arXiv:2303.06236v1 [math.GR] 10 Mar 2023

扎里斯基稠密性与 S-整群的计算

A. S. Detinko、D. L. Flannery 和 A. Hulpke

摘要。我们将此前针对 SL($n,\mathbb{Z}$) 和 Sp($n,\mathbb{Z}$) 的扎里斯基稠密子群所采用的计算方法加以推广，以适用于输入的 SL($n,\mathbb{Q}$) 和 Sp($n,\mathbb{Q}$) 的稠密子群 H。强逼近定理为这一工作提供了背景，其中一项关键任务是计算 H 的最小同余超群。得到该超群后，我们便可以描述 H 的所有同余商。我们特别关注 $n = 2$ 的情形。

1. 引言

在 [4, 5, 6]，中，我们提出了一种计算 SL($n,\mathbb{Z}$) 和 Sp($n,\mathbb{Z}$) 的有限生成扎里斯基稠密子群的方法。现在，我们的目标是将这项早期工作推广到 SL($n,\mathbb{Q}$) 和 Sp($n,\mathbb{Q}$) 的稠密子群。我们的动机来自一些应用，这些应用涉及在 $\mathbb{Q}$ 上而非 $\mathbb{Z}$ 上的表示。例如，在计算 $G \leq$ Sp($n,\mathbb{Z}$) 时，有时需要进行基变换，将 G 替换为 Sp($n,\mathbb{Q}$) 中的一个共轭；参见 [3]。

设 H 是 GL($n,\mathbb{Q}$) 的一个有限生成子群。那么 $H \leq$ GL(n,R)，其中 R 是某个正 $\mu \in \mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Z}$ 的局部化 $\mathbb{Z}[1/\mu]$。通常，我们取 R 为由 h 的元素以及当 h 遍历 H 的有限生成集时的 h^{-1} 所生成的 $\mathbb{Q}$ 的子环 R_H。定义在 $\mathbb{Z}$ 上的线性群可能与定义在 R 上的线性群大不相同。举例来说：如果 $\mu > 1$，那么 SL(2, R) 具有同余子群性质（CSP），而 SL(2, $\mathbb{Z}$) 则没有 [16, 18, 21]。

对于一个含幺交换环 D，记 $\Gamma(n, D)$ 为 SL(n, D) 或 Sp(n, D)；若 D 是大小为 q 的有限域 $\mathbb{F}_q$，则记作 $\Gamma(n, q)$。令 $S = \{1/p_1, \ldots, 1/p_k\}$，其中 p_i 是 $\mu > 1$ 的互不相同的素因子。于是 $R = \mathbb{Z}[S]$，我们称 $H \leq \Gamma(n, R)$ 为 S-整数群。若 H 在 $\Gamma(n, R)$ 中的指数有限，则称其为 S-算术群。每个非零理想$I \subset R$ 都是主理想：$I = mR$，其中 m 是与 μ 互素的唯一正整数。模 I 的同余同态（即模 m 的约化映射）记作 φ_m。因此，φ_m 将 R 映到 $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$，逐项扩展后得到同态 $\Gamma(n, R) \to \Gamma(n, \mathbb{Z}_m)$，也记作 φ_m。φ_m 在 $\Gamma(n, R)$ 上的核 $\Gamma_{n,m}$ 是层为 m 的主同余子群（PCS）。注意，$\Gamma_{n,a}\Gamma_{n,b} = \Gamma_{n,d}$，且 $\Gamma_{n,a} \cap \Gamma_{n,b} = \Gamma_{n,l}$，其中 $d =$ 是 a 与 b 的最大公因数，$l =$ 是 a 与 b 的最小公倍数。包含一个 PCS 的 $\Gamma(n, R)$ 子群称为同余子群。上述术语和记号也可用于 $\mathbb{Z}[S]$ 以外的系数环；例如，若 r 和 m 是正整数，且 r 整除 m,

2010 年数学主题分类：20-04、20G15、20H25、68W30。关键词：线性群、 S-整数、 S-算术、强逼近、扎里斯基稠密性、算法。1

则 φ_r 在 $\mathbb{Z}_m$ 上是模 r 的约化映射。全文中，$\mathbb{F}$ 表示任意域，1_m、0_m 分别表示 $m \times m$ 单位矩阵和零矩阵。

我们的主要算法接受在 $\Gamma(n, \mathbb{C})$ 中扎里斯基稠密的子群 $H \leq \Gamma(n, R)$。[6] 讨论了用于检验稠密性的算法。另一项输入是所有满足 $\varphi_p(H) \neq \Gamma(n, p)$ 的素数 $p \in \mathbb{Z}$ 的集合 $\Pi(H)$。由于 H 在 $\Gamma(n, \mathbb{R})$ 中稠密，因此集合 $\Pi(H)$ 是有限的（由强逼近定理 [15, Window 9] 可知）。有关计算 $\Pi(H)$ 的算法，请参见 [4, 5, 6]。

第 2 节重点讨论如何计算 H 的层。我们将 [6] 中的算术闭包概念推广为同余闭包 $\mathrm{cl}(H)$；对于任意稠密的 $H \leq \Gamma(n, R)$，该闭包都存在。随后，我们说明如何计算 $\mathrm{cl}(H)$ 中 $\Gamma(n, R)$ 的唯一极大 PCS 的（层），从而确定 $\mathrm{cl}(H)$。第 2 节还详细讨论了情形 $n = 2$，而 [6] 中省略了这一情形。这样，我们便能够计算 H 模 R 的所有理想、对所有 $n \geq 2$ 所对应的同余商。

