arXiv:2303.06251v1 [physics.flu-dyn] 11 Mar 2023

剪切变稀流体压力驱动流中的椭球体动力学

Vishal Anand 和 Vivek Narsimhan *;戴维森化学工程学院，普渡大学，美国印第安纳州西拉斐特 *47907*

2023年3月14日

摘要

无惯性剪切变稀流体中的颗粒是生物学、生态学和微流体学中若干系统的模型表征。本文分析了椭球体在剪切变稀流体压力驱动流中的运动。剪切变稀流变学采用Carreau模型表征。我们结合微扰技术与互易定理，阐明长旋转椭球和扁旋转椭球的运动学。我们采用了两种微扰策略：一种针对零剪切牛顿平台附近，另一种针对无限剪切牛顿平台附近。在这两个极限下，我们发现，有效黏度降低会缩短椭球体在压力驱动流中的旋转周期。剪切变稀对运动学的影响程度取决于粒子形状。对于长椭球颗粒，当椭球体主轴与速度梯度方向对齐时，剪切变稀的影响最为显著；而对于扁椭球颗粒，当主轴与流动方向对齐时，影响最为显著。最后，我们比较了椭球体在压力驱动流和简单剪切流中的翻滚行为。在压力驱动流中，周期随Carreau数增加而单调缩短；而在剪切流中，这一趋势是非单调的：周期在Carreau数较低时先增加，随后在Carreau数较高时降低。剪切变稀无法消除Jefferey轨道的简并性。

1 引言

刚性、可定向的颗粒置于高黏度、无结构的流体中时，会经历许多有趣的现象 [1]。例如，在这类流体中，单根杆会以相同的初始取向沉降，而在剪切流中，单根杆则沿周期轨道（杰弗里轨道）翻滚。这些行为源于斯托克斯方程的对称性、线性和可逆性 [2–4]。当斯托克斯方程的假设不再成立时——即存在流体惯性，或流体呈现非牛顿流变学特性时——上述行为可能不再适用 [5]。

迄今已有大量研究探讨了当流体具有较小但非零的惯性时，不同形状的颗粒（例如纤维、片状体、球体和椭球体）在沉降、线性流和二次流中的运动。例如，研究者采用细长体近似和互易定理，分析了弱惯性牛顿流体剪切流中的类纤维颗粒 [6]。研究表明，受惯性作用，纤维会向速度-剪切梯度平面漂移，随后在超过某一临界雷诺数时完全停止旋转。之后，研究者对简单剪切流中的椭球体进行了类似分析 [7]。此后，分析扩展至一般线性流，即伸展流与旋转流的组合 [8]。分析结果表明，流体惯性和粒子惯性都会迫使长椭球颗粒在速度-速度梯度平面内翻滚，而扁椭球颗粒则会进入对数滚动运动。线性稳定性分析验证了长椭球颗粒和扁椭球颗粒这些取向的稳定性 [9, 10]。

当悬浮流体不再是牛顿流体时，流体可能会出现法向应力差、剪切变稀、拉伸增稠和/或时变黏弹性等现象。这些

*通信请联系以下作者。 vnarsim@purdue.edu

效应在改变刚性、可定向粒子的运动方面发挥着重要作用。我们不会全面综述这类粒子在非牛顿流体中的微观流体动力学，而是建议读者参阅相关专著 [11, 12] ，并在此作简要概述。总体而言，过去几十年的研究大多着眼于法向应力对粒子运动的影响 [13–15]。法向应力会在低雷诺数流动中引发两种不同的现象，即横向迁移和稳态取向。横向迁移指在通道中流动的粒子受到升力的现象。当法向应力存在梯度时，就会发生这种现象，因此通常在应变率存在梯度时出现，也就是在二次流中 [16]。在沉降和/或剪切流过程中，法向应力也会对可定向粒子产生流体动力学力矩，从而形成稳定取向 [16, 17]。关于二阶流体静止背景流体中椭球体沉降的解析解由 [18], 给出，而线性流中的解析解则由 [19]给出。最近， [20], 将这些研究拓展至小魏森伯格数极限下的二阶流体二次流，给出了椭球体所受聚合物力和力矩的解析公式。关于黏弹性微观流体动力学研究的最新综述见 [12]。

