsilon_k}\\&\leq\left(3M_3m_3^2e^{2w_3T}K^2+K\right)(2\mathbb{N})^{2p\varepsilon_k}.\end{aligned}$$

然后，结合 (14) 可得

$$\begin{aligned}
L_{2\varepsilon_k} &= \sup_{t\in[0,T]} \|u_{2\varepsilon_k}(t)\|_X \\
&\le \sup_{t\in[0,T]} \Big\{ \|S_{2\varepsilon_k,3}(t,0)\| \|u^0_{2\varepsilon_k}\|_X + \sup_{s\in[0,t]} \|g_{2\varepsilon_k,3}(s)\|_X \int_0^t \|S_{2\varepsilon_k,3}(t,s)\| ds \Big\} \\
&\le m e^{w_3 T} K (2\mathbb{N})^{2p\varepsilon_k} + \frac{m}{w_3} e^{w_3 T} \left(3 M_3 m_3^2 e^{2w_3 T} K^2 + K\right) (2\mathbb{N})^{2p\varepsilon_k}.
\end{aligned}$$

因此，

$$L_{2\varepsilon_k} \le a_1\, e^{w_3 T} K\, (2\mathbb{N})^{2p\varepsilon_k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{37}$$

其中 $a_1 = m + \frac{m}{w_3}(3M_3 m_3^2 e^{2w_3 T} K + 1)$。

在第二种情况下，对于来自 (33) 的 $\alpha = \varepsilon_k + \varepsilon_j,\ k \ne j,\ k, j \in \mathbb{N}$，我们得到 (14) 的非齐次项的形式 $g_{\varepsilon_k+\varepsilon_j,3}(t) = 6u_0(t)\ u_{\varepsilon_k}(t)\, u_{\varepsilon_j}(t) + f_{\varepsilon_k+\varepsilon_j}(t)$。应用 (36) 和 (22) 可将其估计为

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,t]} \|g_{\varepsilon_k+\varepsilon_j,3}(s)\|_X &\le 6 M_3 L_{\varepsilon_k} L_{\varepsilon_j} + \sup_{s\in[0,t]} \|f_{\varepsilon_k+\varepsilon_j}(s)\|_X \\
&\le 6 M_3 m_3^2 e^{2w_3 T} K^2 (2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k} (2\mathbb{N})^{p\varepsilon_j} + K (2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k + p\varepsilon_j} \\
&\le \left(6 M_3 m_3^2 e^{2w_3 T} K^2 + K\right) (2\mathbb{N})^{p(\varepsilon_k+\varepsilon_j)}.
\end{aligned}$$

然后，将 (14) 与前面的估计结合，得到

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon_k+\varepsilon_j} &= \sup_{t\in[0,T]} \|u_{\varepsilon_k+\varepsilon_j}(t)\|_X \\
&\le \sup_{t\in[0,T]} \Big\{ \|S_{\varepsilon_k+\varepsilon_j,3}(t,0)\| \|u^0_{\varepsilon_k+\varepsilon_j}\|_X + \sup_{s\in[0,t]} \|g_{\varepsilon_k+\varepsilon_j,3}(s)\|_X \int_0^t \|S_{\varepsilon_k+\varepsilon_j,3}(t,s)\| ds \Big\} \\
&\le m e^{w_3 T} K (2\mathbb{N})^{p(\varepsilon_k+\varepsilon_j)} + \frac{m}{w_3} e^{w_3 T} \left(6 M_3 m_3^2 e^{2w_3 T} K^2 + K\right) (2\mathbb{N})^{p(\varepsilon_k+\varepsilon_j)}.
\end{aligned}$$

然后，我们得到

$$L_{\varepsilon_k+\varepsilon_j} \le a_2\, e^{w_3 T} K\, (2\mathbb{N})^{p(\varepsilon_k+\varepsilon_j)}, \quad k, j \in \mathbb{N},\ k \ne j, \tag{38}$$

其中 $a_2 = m + \frac{m}{w_3}(6M_3 m_3^2 e^{2w_3 T} K + 1)$。最后，由 (37) 和 (38) 得到对所有 $|\alpha| = 2$ 的估计

$$L_\alpha \le a_2\, e^{w_3 T} K\, (2\mathbb{N})^{p\alpha}.$$

对于 $|\alpha| > 2$，我们处理式 (34) 中非齐次项的一般形式

$$g_{\alpha,3}(t) = 3u_0 \sum_{0<\beta<\alpha} u_{\alpha-\beta}(t) u_\beta(t) + \sum_{0<\beta<\alpha} \sum_{0<\gamma<\beta} u_{\alpha-\beta}(t)\, u_{\beta-\gamma}(t)\, u_\gamma(t) + f_\alpha(t), \quad t \in [0,T].$$

