arXiv:2303.06243v1 [math.FA] 10 Mar 2023

具有指数型非对角衰减的无穷阶矩阵型算子的可逆性

Stevan Pilipović*，Bojan Prangoski†，Milica Žigić‡

摘要

我们分析无限矩阵的元素及其逆矩阵的各种指数型非对角衰减率。已知，无限矩阵元素具有这种衰减，并不意味着其逆矩阵具有相同的衰减阶，即如果逆矩阵存在，它的衰减阶也未必相同。我们讨论这一结果的一些推论和扩展。

1 引言、动机与基本记号

我们研究可逆矩阵型算子$A = (A_{s,\ t})_{s,\ t}$的逆矩阵中各项的衰减率，其中各项$A_{s,\ t}$随距离$d(s,t) \to \infty$呈指数衰减。我们将这种衰减称为指数型非对角衰减。首先，我们说明本研究的一般框架。

回顾一下，如果索引集 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ 满足 $\Lambda = G\mathbb{Z}^d$，其中 G 是非奇异矩阵，那么它称为格。给定一个复可分希尔伯特空间 H，我们用 $\mathcal{L}(H)$ 表示作用于 H 上的所有有界线性算子构成的巴拿赫代数。如果 $A \in \mathcal{L}(H)$，那么相对于任意完备正交归一集，我们可以将 A 表示为一个矩阵（仍记作 A）。不失一般性，我们可以将研究范围限制在 $H = \ell^2(\Lambda)$ 的情形，并采用通常的算子范数 $\|A\|$。

文献 [8] 分析了一个具有多项式衰减的序列卷积巴拿赫代数 $\mathcal{A}$，并将其用作分析 Sjöstrand 类 $M^{\infty,\ 1}(\mathbb{R}^{2d})^{\sim}$ 相应扩展的工具（参见 [11]）。新的符号类 $M^{\infty,\ \mathcal{A}}$ 也可以通过托普利兹矩阵 $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ 来刻画，其对角线元素由 $\mathcal{A}$ 的元素确定。

考虑满足以下估计的矩阵型算子 A

$$|A_{s,t}| \leq C\omega,\ s,t \in \Lambda,$$

*理学院，诺维萨德大学，塞尔维亚，stevan.pilipovic@dmi.uns.ac.rs
†机械工程学院，圣西里尔与圣美多德大学，斯科普里，马其顿，bpran- goski@yahoo.com

‡理学院，诺维萨德大学，塞尔维亚，milica.zigic@dmi.uns.ac.rs

其中 $\omega = \omega_p = (1+|s-t|)^{-k/2}$，对某个 $k > 0$ 而言（即具有多项式型非对角衰减的矩阵类）；或者 $\omega = \omega_{se} = e^{k|s-t|^\beta}$ 对某个 $\beta \in (0, 1)$ 而言（即具有次指数型非对角衰减的矩阵类）。这些类共有的最重要性质之一是它们具有谱不变性。 [9]对此进行了说明，随后[12], [7]和 [8]也对此作了阐述；这里我们仅回顾一下，谱不变性（或维纳型性质）是指：如果 A 在 ℓ^2中可逆，那么它的逆具有相同的非对角衰减阶（多项式型或次指数型）。

最近，一系列论文 [1, 2, 3, 4, 5] 通过与 Gabor 波包相关的矩阵表示，以及 ΨDO 和 FIO 的近似对角化，研究了各种伪微分算子和傅里叶积分算子类的矩阵型刻画；这正如针对 Sjöstrand 类或 Gröchenig–Rzeszotnik 类 ΨDO 所提出的那样。

我们的结果安排如下。第二节中，我们回顾带限矩阵 [6] 的相关结果，并通过一个简单的例子展示这些结果 [6]未涵盖的特定情形。我们的例子表明，具有超指数型非对角衰减的矩阵类并非谱不变。正如 Jaffard [9], 针对指数型非对角衰减情形所证明的那样，逆矩阵的衰减速率不会保持不变；关于 Fréchet 框架背景下此类算子的结果，参见 [10] 。因此，在第三节中，我们给出逆矩阵衰减速率的一些精确估计，这些估计由 Jaffard 定理推出（参见 [10] 与 $d(s, t) = |s-t|$）。

我们的主要结果在第四节给出。在该节中，我们考虑不同的指数型非对角衰减率假设，并得到刻画矩阵型算子的新充分条件。最后，我们考虑满足如下形式估计的无限阶可逆矩阵：

$$|A_{s,t}| \le C_p e^{-pd(s,t)},\ s,t \in \Lambda, \quad \text{with} \quad C_p \le K e^{p\varphi(p)},\ p \in \mathbb{N},$$

