arXiv:2303.06248v1 [physics.flu-dyn] 10 Mar 2023

# “设计型”随机场的二阶和三阶结构函数，以及湍流 Kolmogorov 4/5 和 2/3 标度律的涌现

STEVEN D MILLER

Abstract. 湍流的 4/5 和 2/3 定律可以从一种“设计型”随机向量场理论中涌现，这些随机向量场 $\mathcal{X}_i(x,t) = X_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X_i(x,t)\psi(x)$ 存在于 $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^d$ 中。这里，$X_i(x,t)$ 是一个光滑的确定性向量场，对所有 $(x,t) \in \mathsf{D} \times \mathbb{R}^+$ 都满足一个非线性偏微分方程，且 $\theta$ 是一个小参数。场 $\psi(x)$ 是一个经过正则化且可微的高斯随机场，其期望为 $\mathbb{E}[\psi(x)] = 0$，但其协方差核 $\mathscr{K}(x,y) = \mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda)$ 是反对称的，其中 $f(x,y) = -f(y,x) = 1, f(x,x) = f(y,y) = 0$，且 $K(\|x-y\|;\lambda)$ 是标准的平稳对称核。对于$0 \le \ell \le \lambda < L$ 满足 $X_i(x,t) = X_i = (0,0,X)$ 且 $\theta = 1$ 的情形，当 $d = 3$ 时，三阶结构函数为

$$S_3[\ell] = \mathbb{E}\left[|\mathcal{X}_i(x+\ell,t) - \mathcal{X}(x,t)|^3\right] = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3 = -\frac{4}{5}X^3$$

以及 $S_2[\ell] = CX^2$。若将随机场$\mathcal{X}_i(x,t)$ 视为湍流 $\mathcal{U}_i(x,t)$ 或速度，则经典 4/5 和 2/3 标度律随即显现；其中，平均流 $\mathbb{E}[\mathcal{U}_i(x,t)] = U_i(x,t) = U_i$ 是 Burgers方程的一个平凡解。假设耗散率 $\epsilon$恒定、黏度 $\nu$为较小的常数（对应于高雷诺数），并采用标准能量平衡定律，则对于某一范围 $\eta \le \ell \ll \lambda < L$

$$S_3[\ell] = \mathbb{E}\left[|\mathcal{U}_i(x+\ell,t) - \mathcal{U}(x,t)|^3\right] = -\frac{4}{5}\epsilon\ell$$

where $\eta = (\nu^{3/4}\epsilon)^{-1/4}$。对于二阶结构函数，2/3 定律表现为 $S_2[\ell] = C\epsilon^{2/3}\ell^{2/3}$.

## Contents

1. 引言：湍流的 4/5 和 2/3 标度律 1 2. 区域 $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^d$ 3中的随机标量场和“构造的”随机向量场 2 2.1. 由随机标量场构造的随机向量场 5 2.2. 结构函数 6 2.3. 三阶结构函数的 4/5 定律的显现 7 2.4. 二阶结构函数的表达式 12 3. 在流体力学中的应用及经典 Kolmogorov 湍流标度律的显现 13 3.1. 流体力学基本结果 13 3.2. 经典 4/5 和 2/3 标度律的显现 19 4. 结论 22 参考文献 23

## 1. Introduction: the 4/5 and 2/3 scaling laws of turbulence

在流体力学中，4/5 和 2/3 定律以及有限能量耗散定律是现代湍流理论中极为重要且已得到充分确立的基础性成果。目前，理论和实验领域已有大量文献专门研究这些定律以及湍流的一般问题 [**1-57**],及其中所引文献]。然而，迄今尚无一种数学上严谨且完全演绎的理论或推导，能够从纳维–斯托克斯方程出发，依据第一性原理精确地导出这些定律。本文将展示，如何从一套专门“设计”的随机向量场理论中，自然地得到这两条定律的结构或精确形式；这些随机向量场存在于一个 d 维区域内。经典的

如果将这些随机向量场视为湍流，或视为速度场，并假设流体具有恒定的耗散率 $\epsilon$ 和恒定（极小）的黏度$\nu$，且遵循标准的能量平衡定律，那么 4/5 和 2/3 标度律便会自然得出。

设有一种黏度极小的不可压缩流体 $\gtrsim 0$，其速度为 $U(x,t)$，并在适当的边界条件下，从某些初始数据出发，按照伯格斯方程或欧拉方程演化，在 D $\subset \mathbf{R}^d$ 内流动。若将流体速度分解为“平均”和“脉动”两部分，则 $U(x,t) = U(x,t) + U(x,t)$，其中 $\langle U(x,t)\rangle = U(x,t)$，且 $\langle U(x,t)\rangle = 0$，以及 $\langle U(x,t)U(y,t)\rangle \neq 0$。这里，$\langle \bullet \rangle$ 是适当的平均方式，例如时间平均或系综平均。因此，在雷诺数 $\mathscr{R} \gg 0$ 极高但并非无穷大的情况下，假设所有小尺度统计性质都由长度尺度 $\ell$ 和平均耗散率（单位质量）唯一且普适地决定。尽管从数学严谨性的角度看，这一结论仍属猜想，但在对统计性质（均匀性、各向同性）作出一些启发式假设后，Kolmogorov [**1-5**] 对高雷诺数下不可压黏性流体的湍流速度场结构作出了这一关键预测：对于 $d = 3$，以下 4/5 和 2/3 标度律在惯性区间内成立

$$S_3[\ell] = \left\langle \left|U(x+\ell,t) - U(x,t)\right|^3 \right\rangle = -\frac{4}{5}\epsilon\ell \tag{1.1}$$

$$S_2[\ell] = \left\langle \left|U(x+\ell,t) - U(x,t)\right|^2 \right\rangle = C_2\epsilon^{2/3}\ell^{2/3} \tag{1.2}$$

其中 $C_2$ 是某个常数。这些关系应在雷诺数较大且尺度较小 $\ell \sim 0$的极限下成立。特别是，4/5 定律是一个精确结果。在傅里叶空间中，2/3 定律对应于能谱的 $5/3 - law$。这里，$\ell$ 处于所谓的长度尺度惯性区间内

$$\eta \leq \ell \leq L \tag{1.3}$$

长度 $\eta = (\nu^{3/4}\epsilon)^{-1/4}$ 称为 Kolmogorov 尺度，它表示一个小尺度的耗散截断尺度，或最小涡旋的大小；积分尺度 L 表示流动中最大涡旋的大小，且不能超过区域的维度。在这一尺度上，黏度占主导地位，动能耗散并转化为热。能量通过一种“级联”过程，从最大尺度／涡旋传递至 Kolmogorov 尺度。对象 $S_p[\ell]$ 是 p 阶（纵向）结构函数，其一般形式为

$$S_p[\ell] = \left\langle \left|U(x+\ell,t) - U(x,t)\right|^p \right\rangle = C_p\big(\epsilon\ell\ \big)^{\zeta_p} \tag{1.4}$$

尽管这项研究被广泛引用，但在数学上仍不完整，本质上也属于启发式论述。不过，数十年来，其核心结论一直经得起检验；至少在基本假设的范围内，这些结论是可以接受的正确，并且在特定条件下有强有力的实验依据。但众所周知，真实流体通常并不完全符合 Kolmogorov 的预测。间歇性、速度“粗糙度”和能量耗散率的非均匀性，导致 [**6-10**] 中的标度指数偏离纯粹的线性行为。不过，实验表明，当 p 接近 3 时，该公式近似成立，其中 $\zeta_2 = \frac{2}{3} + [0.03, 0.06]$ 和 $\zeta_3 \sim 1$。例如，有研究报告称，绕球体流动中的一个数值为 $\zeta_2 \sim 0.701$，见 [**11**]；而在 [**12**] 中，$\zeta_2 \sim 0.71$。一些近期的高分辨率数值模拟报告了 $\zeta_2 \sim 0.725$。尽管结果略有差异，但都符合 $\zeta_2 \gtrapprox \frac{2}{3}$ 和 $\zeta_3 \lessapprox 1$。1962 年，Kolmogorov 还改进了 2/3 定律，以考虑间歇性 [**3**]。

显然，无论从物理、计算还是数学严谨性的角度来看，流体力学仍然极具挑战性。冯·诺伊曼在其著名的综述论文中讨论的许多问题至今仍然具有现实意义 [**26**]。我们仍有机会（也持续需要）将新的和已有的数学工具与方法应用于充分发展湍流问题：这些工具与方法应包括随机偏微分方程、随机与统计/随机几何以及随机场。充分发展湍流中的一个核心问题，是如何定义和计算雷诺应力、结构函数及速度相关性。现有方法大多依赖启发式思路，要以实用的方式严格定义或用数学形式表述所需的空间、时间或系综平均 $\langle \bullet \rangle$，难度极大。要在传统统计流体力学中严格定义统计平均，面临重重技术困难和局限，而且其物理适用范围也有限。然而，Kolmogorov 工作中的一个关键洞见是，湍流似乎本质上就是随机场。

本文考虑在闭欧几里得域 D $\subset \mathbf{R}^d$内构造时空随机向量场。如果将随机场

视为一种“工程化”的湍流或速度场，且平均流动 $U_i(x,t) = U_i$是 Burgers方程的平凡解，那么经典的 4/5 和 2/3 标度律便会出现。此外，假设耗散率 $\epsilon$ 恒定、黏度 $\nu \sim 0$ 为较小的常数（对应较高的雷诺数），并满足标准能量平衡定律。这些标度律在一定范围 $\eta \leq \ell \ll \lambda < L$内成立，其中 $\lambda$ 为相关长度。

## 2. RANDOM SCALAR FIELDS AND 'ENGINEERED' RANDOM VECTOR FIELDS IN ADOMAIN D $\subset$ $R^d$

本节将计算随机向量场的三阶和二阶结构函数，不涉及流体力学。后文将假设，充分发展湍流中的噪声或随机涨落是一种通用噪声，由概率论、随机分析以及随机场或函数的一般定理所决定。经典随机场或函数自然对应于随机随时间和/或空间变化的结构及系统属性。它们在数学和应用科学中有许多实用应用：湍流统计理论、地球科学、机器学习和数据科学、医学、工程学、成像、计算机图形学、统计力学和统计学、生物学及宇宙学领域 $[\mathbf{58}-\mathbf{84}]$。高斯随机场（GRF）尤为重要，因为它们在数学上更易处理，并且可通过中心极限定理，在具有较多自由度的系统中自发出现。高斯随机场相对于概率空间／三元组定义如下：