（34）的解具有如下形式

$$\begin{aligned}
u_\alpha(t) &= S_{\alpha,3}(t,0) u^0_\alpha \\
&+ \int_0^t S_{\alpha,3}(t,s) \Big(3u_0 \sum_{0<\beta<\alpha} u_{\alpha-\beta}(t) u_\beta(t) + \sum_{0<\beta<\alpha} \sum_{0<\gamma<\beta} u_{\alpha-\beta}(t) u_{\beta-\gamma}(t) u_\gamma(t) + f_\alpha(t) \Big) ds.
\end{aligned}$$

我们强调，在前面的归纳步骤中，我们得到了对所有 $0 < \theta < \alpha$ 的 $L_{\alpha-\theta} = \sup_{t\in[0,T]} \|u_{\alpha-\theta}(t)\|$ 估计。然后，

$$
\begin{aligned}
L_\alpha = \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\| &\le m e^{\omega_3 T} K(2\mathbb{N})^{p\alpha} \\
&\quad + \frac{m}{w_3}\Big(3M_3 \sum_{0<\beta<\alpha} L_{\alpha-\beta} L_\beta + \sum_{0<\beta<\alpha} \sum_{0<\gamma<\beta} L_{\alpha-\beta} L_{\beta-\gamma} L_\gamma + K(2\mathbb{N})^{p\alpha}\Big) \\
&\le m_3 e^{\omega_3 T}\Big(K(2\mathbb{N})^{p\alpha} + 3M_3 \sum_{0<\beta<\alpha} L_{\alpha-\beta} L_\beta + \sum_{0<\beta<\alpha} L_{\alpha-\beta} \sum_{0<\gamma<\beta} L_{\beta-\gamma}\, L_\gamma\Big),
\end{aligned}
\tag{39}
$$

其中 $m_3 = m + \frac{m}{w_3}$。
为了估计 L_α，对于 $|\alpha| > 2$，我们考虑两种可能性：(a) $L_\alpha \le \sum_{0<\beta<\alpha} L_{\alpha-\beta}\, L_\beta,\ |\alpha| > 2$ and (b) $L_\alpha > \sum_{0<\beta<\alpha} L_{\alpha-\beta}\, L_\beta,\ |\alpha| > 2$.

(a) 按照以下归纳方式定义 R_α，对于 $|\alpha| \ge 1$

$$
\begin{aligned}
R_{\varepsilon_k} &= L_{\varepsilon_k} \\
R_\alpha &= \sum_{0<\beta<\alpha} R_{\alpha-\beta}\, R_\beta, \quad |\alpha| \ge 2,
\end{aligned}
$$

然后，利用引理 2.7，我们得到估计

$$
L_\alpha \le R_\alpha = \frac{1}{|\alpha|}\binom{2|\alpha|-2}{|\alpha|-1}\,\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\,\Big(\prod_{i=1}^{\infty} R_{\varepsilon_i}^{\alpha_i}\Big).
$$

此外，由 (36) 可得

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{\infty} R_{\varepsilon_i}^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{\infty} L_{\varepsilon_i}^{\alpha_i} &\le \prod_{i=1}^{\infty}\Big(m_3 e^{\omega_3 T} K\,(2\mathbb{N})^{p\varepsilon_k}\Big)^{\alpha_i} = \big(m_3 e^{\omega_3 T} K\big)^{|\alpha|}\ \prod_{i=1}^{\infty}(2i)^{p\alpha_i} \\
&= \big(m_3 e^{\omega_3 T} K\big)^{|\alpha|}\ (2\mathbb{N})^{p\alpha} = c_3^{|\alpha|}(2\mathbb{N})^{p\alpha},
\end{aligned}
$$

其中 $c_3 = m_3 e^{\omega_3 T} K$。我们还使用了 $\prod_{i=1}^{\infty}(2i)^{p\alpha_i} = (2\mathbb{N})^{p\alpha}$ 和 $(2\mathbb{N})^{\varepsilon_i} = 2i$。回顾卡特兰数 $\mathsf{c}_{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}\binom{2|\alpha|-2}{|\alpha|-1}$、$|\alpha| \ge 2$ 的形式。于是，由引理 2.4 可得

$$
\begin{aligned}
L_\alpha &\le \frac{1}{|\alpha|}\binom{2|\alpha|-2}{|\alpha|-1}\,\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\ c_3^{|\alpha|}\,(2\mathbb{N})^{p\alpha} \le 4^{|\alpha|-1}\,(2\mathbb{N})^{2\alpha}\,c_3^{|\alpha|}\,(2\mathbb{N})^{p\alpha} \\
&\le (2\mathbb{N})^{p_3\alpha}(2\mathbb{N})^{(2+p)\alpha},
\end{aligned}
$$