其中， $\varphi(p)$ 是一个满足某些条件的严格递增函数。在主要结果中，我们给出了 A^{-1} 的元素的非对角衰减率估计。

2 带限矩阵与次指数型非对角衰减矩阵

从时间顺序来看，重要结果见于 [6], ，其中研究了一类特殊的 m–带状矩阵。回顾一下，如果对于 s、$t \in \Lambda$、$|s-t| > m$，矩阵 $A = (A_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda}$ 满足 $A_{s,t} = 0$，则称其为 m–带状矩阵。 [6, 命题 2.3] 证明，对于一个 m–带状可逆矩阵算子 $A \in \mathcal{L}(\ell^2(\Lambda))$，若 $(A^{-1}_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda} = A^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2(\Lambda))$，则以下估计成立：

$$|A^{-1}_{s,t}| \le C e^{\frac{1}{m}(\ln(1-\frac{2}{\sqrt{\kappa}+1})|s-t|)}, \quad s,t \in \Lambda, \tag{1}$$

其中， C 是依赖于 m、A 和 $[a,b]$、$a > 0$的某个正常数，其中 $[a,b]$ 是包含 AA^*的谱的最小区间，而 $\kappa = b/a$。

Jaffard [9] 的以下结果更为一般，因为它不假设具有带限性。记 $\mathcal{E}_\gamma$、 $\gamma > 0$为矩阵空间 $A = (A_{s,\ t})_{\Lambda\times\Lambda}$ ，其中矩阵的元素满足：

$$(\exists C_{A,\gamma} \geq 1)\ |A_{s,t}| \leq C_{A,\gamma} e^{-\gamma d(s,t)},\ \ s,t \in \Lambda. \tag{2}$$

定理 2.1. *([9,* 命题 *2])* 设 $A:\ \ell^2(\Lambda) \to \ell^2(\Lambda)$是作用于$\ell^2(\Lambda)$上的可逆矩阵。若 $A \in \mathcal{E}_\gamma$, 则存在某个 $\gamma_1 \in (0,\gamma)$，使得 $A^{-1} \in \mathcal{E}_{\gamma_1}$。

下面这个简单例子表明，对于任意 $k \in \mathbb{Z}_+$ ，都可以构造一个矩阵 A ，使其对所有 $\gamma > 0$都属于 $\mathcal{E}_\gamma$ ，但其逆矩阵 A^{-1} 仅在 $\gamma \leq 1/k$时属于 $\mathcal{E}_\gamma$ 。实际上， [6, 中第 3] 节以另一种更一般的形式提到了这个例子（更准确地说，考虑的是矩阵 AA^* ），其特点是估计 **(1)** 毫无用处（正如 [6]中所述）。由于问题简单，为了明确估计增长率，并便于进一步讨论超指数增长（参见注 **4.1 - 2.**），我们接下来讨论这个例子。

例 2.2. 令 $k \in \mathbb{Z}_+$. 考虑矩阵 $A = I - \Gamma$，其中 I 是单位矩阵， $\Gamma = (\Gamma_{s,t})_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 的元素定义为 $\Gamma_{s,t} = e^{-1/k}$ 若 $s+1 = t,\ s,t \in \mathbb{Z}$ 且$\Gamma_{s,t} = 0$ 否则，即

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0 & e^{-1/k} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & e^{-1/k} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & e^{-1/k} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \ and$$

$$A = I - \Gamma = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 1 & -e^{-1/k} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & -e^{-1/k} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & -e^{-1/k} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

（换言之， Γ 是 ℓ^2上的后移算子的 $e^{-1/k}$ 倍）。显然，对于每个 $\gamma > 0$，都存在 $C_\gamma > 0$ ，使得$|A_{s,t}| \leq C_\gamma e^{-\gamma|s-t|}$, $s,t \in \mathbb{Z}$; 即 A 属于$\bigcap_{\gamma>0} \mathcal{E}_\gamma$。由于$\|\Gamma\| = e^{-1/k} < 1$， A^{-1} 存在且 $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma^n$。容易验证，$\Gamma^n = (\Gamma^n_{s,t})_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 中的元素为：若 $s+n = t$, $n \in \mathbb{Z}_+$, s, $t \in \mathbb{Z}$，则为$\Gamma^n_{s,t} = e^{-n/k}$ ；否则为$\Gamma^n_{s,t} = 0$。因此，逆 $A^{-1} = (B_{s,t})_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 中的元素如下：$B_{s,t} =$

$e^{-(1/k)|s-t|}$ 当 $s \le t,\quad s,\ t \in \mathbb{Z}$ 且$B_{s,\,t} = 0$ 当 $s > t,\quad s,\ t \in \mathbb{Z}$；即

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 1 & e^{-1/k} & e^{-2/k} & e^{-3/k} & \dots \\ \dots & 0 & 1 & e^{-1/k} & e^{-2/k} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & e^{-1/k} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