定义 2.1.（高斯随机场的形式定义）
设 $(\Omega\ \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间。那么： $\mathbb{P}$ 是一个函数，满足 $\mathbb{P}\colon\ \mathscr{F}\ \to\ [0,1]$，因此对所有$\mathcal{B} \in \mathscr{F}$，都存在一个与之关联的概率 $\mathbb{P}(\mathcal{B})$。当 $\mathbb{P}(\Omega)\ = 1$时，该测度是概率测度。设$x_i \subset \mathrm{D}\ \subset \mathrm{R}^n$ 为欧几里得坐标，并设 $(\Omega\ \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 为一个概率空间。设 $\mathscr{F}(x;\ \omega)$ 是一个依赖于坐标 $x \subset \mathrm{D}\ \subset \mathrm{R}^n$ 以及 $\omega \in \Omega$ 的随机标量函数。给定任意一对 $(x,\omega)$，存在一个映射 $\mathfrak{M}\colon \mathrm{R}^n \times \Omega\ \to \mathrm{R}$，使得 $\mathfrak{M}\colon (\omega, x)\ \longrightarrow \psi(x;\ \omega)$，因此 $\psi(x;\ \omega)$ 是定义在 $\mathrm{D}\ \subset \mathrm{R}^n$ 上、相对于概率空间 $(\Omega\ \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 的随机变量或场。随机场本质上是由随机变量族 $\{\psi(x;\ \omega)\}$ 构成的，它们定义在空间 $(\Omega\ \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 和 $\mathrm{R}^n$ 上。场也可以包含时间变量 $t \in \mathrm{R}^+$，因此给定任意三元组 $(x,t,\omega)$，都存在一个映射 $\mathfrak{M}\colon \mathrm{R}\ \times \mathrm{R}^n \times \Omega\ \to \mathrm{R}$，使得 $\mathfrak{M}\colon (x,t,\omega)\ \hookrightarrow \psi(x,t;\ \omega)$ 是一个时空随机场。通常，场将表示为 $\psi(x,t)$ 或 $\psi(x)$，其中省略 $\omega$ 。下文仅考虑空间场 $\psi(x)$。随机场 $\psi(x)$ 满足以下有界性和连续性条件： $[$ REFs$]$ $\mathbb{P}[\sup_{x\in\mathbf{D}} |\psi(x)|\ <\ \infty]\ = +1$以及 $\mathbb{P}[\lim_{x\to y} \left|\psi(x)\ - \psi(x)\right| = 0,\ \forall\,(x,y)\ \in \mathrm{D}] = 1$。

引理 2.2。该随机场至少是均方可微的，即 ***[56], [62], [64]***

$$\nabla_j \psi(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Xi(x) = \lim_{\ell\to 0} \left\{\psi(x + |\ell|\mathbf{e}_j) - \psi(x)\right\}|\ell|^{-1} \tag{2.1}$$

其中 $\mathrm{e}j$ 是沿 $j^{th}$ 方向的一个单位向量。对于高斯场，可用协方差或相关函数来给出可微性的充分条件，该函数必须在 $x\int = y$ 处满足正则性。场 $\nabla_i\psi, \nabla_i\nabla_j\psi(x)$ 的导数至少存在到二阶，并且可进行线积分、曲面积分和体积分$\int_\Omega \psi(x,t) d\mu(x)$。随机场的导数或积分也是一个随机场。

定义 2.3。关于空间 $(\Omega\ \mathscr{F}$ 的随机期望 $\mathbb{E}\langle\bullet\rangle)$ 和二元相关定义如下，其中 $(\omega,\vartheta)\ \in \Omega\qquad\qquad ,\mathbb{P})$

$$\mathbb{E}[\bullet] = \int_\omega \bullet\ \ d\mathbb{P}[\omega],\ \mathbb{E}[\bullet\times\bullet] = \iint_\Omega \bullet \times \bullet\ \ d\mathbf{P}[\omega] d\mathbb{P}[\vartheta] \tag{2.2}$$

对于高斯随机场 $\bullet = \psi(x,t)$，只需二元相关或协方差，因此

$$\mathbb{E}[\psi(x)] = \int_\omega \psi(x;\omega)\ d\mathbb{P}[\omega] = 0$$

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = \iint_\Omega \psi(x;\omega)\psi(y;\zeta)\ d\mathbb{P}[\omega] d\mathbb{P}[\zeta] = K(\|x-y\|;\lambda)\boldsymbol{\varphi}(t,s) \tag{2.3}$$

并在 $x = y$处对所有 $(x,y)\ \in \mathrm{D}$ 和 $t \in [0,\infty)$ 进行调控，当 $\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)] < \beta < \infty$。

定义 2.4. T　　定义在任意 $(x,y) \in \mathrm{D}$ 上的两个随机场 $\psi(x)$ $\psi(y)$）是相关的还是不相关的，取决于

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] \neq 0\\ \mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = 0\end{array}\right\} \tag{2.4}$$

定义 2.5. 零均值高斯随机场的协方差函数　　$is$

$$cov\left(\psi(x),\psi(y)\right) = \mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] + \mathbb{E}[\psi(x)]\mathbb{E}[\psi(y)] = \mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = K(\|x-y\|;\lambda) \tag{2.5}$$

因此，二元相关与协方差等价。这里 $\lambda$ 是相关长度。若 $K(\|x-y\|;\lambda) = K(\|y-x\|;\lambda)$仅取决于间距 $\|x-y\|$，则该高斯随机场具有各向同性；若$K(\|(x+\delta x) - (y+\delta y)\|;\lambda) = K(\|x-y\|;\lambda)$，则该场是平稳的。因此，对于所有 $\delta x > 0$ 和 $\delta y > 0$，二点函数 $K(\|x-y\|;\lambda)$在 $\mathrm{R}^d$ 中具有平移不变性和旋转不变性。

高斯随机场 $\psi(x)$的典型协方差为有理二次形式

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = K(\|x-y\|;\lambda) = \beta\left(1 + \frac{\|x-y\|^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha} \tag{2.6}$$

其中 $\lambda$ 是相关长度， $\alpha$ 是“尺度混合”参数。另一种常用的协方差核是高斯函数

$$\mathbb{E}[\psi(x)]\psi(y)] = K(\|x-y\|;\lambda) = \beta\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{\lambda^2}\right) \tag{2.7}$$

在这两种情况下，在 当 $\lambda \to 0$ 时，噪声会退化为空间白噪声，它是 $\delta$ 相关的

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] \longrightarrow \mathbb{E}[\mathcal{W}(t)\mathcal{W}(s)] = -\delta^3(x-y) \tag{2.8}$$

且二阶矩在 $\mathbb{E}[|\psi(x)|^2] = \infty$ 时会发散。随机场或噪声 $\psi(x)$ 是可微的，因为该场在此处经过正则化

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)] = \phi(x,x;\lambda) = \beta < \infty \tag{2.9}$$

高斯随机场在 $k$ 空间中也有傅里叶表示。

定义 2.6. 若 $\mathfrak{F} : \mathrm{R} \to \mathrm{K}$ 是一个傅里叶变换，则称一般的随机高斯标量场 $\psi(x)$ 是可谐的，若

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^{\not\perp}} \exp(ik_i x^i)\psi(k)d^3k \tag{2.10}$$

设 $\psi(x)$ 是一个对所有 $x \in \mathrm{R}^3$ 都存在的任意可谐高斯随机标量场。根据二元相关的基本傅里叶表示

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = \int_{\mathbb{K}^3} d^3k\Phi(k)\exp(ik_i(x-y)^i) \tag{2.11}$$

其中 $\Phi(k)$ 是谱函数，则对于满足 $\mathbb{E}\left[\psi(x)\ \ \psi(x)\right] = \int_{\mathbb{K}^3}\Phi(k)d^3k$ 的 $x = y$。

例如，对于 $\Phi(k) = 1$，可得到未经调节的白噪声，其

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = \int_{\mathbb{K}^3} d^3k\exp(ik_i(x-y)^i) = \mathbb{E}[\mathcal{W}(x)\ \mathcal{W}(y)] = C\delta^3(x-y) \tag{2.12}$$

而对于 $\Phi(k) = \frac{\beta}{k^2}\exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^2k^2\right)$，可得到核 (2.7)。

可以从标准核构造或“设计”出新的核。（此核将在后文中使用。）

命题 2.7。设 $\psi : \mathrm{D}\times\Omega \to \mathrm{R}^+$ 是一个对所有 $x \in \mathrm{D}$ 均存在的高斯随机场。设 $f : \mathrm{D}\times\mathrm{D} \to \{-1,0,1\}$ 是一个反对称函数，满足 $f(x,y) = -f(y,x) = 1$ 且 $f(y,x) = -1$，其中 $f(x,x) = f(y,y) = 0$。给定任意具有相关长度 $\lambda$ 的标准平稳各向同性核 $K(\|x-y\|;\lambda)$，则一个反对称核为

$$\mathscr{K}(\|x-y\|;\lambda) = \mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda) \tag{2.13}$$

因此，对于任意一对 $(x,y)$，随机场均可交换 $\in \mathrm{D}$，故

$$[\![\psi(x),\psi(y)]\!] = \psi(x)\psi(y) - \psi(y)\psi(x) = 0 \tag{2.14}$$

但期望不满足可交换性

$$\mathbb{E}\big[[\![\psi(x),\psi(y)]\!]\big]=\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)]-\mathbb{E}[\psi(y)\psi(x)]=2\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] \tag{2.15}$$

涉及一阶导数 $\nabla_i\psi(x)$ 的相关性为零。

引理 2.8。

$$\mathbb{E}[\psi(x)\nabla_i\psi(x)]=0 \tag{2.16}$$

$$\mathbb{E}[\nabla_i\psi(x)\nabla_j\psi(x)]=0 \tag{2.17}$$

证明。令 $\nabla_i^{(x)}=\frac{\partial}{\partial xi}$，使得 $\nabla_i^{(x)}\psi(y)=0$。则

$$\begin{aligned}&\nabla_i^{(x)}\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)]=\mathbb{E}[\nabla_i^{(x)}\psi(x)\psi(y)]\\&=\nabla_i f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda)+f(x,y)\nabla_i^{(x)}K(\|x-y\|;\lambda)=f(x,y)\nabla_i^{(x)}K(\|x-y\|;\lambda)\\&=f(x,y)d\left(\frac{\|x-y\|}{\alpha\lambda^2}\right)\left(1-\frac{\|x-y\|^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha-1}\end{aligned} \tag{2.18}$$

由于 $\nabla_i x=d$。取极限 $y\to x$，得到

$$\mathbb{E}[\psi(x)\nabla_i\psi(x)]=\lim_{y\to x}\mathbb{E}[\nabla_i^{(x)}\psi(x)\psi(y)]=\lim_{y\to x}f(x,y)d\left(\frac{\|x-y\|}{\alpha\lambda^2}\right)\left(1-\frac{\|x-y\|^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha-1}=0 \tag{2.19}$$

再次求导即可得到 (2.17)。 □

2.1. 由随机标量场构造随机向量场。给定随机（标量）场$\psi(x)$和光滑的确定性时空向量场 $X_i(x,t)$，可以定义一个新的随机向量场如下。

命题 2.9. 设 $X_i:\mathrm{D}\times\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^d$ 是一个光滑的确定性向量场，对所有 $(x,t)\in\mathrm{D}\times\mathrm{R}^+$均存在。所谓光滑，是指一阶和二阶导数 $\nabla_jX_i(x,t)$ $\Delta X_i(x,t)$存在；所谓确定性，是指该场 $X_i(x,t)$由初始数据 $X_i(x,0)=X_i^o(x)$出发，按照某个非线性偏微分方程演化，使得

$$\partial_tX_i(x,t)+\mathscr{D}_N\big[\nabla,\Delta,X_i(x,t)\big]X_i(x,t)\equiv\partial_tX_i(x,t)+\mathscr{D}_NX_i(x,t) \tag{2.20}$$

其中 $\mathscr{D}_N=\mathscr{D}_N[\nabla,\Delta,X_i]$ 是一个非线性微分算子。一个平凡解是 $X_i(x,t)=X_i^o$。高斯场 $\psi(x)$具有以下性质

$$\mathbb{E}[\psi(x)]=0 \tag{2.21}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)]=0 \tag{2.22}$$

$$\mathbb{E}[\nabla_i\psi(x)]=0 \tag{2.23}$$

$$\mathbb{E}[\Delta\psi(x)]=0 \tag{2.24}$$

$$\mathscr{K}(\|x-y\|;\lambda)=\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)]=f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda) \tag{2.25}$$