第 3 节报告了使用我们基于 GAP [8] 实现的主要算法所进行的实验。为强调这类实验的实用价值，我们还给出一个问题的解答，该问题源自线性群论中更广泛的领域。

2. 计算稠密 S-整群的层

设 $R = \mathbb{Z}[1/\mu]$，其中 μ 为正整数。若 $n > 2$ 或 $R \neq \mathbb{Z}$，则 $\Gamma(n, R)$ 具有同余子群性质（CSP）：$\Gamma(n, R)$ 的 S-算术子群恰好是其同余子群。

在 [6, §3.3] 中，我们定义了 $\Gamma(n, \mathbb{Z})$ 中稠密群的算术闭包 $n > 2$。作为同余子群的交，该算术闭包也称为扩张同余子群 [22]。现在，我们将这一概念推广到 $\Gamma(n, \mathbb{Q})$ 中任意稠密群的同余闭包 $n \geq 2$。随后，我们设计用于计算该闭包的算法。

如果 $n \geq 2$，那么 [6, §2] 中的大部分内容都可以直接推广到 R，只需避开整除 μ 的素数即可；见第 2.1 节。我们将在第 2.2 节专门讨论 2 阶的情形。

2.1. 一般阶数。

设 H 是 $n \geq 2$ 上 $\Gamma(n, \mathbb{Q})$ 的一个有限生成稠密子群，并设 $R = R_H$。

定理 2.1. $\Gamma(n, R)$ 中所有包含 H 的同余子群的交，是 $\Gamma(n, R)$ 的一个同余子群。

证明。见 [15,定理 2，第 391] 页。 □

令 $\mathrm{cl}(H)$ 为 $\Gamma(n, R)$ 中所有包含 H 的同余子群的交。由定理 2.1，$\mathrm{cl}(H)$ 是唯一的最小此类同余子群：$\Gamma(n, R)$ 中 H 的同余闭包。

备注 2.2。$\mathrm{cl}(H)$ 的定义取决于系数环 R 的选择。例如，对于任意素数 p，$H = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ 是 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}[1/p])$ 的一个极大子群，因此在 $R = \mathbb{Z}[1/p]$ 上，$\mathrm{cl}(H) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}[1/p])$；当然，$\mathrm{cl}(H) = H$ 则在 $R = \mathbb{Z}$ 上。

备注 2.3。如果 $\Gamma(n,R)$ 具有同余子群性质，那么 $\mathrm{cl}(H)$ 就等同于 H 的 S-算术闭包，也就是说，$\mathrm{cl}(H)$ 是所有包含 H 的 $\Gamma(n,R)$ 的 S-算术子群的交集。因此，对于 H 在 $\mathbb{Z}$ 上的群，我们当前对 $\mathrm{cl}(H)$ 的定义与 [6] 中的定义一致。

引理 2.4（参见 [6, 引理 3.11]）。 $\Pi(H) = \Pi(\mathrm{cl}(H))$。

作为同余子群，$\mathrm{cl}(H)$ 包含一个最大的 PCS；其层为 ℓ。因此 $\mathrm{cl}(H) = \Gamma_{n,\ell}H$。此外，$\Gamma_{n,m} \leq \mathrm{cl}(H)$ 当且仅当 $\ell \mid m$。我们称 H 本身的层为 ℓ。

引理 2.5。 $\Pi(H)$ 中的每个素数都整除 H 的层。

证明。设 $\Gamma(n,\mathbb{Q}) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Q})$；对于 $\Gamma(n,\mathbb{Q}) = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Q})$，证明类似。

设 $t_{ij}(a)$ 为初等矩阵，其主对角线上全为 1，非对角位置 (i,j) 处为 a，其余位置均为 0。假设 $p \in \Pi(H)$ 不整除层 ℓ of$H$。那么 $\varphi_p(\Gamma_{n,\ell})$ 包含 $t_{ij}(1) = \varphi_p(t_{ij}(\ell))^k$，其中 $k \equiv \ell^{-1} \bmod p$。由于 $t_{ij}(1)$ 生成 $\mathrm{SL}(n,p)$，因此 $\varphi_p(\mathrm{cl}(H)) = \varphi_p(H\Gamma_{n,\ell}) = \mathrm{SL}(n,p)$。故由引理 2.4 得 $p \notin \Pi(H)$。□

定义

$$\delta_H(m) = |\Gamma(n,R) : \Gamma_{n,m}H|.$$

也就是说，$\delta_H(m) = |\varphi_m(\Gamma(n,R)) : \varphi_m(H)|$，而 $\Pi(H)$ 由不整除 μ 的素数 p 构成，且 $\delta_H(p) > 1$。此外，对所有 $m > 1$，$\delta_H(m) = \delta_{\mathrm{cl}(H)}(m)$。

将整数 k 的素因子集合记为 $\pi(k)$。对于算术 $H \leq \Gamma(n,\mathbb{Z})$,~ ~$n > 2$, 我们在 [6] 中证明了 $\pi(\ell) = \Pi(H)$，其中 $\Pi(H) \supseteq \Pi(H)$ 在 [6, (2.3)]中定义。~ $\Pi(H)$ 的计算包含对某些 δ_H值的检验；见定理 2.9。我们称 2 为“例外”素数，因为当 $2 \leq n \leq 4$时，算术群 H 可能具有偶数层，却能模 2 满射到 $\Gamma(n,2)$。然而，当 $2 < n \leq 4$时，2 是 $\Pi(H)$ 与 $\Pi(H)$ 之间唯一可能存在差异的素数~。正如我们将看到的，当 $n = 2$时，会出现新的例外素数。

关于用于计算算术群 $H \leq \Gamma(n,\mathbb{Z})$，$n > 2$ 的层 ℓ 的程序 LevelMaxPCS 的说明，请参见 [6, §2.4.2]。除 H（或其生成集）外，~的另一项输入是一个素数集合：实际应用中为 $\Pi(H)$。下文将转述 [6, 第 975] 页中 LevelMaxPCS 的伪代码。

LevelMaxPCS(S, Ω)