因此，得到

$$|B_{s,t}| = e^{-(1/k)|s-t|}, \quad for \quad s \le t,\ s,t \in \mathbb{Z},$$

所以 $A^{-1} \in \mathcal{E}_\gamma$ 仅当 $\gamma \le 1/k$。

关于次指数增长，最一般的结果见 [7]：假设ρ： $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个严格递增、凹且归一化的（$\rho(0) = 0$）函数，并且满足

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{\rho(\xi)}{\xi} = 0. \tag{3}$$

如果函数 u 满足 $u(x) = e^{\rho(|x|)}, x \in \mathbb{Z}^d$，则称其为可容许权重。令 $s > d$，并设权重v 由 $v(x) = u(x)(1+|x|)^s, x \in \mathbb{Z}^d$ 给出。那么 [7, 推论 11] 指出：若存在 $C > 0$ 使得

$$|A_{s,t}| \le Cv(s-t)^{-1}, \quad s,t \in \mathbb{Z}^d,$$

那么存在 $C_1 > 0$ 使得

$$|A^{-1}_{s,t}| \le C_1 v(s-t)^{-1}, \quad s,t \in \mathbb{Z}^d.$$

这一断言推出下面的结论：矩阵 A 具有更强的次指数型非对角衰减，意味着逆矩阵 A^{-1} 也具有更强的次指数型非对角衰减（参见注 4.1 - 1）。

命题 2.3。 设 $A = (A_{s,t})_{\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d} \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}^d))$ 可逆，其逆为 $A^{-1} = (A^{-1}_{s\,t,})_{\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d}$。假设

$$(\forall k > 0)(\exists C_k > 0) \quad |A_{s,t}| \le C_k e^{-k\rho(|s-t|)},\ s,t \in \mathbb{Z}^d, \tag{4}$$

其中 ρ 满足上述假设。此外，假设对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$\tilde{C}_\varepsilon \frac{e^{\varepsilon\rho(\xi)}}{(1+\xi)^{d+1}} \ge 1,\ for\ all\, \xi \ge 0. \tag{5}$$

Then

$$(\forall k > 0)(\exists C'_k > 0) \quad |A^{-1}_{s,t}| \le C'_k e^{-k\rho(|s-t|)},\ s,t \in \mathbb{Z}^d. \tag{6}$$

证明。令 $k>0$ 为任意但固定的值。利用 (4) 和 (5)，我们推得

$$|A_{s,t}| \le C_{2k} e^{-2k\rho(|s-t|)} \le C_{2k}\tilde{C}_k \frac{e^{-k\rho(|s-t|)}}{(1+|s-t|)^{d+1}},\ s,t\in\mathbb{Z}^d.$$

因而，我们可以应用 [7, 推论 11]来推出命题中的结论 n. □

注 2.4. 显然，函数 $\rho(\xi)=\xi^\beta$, $\beta\in(0,1)$, $\xi\ge 0$ 满足命题 *2.3* 中的条件。

3 Jaffard结果及其他估计

本节将详细分析：当原矩阵具有指数型非对角衰减时，无穷阶逆矩阵的衰减情况，也就是说，当 $\rho(\xi)/\xi$ 不趋于零时。例如，当 $\rho(\xi)=c\xi$, $\xi\ge 0$ 时便是如此。实际上，我们遵循 [9] 中 Jaffard定理的证明，并给出精确估计。我们在 [10] 中考虑特殊情形$\rho(\xi)=c\xi$, $\xi\ge 0$，以及 $v(x)=e^{\rho(|x|)}$, $x\in\mathbb{Z}^d$. 。我们只给出部分证明，以便对逆矩阵元素的衰减率给出更好的估计。

设 Λ 是一个配备距离 d 的离散指标集，并满足以下假设：

$$m_\varepsilon := \sup_{s\in\Lambda}\sum_{t\in\Lambda} e^{-\varepsilon d(s,t)} < \infty,\ \ \forall \varepsilon>0. \tag{7}$$

注意，当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，函数 $\varepsilon\mapsto m_\varepsilon$（$0,\infty$）$\to[1,\infty)$ 是递减的，且 $m_\varepsilon\to\infty$。

定理 3.1。设 $A=(A_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda}$：$\ell^2(\Lambda)\to\ell^2(\Lambda)$ 是作用在 $\ell^2(\Lambda)$ 上的可逆矩阵，其逆为 $(A^{-1}_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda}=A^{-1}\in\mathcal{L}(\ell^2(\Lambda))$。假设 $A\in\mathcal{E}_\gamma$，也就是说，存在 $C_\gamma\ge 1$ 使得

$$|A_{s,t}|\le C_\gamma e^{-\gamma d(s,t)} \quad for\ all \quad s,t\in\Lambda.$$

那么存在常数 $\gamma_1\in(0,\gamma)$ 以及 $C_{A,\gamma_1}>0$，使得

$$|A^{-1}_{s,t}|\le C_{A,\gamma_1} e^{-\gamma_1 d(s,t)} \quad for\ all \quad s,t\in\Lambda. \tag{8}$$