于是，d 维中的随机向量场 $\mathcal{X}_i(x,t)$可通过一个“混合”假设定义 $z$

$$\mathcal{X}_i(x,t)=X_i(x,t)+\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x,t)\psi(x) \tag{2.26}$$

因此，期望值为

$$\mathbb{E}[\mathcal{X}_i(x,t)]=X_i(x,t)+\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x,t)\mathbb{E}[\psi(x)]=X_i(x,t) \tag{2.27}$$

其中 $\theta>0$ 是一个较小的实参数。

随后，该随机向量场满足一个随机平均非线性随机偏微分方程。首先

$$\begin{aligned}&\partial_t\mathcal{X}_i(x,t)+\mathscr{D}_N\mathcal{X}_i(x,t)=\partial_t\mathcal{X}_i(x,t)+\mathscr{D}_NX_i(x,t)+\mathscr{D}_N\left\{\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x,t)\psi(x)\right\}\\&=\partial_t\mathcal{X}_i(x,t)+\mathscr{D}_N\big\{\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}\theta X_i(x,t)\psi(x)\big\}\end{aligned} \tag{2.28}$$

随后，随机平均随机偏微分方程为

$$\mathbb{E}[\mathscr{D}_N \mathcal{X}_i(x,t)] = \mathscr{D}_N X_i(x,t) + \mathbb{E}\left[\mathscr{D}_N\left\{\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X_i(x,t)\psi(x)\right\}\right]$$
$$= \mathscr{D}_N\big(\nabla,\Delta\big)\big\{\theta X_i(x,t)\psi(x)\big\} \tag{2.29}$$

新术语　　由于底层偏微分方程是非线性的，取期望时通常会出现新术语　　r.

2.2. 结构函数。现在定义向量场 $\mathcal{X}_i(x,t)$ 的结构函数。在 Kolmogorov 湍流理论中，三维情况下的三阶结构函数导出著名的 4/5 标度律，而二阶结构函数则导出 2/3 定律 [1-5]。本文将展示，随机场 $\mathcal{X})_i(x,t)$ 的结构函数也会呈现相同的数学形式。二阶

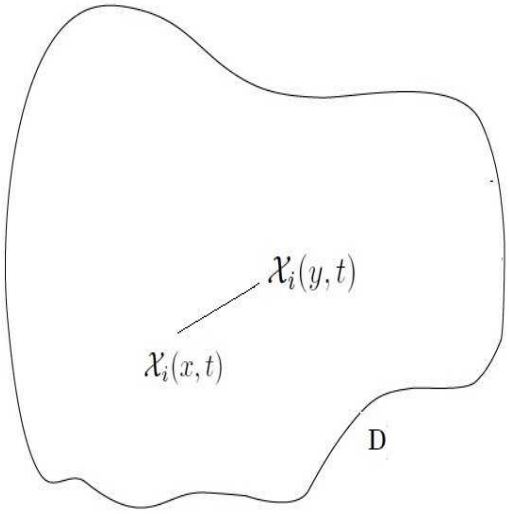


FIGURE 1. D 中两点处随机场之间的间隔

结构　　函数也等价于随机场典范度量的平方

定义 2.10. 给定 GRVF $\mathcal{X}_i(x,t)$，对于所有 $(x,t) \in \mathrm{D} \times \mathrm{R}^+$，典范度量定义为*[58]*

$$d_2(x,y|t) \equiv d_2(x,y) = \sqrt{\mathbb{E}\left[\left|\mathcal{X}_i(y,t) - \mathcal{X}_i(x,t)\right|^2\right]} \tag{2.30}$$

结构　　函数 $S[\mathcal{X}]$ of $\mathcal{X}_i(x,t)$ 因而等价于典范度量的平方

$$S_2[\|x-y\|] \equiv d_2^2(x,y) = \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{X}_i(y,t) - \mathcal{X}_i(x,t)\right|^2\right] \tag{2.31}$$

如果 $S_2[\mathcal{X}]$ 在某一长度尺度范围 $\ell = |y-x| \le L$ 内遵循标度律，那么可以预期

$$S_2[\mathcal{X}] = \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{X}_i(y,t) - \mathcal{X}_i(x,t)\right|^2\right] \sim C|y-x|^\zeta = C\ell^\zeta \tag{2.32}$$

其中 $\alpha > 0$ 是某种（分数）次幂。如果 $y = x+\ell$，且 $\ell \ll L$，并且 Vol(D) $\sim L^3$，那么

$$S_2[\ell] \equiv d_2^2(x,x+\ell) = \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{X}_i(x+\ell,t) - \mathcal{X}_i(x,t)\right|^2\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{X}_i(x+\ell,t)\right|^2\right] - 2\mathbb{E}\left[\left|\mathcal{X}_i(x+\ell,t)\mathcal{X}_i(x,t)\right|\right] + \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{X}_i(x,t)\right|^2\right] \tag{2.33}$$

如果 $S_2[\ell]$ 满足标度律，那么预期

$$S_2[\ell] = \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{X}_i(x+\ell,t) - \mathcal{X}_i(x,t)\right|^2\right] \sim C\ell^\zeta \tag{2.34}$$

推论 2.11。如果 $\boldsymbol{\ell}=0$ 或 $x=y$，那么

$$S_2[\ell=0]=d_2(x,x)=0 \tag{2.35}$$

为方便起见，我们始终假设 $S_2[\mathcal{X}]$ 连续，因此

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x} d_2^2(x,y) &= \lim_{y\to x}\mathbb{E}\left[\left|\mathcal{X}_i(y,t)-\mathcal{X}_i(x,t)\right|^2\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{y\to x}\left|\mathcal{X}_i(y,t)-\mathcal{X}_i(x,t)\right|^2\right]\end{aligned} \tag{2.36}$$

这等价于条件

$$\mathbb{P}\big[\lim_{y\to x}\left|\mathcal{X}_i(y,t)-\mathcal{X}_i(x,t)\right|=0,\ \forall\ (x,y)\in\mathbf{D}\big]=1 \tag{2.37}$$

这也与标度律相一致。

2.3. 三阶结构函数的 4/5 定律的涌现。现在可以得出主要定理。以“人工构造”的随机场 $\mathcal{X}_i(x,t)$ 为起点，可以证明，计算三阶结构函数时会涌现出 4/5 定律。

定理 2.12.（通过 $\mathrm{D}\subset\mathrm{R}^d$ 中“人工构造”的随机向量场涌现 4/5 定律）设向量场 $X_i(x,t)$ 在体积为 $Vol(\mathrm{D})$ 的区域 D 内演化，其演化遵循某个非线性偏微分方程

$$\partial_t X_i(x,t)+\mathscr{D}_N X_i(x,t)=0,\ (x,t)\in\mathbf{D}\times\mathbf{R}^+ \tag{2.38}$$

并以某个初始柯西数据 $X_i(x,0)=g_i(x)$ 为初值，其中 $\mathscr{D}_N$ 是一个涉及 $\nabla$、$\Delta$ 以及其自身 $X(x,t)$ 的非线性算子。于是，平凡的稳态解为 $X_i(x,t)=X_i=const$。设 $\psi(x)$ 是前文定义的随机高斯标量场，其具有一个反对称有理二次协方差核

$$\mathscr{K}(x,y;\lambda)=\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)]=f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda) \tag{2.39}$$

这里，$f(x,y)$ 是反对称函数 $f\colon \mathrm{D}\times\mathrm{D}\to\{-1,0,1\}$，满足 $f(x,y)=-f(y,x)$，其中 $f(x,y)=1$ 对所有 $(x,y)\in\mathrm{D}$ 均成立，且 $f(y,x)=-1$，其中 $f(x,x)=f(y,y)=0$。于是 $\nabla_i^{(x)}f(x,y)=\nabla_j^{(y)}f(x,y)=0$。核 $K(\|x-y\|;\lambda)$ 是适用于高斯随机场的任意标准平稳各向同性协方差核；例如，尺度混合参数为 $\alpha$ 的有理二次协方差给出

$$\mathscr{K}(x,y;\lambda)=\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)]=f(x,y)\left(1-\frac{\ell^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha},\ (\alpha,\beta>0) \tag{2.40}$$

对于高斯二次型

$$\mathscr{K}(x,y;\lambda)=\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)]=f(x,y)\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{2\lambda^2}\right) \tag{2.41}$$

那么对于 $y=x+\ell$

$$\mathbb{E}[\psi(x)]=0 \tag{2.42}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)]=0 \tag{2.43}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)]=0 \tag{2.44}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)]=f(x,x+\ell)K(\|\ell\|;\lambda) \tag{2.45}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x)]=-f(x,x+\ell)K(\|\ell\|;\lambda)\equiv f(x+\ell,x)K(\|\ell\|;\lambda) \tag{2.46}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)\psi(x)]=0 \tag{2.47}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x)]=0 \tag{2.48}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)\psi(x+\ell)]=0 \tag{2.49}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)]=0 \tag{2.50}$$

因为高斯随机场的所有奇数阶矩都为零。现在令 $\mathrm{Q}=[0,L]$，使得

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_1\bigcup\mathbf{Q}_2=[0,\lambda]\bigcup(\lambda,L]$$

那么，要么 $\ell \in \mathsf{Q}_1$ 或 $\ell \in \mathsf{Q}_2$。现在，我们在 $\mathsf{D} \subset \mathbb{R}^d$ 内「构造」以下随机向量场 .

$$\mathcal{X}_i(x,t) = X_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2}} X_i(x,t)\psi(x) \tag{2.51}$$

从而 $\theta = \frac{1}{\sqrt{15\beta}}$ 且 $\mathbb{E}[\mathcal{X}_i(x,t)] = X_i(x,t)$。因此，三阶结构函数为

$$S_3(\ell) = \mathbb{E}[|\mathcal{X}_i(x+\ell,t) - \mathcal{X}_i(x,t)|^3] \tag{2.52}$$

计算 $S_3(\ell)$，然后令 $X_i(x,t) \to X_i = (0,0,X)$，得到

$$S_3(\ell) = -\frac{12}{d(d+2)}\theta^2\beta\|X_i\|^3 K(\|\ell\|;\lambda) \tag{2.53}$$

在三维中， $d=3$ 并选择 $\theta = 1$ ，得到

$$S_3(\ell) = -\frac{12}{15}\|X_i\|^3 K(\|\ell\|;\lambda) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3 K(\|\ell\|;\lambda) \tag{2.54}$$

选择核 (2.39)，其中 $\beta = 1$

$$S_3(\ell) = -\frac{12}{15}\|X_i\|^3 K(\|\ell\|;\lambda) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3 \left(1 - \frac{\ell^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha} \tag{2.55}$$

因此，对于 $\ell \in \mathsf{Q}_1 = [0,\lambda]$ 且满足 $\ell \ll \lambda$ 的情况，$\frac{1}{2}|\ell/\lambda|^2$ 项非常接近于零，因此

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3 \tag{2.56}$$

在这一长度尺度范围内成立。这就是 4/5 定律。

证明。 $x$ 和 $x+\ell$ 处的随机场为

$$\mathcal{X}_i(x,t) = X_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2}} X_i(x,t)\psi(x) \tag{2.57}$$

$$\mathcal{X}_i(x+\ell,t) = X_i(x+\ell,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2}} X_i(x+\ell,t)\psi(x+\ell) \tag{2.58}$$