输入：子群 $H \leq \Gamma(n,\mathbb{Q})$ 的生成集 S；素数集 Ω。输出：整数 r。

对于每个 $p \in \Omega$，令 $\nu_p = 1$ 和 $z_p = \prod_{r\in\Omega\, r\neq p} r$。
当 $\exists p \in \Omega$ 满足 $\delta_H(p^{\nu_p+1} \cdot z_p) > \delta_H(p^{\nu_p} \cdot z_p)$ 时，
将 ν_p 加 1 并重复。返回 $r := \prod_{p\in\Omega} p^{\nu_p}$。

定理 2.6。输入层为 ℓ 的稠密 H 和 $\Omega = \pi(\ell)$ 时，LevelMaxPCS 会终止并返回 ℓ。

证明。此证明与 [6, 定理 2.22]的证明几乎完全相同。 □

注 2.7。如果我们知道 $\Gamma(n, R)$中每个 PCS 的生成集，就可以得到 $\mathrm{cl}(H)$ 的一个生成集；参见 [20]。

注 2.8。假设 $\Pi(H) = \emptyset$。根据 [6, (2.3)], , 若 $n > 4$，或 $3 \leq n \leq 4$ 且$\sim\delta_H(4) = 1$，则 $\Pi(H) = \emptyset$ 也成立。这意味着 H 的层为 1，即 $\mathrm{cl}(H) = \Gamma(n, R)$，而以 H 为输入的 LevelMaxPCS 默认返回 1。对于 $H \leq \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$，在这种情况下，$H$ 是有限拓扑稠密的：对所有 $m > 1$，$\delta_H(m) = 1$。

$\pi(\ell)$ 的计算是一个独立的工作，在运行 LevelMax-$\widetilde{\ }$PCS 之前完成。如前所述，实际中会将 $\pi(\ell)$ 作为 $\Pi(H)$ 输入。后者在第 2.2 节中针对 $n = 2$ in$\widetilde{\ }$ 定义。结合定理 2.9 和 2.15，我们确认 $\Pi(H) = \pi(\ell)$。

定理 2.9. 对于 $n > 2$，设 $H \leq \Gamma(n, \mathbb{Q})$ 是层为 ℓ 的稠密集。设 q 为 $\Pi(H)$ 中所有奇素数的乘积。那么，ℓ 为偶数，当且仅当 $\delta_H(q) < \delta_H(4q)$。因此$\sim\Pi(H) = \pi(\ell)$。

证明。容易验证，[6, 定理 2.17]，对算术 $H \leq \Gamma(n, \mathbb{Z})$ 的证明可直接推广到当前情形。□

注 2.10. 定理 [6, 2.17] 的证明依赖于引理 [6, 2.12]。我们指出，该引理中的条件“$q > 3$ 为奇数”是多余的（即应改为“$q > 1$”）。

LevelMaxPCS 使我们能够描述 $H \leq \Gamma(n, R)$ 的所有同余商，即当 m 与 μ 互素时的同余像 $\varphi_m(H) = \varphi_m(\mathrm{cl}(H))$；过程 PrimesFor- Dense [6, §3.2]（它接受 H 中的一个平移以及 H 的一个生成集）给出了 R 的模极大理想的所有同余商。为进一步阐释前面的评论，我们令 H 为层为 ℓ 的一个同余子群。令 $a = \gcd(m, \ell)$，于是 $m = abc$，其中$\pi(b) \subseteq \pi(a)$，且 $\gcd(c, a) = \gcd(c, \ell) = 1$。那么 $\varphi_m(H)$ 同构于$\Gamma_{n,a}/\Gamma_{n,m} \times \Gamma_{n,c}/\Gamma_{n,m}$ 的一个子群。此外，这个分解中的第一因子有一个正规子群，同构于 $\Gamma(n, \mathbb{Z}_c)$，它从 $\varphi_m(H)$ 中分裂出来。因此，我们可以进一步假设$\pi(m) \subseteq \pi(\ell)$。同余商 $H\Gamma_{n,a}/\Gamma_{n,m}$ 于是是 $\Gamma(n, \mathbb{Z}_m)$ 中层为 a 的 PCS 经过 $\varphi_a(H)$ 扩张而成的群。

已知同余子群 $H \leq \Gamma(n, R)$ 的层后，我们可以为 H 解决其他问题，例如计算 $|\Gamma(n, R) : H|$，以及测试 $g \in \Gamma(n, R)$ 是否属于 H（参见 Grunewald 和 Segal 关于 “ 明确给出的 ” 算术 $\mathbb{Q}$-群 [7, §3.1] 的论述）。

2.2. 2 阶。在本小节中，$R = \mathbb{Z}[1/\mu]$, μ 为正整数，且 $\Gamma = \mathrm{SL}(2, R)$。对于与 μ 互素的整数 $m > 1$，我们将 Γ 中层为 m 的 PCS $\ker \varphi_m$ 记作 Γ_m。

令 $H \leq \Gamma$ 稠密（且有限生成）。一如既往，$\mathrm{cl}(H)$ 表示 H 在 Γ 中的同余闭包，并采用标准假设 $R = R_H$。H 在 Γ 中的 S-算术闭包包含于 $\mathrm{cl}(H)$ 中，且二者仅在 $R = \mathbb{Z}$ 时可能不同。

~我们关于 2 阶的主要结果，是对 LevelMaxPCS 的输入 $\Pi(H)$ 作出了新的规定（除此之外，该过程的运作完全不变）。我们将 2、3、5 列为例外素数：2 和 3 是因为对于 $p \in \{2,3\}$，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^2})$ 存在其层为 p 的 PCS 的真补群；而 2、3、5 则是因为对于 $p \in \{2,3,5\}$ 和素数 $r \neq p$，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_p)$ 与 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_r)$ 的子群之间可能存在非平凡的次直积。（重申一下：在大于 2 阶的情形中，只有 2 可能是例外素数，且仅发生在 3 阶或 4 阶时。）