此外，（8）成立，其中

$$\gamma_1=\min\left\{\delta, \frac{(\gamma'-\delta)\ln(1/r)}{\ln\left(\tilde{C}C_\gamma^2 r^{-1} m^2_{(\gamma-\gamma')/2}\right)}\right\},\quad C_{A,\gamma_1}=\frac{2C_\gamma m_{\gamma-\gamma_1}}{(1-r)\|A\|^2} \tag{9}$$

其中 $\gamma',\delta\in(0,\gamma)$、$0<\delta<\gamma'<\gamma$均为任意的，$r=\|\mathrm{Id}-\|A\|^{-2}AA^*\|$ 且 $\tilde{C}=1+\|A\|^{-2}$。

证明。关于 $\gamma_1 \in (0,\gamma)$ 和 $C_{A,\gamma_1} > 0$ 的存在性（使得式 (8) 成立）的第一部分，与 [9] 和 [10] 中的论述相同。我们补充若干细节，以推导出式 (8) 对由式 (9) 给出的常数成立。

令 $\tilde{A} = (\tilde{A}_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda} = AA^*/\|A\|^2$, $R = (R_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda} = \mathrm{Id} - \tilde{A}$ 并记为 $r = \|R\|$。由于$\|AA^*\| = \|A\|^2$, 我们推得 $r < 1$ （这与定理陈述中给出的常数 r 相同）。显然 $\tilde{A}^{-1} = (\tilde{A}^{-1}_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda} = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n$。令 $\gamma', \delta \in (0,\gamma)$, $0 < \delta < \gamma' < \gamma$ 为任意但固定的量，并记 $\gamma'' = (\gamma' + \gamma)/2$。直接计算可得

$$|\tilde{A}_{s,t}| \le C_\gamma^2 \|A\|^{-2} m_{\gamma-\gamma''} e^{-\gamma'' d(s,t)}, \text{ for all } s,t \in \Lambda.$$

由于 $m_{\gamma-\gamma''} \ge 1$，上述结果意味着 $|R_{s,t}| \le \tilde{C} C_\gamma^2 m_{\gamma-\gamma''} e^{-\gamma'' d_{(s,t)}}$，其中 $\tilde{C}$如定理陈述中所述。记作 $(R^n_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda} = R^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$，即可得出 $|R^n_{s,t}| \le r^n$, $s,t \in \Lambda$,$n \in \mathbb{Z}_+$。此外，按照证明 [9, 命题 2], 的相同方法，上述关于 $R_{s,t}$ 的估计意味着（注意到 $m_{\gamma-\gamma''} = m_{\gamma''-\gamma'} = m_{(\gamma-\gamma')/2}$）

$$|R^n_{s,t}| \le (\tilde{C} C_\gamma^2 m_{\gamma-\gamma''})^n m^{n-1}_{\gamma''-\gamma'} e^{-\gamma' d(s,t)} \le (\tilde{C} C_\gamma^2 m^2_{(\gamma-\gamma')/2})^n e^{-\gamma' d(s,t)},$$

对于所有 $s,t \in \Lambda$, $n \in \mathbb{Z}_+$. ，因此，

$$|\tilde{A}^{-1}_{s,t}| \le \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{ r^n, (\tilde{C} C_\gamma^2 m^2_{(\gamma-\gamma')/2})^n e^{-\gamma' d(s,t)} \right\}, \text{ for all } s,t \in \Lambda.$$

对于每个 $s,t \in \Lambda$，令 $n_0 = n_0(s,t) \in \mathbb{N}$ 为满足下列条件的最大 $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\tilde{C} C_\gamma^2 r^{-1} m^2_{(\gamma-\gamma')/2} \right)^n \le e^{(\gamma'-\delta) d(s,t)};$$

由于左侧随 n 增大，上述结论对所有 $n \le n_0$, $n \in \mathbb{N}$ 均成立，而 n_0 由下式给出

$$n_0 = \left\lfloor \frac{(\gamma'-\delta) d(s,t)}{\ln\left(\tilde{C} C_\gamma^2 r^{-1} m^2_{(\gamma-\gamma')/2} \right)} \right\rfloor.$$

因此，

$$r^{n_0+1} \le e^{E(\gamma',\delta) \ln r d(s,t)}, \text{ with } E(\gamma',\delta) = \frac{(\gamma'-\delta)}{\ln\left(\tilde{C} C_\gamma^2 r^{-1} m^2_{(\gamma-\gamma')/2} \right)}. \tag{10}$$