其中我们用到了 $4^{|\alpha|-1}\,c_3^{|\alpha|} \le (2\mathbb{N})^{p_3\alpha}$，其中某个 p_3 为正。因此，我们得出

$$
L_\alpha \le (2\mathbb{N})^{(p_3+p+2)\alpha}.
$$

最后，对于 $q > 2p_3 + 2p + 5$，定理的陈述由此得出

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} &= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} L_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \\ &= L_{\mathbf{0}}^2 + \sum_{k\in\mathbb{N}} L_{\varepsilon_k}^2 (2\mathbb{N})^{-q\varepsilon_k} + \sum_{|\alpha|>1} L_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \\ &\le M_3^2 + (m_3 e^{w_3 T} K)^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} (2\mathbb{N})^{(2p-q)\varepsilon_k} \\ &+ \sum_{|\alpha|>1} (2\mathbb{N})^{(2(p_3+p+2)-q)\alpha} < \infty, \end{aligned} \tag{40}$$

即 $u \in C([0,T], X) \otimes (S)_{-1,\,-q}$。注意，在 (40) 中，项 $\sum_{k\in\mathbb{N}} (2\mathbb{N})^{(2p-q)\varepsilon_k}$ 是有限的，因为当 $q > 2p_3 + 2p + 5$ 时 $q > 2p + 1$。

(b) 在第二种情况下，我们假设存在 $\alpha \in \mathcal{I}, |\alpha| \ge 2$ 使得

$$L_\alpha > \sum_{0<\beta<\alpha} L_{\alpha-\beta}\, L_\beta. \tag{41}$$

考虑最复杂的情况。那么，对于所有 $\alpha \in \mathcal{I}$，不等式 (41) 都成立。于是，(39) 化为

$$L_\alpha \le m_3 e^{w_3 T} \left(K(2\mathbb{N})^{p\alpha} + (3M_3 + 1) \sum_{0<\beta<\alpha} L_{\alpha-\beta}\, L_\beta \right),$$

其中我们对 $\beta < \alpha$ 使用了不等式 $L_\beta > \sum_{0<\gamma<\beta} L_{\beta-\gamma}\, L_\gamma$。此外，我们有

$$L_\alpha \le (3M_3 + 1)\, m_3 e^{w_3 T} \Big(\frac{K}{3M_3 + 1} (2\mathbb{N})^{p\alpha} + \sum_{0<\beta<\alpha} L_{\alpha-\beta}\, L_\beta \Big), \quad |\alpha| \ge 2.$$

此时，我们可以重复定理 2.9 的证明。特别地，使用记号 $m_3' = (3M_3 + 1)\ m_3$ 和 $K' = \frac{K}{3M_3+1}$，有以下不等式

$$L_\alpha \le m_3' e^{w_3 T} \Big(K'(2\mathbb{N})^{p\alpha} + \sum_{\mathbf{0}<\beta<\alpha} L_{\alpha-\beta} L_\beta \Big)$$

对应于不等式（26），因为 $K' < 1$，证明以与定理 2.9 相同的方式继续，即证明具有 Wick 平方非线性的方程（17）的可解性。

□

注 2.11. 这里需要注意，如果方程 (3) 的几乎经典解 u 满足 $u \in \mathbb{D} = Dom\mathsf{A}$，那么 u 就是方程 (3) 的经典解。

2.2 线性非自治情形

我们的分析为线性非自治方程提供了一个直接的观察

$$\begin{aligned} u_t(t,\omega) &= \mathbf{A}(t)\,u(t,\omega) + f(t,\omega), \quad t \in (0,T] \\ u(0,\omega) &= u^0(\omega), \quad \omega \in \Omega. \end{aligned} \tag{42}$$

我们作如下假设:

(B1) 算子 $\mathbf{A}(t) : \mathbb{D}' \subset X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1},\ t \in [0,T]$ 是一个依赖于 t 的坐标算子, 对应于确定性算子族 $A_\alpha(t) :\ D(A_\alpha) \subset X \to X,\ \alpha \in \mathcal{I}.$。对于每个 $\alpha \in \mathcal{I}$，算子族 $\{A_\alpha(t)\}_{t\in[0,T]}$ 都是 C_0-上的 X 半群的无穷小生成元稳定族，其稳定性常数为 $m > 1$ 和 $w \in \mathbb{R}$，且不依赖于 α；因此，相应的演化系统 $S_\alpha(t,s)$ 满足

$$\|S_\alpha(t,s)\| \le m e^{w(t-s)} \le m e^{wT}, \quad 0 \le s < t \le T, \quad \alpha \in \mathcal{I}.$$

定义域 $D(A_\alpha(t)) = D$ 与 $t \in [0,T]$ 无关，且 $\alpha \in \mathcal{I}.$。对于每个 $x \in D$，函数 $A_\alpha(t)x,\ t \in [0,T]$ 对每个 $\alpha \in \mathcal{I}.$关于 X 连续可微。

$\mathbf{A}(t)$ $t \in [0,T]$ 的作用由下式给出

$$\mathbf{A}(t)(u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha(t)(u_\alpha)H_\alpha,$$

对于形式为 (4) 的 $u \in \mathbb{D}' \subseteq D \otimes (S)_{-1}$，其中

$$\mathbb{D}' = \Big\{ u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha \in D \otimes (S)_{-1} : \exists p_0 \ge 0, \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|A_\alpha(t)(u_\alpha)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p_0\alpha} < \infty \Big\}.$$

(B2) 初值 $u^0 = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha^0 H_\alpha \in \mathbb{D}'$，即对于每个 $\alpha \in \mathcal{I}$，$u_\alpha^0 \in D$，且存在 $p \ge 0$ 使得

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha^0\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty,$$

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|A_\alpha(t)u_\alpha^0\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty.$$

对于非齐次项 $f(t,\omega)$ $\omega \in \Omega$ $t \in [0,T]$，我们假设 **(A3)**。

定理 2.12。 假设$(B1)$、$(B2)$ 和$(A3)$ 成立。则存在唯一的几乎经典解 $u \in C([0,T],X) \otimes (S)_{-1}$，满足$(42)$。

证明。 将 Wiener-Itô 混沌展开方法应用于 (42)，可得到由无穷多个确定性柯西问题组成的系统

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_\alpha(t) &= A_\alpha(t)u_\alpha(t) + f_\alpha(t), \quad t \in (0,T] \\ u_\alpha(0) &= u_\alpha^0, \quad \alpha \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{43}$$

根据 (B1)、(B2) 和 (A3)，柯西问题 (43) 满足 [20, 定理 5.3 的所有假设，p. 147] 因此存在唯一的经典解 $u_\alpha \in C^1([0,T],X)$，其表达式为

$$u_\alpha(t) = S_\alpha(t,0)u_\alpha^0 + \int_0^t S_\alpha(t,s)f_\alpha(s)ds, \quad t \in [0,T]$$

对所有 $\alpha \in \mathcal{I}$.

还需证明 $u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha \in C([0,T],X) \otimes (S)_{-1}$，也就是说，存在$q>0$使得 $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} < \infty$.

不失一般性，我们可以假设常数 $K, p > 0$ 满足对所有 $\alpha \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} \|u_\alpha^0\|_X &\le K(2\mathbb{N})^{p\alpha} \\ \sup_{t\in[0,T]} \|f_\alpha(t)\|_X &\le K(2\mathbb{N})^{p\alpha}. \end{aligned}$$

现在，对所有 $\alpha \in \mathcal{I}$，我们得到

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X &\le \sup_{t\in[0,T]} \left\{ \|S_\alpha(t,0)\| \|u_\alpha^0\|_X + \int_0^t \|S_\alpha(t,s)\| \|f_\alpha(s)\|_X ds \right\} \\ &\le \sup_{t\in[0,T]} \left\{ \|S_\alpha(t,0)\| \|u_\alpha^0\|_X + \sup_{s\in[0,t]} \|S_\alpha(t,s)\| \|f_\alpha(s)\|_X \int_0^t ds \right\} \\ &\le \sup_{t\in[0,T]} \left\{ me^{wt}K(2\mathbb{N})^{p\alpha} + me^{wt}K(2\mathbb{N})^{p\alpha} t \right\} \\ &\le (1+T)me^{wT}K(2\mathbb{N})^{p\alpha}. \end{aligned}$$

最后，对于 $q > 2p+1$，我们得到

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} \le \left((1+T)me^{wT}K\right)^2 \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (2\mathbb{N})^{(2p-q)\alpha} < \infty.$$