展开 $|\mathcal{X}_i(x+\ell,t) - \mathcal{X}_i(x,t)|^3$

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{X}_i(x+\ell,t) - \mathcal{X}_i(x,t)|^3 \\
&= \frac{\theta^3}{(d(d+2))^{3/2}}|\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell) \\
&- 3\frac{\theta^3}{(d(d+2))^{3/2}}X_i(x)X(x+\ell)X_i(x+\ell)\psi(x)\psi(x+\ell)\psi(x+\ell) \\
&+ 3\frac{\theta^3}{(d(d+2))^{3/2}}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\psi(x)\psi(x)\psi(x+\ell) \\
&+ 3\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(\ell)\psi(x)\psi(x) \\
&+ 3\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x+\ell) \\
&- 3\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x+\ell) \\
&- 6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\psi(x)\psi(x+\ell) \\
&+ 6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x) \\
&+ 3\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\psi(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+6\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\psi(x)\\
&+3\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\psi(x+\ell)\\
&+6\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\psi(x=\ell)\\
&+2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\psi(x+\ell)\\
&+X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&-3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&+3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&-\frac{\theta^3}{(d(d+2))^{3/2}}X_i(x)X_i(x)X_i(x)\psi(x)\psi(x)\psi(x)\\
&-3\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x)X_i(x)\psi(x)\psi(x)\\
&-3\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x)X_i(x)\psi(x)\\
&-X_i(x)X_i(x)X_i(x)
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

现在取　随机期望并使用 (2.42-2.50) 后，只有带下划线括号的项保留下来　　e

$$
\begin{aligned}
&S_3(\ell)=\mathbb{E}[|\mathcal{X}_i(x+\ell,t)-\mathcal{X}_i(x,t)|^3]\\
&=\frac{\theta^3}{(d(d+2))^{3/2}}X_i(x+\ell)]X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[|\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)X_i(x+\ell)]\\
&-3\frac{\theta^3}{(d(d+2))^{3/2}}X_i(x)X(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)]\\
&+3\frac{\theta^3}{(d(d+2))^{3/2}}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)\psi(x+\ell)]\\
&+3\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(\ell)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)]\\
&+3\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)]\\
&-3\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)]\\
&\underbrace{-6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)]}\\
&\underbrace{+6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x)]}\\
&+3\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)]\\
&+6\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)]\\
&+3\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)]\\
&+6\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)]\\
&+ \underbrace{X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)}\\
&- \underbrace{3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)}\\
&+ \underbrace{3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)}\\
&- \frac{\theta^3}{(d(d+2))^{3/2}}X_i(x)X_i(x)X_i(x)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)\psi(x)]\\
&- 3\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x)X_i(x)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)]\\
&- 3\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}X_i(x)X_i(x)X_i(x)\mathbb{E}[\psi(x)]\\
&- \underbrace{X_i(x)X_i(x)X_i(x)}
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

离开

$$
\begin{aligned}
S_3(\ell) &= \mathbb{E}[|\mathcal{X}_i(x+\ell,t)-\mathcal{X}_i(x,t)|^3]\\
&= -6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)]\\
&+ 6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x)]\\
&+ X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&- 3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&+ 3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&- X_i(x)X_i(x)X_i(x)
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

现在，由于根据 (2.45) 和 (2.46)，$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)] = -\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x)]$ 因此可得

$$
\begin{aligned}
S_3(\ell) &= \mathbb{E}[|\mathcal{X}_i(x+\ell,t)-\mathcal{X}_i(x,t)|^3]\\
&= -6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)]\\
&- 6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)]\\
&+ X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&- 3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&+ 3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&- X_i(x)X_i(x)X_i(x)
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

or

$$
\begin{aligned}
S_3(\ell) &= \mathbb{E}[|\mathcal{X}_i(x+\ell,t)-\mathcal{X}_i(x,t)|^3]\\
&= -6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)f(x,y)K(\|\ell\|;\lambda)\\
&- 6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_i(x)X_i(x)X_i(x+\ell)f(x,y)K(\|\ell\|;\lambda)\\
&+ X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&- 3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\\
&+ 3X_i(x)X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)
\end{aligned}
$$

$$- X_i(x)X_i(x)X_i(x) \tag{2.63}$$

现在 l 且 $X_i(x,t) = X_i(x+\ell,t) = X_i = (0,0,X)$，其中 $\|X_i\| = X$，对于所有 $(x,t) \in \mathsf{D} \times \mathsf{R}^+$。Th en

$$\begin{aligned}
&S_3(\ell) = \mathbb{E}[|\mathcal{X}_i(x+\ell,t) - \mathcal{X}_i(x,t)|^3] \\
&= -6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_if(x,y)K(\|\ell\|;\lambda) \\
&- 6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_if(x,y)K(\|\ell\|;\lambda) \\
&+ X_iX_iX_i - 3X_iX_iX_i + 3X_iX_iX_i - X_iX_iX_i \\
&= -6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_if(x,y)K(\|\ell\|;\lambda) - 6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_if(x,y)K(\|\ell\|;\lambda) \\
&= -6\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_i\big(f(x,y) + f(x,y)\big)K(\|\ell\|;\lambda) \\
&= -12\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_if(x,y)K(\|\ell\|;\lambda) \\
&= -12\frac{\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_iK(\|\ell\|;\lambda) \\
&= -12\frac{\theta^2}{d(d+2)}\|X_i\|^3K(\|\ell\|;\lambda)
\end{aligned} \tag{2.64}$$

令 $\theta = 1$ 由于该参数是任意的，且在三维中 $d = 3$ 因此

$$S_3(\ell) = -\frac{12\theta^2}{15}\|X_i\|^3K(\|\ell\|;\lambda) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3K(\|\ell\|;\lambda) \tag{2.65}$$

若选用有理二次协方差 (2.6)，则

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3K(\|\ell\|;\lambda) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3\beta\left(1 - \frac{|\ell|^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha} \tag{2.66}$$

并令 $\beta = 1$

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3K(\|\ell\|;\lambda) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3\left(1 - \frac{|\ell|^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha} \tag{2.67}$$

对于 $\ell/\lambda$ 非常小的长度尺度范围，即 $\ell \in \mathsf{Q}_1 = [0,\lambda]$ 且 $\frac{\ell^2}{2\alpha\lambda^2} \ll 1$ 则

$$\boxed{S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3} \tag{2.68}$$

这是一条 4/5定律。 □

注 2.13 。高斯衰减核（2.39）给出相同的结果，因为此时（2.62）变为

$$S_3(\ell) = -12\frac{\theta^2}{15}\|X_i\|^3K(\|\ell\|;\lambda) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3K(\|\ell\|;\lambda) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3\beta\exp\left(-\frac{\ell^2}{\lambda^2}\right) \tag{2.69}$$

当 $\beta = 1$ 和 $\ell/\lambda \sim 0$ 非常小时，其为 $S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\|X_i\|^3$

注 2.14。请注意，三阶结构函数有两种可能。对于 $X_i(x) = X_i(x+\ell) = X_i$，可以有

$$S_3(\ell) = -\frac{6\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_i\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)] + \frac{6\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_i\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x)] \tag{2.70}$$

*or*

$$S_3^*(\ell) = -\frac{6\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_i\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)] + \frac{6\theta^2}{d(d+2)}X_iX_iX_i\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)] \tag{2.71}$$

因为 $\psi(x)\psi(x+\ell) \equiv \psi(x+\ell)\psi(x)$，但 $\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)] = -\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x)]$。于是 $S_3^*(\ell) = 0$ 和 $S_3(\ell) = -\frac{12}{d(d+2)}X_i^3[\psi(x)\psi(x+\ell)] = -\frac{12}{d(d+2)}X_i^3f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda)$。因此，选择非零选项。

2.4. 二阶结构函数的表达式。. 接下来，针对同一随机场 $\mathcal{X}_i(x,t)$，计算二阶结构函数 $S_2(\ell)$

定理 2.15. 设定理 (2.10) 中的情形仍然成立。那么二阶结构函数为

$$S_2(\ell) = \mathbb{E}[|\mathcal{X}_i(x+\ell) - \mathcal{X}_i(x)|^2] \tag{2.72}$$

随机场仍由 (2.48) 给出，因此

$$\mathcal{X}_i(x,t) = X_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X_i(x,t)\psi(x) \tag{2.73}$$

其中 $\psi(x)$ 具有与之前相同的性质和协方差。那么

$$\begin{aligned}
|\mathcal{X}_i(x+\ell) - \mathcal{X}_i(x)|^2 &= \theta^2\theta^2 d(d+2) X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x+\ell) \\
&+ 2\frac{\theta^2}{d(d+2)} x(X)X(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x) \\
&- 2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X(x)X(x+\ell)\psi(x) \\
&- 2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\psi(x+\ell) \\
&+ 2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X_i(x)X_i(x+\ell)\psi(x+\ell) \\
&+ X_i(x+\ell)X_i(x+\ell) \\
&- 2X_i(x)X_i(x+\ell) \\
&+ \frac{\theta^2}{d(d+2)} X_i(x)X_i(x) \\
&- X_i(x)X_i(x) \\
&+ 2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X_i(x)X_i(x)\psi(x)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

取随机期望后，只有带下括号的项保留下来

$$\begin{aligned}
S_2(\ell) &= \mathbb{E}[|\mathcal{X}_i(x+\ell) - \mathcal{X}_i(x)|^2] \\
&= \theta^2\theta^2 d(d+2) X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)] \\
&\underbrace{+ 2\frac{\theta^2}{d(d+2)} x(X)X(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)]} \\
&- 2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X(x)X(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x)] \\
&- 2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X_i(x+\ell)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)] \\
&+ 2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X_i(x)X_i(x+\ell)\mathbb{E}[\psi(x+\ell)] \\
&+ X_i(x+\ell)X_i(x+\ell) \\
&- 2X_i(x)X_i(x+\ell) \\
&+ \frac{\theta^2}{d(d+2)} X_i(x)X_i(x) \\
&- X_i(x)X_i(x) \\
&+ 2\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} X_i(x)X_i(x)\mathbb{E}[\psi(x)]
\end{aligned} \tag{2.75}$$

因此

$$S_2(\ell) = \mathbb{E}\left[|\mathcal{X}_i(x+\ell) - \mathcal{X}_i(x)|^2\right] = \frac{2\theta^2}{d(d+2)} X_i(x) X_i(x+\ell) \mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)]$$

$$= \frac{2\theta^2}{d(d+2)} X_i(x) X_i(x+\ell) f(x, x+\ell) K(\|\ell\|; \lambda) \tag{2.76}$$

设定 $X_i(x+\ell) = X_i(x) = X_i = (0, 0, X)$

$$\begin{aligned} S_2(\ell) &= \frac{2\theta^2}{d(d+2)} X_i X_i f(x, x+\ell) K(\|\ell\|; \lambda) \\ &\equiv \frac{2\theta^2}{d(d+2)} \|X_i\|^2 f(x, x+\ell) K(\|\ell\|; \lambda) \\ &\equiv \frac{2\theta^2}{d(d+2)} \|X_i\|^2 K(\|\ell\|; \lambda) \end{aligned} \tag{2.77}$$

对于 $d = 3$

$$S_2(\ell) = \frac{2\theta^2}{15} \|X_i\|^2 K(\|\ell\|; \lambda) = C\|X_i\|^2 K(\|\ell\|; \lambda) \tag{2.78}$$

选择核 (2.39)

$$S_2(\ell) = C\|X_i\|^2 \left(1 + \frac{\ell^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha} \tag{2.79}$$