由此可得

$$\begin{aligned} |\tilde{A}^{-1}_{s,t}| &\le e^{-\delta d(s,t)} \sum_{n=0}^{n_0} (\tilde{C} C_\gamma^2 m^2_{(\gamma-\gamma')/2})^n e^{-(\gamma'-\delta) d(s,t)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} r^n \\ &\le e^{-\delta d(s,t)} \sum_{n=0}^{n_0} r^n + e^{E(\gamma',\delta) \ln r d(s,t)} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \\ &\le \frac{e^{-\delta d(s,t)}}{1-r} + \frac{e^{-E(\gamma',\delta) \ln(1/r) d(s,t)}}{1-r}. \end{aligned}$$

由 $A^{-1} = A^* \tilde{A}^{-1}/\|A\|^2$，我们得出，在 (9) 给出的 γ_1 和 C_{A,γ_1} 条件下，(8) 成立。 □

注 3.2. 如前所述，若 $\gamma' \to \gamma$，则 $m_{\gamma-\gamma'} \to \infty$。因此，当 γ' 趋近于 γ 且 δ 趋近于0 时，常数 γ_1 可以任意接近 0 。

4 依赖于常数增长率的估计

注 4.1。 *1.* 例 *2.2* 表明，对于任意 $k \in \mathbb{Z}_+$，都存在一个矩阵 $A \in \bigcap_{\gamma>0} \mathcal{E}_\gamma$，使得 $A^{-1} \in \mathcal{E}_{\gamma_1}$ 仅当 $\gamma_1 \le 1/k$ 时成立。因此，至多只能断言：即使 $A \in \bigcap_{\gamma>0} \mathcal{E}_\gamma$，其逆 $A^{-1} \in \bigcup_{\gamma>0} \mathcal{E}_\gamma$.

2. 超指数衰减无法保证谱不变性。令 $\beta > 1$ 和$|A_{s,\ t}| \le C_p e^{-p|s-t|^\beta}$。例 *2.2* 中的无限矩阵满足这一条件，但其逆仅具有指数衰减。

受此启发，本节旨在研究当 $A \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_p$ 时逆的衰减率估计，并对 $\mathcal{E}_p$ 的定义中的常数 C_p 施加额外假设（参见 (2)）。

假设矩阵型算子 $A = (A_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda}$：$\ell^2(\Lambda) \to \ell^2(\Lambda)$ 满足

$$(\forall p \ge 1)(\exists C_p \ge 1)\ |A_{s,t}| \le C_p e^{-pd(s,t)},\ \text{for all } s,t \in \Lambda. \tag{11}$$

设 φ 是一个严格递增函数 φ：$[1,\infty) \to [1,\infty)$，满足以下条件：

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{C_p}{e^{p\varphi(p)}} = K \in [1,\infty). \tag{12}$$

由于我们不希望考虑带限矩阵，常数 C_p, $p \in [1,\infty)$, 不应有上界（否则，对于所有 $s,t \in \Lambda$, $s \ne t$, $A_{s,t} = 0$）。设 $K > K$。条件 (12) 意味着，除有限多个 $p \in [1,\infty)$ 外，对所有 $p \in [1,\infty)$ 都有 $C_p \le \tilde{K} e^{p\varphi(p)}$。我们讨论以下几种情况。

1. 若函数 φ 有界，即若存在 $k_0 \ge 1$ 使得对所有 p 都有 $\varphi(p) \le k_0$，则除有限多个 $p \in [1,\infty)$ 外，均有 $C_p \le \tilde{K} e^{k_0 p}$。因此，对于 $d(s,t) > k_0$，可得 $A_{s,t} = 0$ （即带限情形）。

2. 若函数 φ 无界，即 $\lim_{p\to\infty} \varphi(p) = \infty$，则

$$|A_{s,t}| \le K_1 e^{p(\varphi(p)-d(s,t))},\quad \text{for all } s,t \in \Lambda,\ p \ge 1,$$

其中 $K_1 = \sup_{p\in[1,\infty)} C_p e^{-p\varphi(p)} \ge 1.$

例4.2. 考虑函数 $\varphi(p) = c_0 p^h$，其中某个 $c_0, h > 0$。于是，$\lim_{p\to\infty} \varphi(p) = \infty$。由于指数中的函数在 $\tilde{p} = \left(\frac{d(s,t)}{c_0(1+h)}\right)^{1/h}$ 处取得最小值，因此得到

$$|A_{s,t}| \le K_1 e^{c_0} e^{-d(s,t)},\quad \textit{for}\quad d(s,t) \le c_0(1+h),$$
$$|A_{s,t}| \le K_1 e^{-\tilde{c}_0 d(s,t)^{1+1/h}},\quad \textit{for}\quad d(s,t) > c_0(1+h),$$

其中 $\tilde{c}_0 = h c_0^{-1/h}\ (1+h)^{-1-1/h}$。因此，这种情况包括不一定是带状的矩阵，也就是说，它们的所有元素都可以非零。

对于下一个定理，我们假设 $\varphi\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ 具有以下性质：

(a) $\lim_{p\to\infty} \varphi(p) = \infty$ 和 $\varphi(1) = 1$,

(b) 存在 $a > 1$ 使得 $\varphi(\xi p) \le \xi^{a-1}\varphi(p)$ $p, \xi \in [1,\infty)$.