人们一直关注可变黏度流体中颗粒的微观流体动力学，其中黏度变化可能是空间性的 [21–23] ，也可能源于流体的剪切变稀流变学 [24, 25]。本文重点研究剪切变稀流体中椭球体的运动；这类系统在生物学、微流体学和生态学中十分常见 [26, 27]。尤其是，已有研究探讨微游动（活性粒子）[28], ，其出发点是一个直观却天真的推测：剪切变稀带来的黏度降低，使游动体无需消耗那么多能量便能游得更快 [27, 29]。针对球形摆动体，渐近分析表明，游动速度可能提高也可能降低，具体取决于游动体的表面驱动方式 [30, 31]。游动速度会在某些剪切速率下达到最优值 [31]。因此，认为剪切变稀会提高游动速度这一未经深思的假设并不成立，必须谨慎对待 [30, 31]。最近，有研究分析了 Purcell 游动器在剪切变稀流体中的游动特性，发现两臂旋转速率不等会产生净垂直位移，而牛顿流体中则不会出现这种现象 [32]。

尽管近年来关于剪切变稀流体中粒子动力学的研究取得了进展，但显然，这一研究领域仍未得到充分探索，还有许多具有挑战性的问题有待研究。例如，大多数粒子动力学的渐近分析都考察了流体流变学的Carreau模型，并在Carreau数较小（即剪切速率较低）的极限下进行微扰展开。当Carreau数并不小时会发生什么，我们仍不得而知。此外，对于被动粒子，分析仅限于球体， [25]是一个显著的例外。其他形状的粒子，如扁椭球体，其与剪切变稀流的相互作用尚未得到研究。最后，我们了解到，已有研究分析了剪切变稀流体中粒子沉降 [24] 和线性剪切流 [25] 过程中的微观流体动力学，但尚未讨论压力驱动流等更复杂的流动。在此背景下，本文拟回答以下研究问题：在*Carreau*数较小和较大的极限下，长旋转椭球和扁旋转椭球在剪切变稀流体的压力驱动流中的取向运动学如何变化？这种行为与简单剪切流中的情况有何不同？

本文结构安排如下。首先，我们在第2节正式阐述问题，并在此讨论长旋转椭球和扁旋转椭球的定义，以及流体流变模型（Carreau模型）。接着，在第3节，我们展示在没有粒子的情况下，仅由剪切变稀引起的压力驱动流变化。本节还将粒子引入该流场，并利用互易定理量化剪切变稀对粒子运动学的修正。下一节将介绍代码算法（第4节），该算法用于获得第5节的结果。在第6节，我们展示小、大Carreau数条件下，椭球体在简单剪切流中的翻滚周期相关结果，并讨论剪切流中观察到的趋势与压力驱动流中观察到的趋势之间的差异。随后在第7节进行讨论并给出结论。

2 问题陈述

2.1 问题几何与粒子定义

所研究的系统是处于剪切变稀流体压力驱动流中的椭球体。流动为稳态且无惯性，粒子为中性浮力且被动。图1a 展示了该系统的几何结构

。我们研究长度为 l、高度为 $2h$、宽度无限的狭缝通道。坐标系的设置使 x 轴与通道中平面重合，而 y 轴与通道高度方向一致。在通道入口 $x=0$处施加压力 $p=\Delta P$，而 $x=l$ 处的出口压力为 $p=0$。

椭球体将在通道中的某一位置（x_0，y_0，z_0）开始运动。三个半轴的长度分别为a，b，和 c，其中 $b=c$。不等长的轴，即 a 轴的方向，称为主轴。长椭球体的不等长轴最长（$a>b$），而扁椭球体的不等长轴最短（$a<b$）。除了半轴（a，b，c）之外，还可以用另外两个量 R 和 A_R来参数化椭球体的形状。R 是与该椭球体体积相同的等体积球半径，这意味着 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi abc$。量 A_R是主轴与另外两条轴的比值：$A_R=a/b$。根据此定义，长椭球体有 $A_R>1$，而扁椭球体有 $A_R<1$。这两种粒子参数化体系之间的关系为

$$a=RA_R^{2/3},\quad b=c=RA_R^{-1/3} \tag{1}$$

椭球体的取向由有序对（θ，ϕ）表征。这里，$\theta\in(0,\ \pi)$ 是相对于 z轴的夹角，也称为余纬角或极角；而 $\phi\in(0,\ 2\pi)$ 是 $x-y$平面内相对于 x轴的夹角，也称为方位角。图2 总结了椭球体的几何定义。