引理 2.11。设 $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^a})$，$p$ 为素数。

(i) 若 $p > 3$，则 G的每个真正规子群都包含在 G的可解根中；该可解根是 $Z(\mathrm{SL}(2,p))$ 在 φ_p 下的完全原像。(ii) 若 $p = 2$ 或 3，则 G 可解，并且同样有唯一的极大正规子群。

证明。(i) 参见 [6, 引理 2.9] 的证明。

(ii) 对于 $p^a \in \{2,3,4,9\}$，这可以通过直接计算验证。对于更大的 a，任何其他极大正规子群都会是 PCS 在 p^{a-1} 中 G 的真补群，这违反了 [6,定理 2.5]。□

引理 2.12. 若 $q > 5$ 是素数幂，且 $p \neq q$ 是素数，则 $\mathrm{SL}(2,p)$ 不以 $\mathrm{PSL}(2,q)$ 为截面。

证明。（参见 [6, 引理 2.11]。）由 $\mathrm{PSL}(2,p)$ 子群的迪克森列表 [12, 主定理 8.27，第 213], 页，以及 $\mathrm{PSL}(2,q)$ 的单性，该断言显然成立。□

我们将用引理 2.11 和 2.12 代替 [6, 引理 2.9、2.11]，以证明 [6, 引理 2.12]（修订版；见备注 2.10）和 [6, 定理 2.13] 的 2 阶版本。

引理 2.13（参见 [6, 引理 2.12]）。设 a, k 为正整数，且 $p > 5$ 为不整除 k 的素数。假设 $U \leq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^a k})$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^a})$ 上的像是通过将 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^a k}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^a}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_k)$ 投影到其第一因子所得的投影 φ_{p^a} 得到的。那么 U包含 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^a})$。

证明。根据假设，U是 $A = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^a})$ 与 $B = \varphi_k(U)$ 的一个次直积，即$U \leq A \times B$，且将 AB 投影到 A 和 B 的分量投影限制在 U 上时均为满射。我们证明 $B \leq U$；于是 $A \leq U = A \times B$。

假设对于某个素数 r，有 $k = r^b$。若 $B \not\leq U$，则 A 与 B 有同构的非平凡商群。由引理 2.11，A 的任意非平凡商群都有一个同构于 $\mathrm{PSL}(2,p)$ 的商群；因此 $r > 3$，且 $\mathrm{PSL}(2,p)$ 是 $\varphi_r(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_k)) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_r)$ 的一个截面。但这与引理 2.12 矛盾。

现在假设 $k = r^b s$，其中 r 是一个不整除 s 的素数 r。根据上一段，$\varphi_{p^a r^b}(U) = A \times \varphi_{r^b}(U)$。因此，$\varphi_{p^a}$ 将映射 $W := U \cap \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^a s})$ 到 A 上。我们用 W 替换 U，并用 s 替换 k，然后递归进行。穷尽 k 的所有素因子后，我们得到一个包含 A 的 U 子群。□

定理 2.14（参见 [6, 定理 2.13]）。设 $H \leq \Gamma$ 稠密，层为 $\ell > 1$。假设$\varphi_p(H) = \mathrm{SL}(2,p)$，其中某个素数为 $p > 5$。那么 $p \nmid \ell$。

证明。假设 $\varphi_{p^{k-1}}(H) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^{k-1}})$，其中某个 $k \geq 2$，即 $\varphi_{p^k}(H)$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^k})$ 中补足 $\ker \varphi_{p^{k-1}}$。由 [6, 定理 2.5]，可得 $\varphi_{p^k}(H) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^k})$。这证明了对于所有 $k \geq 1$，$\varphi_{p^k}(H) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{p^k})$，结论由归纳法得出。

设 $\ell = p^a q$，其中 p 与 q 的最大公因数为 $= 1$。由引理 2.13，$\Gamma_q \leq H\Gamma_\ell = \mathrm{cl}(H)$。由于 ℓ 整除 $\mathrm{cl}(H)$ 中每个 PCS 的层，因此必有 $a = 0$。□

由定理 2.14，$\pi(\ell)\backslash\{2,3,5\} \subseteq \Pi(H)$。我们已经知道（引理 2.5），$\Pi(H) \subseteq \pi(\ell)$。现在我们来寻找 $\pi(\ell)$ 中的例外素数。为此，定义：对于素数 q，$r_q = r_q(H)$ 是所有大于 q 且整除 ℓ 的素数之积；若不存在这样的素数，则 $r_q = 1$。

定理 2.15（参见 [6, 定理 2.17]）。设 $H \leq \Gamma$ 稠密，层为 $\ell > 1$。假设$p \notin \Pi(H)$，其中 p 是 2、3 或 5 之一。那么 $p \in \pi(\ell)$ 当且仅当

(i) $\delta_H(r_5) < \delta_H(5r_5)$，对于 $p = 5$；(ii) $\delta_H(4) < \delta_H(36)$ 或 $\delta_H(2r_3) < \delta_H(6r_3)$，对于 $p = 3$；(iii) $\delta_H(9) < \delta_H(36)$ 或 $\delta_H(3r_3) < \delta_H(6r_3)$，对于 $p = 2$。

我们使用定理 2.15 找出所有满足 $\delta_H(p) = 1$ 且 $p|\ell$ 的 $p \in \{2,3,5\}$ 的集合 E。于是 $\pi(\ell) = \Pi(H) := \Pi(H) \cup E$（参见 [6, (2.3)]）。

证明定理 2.15 还需要一个引理。下文中，“psp”是“真次直积”的缩写。

引理 2.16. 设 A 和 B 为群，且设 $U \leq A \times B$ 是 A 的一个 psp，其中 B。假设 $A/(U \cap A)$ 有唯一的极大正规子群 $M/(U \cap A)$。那么 $B/(U \cap B)$ 有唯一的极大正规子群 $N/(U \cap B)$，使得 UMN/MN 是 A/M 的一个 psp，其中 B/N。