当 $\ell \in Q = [0, \lambda]$ 且 $\ell \ll \lambda$ 时，则 $(\ell^2/\lambda^2) \sim 0$。

$$\boxed{S_2(\ell) = C\|X_i\|^2} \tag{2.80}$$

## 3. APPLICATION TO FLUID MECHANICS AND THE EMERGENCE OF THE CLASSICAL KOLMOGOROV SCALING LAWS OF TURBULENCE

现在可以证明，当随机场 $\mathcal{X}_i(x,t)$ 被视为 $d = 3$ 的湍流速度场时，湍流经典 Kolmogorov 标度律的数学形式便从这一形式体系中涌现出来；也就是说，K41 二分之三定律和 K41 四分之五定律均由此涌现。

3.1. 流体力学的基本结果。这里简要介绍一些关于光滑或确定性“层流”流体力学的基本背景结果 [**33,34,50,51,54**]。在没有湍流的情况下，我们考虑稳态黏性伯格斯方程的一组光滑且确定性的解（$U_i(x,t)$ $\rho$），并在纳维–斯托克斯方程中将压力梯度项设为零。这里，$U_i(x,t)$是在 $x \in D \subset R^d$处的稳态流体速度，而 $\rho$ 是（均匀）密度。对于一般的伯格斯方程，设 $D \subset R^3$ 为一个具有 $x \in D$的紧致有界区域，其中充满密度为 $\rho$： $[0,T] \times R^3 \to R_{\geq}$、速度为$U$： $D \times R^{(+)} \to R^3$ 的流体，且 $U_i(x,t))_{1 \leq i \leq d}$，使得 $\rho = \rho(x,t)$和 $U_i = U_i$ $(x,t)$。于是，伯格斯方程为

$$\begin{aligned} &\partial_t U_i(x,t) + \mathscr{D}_N U_i(x,t) \\ &\equiv \partial_t U_i(x,t) - \nu \Delta U_i(x,t) + U^j(x,t) \nabla_j U_i(x,t) = 0, \ (x,t) \in \mathbf{D} \times \mathbf{R}^+ \end{aligned} \tag{3.1}$$

流体的黏度 很小，因此 $\nu$ is 很小，满足不可压缩条件 $\nabla_i U^i = 0$ .

定义 3.1。以下内容同样适用：

(a) 光滑的初始柯西数据为 $U(x,0) = U_o(x)$。如果 D 是边长为 L 的立方体或长方体，也可以施加周期边界条件，使得 $U_i(x+L,t) = U_i(x,t)$；或者施加无滑移边界条件 $U_i(x,t) = 0, \forall\, x \in \partial D$。对于某些 $C, K > 0$，初始数据还满足典型形式的界 $|\nabla_x^\alpha U_o(x)| \leq C(\alpha, K)(1+|x|)^{-K}$。所谓光滑的确定性流，是指确定且非随机的 $U_i(x,t)$，它从某个初始柯西数据 $U_i(x,0) = U_o(x)$ 出发，按照 NS 方程可预测地演化。例如，一个简单平凡的层流解为 $U_i(x,t) = U_i = const$。一般的光滑流至少具有二阶可微性，因此 $\nabla_j U_i(x,t)$ 和 $\nabla_i \nabla_j U_i(x,t)$ 存在。流体速度$U_i(x,t)$ 是一个无散向量场，且应符合物理合理性：也就是说，解不应增长过大或在 $t \to \infty$ 时爆发。

(b) D 内的雷诺数，其中 $Vol(\mathbf{D}) \sim L^d$，为

$$\mathscr{R}(x,t;\nu,L) = \frac{\|U_i(x,t)\|L}{\nu} \tag{3.2}$$

对于恒定速度 $U_i(x,t) = U_i$

$$\mathscr{R} = \frac{\|U_i\|L}{\nu} \tag{3.3}$$

对于 $\nu > 0$ 但 $\nu \sim 0$，雷诺数将非常大，但并非无穷大。(c) 给定流动 $U_i(x,t)$ 以及一条闭曲线或纽结 $\Gamma \in \mathbf{D}$，其中 $x \in \Gamma$，则环量 环量为

$$C(\Gamma) = \oint_\Gamma U_i(x,t)dx^i \tag{3.4}$$

涡量为

$$W^i(x,t) = \varepsilon^{ijk}\nabla_j U_k(x,t) \tag{3.5}$$

(d) 黏性流体的基本能量平衡方程满足

$$\|U_i(\bullet,t)\|^2_{L_2(\mathbf{D})} = \frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\mathbf{D}} U_i(x,t)U^i(x,t)d^3x = -\nu\int_{\mathbf{D}} |\nabla_j U_i(x,t)\nabla^j U^i(x,t)|^2 d^3x \tag{3.6}$$

或 $\frac{dE(t)}{dt} = -\nu\mathfrak{E}(t)$，其中 $\mathfrak{E}$ 是涡量平方。

(e) 恒定黏度 $\nu$ 下的能量耗散率为

$$\epsilon(x,t) = \frac{1}{2}\nu\left(\nabla_j U_i(x,t) + \nabla^i U^j(x,t)\right)^2 \tag{3.7}$$

如果流体是各向同性的，那么 $\nabla_j U_i = \nabla_i U_j$，因此

$$\epsilon(x,t) = \nu\left(\nabla_j U_i(x,t)\nabla^j U^i(x,t)\right) \tag{3.8}$$

那么体积分为

$$\int_{\mathbf{D}} \epsilon(x,t)d^3x = \nu\int_{\mathbf{D}} \left(\nabla_j U_i(x,t)\nabla^j U^i(x,t)\right)^2 d^3x \tag{3.9}$$

这等于 (3.4) 右端项的相反数，也是涡量平方的积分。因此，能量平衡方程为

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{D}} U_i(x,t)U^i(x,t)d^3x = -\int_{\mathbf{D}} \epsilon(x,t)d^3x \tag{3.10}$$

*or*

$$\left|\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{D}} U_i(x,t)U^i(x,t)d^3x\right| = \left|-\int_{\mathbf{D}} \epsilon(x,t)d^3x\right| \equiv \left|\int_{\mathbf{D}} \epsilon(x,t)d^3x\right| \tag{3.11}$$

注 3.2。由 (3.6) 可自然地预期，当 $\nu \to 0$ 时，能量耗散率 $\epsilon(x,t)$ 将简单地趋于零。然而，实验和数值观测均与这一（天真）预期相矛盾——当 $\nu$ 趋于零时，耗散率始终保持有限，且独立于 $\nu$。在流体力学文献中，这称为反常耗散（AD）。这也可表示为

$$\lim_{\nu\to 0} \nu|\nabla_j U_i(x,t)|^2 = \epsilon > 0 \tag{3.12}$$

Kolmogorov 在其 1941年 推导 2/3 定律和 4/5 定律时，假设了 AD。之所以有 AD，是因为无论 $\nu$ 有多小，能量总会从较大尺度级联到较小尺度。Onsanger 从欧拉方程弱解的 Hölder连续性角度解释了 AD *[13]*，但目前还没有对 AD 作出严谨的数学描述。

现在，我们考察一个表示湍流的“人工构造”随机场 $\mathcal{U}_i(x,t)$，并说明计算三阶结构函数时会呈现 4/5 定律的形式。

命题 3.3。 随机场 $\mathcal{U}_i(x,t)$ 与 (2.24) 具有相同的形式，因此对于所有 $x \in \mathrm{D} \subset \mathrm{R}^d, t \in \mathrm{R}^+$ .

$$\mathcal{U}_i(x,t) = U_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2}} U_i(x,t)\psi(x) \tag{3.13}$$

且当 $U_i(x,t) = U_i$

$$\mathcal{U}_i(x,t) = U_i + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2}} U_i\psi(x) \tag{3.14}$$

其中 $U_i(x,t)$ 按伯格斯方程演化，而 $U_i$ 是一个平凡的稳态解。在三维中， $d = 3$

$$\mathcal{U}_i(x,t) = U_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{15}} U_i(x,t)\psi(x) \tag{3.15}$$

$$\mathcal{U}_i(x,t) = U_i + \frac{\theta}{\sqrt{15}} U_i\psi(x) \tag{3.16}$$

期望给出平均流速

$$\mathbb{E}[\mathcal{U}_i(x,t)] = U_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2}} U_i(x,t)\mathbb{E}[\psi(x)] = U_i(x,t) \tag{3.17}$$

且当 $U_i(x,t) = U_i$

$$\mathbb{E}[\mathcal{U}_i(x,t)] = U_i + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2}} U_i\mathbb{E}[\psi(x)] = U_i \tag{3.18}$$

可以简要证明，湍流或随机场 $\mathcal{U}_i(x,t)$ 与流体力学的基本重要方面相容。

引理 3.4. 流动 $U_i(x,t)$ 是各向同性的，当 $\nabla_j U_i(x,t) = \nabla_i U_j(x,t)$；当 $\nabla^j U_j(x,t) = 0$ 时，它是不可压缩的。因此，对于湍流

$$\mathbb{E}[\nabla^j U_j(x,t)] = 0 \tag{3.19}$$

$$\mathbb{E}[\nabla_i \mathcal{U}_j(x,t)] = \mathbb{E}[\nabla_j \mathcal{U}_i(x,t)] \tag{3.20}$$

证明。

$$\nabla^j U_j(x,t) = \nabla^j U_j(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} \nabla_j U_j(x,t)\psi(x) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} U_j(x,t)\nabla_j\psi(x) \tag{3.21}$$

因此，期望为

$$\mathbb{E}[\nabla^j \mathcal{U}_j(x,t)] = \nabla^j U_j(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} \nabla_j U_j(x,t)\mathbb{E}[\psi(x)]$$

$$+ \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} U_j(x,t)\mathbb{E}[\nabla_j\psi(x)] = \nabla^j U_j(x,t) \tag{3.22}$$

and

$$\mathbb{E}[\nabla^j \mathcal{U}_i(x,t)] = \nabla^j U_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} \nabla_j U_i(x,t)\mathbb{E}[\psi(x) \tag{3.23}$$

$$] + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} U_i(x,t)\mathbb{E}[\nabla_j\psi(x)] = \nabla^j U_i(x,t) \tag{3.24}$$

$$\mathbb{E}[\nabla^i \mathcal{U}_j(x,t)] = \nabla^i U_j(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} \nabla_i U_j(x,t)\mathbb{E}[\psi(x)] \tag{3.25}$$

$$+ \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} U_j(x,t)\mathbb{E}[\nabla_j\psi(x)] = \nabla^i U_j(x,t) \tag{3.26}$$

□

引理 3.5. 对于具有以下性质的高斯场 $\psi(x)$ 下的湍流 $\mathcal{U}_i(x,t)$

$$\mathbb{E}[\psi(x)] = 0 \tag{3.27}$$
$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)] = 0 \tag{3.28}$$
$$\mathbb{E}[\nabla_i\psi(x)] = 0 \tag{3.29}$$
$$\mathbb{E}[\nabla_i\psi(x)\nabla^i\psi(x)] \tag{3.30}$$
$$\mathbb{E}[\Delta\psi(x)] = 0 \tag{3.31}$$
$$\mathscr{K}(\|x-y\|;\lambda) = \mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda) \tag{3.32}$$

(1) 平均能量积分为

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbf{D}} \mathcal{U}_i(x,t)\mathcal{U}^i(x,t)d^3x\right] = \int_{\mathbf{D}} U_i(x,t)U^i(x,t)d^3x \tag{3.33}$$