我们将求解粒子尺寸远小于通道高度时椭球体的运动，即 $R\ll h$。在这种情况下，可以忽略与壁面的流体动力相互作用，并将粒子视为处于无界流体中，其背景速度 u_i^∞由通道中的流场给出。这种近似对刚体运动造成的误差为 $O((R/h)^3)$（见 Kim and Karilla [4, 第 12]章）。因此，在这个问题中，我们常常会在两个坐标系之间切换。在求解粒子的平移速度和转动速度时，我们将使用图1b，将粒子视为处于无限域介质中，以粒子质心为原点，并使局部坐标系与粒子的半轴对齐。确定这些量后，我们将切回通道坐标系（图1a），并在一个时间步长 Δt内更新粒子的位置和取向。如此反复，直至追踪粒子在给定时间间隔内的运动。在此背景下，这里遇到的微流体动力学问题可视为流固耦合问题的一种情形 [33–38]；流场对结构施加压力/力，从而导致粒子运动（若固体较软，则会发生变形）。下一小节将介绍通道内流体的流变模型。

2.2 流体流变学

2.2.1 Carreau-Yasuda 模型

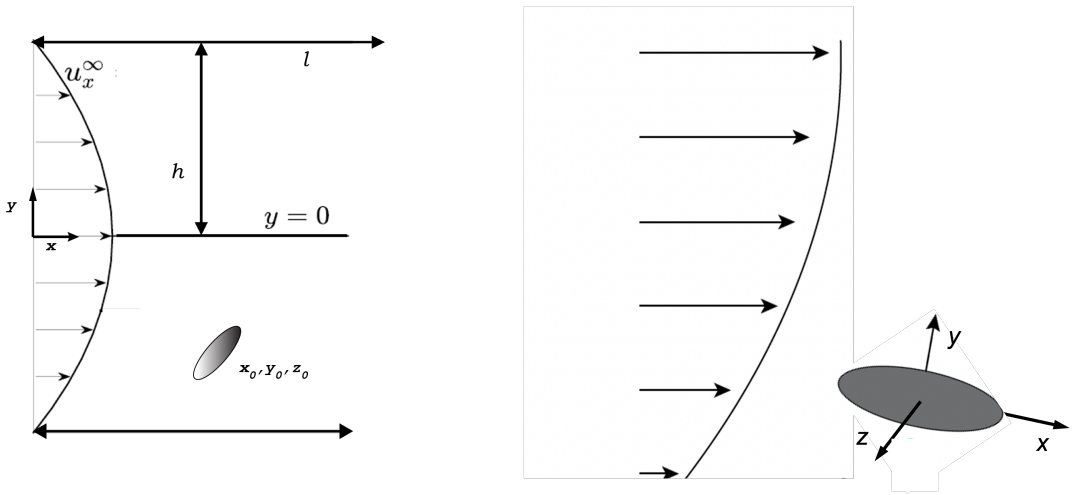
背景流体较为复杂 [39–41]。具体而言，该流体具有剪切变稀特性，即随着施加的剪切应力增大，表观黏度会降低。这类流体也称为假塑性流体，常见的例子包括聚合物、血液和番茄酱等 [42]（另见[43, 44]）。应力的本构方程与牛顿流体相同，只是黏度是应变率的函数：

$$\tau_{ij}=\eta(\dot\gamma)\dot\gamma_{ij}-p\delta_{ij}; \tag{2}$$

在上式中，p 为压力，$\dot\gamma_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ 为应变率张量的两倍，η 为黏度。黏度是应变率大小的函数，表示为 $\dot\gamma=\sqrt{\frac{1}{2}\dot\gamma_{ij}\dot\gamma_{ij}}$，其中采用爱因斯坦求和约定。