φ是严格递增函数这一事实，加上 (a) 和 (b)，意味着 φ 是连续的，见引理 4.5，因此是双射。

例 4.3. 函数 $\varphi(p) = p^\alpha$, $\alpha > 0$, 和 $\varphi(p) = \ln(p + e - 1)$, $\varphi\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$，提供了满足所有这些条件的例子。此类函数的乘积也满足上述条件。

定理 4.4. 假设矩阵型算子 $A = (A_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda}$: $\ell^2(\Lambda) \to \ell^2(\Lambda)$ 可逆，且 $(A^{-1}_{s,t})_{\Lambda\times\Lambda} = A^{-1}$ 是其逆。若 A 满足 *(11)* 和 *(12)*，其中φ: $[1,\infty) \to [1,\infty)$ 是满足 *(12)*、*(a)* 和 *(b)* 的严格递增函数，则存在 $C_A, b > 0$ 使得

$$|A^{-1}_{s,t}| \le C_A e^{-bd(s,t)}, \quad \textit{for all } s,t \in \Lambda. \tag{13}$$

此外，(13) 成立，其中

$$b = \frac{\ln(1/r)}{\ln(\tilde{C}K_1^2 m_1^2 r^{-1}) + 2\cdot 4^a} \ \textit{and}\ C_A = \frac{2C_2 m_1}{(1-r)\|A\|^2}, \tag{14}$$

其中 $r = \|\operatorname{Id} - \|A\|^{-2}AA^*\|$, $\tilde{C} = 1 + \|A\|^{-2}$, $K_1 = \sup_{p\in[1,\infty)} C_p e^{-p\varphi(p)} \ge 1$。

证明。(13)成立这一事实由 [9, 命题 2]得出；我们需要证明，在采用(14)中给出的常数时，(13)仍然成立。为此，我们沿用定理 3.1 的证明中$\tilde{A}$ 和 R 的记号。

容易推出

$$|\tilde{A}_{s,t}| \le C_{p+1}^2 \|A\|^{-2} m_1 e^{-pd(s,t)}, \text{ for all } s,t \in \Lambda,\ p \ge 1,$$

进而得到

$$|R_{s,t}| \le \tilde{C} C_{p+1}^2 m_1 e^{-pd(s,t)}, \text{ for all } s,t \in \Lambda,\ p \ge 1, \tag{15}$$

其中 C 如定理陈述所示。为估计 $R^n_{s,t}$，暂且记$\gamma_p = p + 2$ 和 $\gamma'_p = p + 1$。对于 $n \ge 2$，我们推得

$$\begin{aligned}
|R^n_{s,t}| &\le \sum_{s_1\in\Lambda} \cdots \sum_{s_{n-1}\in\Lambda} |R_{s,s_1}||R_{s_1,s_2}|\cdots|R_{s_{n-1},t}| \\
&\le (\tilde{C}C_{p+3}^2 m_1)^n \sum_{s_1\in\Lambda} \cdots \sum_{s_{n-1}\in\Lambda} e^{-\gamma'_p d(s,s_1)} \cdots e^{-\gamma'_p d(s_{n-1},t)} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot e^{-d(s,s_1)} \cdots e^{-d(s_{n-1},t)} \\
&\le (\tilde{C}C_{p+3}^2 m_1)^n e^{-\gamma'_p d(s,t)} \sum_{s_1\in\Lambda} \cdots \sum_{s_{n-1}\in\Lambda} e^{-d(s,s_1)} \cdots e^{-d(s_{n-2},s_{n-1})} \\
&\le (\tilde{C}C_{p+3}^2 m_1)^n m_1^{n-1} e^{-\gamma'_p d(s,t)}.
\end{aligned}$$

记 $\varphi_1(p) = p\varphi(p)$, $p \geq 1$, 我们得出

$$|R^n_{s,t}| \leq (\tilde{C}C^2_{p+3}m_1^2)^n e^{-(p+1)d(s,t)} \leq (\tilde{C}K_1^2m_1^2)^n e^{2n\varphi_1(p+3)}e^{-(p+1)d(s,t)},$$