(2) 平均能量耗散为

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(x,t)] = \nu\mathbb{E}[|\nabla_j\mathcal{U}_i\nabla^j\mathcal{U}^i|] = \nu\nabla_j U_i\nabla^j U^i = \epsilon(x,t) \tag{3.34}$$

(3) 黏度 $\nu$ 固定时的平均能量平衡定律为

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbf{D}} \mathcal{U}_i(x,t)\mathcal{U}^i(x,t)d^3x\right] = -\nu\int_{\mathbf{D}} \mathbb{E}[|\nabla_j\mathcal{U}_i\nabla^j\mathcal{U}^i|]d^3x \tag{3.35}$$

*iff*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{D}} U_i(x,t)U^i(x,t)d^3x = -\nu\int_{\mathbf{D}} [|\nabla_j U_i\nabla^j U^i|]d^3x \tag{3.36}$$

这就是具有黏度 $\nabla_i U_j(x,t) = \nabla_j U_i(x,t)$的各向同性流体的基本能量平衡定律。

证明。为证明 (1)

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbf{D}} \mathcal{U}_i(x,t)\mathcal{U}^i(x,t)d^3x\right]\\ &= \int_{\mathbf{D}} U_i(x)U^i(x)d^3x + \frac{2\theta}{\sqrt{d(d+2)}}\int_{\mathbf{D}} U_i(x,t)U^i(x,t)\mathbb{E}\left[\psi(x)\right]d^3x \qquad (3.37)\\ &+ \frac{\theta^2}{d(d+2)}\int_{\mathbf{D}} U_i(x,t)U^i(x,t)\mathbb{E}\left[\psi(x)\psi(x)\right]d^3x = \int_{\mathbf{D}} U_i(x)U^i(x)d^3x \qquad (3.38)\end{aligned}$$

为证明 (2)

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_{\mathbf{D}} \nabla_j\mathcal{U}_i(x,t)\nabla^j\mathcal{U}^i(x,t)d^3x\right]\\ &= \int_{\mathbf{D}} \nabla_j U_i(x)\nabla^j U^i(x)d^3x + \frac{2\theta}{\sqrt{d(d+2)}}\int_{\mathbf{D}} \nabla_j U_i(x,t)\nabla^j U^i(x,t)\mathbb{E}\left[\psi(x)\right]d^3x \qquad (3.39)\\ &+ \frac{\theta^2}{d(d+2)}\int_{\mathbf{D}} \nabla_j U_i(x,t)\nabla^j U^i(x,t)\mathbb{E}\left[\nabla_j\psi(x)\nabla^j\psi(x)\right]d^3x = \int_{\mathbf{D}} \nabla_j U_i(x)\nabla^j U^i(x)d^3x \qquad (3.40)\end{aligned}$$

那么，如果 (3.25) 成立，(3.24) 就成立。注意，这里应用了 Fubuni 定理，该定理指出，如果 $\mathcal{Y}_i(x,t)$ 是一个一般的随机场，那么 $\mathbb{E}[\int \mathcal{Y}_i(x,t)d^3x] \equiv \int \mathbb{E}[\mathcal{Y}_i(x,t)]d^3x$。□

在极大的长度和时间尺度范围内存在涡旋，是湍流的一个典型特征 [**57**]。这一范围的大小主要由雷诺数决定，雷诺数是惯性力与黏性力之比。当雷诺数非常大但并非无限大（$\nu \sim 0$）时，惯性项或《非线性》占主导地位，导致产生多种尺度的涡旋，因此流动呈现湍流状态；例如，在海洋和大气中，涡旋的尺度可以从数百千米到几毫米不等。根据 Kolmogorov 理论，能量从大涡旋传递到较小的涡旋，直至柯尔莫哥洛夫长度尺度 $\eta$，并以热的形式耗散。但随着黏度增加，湍流往往会受到抑制；例如，在蜂蜜或橄榄油中，湍流会受到极大抑制，甚至完全消失。以下引理表明，随机场 $\mathcal{U}_i(x,t)$ 可以导致涡旋“缠结”或相关性。

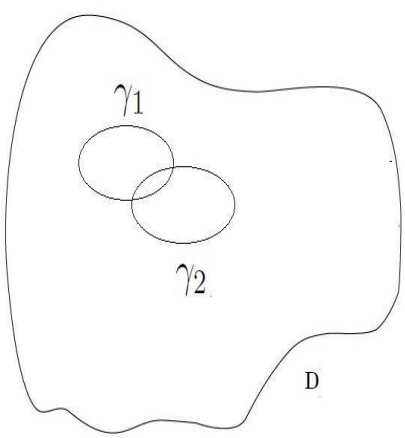


FIGURE 2. 两个涡旋在 D 内的相关性或“缠结” $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$

引理 3.6. 与前文一样，高斯场 $\psi(x)$ 具有以下性质

$$\mathbb{E}[\psi(x)] = 0 \tag{3.41}$$
$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)] = 0 \tag{3.42}$$
$$\mathbb{E}[\nabla_i\psi(x)] = 0 \tag{3.43}$$
$$\mathbb{E}[\nabla_i\psi(x)\nabla^i\psi(x)] \tag{3.44}$$
$$\mathbb{E}[\Delta\psi(x)] = 0 \tag{3.45}$$
$$\mathscr{K}(\|x-y\|;\lambda) = \mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda) \tag{3.46}$$

取 $d=3$，令 $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathrm{D} \subset \mathrm{R}^3$ 为 D 中的曲线或纽结，且满足 $x \in \gamma_1, y \in \gamma_2$。那么在 $(x,y)$ 处的环流为

$$\mathrm{C}(\gamma_1) = \int_{\gamma_1} U_i(x,t)dx^i,\ \mathrm{C}(\gamma_2) = \int_{\gamma_2} U_j(y,t)dy^i \tag{3.47}$$

对于闭曲线或纽结

$$\mathrm{C}(\gamma_1) = \oint_{\gamma_1} U_i(x,t)dx^i,\ \mathrm{C}(\gamma_2) = \oint_{\gamma_2} U_j(y,t)dy^i \tag{3.48}$$

(x,y) 处的湍流或随机场为

$$\mathcal{X}_i(x,t) = X_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{15}}U_i(x,t)\psi(x) \tag{3.49}$$
$$\mathcal{X}_j(y,t) = X_j(y,t) + \frac{\theta}{\sqrt{15}}U_j(y,t)\psi(y) \tag{3.50}$$

于是将随机环流定义为

$$\mathcal{C}(\gamma_1) = \oint_{\gamma_1} \mathcal{X}_i(x,t)dx^i = \oint_{\gamma_1} X_i(x,t)dx^i + \frac{\theta}{\sqrt{15}}\oint_{\gamma_1} U_i(x,t)\psi(x)d^3x \tag{3.51}$$
$$\mathcal{C}(\gamma_2) = \oint_{\gamma_2} \mathcal{X}_j(y,t)dx^i = \oint_{\gamma_1} X_j(y,t)dy^j + \frac{\theta}{\sqrt{15}}\oint_{\gamma_1} U_j(x,t)\psi(x)d^3x \tag{3.52}$$

带有期望

$$\mathbb{E}[\mathcal{C}(\gamma_1)] = \mathbb{E}\left[\oint_{\gamma_1} \mathcal{X}_i(x,t)dx^i\right] = \oint_{\gamma_1} X_i(x,t)dx^i + \frac{\theta}{\sqrt{15}}\oint_{\gamma_1} U_i(x,t)\mathbb{E}[\psi(x)]dx^i = C(\gamma_1) \tag{3.53}$$
$$\mathbb{E}[\mathcal{C}(\gamma_2)] = \mathbb{E}\left[\oint_{\gamma_2} \mathcal{X}_j(y,t)dy^i\right] = \oint_{\gamma_2} X_j(y,t)dy^i + \frac{\theta}{\sqrt{15}}\oint_{\gamma_2} U_j(y,t)\mathbb{E}[\psi(y)]dy^j = C(\gamma_2) \tag{3.54}$$

现在将两个涡旋之间的相关性或“缠结”定义为 $\mathcal{C}(\gamma_1)\bigcap\mathcal{C}(\gamma_2)$。然后

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{C}(\gamma_1)\bigcap\mathcal{C}(\gamma_2)\right]=\oint\oint_{\gamma_1,\gamma_2}\mathbb{E}[\mathcal{U}_i(x,t)\mathcal{U}(y,t)]dx^i dy^j \tag{3.55}$$

也就是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathcal{C}(\gamma_1)\bigcap\mathcal{C}(\gamma_2)\right]&=\oint\oint_{\gamma_1,\gamma_2}U_i(x,t)U(y,t)dx^i dy^j\\&+\oint\oint_{\gamma_1,\gamma_2}f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda)U_i(x,t)U_j(y,t)dx^i dy^j\end{aligned} \tag{3.56}$$

*Then*

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{C}(\gamma_1)\bigcap\mathcal{C}(\gamma_2)\right]\longrightarrow\oint\oint_{\gamma_1,\gamma_2}U_i(x,t)U(y,t)dx^i dy^j \tag{3.57}$$

当 $\|x-y\|\gg\lambda$ 时，涡旋彼此不相关，或处于“未缠结”状态。

证明。证明可由

$$\mathbb{E}[\mathcal{U}_i(x,t)\mathcal{U}_j(y,t)]=U_i(x,t)U_j(y,t)+f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda)U_i(x,t)U_j(y,t) \tag{3.58}$$

□

引理 3.7。湍流 $\mathcal{U}_i(x,t)$ 是随机平均的伯格斯方程的一个解。与前面一样，高斯场 $\psi(x)$ 具有以下性质

$$\mathbb{E}[\psi(x)]=0 \tag{3.59}$$
$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)]=0 \tag{3.60}$$
$$\mathbb{E}[\nabla_i\psi(x)]=0 \tag{3.61}$$
$$\mathbb{E}[\nabla_i\psi(x)\psi_i(x)]=0 \tag{3.62}$$
$$\mathbb{E}[\nabla_i\psi(x)\nabla^i\psi(x)] \tag{3.63}$$
$$\mathbb{E}[\Delta\psi(x)]=0 \tag{3.64}$$
$$\mathscr{K}(\|x-y\|;\lambda)=\mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)]=f(x,y)K(\|x-y\|;\lambda) \tag{3.65}$$

*Then*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\partial_t\mathcal{U}_i(x,t)-\nu\Delta\mathcal{U}_i(x,t)+\mathcal{U}^j(x,t)\nabla_j\mathcal{U}_i(x,t)]\\&=\partial_t U_i(x,t)-\nu\Delta U_i(x,t)+U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)=0\end{aligned} \tag{3.66}$$

证明。首先

$$\begin{aligned}&\partial_t\mathcal{U}_i(x,t)-\nu\Delta\mathcal{U}_i(x,t)+\mathcal{U}^j(x,t)\nabla_j\mathcal{U}_i(x,t)\\&=\partial_t U_i(x,t)+\partial_t U_i(x,t)\left(\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}\psi(x)\right)\\&-\nu\Delta U_i(x,t)-\frac{\nu\theta}{\sqrt{d(d+2)}}\left(\psi(x)\Delta U_i(x,t)-\nabla_i U_i(x,t)\nabla^j\psi(x)\right)\\&-\frac{\nu\theta}{\sqrt{d(d+2)}}\left(\nabla^j U_i\nabla_j\psi(x)+U_i(x,t)\Delta\psi(x)\right)\\&+U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)+\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}U^j(x,t)\psi(x)\nabla_j U_i(x,t)\\&+\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}U^j(x,t)U_i(x,t)\nabla_j\psi(x)\\&\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)\psi(x)+\frac{\theta^2}{d(d+2)}U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)\psi(x)\psi(x)\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$+\frac{\theta^2}{d(d+2)}U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)\nabla_j\psi(x) \tag{3.68}$$