描述剪切变稀黏度的流变模型包括 Ostwald–de Waele 幂律模型、Herschel-Bulkley 模型和 Carreau-Yasuda 模型 [39]。本文采用 Carreau-Yasuda 模型，主要是因为该模型能够描述剪切变稀区间起始和结束时的牛顿平台区。Carreau-Yasuda 模型的本构方程如下：

$$\eta=\eta_\infty+(\eta_0-\eta_\infty)[1+\lambda_t^2\dot\gamma^2]^{\frac{n-1}{2}} \tag{3}$$



(a) (b)

图1：剪切变稀流体中的系统几何结构。(a) 实验室坐标系。通道半宽为h，长度为 l，坐标轴原点位于通道入口中心。椭球体初始位于 (x_0, y_0, z_0)，并跟踪其随时间变化的位置和取向。图中尺寸未按比例绘制。(b) 粒子坐标系。求解粒子的刚体运动时，我们假设粒子处于无界流体中，其速度 u_i^∞由通道中的流动给出。坐标轴与粒子的半轴对齐，原点位于粒子质心。

在该模型中，流体在低剪切速率和高剪切速率下表现为牛顿型，中间则为幂律区。 η_0 和 η_∞ 分别为零剪切速率黏度和无限剪切速率黏度。指数 $n < 1$ 决定幂律区内的衰减速率，而 λ_t 是时间常数，它决定幂律区对应的应变率。

2.2.2 Carreau-Yasuda 模型的无量纲形式

Carreau-Yasuda 模型的无量纲形式如下：

$$\eta = 1 - \epsilon + \epsilon[1 + Cu^2\dot{\gamma}^2]^{\frac{n-1}{2}} \tag{4}$$

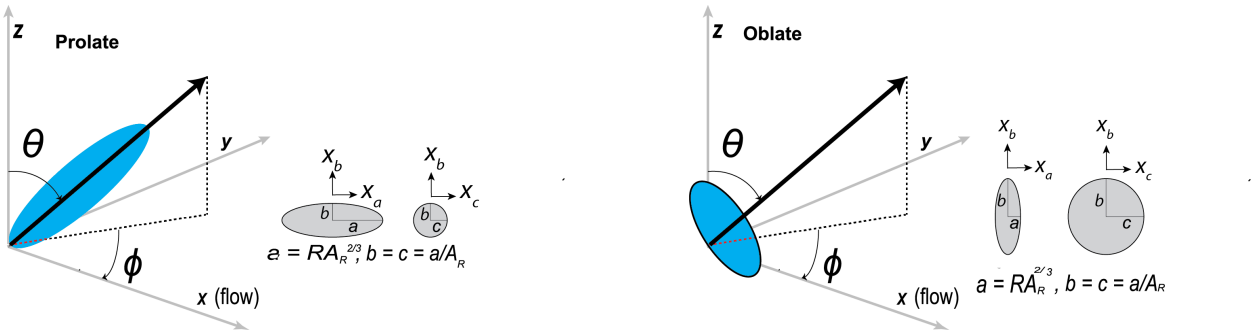
其中，黏度通过 η_0 变为无量纲，剪切速率 $\dot{\gamma}$ 则通过特征剪切速率 $\dot{\gamma}_c$变为无量纲。特征剪切速率由所研究的问题决定（例如剪切流或压力驱动流）。上式引入了两个新的无量纲数。相对黏度降幅

$$\epsilon = 1 - \beta = \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\eta_0} \tag{5}$$

表示零剪切速率与无限剪切速率极限之间黏度的相对降幅。Carreau数

$$Cu = \lambda_t \dot{\gamma}_c \tag{6}$$

描述特征应变率下的剪切变稀区间 $\dot{\gamma}_c$。当 $Cu \ll 1$ 或 $Cu \gg 1$时，特征剪切速率位于牛顿平台区附近；而当 $Cu \sim O(1)$ 特征剪切速率处于幂律区间。Carreau模型中的无量纲数汇总见表1。作为示例，Carreau模型中适用于0.3%黄原胶水溶液的典型流变参数（摩尔质量为 $= 933.748$ g/mol）为 $n = 0.402$，$\lambda_t = 239$ s和$\beta = 1.35 \times 10^{-4}$ [45]（另见 [46]）。



(a) (b)