证明。存在一个同构 $\theta\colon A/(U \cap A) \to B/(U \cap B)$，使得

$$U = \{ab \mid a \in A, b \in B, \theta(a(U \cap A)) = b(U \cap B)\}.$$

对于 $X = A$ 或 B，令 $\rho_X\colon A \times B \to X$ 为典范投影映射。根据假设，$\rho_X(U) = X$。

定义 $N \leq B$为 $N/(U \cap B) = \theta(M/(U \cap A))$。令 $K = MN$。显然，UK/K是 A/M与 B/N的次直积。

假设 $UK = AB$。令 $a \in A$，于是对于 $u \in U$、$x \in M$，有 $a = uxy$，且 $y \in N$。那么 $1 = \rho_B(u)y$，这意味着 $\rho_B(u) \in N$。因此 $\rho_A(u) \in M$。然而，$a = \rho_A(u)x$，从而得到矛盾 $A \subseteq M$。□

定理 2.15 的证明。我们固定一些记号：$\delta = \delta_H$，$t =$与 $\gcd(6,\ell)$，且 s是 ℓ的 $\{2,3\}$ 部分。

对于每个 $p \in \{2,3,5\}$，不难证明，如果关于δ-值的条件成立，那么 $p|\ell$。我们接下来证明逆命题。

设 $\ell = 5^e sq$ for $e \geq 1$，且 q 与 30 互素。根据 [6, 定理 2.5] 及层的定义，$\varphi_\ell(H)$ 是 $\varphi_{5^e}(H) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_{5^e})$ 的一个 psp，其中 $\varphi_{qs}(H)$。回顾引理 2.11，任意素数幂 r 对应的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_r)$ 都有唯一的极大正规子群。由引理 2.16，

于是， $\varphi_{5r_5t}(H)$ 是 SL(2, 5) 的一个 psp，其中 $\varphi_{r_5t}(H)$。由于 SL(2, $\mathbb{Z}_t$) 不以 PSL(2, 5) 为截面， $\varphi_{5r_5}(H)$ 必须是 SL(2, 5) 的一个 psp，其中 $\varphi_{r_5}(H)$。因此 $\delta(r_5) \neq \delta(5r_5)$。

现在令 $p \in \{2,3\}$ 为 ℓ 的一个因子。若 $\delta(4) = \delta(36)$，且 $\delta(9) = \delta(36)$，则 $\delta(36) = 1$；进而，根据 [6, 定理 2.5]，对于所有 $\{2,3\}$-数 m， $\varphi_m(H) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_m)$。因此，$\varphi_\ell(H)$ 是 SL(2, $\mathbb{Z}_s$) 的一个 psp，且 $\varphi_{\ell/s}(H)$。仿照 $p = 5$ 情形推理（因此再次借助引理 2.16），可推得 $\varphi_{tr_3}(H)$ 是 SL(2, p) 的一个 psp，且 $\varphi_{r_3t/p}(H)$。于是，对于 $p = 2$，有不等式 $\delta(6r_3) > \delta(3r_3)$；对于 $p = 3$，有不等式 $\delta(6r_3) > \delta(2r_3)$。□

我们通过 $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 中的几个例子来说明定理 2.15。 G_i 下面的群根据 [5, 命题 3.7]是稠密的。

Let

$$G_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 946549 & -1531420 \\ -28215 & 45649 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 281823 & -631463 \\ 181643 & -406996 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 47149 & 1057765 \\ 32466 & 728359 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

PrimesForDense（见 [6, §3.2]）返回 $\Pi(G_1) = \{11\}$，即 $r_5 = 11$。我们计算得出$\delta_{G_1}(11) = 11$且 $\delta_{G_1}(36) = 1$，因此 $\delta_{G_1}(4) = \delta_{G_1}(9) = 1$。由于 $\delta_{G_1}(55) = 1320$，$\sim$定理 2.15 (i) 告诉我们， $5 \in \Pi(G_1)$。因此 $r_3 = 55$。由于 $\delta_{G_1}(2.55) = \delta_{G_1}(3.55) = \sim\delta_{G_1}(6.55) = 1320$，根据定理 2.15 (ii)、(iii)，我们有 $\Pi(G_1) = \{5, 11\}$。

接下来，令

$$G_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -11 & -105 \\ 2 & 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 161 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & -17 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

于是 $\Pi(G_2) = \emptyset$: G_2的层 ℓ是一个 $\{2,3,5\}$-数。因此 $r_5 = 1$。由于 $\delta_{G_2}(5) = 1$，根据定理 2.15 (i)，ℓ是一个 $\{2,3\}$-数。我们发现 $\delta_{G_2}(4) = 4$、$\delta_{G_2}(6) = 1$、$\delta_{G_2}(9) = \sim 27$，且 $\delta_{G_2}(36) = 108$。因此，根据定理 2.15 的 (ii) 和 (iii)， $\Pi(G_2) = \{2,3\}$。（注意， $r_3 = 1$，所以 $\delta_{G_2}(2r_3) = \delta_{G_2}(3r_3) = \delta_{G_2}(6r_3) = 1$。）

作为第三个例子，令

$$G_3 = \left\langle \begin{bmatrix} -23653189915040069676 & 781213252351873120 55 \\ -9796772300912447255 & 323566012839566343 24 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\begin{bmatrix} -155788448547916187356232801657680 7435 & 381996029351373124943017416479080 4354 \\ -190005768286926844172541097914459 2304 & 465897502131803280951478860372878 9629 \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{bmatrix} -389 & -285 \\ 1455 & 1066 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 166 & -225 \\ -45 & 61 \end{bmatrix} \right\rangle$$