取随机期望后，只有带下括号的项保留下来

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\partial_t\mathcal{U}_i(x,t)-\nu\Delta\mathcal{U}_i(x,t)+\mathcal{U}^j(x,t)\nabla_j\mathcal{U}_i(x,t)] \qquad (3.69)\\
&=\underbrace{\partial_t U_i(x,t)}+\partial_t U_i(x,t)\left(\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}\mathbb{E}[\psi(x)]\right)\\
&-\underbrace{\nu\Delta U_i(x,t)}-\frac{\nu\theta}{\sqrt{d(d+2)}}\left(\mathbb{E}[\psi(x)]\Delta U_i(x,t)-\nabla_i U_i(x,t)\mathbb{E}[\nabla^j\psi(x)]\right)\\
&-\frac{\nu\theta}{\sqrt{d(d+2)}}\left(\nabla^j U_i\mathbb{E}[\nabla_j\psi(x)]+U_i(x,t)\mathbb{E}[\Delta\psi(x)]\right)\\
&+\underbrace{U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)}+\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}U^j(x,t)\psi(x)\nabla_j U_i(x,t)\\
&+\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}U^j(x,t)U_i(x,t)\mathbb{E}[\nabla_j\psi(x)]\\
&\frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}}U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)\mathbb{E}[\psi(x)]+\frac{\theta^2}{d(d+2)}U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)]\\
&+\frac{\theta^2}{d(d+2)}U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)\mathbb{E}[\nabla_j\psi(x)]\\
&=\partial_t U_i(x,t)-\nu\Delta U_i(x,t)+U^j(x,t)\nabla_j U_i(x,t)=0 \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

□

3.2. 经典 4/5 和 2/3 标度律的出现。要重现经典 4/5 和 2/3 标度律，必须先给出以下引理。

引理 3.8. 能量耗散率与恒定速度
对于恒 定速度 $U_i(x,t)=U_i=(0,0,U)$ 和 $U=const.$，能量耗散率 $\epsilon$ 为

$$\epsilon t=|U_iU^i|\equiv\|U_i\|^2\equiv U^2 \tag{3.71}$$

其中 $\epsilon$ 的单位为 $cm^2s^{-3}$。

证明。恒定黏度 $\nu$ 下的基本能量平衡方程为

$$\epsilon(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}^3}\|U_i(x,t)\|^2d^3x=-\nu\int_{\mathbf{R}^3}\|\nabla_iU^i(x,t)\|^2d^3x \tag{3.72}$$

因此，由（-）可知，这等价于

$$-\int_{\mathbf{D}}\epsilon(x,t)d^3x=\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{D}}U_i(x,t)U^i(x,t)d^3x \tag{3.73}$$

现在对两边关于 $[0,t]$ 积分，得到

$$-\int_0^s\int_{\mathbf{D}}\epsilon(x,s)dsd^3x=\int_{\mathbf{D}}U_i(x,t)U^i(x,t)d^3x \tag{3.74}$$

and

$$\left|-\int_0^s\int_{\mathbf{D}}\epsilon(x,s)dsd^3x\right|\equiv\left|\int_0^s\int_{\mathbf{D}}\epsilon(x,s)dsd^3x\right|=\left|\int_{\mathbf{D}}U_i(x,t)U^i(x,t)d^3x\right| \tag{3.75}$$

现在，若 $\epsilon(x,t)=\epsilon=const.$ 且 $U_i(x,t)=U_i=const.$，则

$$\left|\epsilon\int_0^s\int_{\mathbf{D}}dsd^3x\right|=\left|U_iU^i\int_{\mathbf{D}}d^3x\right| \tag{3.76}$$

也就是

$$|\epsilon tVol(\mathbf{D})|=\left|U_iU^iVol(\mathbf{D})\right| \tag{3.77}$$

因此

$$|\epsilon t| = \epsilon t = |U_i U^i| \tag{3.78}$$

□

检查等式两边的单位可得 $cm^2 s^{-3} \times s = cm^2 s^{-2}$，符合要求。

引理3.9. 给定 $|\epsilon t| = \epsilon t = |U_i U^i|$，还可得

$$\|U_i\| = U = \epsilon^{1/3} \ell^{1/3} \tag{3.79}$$

$$\|U_i\|^2 = U^2 = \epsilon^{2/3} \ell^{2/3} \tag{3.80}$$

$$\|U_i\|^3 = U^3 = \epsilon \ell \tag{3.81}$$

证明. 取 $\ell$，使得

$$\|U_i\| \equiv U = \frac{\ell}{t} \tag{3.82}$$

then

$$t = \frac{\ell}{U} \tag{3.83}$$

于是由 (3.60)

$$\epsilon t = U^2 = \epsilon \frac{\ell}{U} \tag{3.84}$$

从而得到

$$U^3 = \epsilon \ell \tag{3.85}$$

因此

$$\boxed{U = \epsilon^{1/3} \ell^{1/3}} \tag{3.86}$$

由此可得方程（3.79）和（3.80）。 □

定理 3.10.（通过D ⊂ R$^3$中的“工程化”湍流实现4/5 定律） )
设向量场 $U_i(x,t)$是区域D内的确定性/光滑流动，该区域的体积为 $Vol(\mathrm{D}) \sim L^3$，其满足Burgers方程

$$\begin{aligned} &\partial_t U_i(x,t) + \mathscr{D}_N U_i(x,t) \\ &= \partial_t U_i(x,t) + U^j(x,t) \nabla_j U_i(x,t), \ (x,t) \in \mathbf{D} \times \mathbf{R}^+ \end{aligned} \tag{3.87}$$

并具有某组初始柯西数据 $U_i(x,0) = g_i(x)$。那么一个平凡的稳态解为 $X_i(x,t) = U_i = g_i = const.$。设 $\psi(x)$是前文定义的随机高斯标量场，并且同样具有反对称有理二次协方差核

$$\mathscr{K}(x,y;\lambda) = \mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = f(x,y) K(\|x-y\|;\lambda) \tag{3.88}$$

这里，$f(x,y)$ 是一个反对称函数 $f$: D $\times$ D $\to \{0,1\}$，满足 $f(x,y) = -f(y,x)$，且 $f(x,y) = 1$对所有 $(x,y) \in$ D 均成立，并且 $f(y,x) = -1$，其中 $f(x,x) = f(y,y) = 0$。于是 $\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 0$。核$K(\|x-y\|;\lambda)$同样是高斯随机场的任意标准平稳各向同性协方差核；例如，尺度混合参数为 $\alpha$ 的有理二次协方差给出

$$\mathscr{K}(x,y;\lambda) = \mathbb{E}[\psi(x)\psi(y)] = \beta f(x,y) \left(1 - \frac{\ell^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha}, \ (\alpha, \beta > 0) \tag{3.89}$$

那么，对于 $y = x + \ell$

$$\mathbb{E}[\psi(x)] = 0 \tag{3.90}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)] = 0 \tag{3.91}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)] = 0 \tag{3.92}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x+\ell)] = \beta f(x, x+\ell) K(\|\ell\|;\lambda) \tag{3.93}$$

$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)\psi(x)] = 0 \tag{3.94}$$
$$\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x)] = 0 \tag{3.95}$$
$$\mathbb{E}[\psi(x)\psi(x)\psi(x+\ell)] = 0 \tag{3.96}$$
$$\mathbb{E}[\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)\psi(x+\ell)] = 0 \tag{3.97}$$

现在令 $\mathbf{Q} = [0, L]$，使得

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \bigcup \mathbf{Q}_2 = [0, \lambda] \bigcup (\lambda, L]$$

那么，要么 $\ell \in \mathbf{Q}_1$，要么 $\ell \in \mathbf{Q}_2$。现在，我们在 $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^d$ 内构造以下代表湍流的随机场。

$$\mathcal{U}_i(x,t) = U_i(x,t) + \theta U_i(x,t)\psi(x) \equiv U_i(x,t) + \frac{\theta}{\sqrt{d(d+2)}} U_i(x,t)\psi(x) \tag{3.98}$$

使得 $\mathbb{E}[\mathcal{U}_i(x,t)] = U_i(x,t)$。于是，三阶结构函数为

$$S_3(\ell) = \mathbb{E}[|\mathcal{U}_i(x+\ell,t) - \mathcal{U}_i(x,t)|^3] \tag{3.99}$$

计算 $S_3(\ell)$，然后令 $U_i(x,t) \to U_i = (0, 0, U)$，可得

$$S_3(\ell) = -\frac{12}{d(d+2)} \theta^2 \beta \|U_i\|^3 K(\|\ell\|; \lambda) \tag{3.100}$$

在三维中，$d = 3$ 并选择 $\theta = 1$，可得

$$S_3(\ell) = -\frac{12}{15} \|U_i\|^3 K(\|\ell\|; \lambda) = -\frac{4}{5} \|U_i\|^3 K(\|\ell\|; \lambda) \tag{3.101}$$

选择核 (2.13)，其中 $\beta = 1$

$$S_3(\ell) = -\frac{12}{15} \|U_i\|^3 K(\|\ell\|; \lambda) = -\frac{4}{5} \|U_i\|^3 \left(1 - \frac{\ell^2}{2\alpha\lambda^2}\right)^{-\alpha} \tag{3.102}$$

那么，对于 $\ell \in \mathbf{Q}_1 = [0, \lambda]$，当 $\ell \ll \lambda$ 时，项 $\frac{1}{2}|\ell/\lambda|^2$ 非常接近于零，因此

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5} \|U_i\|^3 \tag{3.103}$$

在这一长度尺度范围内成立。最后，应用 (3.80)

$$\boxed{S_3(\ell) = -\frac{4}{5} \|U_i\|^3 = -\frac{4}{5} \epsilon \ell} \tag{3.104}$$

这便是精确的湍流 4/5 定律。

定理 3.11. 设定理 (2.10) 和 (2.12) 的情形成立。用 $\mathcal{U}_i(x,t)$ 替换 $\mathcal{X}_i(x,t)$ 后，二阶结构函数由 (2.80) 给出

$$S_2(\ell) = C \|U_i\|^2 \tag{3.105}$$

然后利用 (3.79)

$$\boxed{S_2(\ell) = C \epsilon^{2/3} \ell^{2/3}} \tag{3.106}$$

这就是 $2/3$ 定律，其中 $C$ 为常数。

## 4. CONCLUSION

经典的湍流 2/3 定律和 4/5 定律可以从欧几里得域 D 内构造的随机场理论中重现。可以说，为了得到所需的答案，这些场及其核是以这种方式“逆向构造”出来的。然而，这仍然表明，在计算随机场的结构函数时，随机场的概念能够导出这些重要的经典结果。Kolmogorov 工作中的一个洞见是，湍流似乎本质上是随机场。人们一直认为，充分发展湍流中的噪声或随机涨落是一种通用噪声，由概率论、随机分析以及随机场或函数领域中确立的一般定理所决定。经典随机场或函数自然对应于系统中随时间和／或空间随机变化的结构与性质，而湍流流体也应包含在内。期望或随机平均也都有明确的定义。然而，在传统统计流体力学中严格定义时间或空间统计平均，面临着重重技术困难和限制，而且其物理适用范围也有限。