对所有 $s,t \in \Lambda$, $n,p \in \mathbb{Z}_+$ （对于 $n = 1$，由于 (15)，这一点显然成立）。令 $\varepsilon > 0$ 为任意但固定的值。将上式特化到 $p = \varphi^{-1}(n^\varepsilon) \geq 1$，可得

$$|R^n_{s,t}| \leq (\tilde{C}K_1^2m_1^2)^n e^{2n\varphi_1(\varphi^{-1}(n^\varepsilon)+3)}e^{-\varphi^{-1}(n^\varepsilon)d(s,t)}e^{-d(s,t)},$$

对所有 $s,t \in \Lambda$, $n \in \mathbb{Z}_+$，进而得到

$$|\tilde{A}^{-1}_{s,t}| \leq \delta_{s,t} + \sum_{n=1}^{\infty} \min\left\{r^n, (\tilde{C}K_1^2m_1^2)^n e^{2n\varphi_1(\varphi^{-1}(n^\varepsilon)+3)}e^{-\varphi^{-1}(n^\varepsilon)d(s,t)}e^{-d(s,t)}\right\}, \qquad (16)$$

其中 $\delta_{s,t}$ 表示克罗内克δ。给定 $s,t \in \Lambda$，令 $n_0 = n_0(s,t,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ 为满足下式的最大 $n \in \mathbb{N}$

$$n^{1+\varepsilon}(\ln(\tilde{C}K_1^2m_1^2r^{-1}) + 2 \cdot 4^a) \leq d(s,t).$$

由于左侧随 n 增大，上式对所有 $n \leq n_0$ 均成立；显然

$$n_0 = \left\lfloor D(\varepsilon)d(s,t)^{1/(1+\varepsilon)} \right\rfloor, \text{ with } D(\varepsilon) = (\ln(\tilde{C}K_1^2m_1^2r^{-1}) + 2 \cdot 4^a)^{-1/(1+\varepsilon)}.$$

为估计 $\tilde{A}^{-1}_{s\,t,}$，我们在 n_0 处将级数 (16) 拆开，并写成[1]

$$\begin{aligned}|\tilde{A}^{-1}_{s,t}| &\leq \delta_{s,t} + \sum_{n=1}^{n_0}(\tilde{C}K_1^2m_1^2)^n e^{2n\varphi_1(\varphi^{-1}(n^\varepsilon)+3)}e^{-\varphi^{-1}(n^\varepsilon)d(s,t)}e^{-d(s,t)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} r^n \\ &= \delta_{s,t} + S_1 + S_2.\end{aligned}$$

由于 $D(\varepsilon) \geq D(0) = D = (\ln(\tilde{C}K_1^2m_1^2r^{-1}) + 2 \cdot 4^a)^{-1}$，可推得

$$S_2 = \frac{r^{n_0+1}}{1-r} \leq \frac{e^{-D\ln(1/r)d(s,t)^{1/(1+\varepsilon)}}}{1-r}.$$

为了估计 S_1，我们利用 $\varphi, \varphi(n^\varepsilon) \geq 1$ 的单调性和性质 (b) 推得（对于 $1 \leq n \leq n_0$）

$$\begin{aligned}&(\tilde{C}K_1^2m_1^2)^n e^{2n\varphi_1(\varphi^{-1}(n^\varepsilon)+3)} = \\ &\quad= r^n \exp\left(n\ln(\tilde{C}K_1^2m_1^2r^{-1}) + 2n(\varphi^{-1}(n^\varepsilon)+3)\varphi(\varphi^{-1}(n^\varepsilon)+3)\right) \\ &\quad\leq r^n \exp\left(n\ln(\tilde{C}K_1^2m_1^2r^{-1}) + 8n\varphi^{-1}(n^\varepsilon)\cdot 4^{a-1}\varphi(\varphi^{-1}(n^\varepsilon))\right) \\ &\quad\leq r^n \exp\left(\varphi^{-1}(n^\varepsilon)n^{1+\varepsilon}\left(\ln(\tilde{C}K_1^2m_1^2r^{-1}) + 2\cdot 4^a\right)\right) \\ &\quad\leq r^n e^{\varphi^{-1}(n^\varepsilon)d(s,t)}.\end{aligned}$$

[1]下文中，我们采用空和（空集求和）原理，即 $\sum_{j=1}^{0} r_j = 0$；当 $n_0 = 0$ 时就会出现这种情况

因此，

$$\delta_{s,t} + S_1 \le e^{-d(s,t)} \sum_{n=0}^{n_0} r^n \le \frac{e^{-d(s,t)}}{1-r}.$$

因此，

$$|\tilde{A}^{-1}_{s,t}| \le \frac{e^{-d(s,t)}}{1-r} + \frac{e^{-D\ln(1/r)d(s,t)^{1/(1+\varepsilon)}}}{1-r},$$

并且，由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得出结论（注意 $D\ln(1/r) \le 1$）

$$|\tilde{A}^{-1}_{s,t}| \le \frac{2e^{-D\ln(1/r)d(s,t)}}{1-r}, \text{ for all } s,t \in \Lambda.$$