（较大的元素来自将行列式归一化为 1）。于是 $\Pi(G_3) = \{5\}$: 因此 $r_3 = 5$和 $r_5 = 1$。我们计算得 $\delta_{G_3}(5) = 20, \delta_{G_3}(10) = 40, \delta_{G_3}(15) = 60, \delta_{G_2}(30) = 120$，$\sim$和 $\delta_{G_3}(36) = 1$。因此 $\Pi(G_3) = \{2,3,5\}$。

使用 GAP 软件包 kbmag [9]，可以验证 G_1 和 G_2 是薄的（即它们在 Γ中的指数无穷大）。同样，我们无法判定 G_3 是否薄，因为计算无法终止。

我们进一步计算得 $|\Gamma$: 对于 $i = 1$， $\mathrm{cl}(G_i)| = 1320$ 分别为 108、120；2、3。

2.3. 检验一个子群是否为同余子群。设 $H \leq \Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 是算术的（因而是稠密的）。在 [17, 中， H 的“层”定义为使得 H 包含 Γ- $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$的正规闭包的最小正$k \in \mathbb{Z}$。

命题 2.17。设 H 的层（按我们通常的意义）为 ℓ，“层”为 k。那么， H 是 Γ 的同余子群，当且仅当 $\Gamma_k \leq H$。在这种情况下， $k = \ell$。
证明。第一个结论见 [17, 定理 VIII.8]。第二个结论可由层的两个定义轻松推出。□

根据 [17, 定理 VIII.8], , Hsu [10] 设计了一种算法，用于检验 H 是否为 Γ 的同余子群。该算法应用于 [10, 例 2.5], , 证明 Γ 中一个指数为 10 的特定子群不是同余子群。事实上，对该子群运行 LevelMaxPCS 后可见，其层为 1。

[10] 中的方法也有其他可行方案。如果我们知道 Γ 中每个 PCS 的成员测试方法和生成集，就可以判定 $H =$ 是否包含于 cl(H)。或者，我们可以检查 H 的有限商。如果 H 有一个简单有限商，且该商不同构于任何 SL(2, p) 的子群，那么 H 就不是同余子群（在 [4, §4.2.4] 中，我们利用这一性质证明了 SL(3, $\mathbb{Z}$) 子群的薄性）。

3. 实验

我们讨论使用 GAP 实现的主要算法所进行的实验。所选示例旨在展示这些算法的实用性。我们的 GAP 代码可在 https://github.com/hulpke/arithmetic 获取。

在此，我们限制了测试群中参数的选取。更完整的表格发布于 https://www.math.colostate.edu/~hulpke/examples/Sintegral.pdf。

3.1. SL(2, $\mathbb{Q}$) 的子群。

在 [2], 中，我们研究了一个经典问题：如何证明（抛物型、由两个元素生成的）M¨obius 群具有非自由性。在本小节中，我们继续对 SL(2, $\mathbb{Q}$) 的子群进行实验。

对于 $s \in \mathbb{Q}$, 令 $G_s = \langle T, K_s \rangle$, 其中

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad K_s = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ \frac{1}{s} & 1 \end{bmatrix}.$$

根据 [17, 定理 VIII.16], $G_s = \langle T \rangle * \langle K_s \rangle \cong C_2 * C_3 \cong$ PSL(2, $\mathbb{Z}$) 是 SL(2, R) 的离散子群。若 $s \neq 1$, 则 G_s 在 SL(2, R) 中是瘦子群。由于 G_s 与 G_t 在 GL(2, $\mathbb{R}$) 下共轭当且仅当 $s = t$, 这些 G_s 是 SL(2, R) 中两两同构但彼此不共轭的子群。

我们运行 LevelMaxPCS 来计算各种 G_s 的层 ℓ_s 。随后计算了 cl(G_s) 在 SL(2, R) 中的指数 $|\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_{\ell_s}) : \varphi_{\ell_s}(G_s)|$; 见表1。尽管指数很大，运行时间却微不足道。

表1. $G_s \leq$ SL(2, $\mathbb{Q}$) 群的层和指数

群	层	指数
G_{11}	$2^2 3 \cdot 13 \cdot 1117$	$2^6 3^3 7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 43$
$G_{11/3}$	$2^2 5^2 13633$	$2^{10} 3 \cdot 5^2 17 \cdot 71 \cdot 401$
$G_{11/5}$	$2^2 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 12241$	$2^{16} 3^6 5 \cdot 7^2 13 \cdot 17^2 6121$
$G_{11/7}$	$2^2 3 \cdot 5^2 13 \cdot 17^2 19 \cdot 11113$	$2^{18} 3^7 5^3 7 \cdot 13 \cdot 17^2 19 \cdot 463 \cdot 5557$

3.2. 次数大于 2 的实验。对于 t、s、$r \in \mathbb{C}$，令

$$a(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8r & 1 & 0 & 0 \\ 48r^2 & 12r & 1 & 0 \\ 224r^3 & 84r^2 & 14r & 1 \end{bmatrix}.$$

于是 $H_4(t,s) = \langle a(t)\ b(s) \rangle \leq \mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$ 和 $H_4(t,r) = \langle a(t)\ c(r) \rangle \leq \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ 是稠密的。此外，若 $|t| > 8$、$|s| > 2$ 和 $|r| > 1$，则 $H_4(t,s)$ 和 $H_4(t,r)$ 是自由的（见 [1] 的命题 3.8 和例 3.10）。

3.2.1. $\mathrm{Sp}(4,R)$。注意，$H_4(t,s) \leq \mathrm{Sp}(\Phi,R)$，将形式 Φ 与其矩阵对应

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $b(s)$ 是一个平移，我们可以通过 PrimesForDense 计算 $\Pi(H_4(t,s))$。表 2 显示了 $H_4(t,s)$ 的层，以及其同余闭包在环境线性代数群 $\mathrm{Sp}(4,R)$ 中的指数。