图2：定义长旋转椭球（a）和扁旋转椭球（b）的粒子形状与取向。主轴在 $x-y$ 平面内与流动方向 x成 ϕ（方位角），并与z 方向成 θ（极角）。对于长旋转椭球和扁旋转椭球，还展示了基于 a，b，c以及基于 R和 A_R的两种不同参数化体系之间的关系。

表1：Carreau剪切变稀流体的无量纲流变参数汇总。

无量纲流变参数	定义	相关性	数值
Cu	$Cu = \lambda_t \dot{\gamma}_c$	特征应变率与临界应变率之比	$0 \leq Cu < \infty$
n	幂律指数	剪切变稀区域斜率	$0 < n < 1$
β	$\beta = \frac{\eta_\infty}{\eta_0}$	无限剪切黏度与零剪切黏度之比	$\beta \ll 1$
ϵ	$1-\beta$	相对黏度降幅	$\epsilon \sim 1$

2.2.3 本构方程的微扰展开

所考虑的流变模型（式（4））关于 $\dot{\gamma}$，Cu 和 n呈非线性。为开展后续微观流体动力学研究，我们将把黏度表示为以下形式 [5]:

$$\eta = \mu + \delta A[\dot{\gamma}], \tag{7}$$

其中，μ为（常数）牛顿黏度，A 是剪切速率的函数，δ 是一个小参数，使得当 $\delta \to 0$时，可恢复牛顿极限。我们将考察两种不同的微扰极限。

小 Carreau数：当 $Cu^2\dot{\gamma}^2 \ll 1$时，可以在零剪切速率平台附近对黏度进行泰勒展开。微扰展开中的小参数为 $\delta = Cu^2$。我们得到 $\mu = 1$ 和 $A[\dot{\gamma}] = \frac{1}{2}\epsilon(n-1)\dot{\gamma}^2$，由此可得:

$$\eta = 1 + \frac{1}{2}\epsilon(n-1)Cu^2\dot{\gamma}^2 + O(Cu^4), \tag{8}$$

大 Carreau数：当 $Cu^2\dot{\gamma}^2 \gg 1$时，可以在无限剪切速率平台附近对黏度进行泰勒展开。这里，微扰展开中的小参数为 $\delta = Cu^{(n-1)}$。我们得到 $\mu = \beta$ 和 $A[\dot{\gamma}] = \epsilon\dot{\gamma}^{n-1}$，由此可得:

$$\eta = \beta + Cu^{(n-1)}\epsilon\dot{\gamma}^{n-1} + O(Cu^{2(n-1)}) \tag{9}$$

在图 3中，我们将完整的流变方程（方程（4））与上文讨论的渐近极限进行比较。总体而言，对于 $Cu^2 < 0.1$，小 Carreau 数极限能够较好地描述流变特性；而对于 $Cu > 10$，大 Carreau 数极限的描述效果较好。

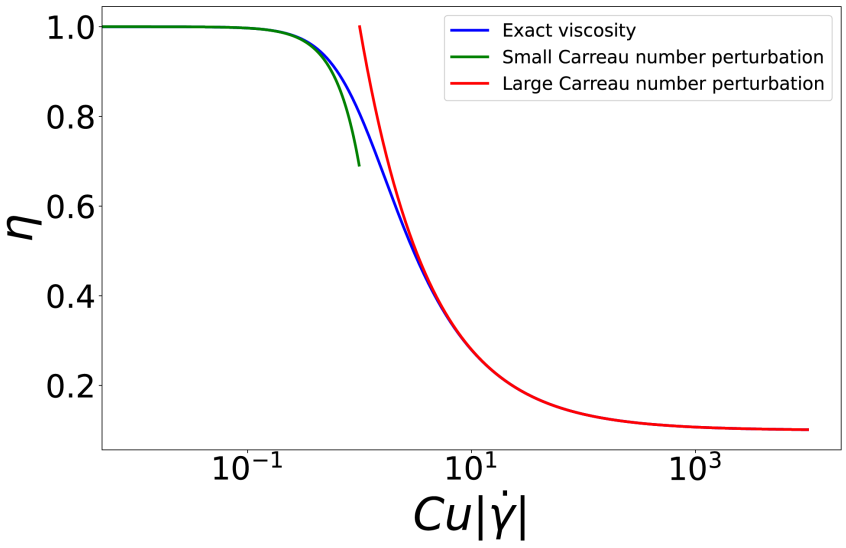


图 3：Carreau 流体的黏度，其中 $n = 0.3$ 和 $\epsilon = 0.9$。完整的流变方程（式（4））与小 Carreau数极限下的扰动结果（式（8））以及大 Carreau数极限下的扰动结果（式（9））进行了比较。