□

3 扩展与应用

我们的结果可以推广到更一般得多的如下形式的随机演化方程

$$\begin{aligned} u_t(t,\omega) &= \mathbf{A}\, u(t,\omega) + p_n^{\Diamond}(u(t,\omega)) + f(t,\omega), \quad t \in (0,T] \\ u(0,\omega) &= u^0(\omega), \qquad \omega \in \Omega, \end{aligned} \tag{44}$$

具有 Wick 多项式型非线性

$$p_n^{\Diamond}(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, u^{\Diamond k} = a_0 + a_1\, u + a_2\, u^{\Diamond 2} + a_3\, u^{\Diamond 3} + \ldots a_n\, u^{\Diamond n}, \tag{45}$$

其中 $a_n \neq 0$ 和 $a_k, 0 \leq k \leq n$ 要么是常数，要么是确定性函数。方程（44）推广了方程（3），只要规定（44）的相应确定性版本存在一个解，并相应地修改假设（$A4-n$），就可以用论文中提出的完全相同的方法求解。因此，我们用以下假设替换（$A4-n$）：

(A4-pol-n) 柯西问题

$$\frac{d}{dt}u_{\mathbf{0}}(t) = A_{\mathbf{0}}u_{\mathbf{0}}(t) + p_n(u_{\mathbf{0}}(t)) + f_{\mathbf{0}}(t), \quad t \in (0,T]; \quad u_{\mathbf{0}}(0) = u_{\mathbf{0}}^0,$$

存在一个经典解 $u_{\mathbf{0}} \in C^1([0,T], X)$，其中

$$p_n(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, u^k = a_0 + a_1\, u + a_2\, u^2 + a_3\, u^3 + \ldots a_n\, u^n, \tag{46}$$

是一个次数为 n 的经典多项式，对应于 Wick 多项式 (45)。

我们推广定理 2.8；为简化技术处理，这里仅给出求解 (44) 中 $n = 3$ 的步骤，但要注意，一般情形可以作相应的修改后得到。

首先注意到，根据过程 (4) 的形式及其 Wick 幂 (5) 的形式，以及由 (31)，我们可以得到 Wick 多项式非线性的展开式

$$\begin{aligned}
&p_3^{\diamondsuit}(u) = a_0 + a_1\, u + a_2\, u^{\diamondsuit 2} + a_3\, u^{\diamondsuit 3} \\
&= a_0 H_{\mathbf{0}} + a_1\left(u_{\mathbf{0}}H_{\mathbf{0}} + \sum_{|\alpha|>0} u_\alpha H_\alpha\right) + a_2\left(u_{\mathbf{0}}^2 H_{\mathbf{0}} + \sum_{|\alpha|>0}\left(2u_{\mathbf{0}}u_\alpha + \sum_{\mathbf{0}<\beta<\alpha} u_\beta u_{\alpha-\beta}\right) H_\alpha\right) + \\
&+ a_3\left(u_{\mathbf{0}}^3 H_{\mathbf{0}} + \sum_{|\alpha|>0}\left(3u_{\mathbf{0}}^2 u_\alpha + 3u_{\mathbf{0}} \sum_{0<\beta<\alpha} u_{\alpha-\beta}u_\beta + \sum_{0<\beta<\alpha}\sum_{0<\gamma<\beta} u_{\alpha-\beta}u_{\beta-\gamma}u_\gamma(t)\right) H_\alpha\right).
\end{aligned} \tag{47}$$

When 将相应的系数相加，表达式（47）变为

$$\begin{aligned}
p_3^{\diamondsuit}(u) &= (a_0 + a_1 u_{\mathbf{0}} + a_2\, u_{\mathbf{0}}^2 + a_3\, u_{\mathbf{0}}^3)\, H_{\mathbf{0}} \\
&+ \sum_{\alpha>\mathbf{0}}\Big((3a_3 u_{\mathbf{0}}^2 + 2a_2 u_{\mathbf{0}} + a_1)\, u_\alpha + (3a_3 u_{\mathbf{0}} + a_2) \sum_{0<\beta<\alpha} u_{\alpha-\beta}u_\beta \\
&+ a_3 \sum_{0<\beta<\alpha}\sum_{0<\gamma<\beta} u_{\alpha-\beta}u_{\beta-\gamma}u_\gamma\Big)\, H_\alpha \\
&= p_3(u_{\mathbf{0}}) + \sum_{\alpha>\mathbf{0}}\Big(p_3'(u_{\mathbf{0}})u_\alpha + \frac{1}{2!}\cdot p_3''(u_{\mathbf{0}}) \sum_{0<\beta<\alpha} u_{\alpha-\beta}u_\beta \\
&+ \frac{1}{3!}\cdot p_3'''(u_{\mathbf{0}}) \sum_{0<\beta<\alpha}\sum_{0<\gamma<\beta} u_{\alpha-\beta}u_{\beta-\gamma}u_\gamma\Big)\, H_\alpha,
\end{aligned}$$