表 2. 群 $H_4(t,s) \leq \mathrm{Sp}(4,R)$ 的层和指数

t	s	层	指数
$25/3$	$29/3$	$5^{13}29^2$	$2^{14}3^4 5^{65}7^2 13 \cdot 29^5 421$
$65/7$	3	$5^7 13^6$	$2^{14}3^4 5^{31}7^2 13^{28}17$
$71/7$	17	$17^2 71^6$	$2^{20}3^8 5^3 7^2 17^5 29 \cdot 71^{27} 2521$
$21/2$	5	$3^6 5^2 7^6$	$2^{23}3^{29}5^{11}7^{27}13$
$66/5$	$26/7$	$2^9 3^6 11^6 13^2$	$2^{61}3^{31}5^5 7^2 11^{27}13^5 17 \cdot 61$
$27/2$	$29/3$	29^2	$2^7 3^2 5^2 7^2 29^5 421$
$95/7$	3	$5^7 19^6$	$2^{14}3^6 5^{32}13 \cdot 19^{27}181$
$97/7$	$29/7$	$29^2 97^6$	$2^{20}3^4 5^3 7^6 29^5 97^{27} 421 \cdot 941$
17	13	$13^2 17^6$	$2^{18}3^6 5^2 7^2 13^5 17^{28}29$
26	$23/3$	$2^7 13^6 23^2$	$2^{44}3^6 5^3 7^2 11^2 13^{27}17 \cdot 23^5 53$
100	$16/3$	$2^{19}5^{13}$	$2^{113}3^4 5^{64}13$

3.2.2. $\mathrm{SL}(4,R)$。我们计算 $H_4(t,r)$ 的层，然后计算 $|\mathrm{SL}(4,R) : \mathrm{cl}(H_4(t,r))|$。这类数据的一个样本汇总于表 3 中。运行时间可以忽略不计。然而，计算$\Pi(H_4(t,r))$较慢，因为我们通过 [5, §4] 中的算法 PrimesNonSurjectiveSL 来完成此项计算。该算法用于检验伴随表示的不可约性。

表 3. 群 $H_4(t,r) \leq \mathrm{SL}(4,R)$ 的层和指数

t	r	层	指数
10	1/3	$2^{10}5^47$	$2^{87}3^55^{24}7{\cdot}13{\cdot}31$
9	5/2	3^95^47	$2^{22}3^{64}5^{24}13^231$
10	4/3	$2^{19}5^47$	$2^{149}3^55^{24}7{\cdot}13{\cdot}31$
15	7/4	$3^55^47^5$	$2^{27}3^{37}5^{24}7^{25}13^219{\cdot}31$

3.2.3. $\mathrm{SL}(5,R)$。最后，我们考察三角群$\Delta(3,3,4)$到$\mathrm{SL}(5,\mathbb{R})$的离散忠实表示（见 [14, §3] 和 [4, §4.2.2]）。令 $H_3(k) = \langle a_3(k)\ b_3(k)\rangle$，其中

$$a_3(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3-2k-8k^2 & -1+10k+32k^3 & -5-16k^2 \\ 0 & 4(-1+k) & -13-4k & 3+16(1+k)^2 & -4+16k \\ 0 & 1-k+4k^2 & 3-2k+8k^2 & -2(1+3k+16k^3) & 3+16k^2 \\ 0 & k & 2k & 1-2k-8k^2 & 1+4k \\ 0 & 0 & 3k & 3(-1+k-4k^2) & -2 \end{bmatrix}$$

and

$$b_3(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3-2k-8k^2 & -1+10k+32k^3 & -5-16k^2 \\ 0 & 1 & 3+4k & -13-8k-16k^2 & 4-16k \\ 0 & 0 & -2(1+k+4k^2) & 6k+32k^3 & -3-16k^2 \\ 1 & 0 & -2(1+k) & -1+2k+8k^2 & -1-4k \\ 2k & 0 & 1-2k & -4k & 1 \end{bmatrix}.$$

若 $k \in \mathbb{Q}$，则 $H_3(k)$ 是 $\mathrm{SL}(5,R)$ 的一个薄子群。照例，我们计算若干 $H_3(k)$ 的同余闭包的层和指数：见表 4。

表 4. 群 $H_3(k) \leq \mathrm{SL}(5,R)$ 的层和指数

k	层	指数
1/3	2^673^2	$2^{93}3^{10}5^27{\cdot}13{\cdot}31{\cdot}37^241{\cdot}73^{20}1801{\cdot}28792661$
2/5	$2^323^229^237$	$2^{46}3^{11}5^47^611^513{\cdot}19{\cdot}23^{20}29^{20}31{\cdot}37^441{\cdot}53{\cdot}67^279{\cdot}421{\cdot}4271{\cdot}292561{\cdot}732541$
5/8	$139{\cdot}151^2$	$2^{14}3^85^{10}7^213^219^223^341{\cdot}139^4151^{20}499{\cdot}877{\cdot}1093{\cdot}9170881{\cdot}104670301$
4/5	$2^311^273{\cdot}113^2$	$2^{60}3^95^87^511^{21}13^219^331{\cdot}41{\cdot}61{\cdot}73^4113^{20}251{\cdot}991{\cdot}1277{\cdot}1801{\cdot}3221{\cdot}59581{\cdot}28792661$
7/6	11^223^261	$2^{25}3^75^{10}7^211^{24}13{\cdot}19{\cdot}23^{20}31{\cdot}53{\cdot}61^579{\cdot}97{\cdot}131{\cdot}3221{\cdot}21491{\cdot}292561$
11/5	$2^661^297{\cdot}103^2$	$2^{112}3^{14}5^87{\cdot}11^213^317^431^461^{20}97^5103^{20}131{\cdot}941{\cdot}1061{\cdot}1861{\cdot}3169{\cdot}3571{\cdot}21491{\cdot}262321{\cdot}10332211$

我们使用来自 [4] 的过程计算 $\Pi(H_3(k))$，这些过程不涉及伴随表示。运行时间比 PrimesNonSurjectiveSL 短得多。

3.3. 一个应用。G.Soifer [13, 问题 2.26] 提出：

是否存在一个由两个元素生成的 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ 的全有限稠密子群?