由于 $A^{-1} = A^*\tilde{A}^{-1}/\|A\|^2$，我们得出 (13) 成立，其中 b 和 C_A 由 (14) 给出。 □

附录

引理 4.5. 令 $\varphi\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ 为满足以下性质的严格递增函数：

(*a*) $\lim_{p\to\infty} \varphi(p) = \infty$ 且 $\varphi(1) = 1$,

(*b*) 存在 $a > 1$ 使得 $\varphi(\xi p) \le \xi^{a-1}\varphi(p)$ $p, \xi \in [1,\infty)$。

那么 φ 是连续的。

证明。 令 $t_0 \in (1,\infty)$。记

$$A = \sup_{t\in[1,t_0)} \varphi(t), \quad B = \inf_{t\in(t_0,\infty)} \varphi(t).$$

由于 φ 严格递增，可得 $1 \le A \le \varphi(t_0)$ 和 $B \ge \varphi(t_0)$。我们声称$A = \varphi(t_0) = B$。假设 $A < \varphi(t_0)$。那么存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $A < \varphi(t_0) - \varepsilon$。对于每个 $t \in [1, t_0)$，利用 (*b*)，可得

$$\varphi(t_0) = \varphi\left(t \cdot \frac{t_0}{t}\right) \le \left(\frac{t_0}{t}\right)^{a-1} \varphi(t) < \left(\frac{t_0}{t}\right)^{a-1} (\varphi(t_0) - \varepsilon).$$

当 $t \to t_0^-$时，会导出矛盾。类似地，若假设 $B > \varphi(t_0)$，则存在$\varepsilon > 0$ 使得 $B > \varphi(t_0) + \varepsilon$。对于 $t \in (t_0,\infty)$，我们推得

$$\varphi(t_0) + \varepsilon < \varphi(t) = \varphi\left(t_0 \cdot \frac{t}{t_0}\right) \le \left(\frac{t}{t_0}\right)^{a-1} \varphi(t_0),$$

如果令 $t \to t_0^+$，这就产生矛盾。因此 $A = \varphi(t_0) = B$。由于 φ 严格递增，后者立即意味着 φ 在 $t_0 \in (1,\infty)$ 处连续。在 $t_0 = 1$处的连续性可用类似方法证明。

□

参考文献

[1] E. Cordero, K. Gröchenig, F. Nicola, L. Rodino, Luigi，傅里叶积分算子的 Wiener 代数。纯粹与应用数学杂志 99 (2013), 219–233。[2]E. Cordero, F. Nicola, L. Rodino，Gabor 波包与演化算子。伪微分算子与广义函数，45-59，算子理论：进展与应用，245，Birkhäuser/Springer，尚，2015。[3] E. Cordero, F. Nicola, L. Rodino，演化算子的 Gabor表示，美国数学会会刊 367(11) (2015) 7639–7663。[4] E. Cordero, F. Nicola, L. Rodino，解析函数空间中薛定谔方程的波包分析。数学进展 278 (2015), 182–209。[5] E. Cordero, F. Nicola, L. Rodino，傅里叶积分算子的指数稀疏表示。伊比利亚美洲数学评论 31 (2015), 461–476。[6] S. Demko, W. F. Moss, P. W. Smith，带状矩阵逆矩阵的衰减率，计算数学 43(168) (1984) 491–499。[7] K. Gröchenig, M. Leinert，矩阵代数的对称性与逆封闭性，以及无限矩阵的函数演算，美国数学会会刊 358(6) (2006) 2695– 2711。[8] K. Gröchenig, Z. Rzeszotnik，伪微分算子巴拿赫代数及其近似对角化，傅里叶研究所年刊。58(7) (2008) 2279–2314。[9] S. Jaffard，靠近其对角线的“良好局部化”矩阵的性质及若干应用，亨利·庞加莱研究所非线性分析年刊，7(5) (1990), 461–476。[10] S. Pilipović, D. Stoeva，Fréchet 框架的局部化与广义函数的展开，预印本。[11] J. Sjöstrand，伪微分算子代数，数学研究快报 1(2) (1994) 185–192。[12] T. Strohmer，关于 Toeplitz 矩阵计算的四个短篇故事，线性代数及其应用 343-344 (2002) 321–344。

致谢

S. Pilipović 的工作得到塞尔维亚共和国教育、科学与技术发展部 [研究项目 174024]的资助。

M. Žigić 的工作部分得到塞尔维亚共和国教育、科学与技术发展部 [研究项目 174024]以及伏伊伏丁那省科学秘书处 [研究项目 APV 142-451-2102/2019]的资助。B. Prangoski 的工作部分得到双边项目“微局部分析及其应用”的资助，该项目由马其顿和塞尔维亚科学院与艺术院出资。