其中， p_3'、 p_3'' 和 p_3'''分别表示多项式（46）的一阶导数、二阶导数和三阶导数。

因此，将 Wiener-Itô 混沌展开方法应用于非线性随机问题 (44)，我们得到由无穷多个确定性柯西问题组成的系统:

1° 对于 $\alpha = \mathbf{0}$

$$\frac{d}{dt}u_{\mathbf{0}}(t) = A_{\mathbf{0}}u_{\mathbf{0}}(t) + p_3(u_{\mathbf{0}}(t)) + f_{\mathbf{0}}(t), \quad u_{\mathbf{0}}(0) = u_{\mathbf{0}}^0, \tag{48}$$

and

2° 对于 $\alpha > \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_\alpha(t) = \left(A_\alpha + p_3'(u_{\mathbf{0}}(t))Id\right)u_\alpha(t) + \frac{1}{2}p_3''(u_{\mathbf{0}}(t))\sum_{0<\beta<\alpha}u_{\alpha-\beta}(t)u_\beta(t) + \\ + \frac{1}{6}p_3'''(u_{\mathbf{0}}(t))\sum_{0<\beta<\alpha}\sum_{0<\gamma<\beta}u_{\alpha-\beta}(t)u_{\beta-\gamma}(t)u_\gamma(t) + f_\alpha(t), \\ u_\alpha(0) = u_\alpha^0.\end{aligned} \tag{49}$$

其中 $t \in (\mathbf{0}, T]$ 且 $\omega \in \Omega$。

我们记

$$\begin{aligned}B_{\alpha,p_3}(t) &= A_\alpha + p_3'(u_{\mathbf{0}}(t))Id \qquad \text{and} \\ g_{\alpha,p_3}(t) &= \frac{1}{2}\cdot p_3''(u_{\mathbf{0}})\sum_{0<\beta<\alpha}u_{\alpha-\beta}(t)u_\beta(t) \\ &\quad + \frac{1}{6}\cdot p_3'''(u_{\mathbf{0}})\sum_{0<\beta<\alpha}\sum_{0<\gamma<\beta}u_{\alpha-\beta}(t)u_{\beta-\gamma}(t)u_\gamma(t) + f_\alpha(t),\end{aligned}$$

对于 $t \in (\mathbf{0}, T]$ 以及所有 $\alpha > \mathbf{0}$。因此， $\alpha > \mathbf{0}$ 的 (49) 中的问题可写成如下形式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_\alpha(t) = B_{\alpha,p_3}(t)\,u_\alpha(t) + g_{\alpha,p_3}(t), \quad t \in (0,T] \\ u_\alpha(0) = u_\alpha^0.\end{aligned} \tag{50}$$

定理 3.1. 若满足假设 $(A1)$ $-(A3)$ 和 $(A4-pol-3)$，则存在唯一的关于 (44) 的几乎经典解 $u \in C([0,T],X) \otimes (S)_{-1}$。

证明。 在假设 $(A1)-(A2)$ 以及假设 $(A4-pol-3)$ 下，若方程 (48) 在 $C^1([0,T],X)$ 中有一个经典解，则可以证明（与引理 2.3 中的证明类似），对于每个 $\alpha > \mathbf{0}$，演化系统 (50) 都有唯一的经典解 $u_\alpha \in C^1([0,T],X)$。接下来，为了证明 u 是方程 (44) 的几乎经典解，必须证明 $u \in C([0,T],X) \otimes (S)_{-1}$。事实上，可以仿照定理 2.10 的证明来完成这一点，其中 $L_{\mathbf{0}} = \sup_{t\in[0,T]}\|u_{\mathbf{0}}(t)\|$ 和

$$M_3 = \max\{\sup_{t\in[0,T]}\|p_3(u_{\mathbf{0}}(t))\|, \sup_{t\in[0,T]}\|p_3'(u_{\mathbf{0}}(t))\|, \sup_{t\in[0,T]}\|p_3''(u_{\mathbf{0}}(t))\|, \sup_{t\in[0,T]}\|p_3'''(u_{\mathbf{0}}(t))\|\}.$$