3 理论

3.1 步骤概述与无量纲化

本研究旨在分析剪切变稀流体中椭球体的微观流体动力学。我们的分析分为两部分。首先，我们将计算不存在粒子时剪切变稀流体的背景流场。随后，我们将研究椭球体在该流场中的行为。我们将利用互易定理，在小卡罗数和大卡罗数极限下求得刚体运动的修正。

从这里开始，我们将以无量纲形式给出结果。所有距离均以通道半高 h为标度。黏度以零剪切速率黏度 η_0 为标度，应力以 $\tau_c = \frac{h\Delta P}{2l}$ 为标度。剪切速率以 $\dot{\gamma}_c = \tau_c/\eta_0 = \frac{h\Delta P}{2\eta_0 l}$ 为标度，时间以 $\dot{\gamma}_c^{-1}$ 为标度，速度则以 $V_c = \dot{\gamma}_c h$为标度。对于这一几何构型，Carreau数定义如下：

$$Cu = \frac{\lambda_t h \Delta P}{2\eta_0 l} \tag{10}$$

3.2 背景流场

在本小节中，我们将使用图1 (a) 中的坐标系，并求解通道中的流场。本小节中的量将带有上标“∞”，表示这些量是在没有粒子的情况下求得的。

当流动为稳态、无惯性且不可压缩时，动量方程和连续性方程表明 $\frac{\partial \tau_{ij}^{\infty}}{\partial x_j} = 0$ 和 $\frac{\partial u_i^{\infty}}{\partial x_i} = 0$ （假设采用爱因斯坦求和约定）。流动是单向的（即仅有 $u_x^{\infty} = u_x^{\infty}(y)$），这大大简化了方程。流场的微分方程为：

$$\frac{\partial \tau_{xy}^{\infty}}{\partial y} = -2 \tag{11}$$

其中，τ_{xy}^{∞} 由 Carreau模型给出（方程（2）和（4）），其局部剪切率为 $\dot{\gamma}^{\infty} = \frac{\partial u_x^{\infty}}{\partial y}$。该微分方程满足以下边界条件：在上壁面（$y = h$）处为 $\frac{\partial u_x^{\infty}}{\partial y} = 0$，在中心平面（$y = 0$）处为 $u_x^{\infty} = 0$。

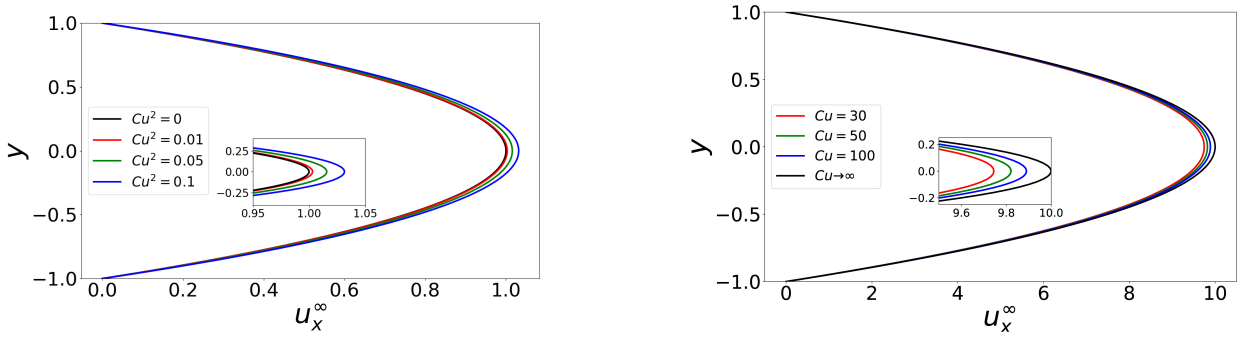


图 4：剪切变稀流体压力驱动流在以下极限下的情况：(a) $Cu \ll 1$ （方程（12））和 (b) $Cu \gg 1$（方程（13））。流变参数为 $\epsilon = 0.9$ 和 $n = 0.3$。