我们对这个问题给出了肯定回答。

$n \geq 3$ 的 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ 的某些自由子群由 Humphries 在 [11] 中给出。每个子群模所有素数 p 都满射到 $\mathrm{SL}(n,p)$。其中一个群（G_4 见 [6, 第 983] 页）由

by

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & x^2+1 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & x+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x+1 & x^2 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $x = 11$生成。设

$$a = f_2 f_1 f_2^{-1} f_1^{-1} f_2 f_1^{-1} f_3^{-1}, \qquad b = (f_1^{-1} f_3^{-2} f_2 f_3^{-1})^{f_2}.$$

具体而言，

$$a = \begin{bmatrix} -176379047 & 1936571625 & -17817867 \\ -1941616205 & 21318171799 & -196142682 \\ 10 & -121 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -40193888 & -3684209 & -44180039 \\ 396162230 & 36312596 & 435450841 \\ 3829559 & 351021 & 4209349 \end{bmatrix}.$$

我们验证了 $H = \langle a, b \rangle$ 在模 $q = 4$ 意义下满射到 SL(3, $\mathbb{Z}_q$)，对所有素数 q 均成立。因此，根据注记 2.8，对于所有 $m > 1$，$\varphi_m(H) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}_m)$。

以肯定方式回答 Soifer 的问题的 $n > 3$ 示例可以用类似的方法构造（参见 [19,推论 3.3]）。

致谢。我们感谢国际数学会议中心、数学计算与实验研究所和奥伯沃尔法赫数学研究所通过 Research in Pairs、Collaborate@ICERM 和 Research Fellowship 项目提供的支持。我们感谢 Willem de Graaf 提供帮助。第三作者的研究部分得到了美国国家科学基金会 DMS-1720146 号资助和西蒙斯基金会资助项目 852063 的支持，在此一并致谢。

参考文献

1. A. S. Detinko 和 W. de Graaf，《单李代数的二生成与代数群的自由稠密子群》，《代数杂志》545 (2020)，159–173。 2. A. S. Detinko、D. L. Flannery 和 A. Hulpke，《有理 M¨obius 群的自由性与 S-算术性》。载于：《李群离散子群的计算方面》，《当代数学》783 (2023)，47–56。 3. A. S. Detinko 、 D. L. Flannery 和 A. Hulpke，《对辛超几何单值群进行实验》，《实验数学》，2020年6月在线发表。 4. A. S. Detinko、D. L. Flannery 和 A. Hulpke，《用于实验扎里斯基稠密子群的算法》，《实验数学》29 (2020)，第3期，296–305。 5. A. S. Detinko、D. L. Flannery 和 A. Hulpke，《强逼近定理与线性群计算》，《代数杂志》529 (2019)，536–549。 6. A. S. Detinko、D. L. Flannery 和 A. Hulpke，《算术群中的扎里斯基稠密性与计算》，《数学计算》87 (2018)，第310期，967–986。 7. A. S. Detinko、D. L. Flannery 和 A. Hulpke，《具有同余子群性质的算术群算法》，《代数杂志》421 (2015)，234–259。 8. GAP Group，《GAP——群、算法与程序设计》，4.11.1版，2021年。 9. D. Holt，GAP 软件包 kbmag。 10. T. Hsu，《确定模群的同余子群》，《美国数学会会刊》124 (1996)，第5期，1351–1359。 11. S. P. Humphries，《由横截变换生成的 $SL(n, Z)$、 $n > 2$ 的自由子群》，《代数杂志》116 (1988)，155–162。 12. B. Huppert，《有限群 I》，Springer-Verlag，柏林，1967年。 13. M. Kapovich、G. Margulis、G. Soifer 和 D. Witte Morris，《Workshop 19w5040 报告：李群的离散子群》，班夫国际研究站，2019年。

14. D. D. Long 和 M. B. Thistlethwaite，《SL(4, $\mathbb{Z}$) 中的扎里斯基稠密曲面子群》，《实验数学》27 (2018)，第1期，82–92。 15. A. Lubotzky 和 D. Segal，《子群增长》，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2003年。 16. J. Mennicke，《关于 Ihara模群》，《数学发明》4 (1967)，202–228。 17. M. Newman，《整矩阵》，学术出版社，纽约-伦敦，1972年。 18. J.-P. Serre，《SL2 的同余子群问题》，《数学年刊》(2) 92 (1970)，489–527。 19. G. A. Soifer 和 T. N. Venkataramana，《高秩半单群中的有限生成、有限拓扑稠密自由群》，《变换群》5 (2000)，第1期，93–100。 20. B. Sury 和 T. N. Venkataramana，《带有 $n \geq 3$ 的 SL(n, Z) 所有主同余子群的生成元》，《美国数学会会刊》122 (1994)，第2期，355–358。 21. T. N. Venkataramana，《关于同余子群问题》。 22. T. N. Venkataramana，《关于扩展同余子群的一个注记》，《国际数学研究通报》 1999 年，第15期，835–838。

哈德斯菲尔德大学计算与工程学院计算机科学系，英国哈德斯菲尔德 HD13DH。电子邮箱：A.Detinko@hud.ac.uk 戈尔韦大学数学与统计科学学院，爱尔兰戈尔韦大学路，H91 TK33。电子邮箱：dane.flannery@universityofgalway.ie 科罗拉多州立大学数学系，美国科罗拉多州柯林斯堡，CO 80523-1874。电子邮箱：Alexander.Hulpke@colostate.edu