□

3.1 示例

我们给出两类属于问题 (44) 这一类的问题的随机反应扩散方程。

3.1.1 随机广义 FitzHugh-Nagumo 方程

非线性随机演化方程

$$\begin{aligned} &u_t(t,\omega) = \mathbf{A}\, u(t,\omega) + u^{\diamond 2}(t,\omega) - u^{\diamond 3}(t,\omega) + f(t,\omega), \quad t \in (0,T] \\ &u(0,\omega) = u^0(\omega), \quad \omega \in \Omega, \end{aligned} \tag{51}$$

它属于广义 FitzHugh-Nagumo 方程这一类，是一种 (44) 型方程。特别地，对于 A $= \triangle$，相应的反应扩散确定性方程

$$u_t = \triangle u(t) + F(u(t)), \quad u(0) = u^0, \tag{52}$$

其非线性项具有 $F(u) = -u(a-u)(b-u)$ 的形式，是著名的 FitzHugh-Nagumo 方程，该方程出现在各种神经生理学模型中。方程 (52) 由 FitzHugh 和 Nagumo [5, 17] 提出，用于模拟神经轴突中电脉冲的传导。 [1], 研究了 FitzHugh-Nagumo 方程 (52) 的随机版本，而 [3]则解决了受有色高斯噪声扰动的 FitzHugh-Nagumo 方程的控制问题。显然，若将 $a = 0$ 和 $b = 1$ 取为 $F(u)$ 的形式，方程 (51) 就是对方程 (52) 的推广。若取 $a = b = 0$ ，方程 (51) 则化为 Fujita 型方程 (3)。

在这里，通过应用定理 3.1，我们得到方程 (51) 的唯一几乎经典解。

3.1.2 随机广义 Fisher-KPP 方程

形如 (52) 且满足 $F(u) = au(1-u)$ 的确定性非线性方程称为 Fisher 方程（也称 Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov 方程）。这类方程出现在生物学、生态学、等离子体物理学[4, 13] 等领域中的相变问题中。特别是，这类方程为生活在环境容纳量有限的环境中的种群密度提供了一个确定性模型。它还描述了疫情暴发的波传播，或有利基因在种群中的扩散。医学中的其他应用包括对毒素引入后细胞反应的建模、神经轴突中的电压传播，以及表皮伤口愈合过程 [2]。在其他研究领域，它还被用于研究火灾中的火焰传播，以及核反应堆中的中子通量。

在白噪声分析的框架下，研究了包含由某些外部（环境）噪声引起随机效应的随机模型 [10], ，作者证明了行波解的存在性。在相同的框架下，文献 [19] 研究了随机 KPP 方程，即带有半线性势并受乘性噪声扰动的热方程。在适当的假设下，通过应用伊藤演算，证明了其存在性

存在唯一的强行波解，并给出了该解的隐式 Feynman–Kac 类公式。本文考虑随机 Fisher-KPP 方程的广义 Wick 版本

$$
\begin{aligned}
u_t(t,\omega) &= \mathbf{A}\,u(t,\omega) + u(t,\omega) - u^{\Diamond 2}(t,\omega) + f(t,\omega), \quad t \in (0,T] \\
u(0,\omega) &= u^0(\omega), \quad \omega \in \Omega,
\end{aligned}
$$

可通过应用定理 3.1 求解。

3.2 结论

本文提出了一种求解含有 Wick 多项式型非线性的随机演化方程的方法。不过，该理论的应用和拓展并不止于此。除了非线性项 $u^{\Diamond 2}$，还可以考虑 $u \Diamond u_x$，并通过适当修改求解随机 Burgers 型方程 $u_t = u_{xx} + u \Diamond u_x + f$，或随机 KdV 方程 $u_t = u_{xxx} + u \Diamond u_x + f$，将其合并为形式 $u_t = \mathbf{A}u + u \Diamond u_x + f$。还可以将非线性项 $u^{\Diamond n}$ 替换为 $u \Diamond |u|^{n-1}$，其中复值随机过程的模定义为 $|u| = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} |u_\alpha| H_\alpha$，从而求得随机非线性薛定谔方程 $(i\hbar)$ $u_t = \Delta u + u \Diamond |u|^{n-1} + f$ 的显式解。