## References

[1] Kolmogorov, A.N., 1941年。《不可压缩黏性流体在极高雷诺数下的湍流局部结构》。苏联科学院院刊，30卷，301–305页。[2] Kolmogorov, A. N.：《局部各向同性湍流中的能量耗散》。苏联科学院学报，32卷，1期，1941年。[3] Kolmogorov, A.N., 1962。《高雷诺数下黏性不可压缩流体湍流局部结构既有假设的修正》。《流体力学杂志》，13(1)，82–85页。[4] Birnir, B., 2013。《柯尔莫哥洛夫–奥布霍夫湍流统计理论》。《非线性科学杂志》，23(4)，657–688页。[5] Frisch, U. and Kolmogorov, A.N., 1995。《湍流：A. N. 柯尔莫哥洛夫的遗产》。剑桥大学出版社。[6] Benzi, R., Ciliberto, S., Tripiccione, R., Baudet, C., Massaioli, F., and Succi, S. (1993)。《湍流流动中的扩展自相似性》。《物理评论E》，48(1)，R29。[7] Stolovitzky, G., Sreenivasan, K. R., and Juneja, A. (1993)。《湍流中的标度函数与标度指数》。《物理评论E》，48(5)，R3217。[8] Stolovitzky, G., and Sreenivasan, K. R. (1993)。《结构函数的标度》。《物理评论E》，48(1)，R33。[9] Sreenivasan, K. R., Vainshtein, S. I., Bhiladvala, R., San Gil, I., Chen, S., and Cao, N. (1996)。《速度的非对称性 [10] Vainshtein, S. I., and Sreenivasan, K. R. (1994)。《Kolmogorov 的 4=5 阶定律与湍流间歇性》。《物理评论快报》，73(23)，3085。[11] sphere Benzi, R., Ciliberto, S., Tripiccione, R., Baudet, C., Massaioli, F., and Succi, S. (1993)。《湍流流动中的扩展自相似性》。《物理评论E》，48(1)，R29。[12] sphere 1 Anselmet, F., Gagne, Y., Hopfinger, E. J., and Antonia, R. A. (1984)。《湍流剪切流中的高阶速度结构函数》。《流体力学杂志》，140，63–89。[13] L. 昂萨格。《统计流体力学》。《新物理学》(9)，6(增刊，2〔国际统计力学会议〕)：279–287，1949年。[14] Antonia, R.A. and Burattini, P., 2006。《均匀各向同性湍流中趋近四分之五定律》。《流体力学杂志》，550，175–184页。[15] Eyink, G.L., 2002。《湍流中的局部四分之五定律与能量耗散反常》。《非线性》，16(1)，137页。[16] Lindborg, E., 1999。《耗散变化对四分之五定律的修正》。《流体物理学》，11(3)，510–512页。[17] Chorin, A.J., 1994。《涡量与湍流》。施普林格科学与商业媒体。[18] Birnir, B., 2013。《柯尔莫哥洛夫–奥布霍夫湍流统计理论》。《非线性科学杂志》，23(4)，657–688页。[19] McComb WD.《湍流理论》。《物理学进展报告》。1995年10月1日；58(10)：1117。[20] Frisch, U. and Kolmogorov, A.N., 1995。《湍流：A. N. 柯尔莫哥洛夫的遗产》。剑桥大学出版社。[21] Sreenivasan, K.R., 1999。《流体湍流》。《现代物理学评论》，71(2)，S383页。[22] Lesieur, M., 1987。《流体中的湍流：随机与数值建模》(第488卷)。波士顿：尼霍夫。[23] Chandrasekhar, S., 1950。《轴对称湍流理论》。《伦敦皇家学会哲学汇刊》。A辑，数学与物理科学，242(855)，557–577页。[24] Chandrasekhar, S., 1956。《湍流理论》。《物理评论》，102(4)，941页。[25] Sreenivasan, K.R., 1999。《流体湍流》。《现代物理学评论》，71(2)，S383页。[26] Von Neumann, J., 1963。《湍流的近期理论》。《文集》(1949–1963)，6，437–472页。[27] Robinson, J.C., Rodrigo, J.L. and Sadowski, W., 2016。《三维纳维–斯托克斯方程：经典理论》(第157卷)。剑桥大学出版社。[28] Shinbrot, M., 2012。《流体力学讲义》。Courier公司。[29] Pope, S.B. and Pope, S.B., 2000。《湍流》。剑桥大学出版社。[30] Mathieu, J. and Scott, J., 2000。《湍流流动入门》。剑桥大学出版社。[31] Zhou, Y., 2021。《湍流理论与统计闭合方法》。《物理学报告》，935，1–117页。[32] Lesieur, M., 1987。《流体中的湍流：随机与数值建模》(第488卷)。波士顿：尼霍夫。[33] Galdi, G., 2011。《纳维–斯托克斯方程数学理论导论：稳态问题》。施普林格科学与商业媒体。[34] Tsai, T.P., 2018。《纳维–斯托克斯方程讲义》(第192卷)。美国数学学会。[35] Zhou, Y., 2021。《湍流理论与统计闭合方法》。《物理学报告》，935，1–117页。[36] Amann, H., Giga, Y., Kozono, H., Okamoto, H. and Yamazaki, M. 编，2016。《数学流体力学最新进展》。[37] Orszag, S.A., 1973。《湍流统计理论》。《流体动力学》，237–374页。[38] Taylor, G.I., 1935。《湍流统计理论——II》。《伦敦皇家学会会刊》。A辑，数学与物理科学，151(873)，444–454页。[39] Lin, C.C.I., 1961。《湍流统计理论》。[40] Lumley, J.L. and Yaglom, A.M., 2001。《湍流百年》。《流动、湍流与燃烧》，66(3)，241–286页。[41] Zhou, Y., 2021。《湍流理论与统计闭合方法》。《物理学报告》，935，1–117页。[42] Rose, H.A. and Sulem, P.L., 1978。《充分发展湍流与统计力学》。《物理学杂志》，39(5)，441–484页。[43] Burgers, J.M., 1948。《阐释湍流理论的数学模型》。《应用力学进展》，1，171–199页。[44] Tennekes, H., Lumley, J.L. and Lumley, J.L., 1972。《湍流入门》。麻省理工学院出版社。[45] Jovanovic, J., 2004。《湍流统计动力学》。施普林格科学与商业媒体。[46] McComb, W.D., 1990。《流体湍流物理学》。牛津。

[47] Manneville, P., 2010。《不稳定性、混沌与湍流》(第1卷)。世界科技出版社。[48] Lions, P.L., 1996。《流体力学数学专题：第2卷：可压缩模型》(第2卷)。牛津大学出版社按需出版。[49] Rodrigues, J.F. and Sequeira, A., 1992。《流体力学数学专题》(第274卷)。CRC出版社。[50] Friedlander, S. and Serre 编，2002。《数学流体动力学手册》。爱思唯尔。[51] Fefferman, C.L., Robinson, J.C., Rodrigo, J.L. and Diez, J.L.R. 编，2018。《流体力学中的偏微分方程》(第452卷)。剑桥大学出版社。[52] Stanisic, M.M., 2012。《湍流数学理论》。施普林格科学与商业媒体。[53] Foias, C., Manley, O., Rosa, R. and Temam, R., 2001。《纳维–斯托克斯方程与湍流》(第83卷)。剑桥大学出版社。[54] Meyer, R.E., 2012。《数学流体动力学导论》。Courier公司。[55] Temam, R., 1995。《纳维–斯托克斯方程与非线性泛函分析》。工业与应用数学学会。[56] Wu, J.Z., Ma, H.Y. and Zhou, M.D., 2007。《涡量与涡旋动力学》。施普林格科学与商业媒体。[57] Chorin, A.J., 1994。《涡量与湍流》。施普林格科学与商业媒体。[58] Adler, R.J., 2010。《随机场几何》。工业与应用数学学会。[59] Vanmarcke E.《随机场》。Erik Vanmarcke 著《随机场》，372页。ISBN 0-262-72045-0。美国马萨诸塞州剑桥：麻省理工学院出版社，1983年3月。(平装本)。1983年3月：372。[60] Rytov SM, Kravtsov YA, Tatarskii VI。《统计无线电物理学原理》。第3卷：《随机场要素》。1989年。[61] Young AP.《自旋玻璃与随机场》。世界科技出版社；1998年。[62] Takeyuki H, Si S.《随机场创新方法：白噪声理论的应用》。世界科技出版社；2004年7月14日。[63] Herglotz G. ¨《吸引质量体内部势的解析延拓……》BG Teubner；1914年。[64] Christakos G.《地球科学中的随机场模型》。Courier公司；2012年8月9日。[65] Ivanov AA, Leonenko N.《随机场统计分析》。施普林格科学与商业媒体；2012年12月6日。[66] Christakos G.《时空随机场：理论与应用》。爱思唯尔；2017年7月26日。[67] Piterbarg, V.I., 1996。《高斯过程与随机场理论中的渐近方法》(第148卷)。美国数学学会。[68] Ibragimov, I.A. and Rozanov, Y.A.E., 2012。《高斯随机过程》(第9卷)。施普林格科学与商业媒体。[69] Khoshnevisan D.《多参数过程：随机场导论》。施普林格科学与商业媒体；2002年7月10日。[70] Funaki T, Surgailis D, Woyczynski WA.《吉布斯–考克斯随机场与伯格斯湍流》。《应用概率年刊》。1995年5月1日：461–492。[71] Robert R, Vargas V.《流体动力学湍流与间歇随机场》。《数学物理通讯》。2008年12月1日；284(3)：649–673。[72] Bertschinger E.《多尺度高斯随机场及其在宇宙学模拟中的应用》。《天体物理学杂志增刊系列》。2001年11月；137(1)：1。[73] Bardeen JM, Szalay AS, Kaiser N, Bond JR.《高斯随机场峰值统计》。《天体物理学杂志》。1985年；304(FERMILAB-PUB-85-148-A)：15–61。[74] Garc´ıa-Ojalvo, J. and Sancho, J., 2012。《空间扩展系统中的噪声》。施普林格科学与商业媒体。[75] Wales, D., 2003。《能量景观：团簇、生物分子与玻璃态物质中的应用》。剑桥大学出版社。[76] Lasota, A. and Mackey, M.C., 2013。《混沌、分形与噪声：动力学的随机性方面》(第97卷)。施普林格科学与商业媒体。[77] Friedrich, R., Peinke, J., Sahimi, M. and Tabar, M.R.R., 2011。《以随机方法探究复杂性：从生物系统到湍流》。《物理学报告》，506(5)，87–162页。[78] De F´eriet, J.K., 1956。《偏微分方程的随机解》。载于《第三届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》(第 3， 199 20 页。- Dalang, R.C., Khoshnevisan, D., Mueller, C., Nualart, D. and Xiao, Y., [79] 2009。《随机偏微分方程短期课程》(第1962卷)。德国柏林：施普林格。[80] Chow, P.L., 2014。《随机偏微分方程》。CRC出版社。[81] Khoshnevisan, D., 2014。《随机偏微分方程分析》(第119卷)。美国数学学会。[82] H¨anggi, P. and Jung, P., 1995。《动力系统中的有色噪声》。《化学物理进展》，89，239–326页。[83] Jung, P. and H¨anggi, P., 1987。《动力系统：统一有色噪声近似》。《物理评论 A》，35(10)，4464页。[84] Jung, P. and H¨anggi, P., 1988。《光学不稳定性：有色噪声驱动激光不稳定性的新理论》。《美国光学学会杂志 B》，5(5)，979–986页。

*Email address*: stevendm@ed-alumni.net

Rytalix Capital, Scotland.