参考文献

[1] Albeverio, S., Di Persio, L. S.：神经生物学中的一些随机动力学模型：最新进展。欧洲数学与理论生物学通讯 14，(2011)，44–53。[2] Aronson, D., Weinberger, H.：群体遗传学、燃烧和神经传导中的非线性扩散。载于 J. A. Goldstein 编，《偏微分方程及相关主题》，数学讲义第 466 卷。*Springer*出版社，纽约，1975。[3] Barbu, V., Cordoni, F., Di Persio, L.S.：随机 FitzHugh–Nagumo 方程的最优控制。《国际控制杂志》89(4)，(2016)，746–756。[4] Fisher, R.A.：有利基因的扩展波。《人类遗传年鉴》7，(1937)，353–369。[5] FitzHugh, R.：神经膜理论模型中的脉冲与生理状态。《生物物理学杂志》1，(1961)，445–466。[6] Fujita, H., Watanabe, S.：关于某些拟线性抛物型方程初值问题解的唯一性与非唯一性。《纯粹与应用数学通讯》21，(1968)，631–652。

[7] Fujita, H., Chen, Y. G.：关于半线性抛物型方程爆破解集合及爆破解渐近行为。数学分析与应用，181–201，Gauthier–Villars，蒙鲁日，1988。[8] Hida, T., Kuo, H.-H., Pothoff, J., Streit, L.：《白噪声：无穷维微积分》。*Kluwer Academic Publishers Group*，多德雷赫特，1993。[9] Holden, H., Øksendal, B., Ubøe, J., Zhang, T.：《随机偏微分方程：建模与白噪声泛函方法》。第二版。*Springer*，纽约，2010。[10] Huang, Z., Liu, Z.：随机广义KPP方程的随机行波解。非线性微分方程及其应用 **22**，(2015)，143–173。[11] Kaligotla, S.; Lototsky, S. V.：随机Burgers方程中的Wick 乘积：祸害还是良方？渐近分析 **75**(3-4)，(2011)，145–168。[12] Kato, T.：“双曲型”线性演化方程。II。日本数学会志**25**，(1973)，648–666。[13] Kolmogorov, A., Petrovskii, I., Piskunov, N.：对物质量增加条件下扩散方程的研究及其在生物学问题中的应用。莫斯科国立大学通报 **1**，(1937)，1–25。[14] Levajković, T., Pilipović, S., Seleši, D., Žigić, M.：具有乘性噪声的随机演化方程。电子概率期刊 **20**(19)，(2015)，1–23。[15] Meneses, R., Quaas, A.：全非线性抛物型方程的Fujita型指数及存在性结果，数学分析与应用杂志 **376**(2)，(2011)，514–527。[16]Mikulevicius, R., Rozovskii, B.：关于无偏随机Navier–Stokes方程。概率论及相关领域 **154**，(2012)，787–834。[17] Nagumo, J., Arimoto, S., Yoshizawa, S.：模拟神经轴突的主动脉冲传输线。无线电工程师学会会刊 **50**(10)，(1962)，2061–2070。[18] Neidhardt, H., Zagrebnov, V. A.：线性非自治柯西问题与演化半群。微分方程进展 **14**，(2009)，289–340。[19] Øksendal, B., Våge, G., Zhao, H. Z.：随机KPP方程解的渐近性质。爱丁堡皇家学会会刊*A*辑 **130**(6)，(2000)，1363–1381。[20] Pazy, A.：《线性算子半群及其在偏微分方程中的应用》。应用数学科学第**44**卷，*Springer*出版社，纽约，1983。

[21] Pilipović, S., Seleši, D.：广义随机过程、Wick 乘积的展开定理及其在随机微分方程中的应用。无限维分析、量子概率与相关主题 10(1), (2007), 79–110.[22] Pilipović, S., Seleši, D.：广义随机狄利克雷问题——第一部分：随机弱最大值原理。位势分析 32, (2010), 363–387.[23] Stanley, R.P.：卡特兰数。剑桥大学出版社，纽约，2015.[24] Yosida, K.：局部凸空间中的时变演化方程。数学年刊162, (1965/1966), 83–86.[25] Zeidler, E.：非线性泛函分析及其应用。I. 不动点定理。施普林格出版社，纽约，1986。

致谢

本文获得以下项目和奖助金的支持：塞尔维亚共和国教育、科学与技术发展部资助的项目 174024，塞尔维亚与奥地利双边科学合作项目 451-03-01039/2015-09/26，匈牙利科学院提供的 Domus 奖助金 4814/28/2015/HTMT，省高等教育与科学研究秘书处项目 142-451-2384，以及面向奥地利毕业生的研究奖助金。