下面以 Carreau模型的无量纲量（表1）表示速度场的结果。这些结果通过对 Cu^2 在 Carreau数较小时以及对 Cu^{n-1} 在 Carreau数较大时进行常规摄动展开而得到。对于较小的 Carreau数（$Cu \ll 1$），速度场为：

$$u_x^\infty = u_x^{\infty,(0)} + Cu^2 u_x^{\infty,(1)} + O(Cu^4) \tag{12a}$$

$$u_x^{\infty,(0)} = 1\text{–}y^2; \qquad u_x^{\infty,(1)} = \epsilon(1-n)(1\text{–}y^4) \tag{12b}$$

而当 Carreau数 较大（$Cu \gg 1$）时，速度场为：

$$u_x^\infty = u_x^{\infty,(0)} + Cu^{n-1} u_x^{\infty,(1)} + O(Cu^{2(n-1)}) \tag{13a}$$

$$u_x^{\infty,(0)} = \frac{1\text{–}y^2}{\beta}; \qquad u_x^{\infty,(1)} = -\frac{2^n \epsilon}{\beta^{n+1}(n+1)}(1\text{–}|y|^{n+1}) \tag{13b}$$

对于两种情况，剪切应力均为 $\tau_{xy} = -2y$。图 4 绘出了两个微扰极限下的流场。小 Carreau数近似捕捉了偏离第一个牛顿平台的情况，此时归一化黏度为 $\mu = 1$。围绕该平台进行微扰会使有效黏度降低，最终导致流量增大。与此相比，大 Carreau数近似捕捉了偏离第二个牛顿平台的情况，此时归一化黏度为 $\mu = \beta$. 围绕该平台进行微扰会使黏度增大，从而降低流量。

3.3 微观流体动力学

当椭球体的尺寸远小于通道高度时（即 $R \ll h$），可以假设椭球体处于无界流体中，并且背景速度由方程（12）和（13）给出，据此确定椭球体的运动。这里，我们将使用图 1(b) 中的坐标系来计算粒子的刚体运动。坐标 x_i 表示相对于粒子质心的位置，而 u_i^∞则是上一节中的背景流转换到粒子坐标系后的结果。我们将使用互易定理，近似求得 Carreau数较小和较大时的刚体运动表达式。

3.3.1 问题设置、互易定理与微扰展开

假设我们有一种无惯性、不可压缩流体，它满足 Carreau本构关系方程（2）。该应力张量可分解为两个分量：

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^N + \tau_{ij}^{ex} \tag{14a}$$

$$\tau_{ij}^N = \mu\dot{\gamma}_{ij}\text{–}p\delta_{ij} \tag{14b}$$

$$\tau_{ij}^{ex} = (\eta - \mu)\dot{\gamma}_{ij} \tag{14c}$$

其中 τ_{ij}^{N}是黏度恒定的牛顿应力张量 μ，而 τ_{ij}^{ex}是取决于方程（4）中所述剪切变稀黏度 η 的额外应力张量。

当我们将一个椭球体置于远场速度为 u_i^{∞} 的此类流体中时，粒子外部的连续性方程和动量方程可写为：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \qquad \frac{\partial \tau_{ij}^{N}}{\partial x_j} + b_i = 0 \tag{15}$$

其中

$$b_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{ij}^{ex}\right) \tag{16}$$

是作用于牛顿流体的有效体力。远离粒子处（$|x_i| \to \infty$），速度场和应力场为 u_i^{∞}，$\tau^{N,\infty}_{ij}$，以及 $\tau^{ex,\infty}_{ij}$，它们在整个区域内也满足上述关系（15）。在粒子表面 S_p，速度为刚体运动：

$$u_i = U_i + \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k \qquad \text{on} \qquad x_i \in S_p \tag{17}$$

其中 U_i 和 Ω_i 分别是粒子的平移速度和旋转速度。还需满足力和力矩平衡。作用于粒子的外力和外力矩为：

$$F_i^{ext} = \int_{S_p} \tau_{ij} n_j dS \tag{18a}$$

$$T_i^{ext} = \int_{S_p} \epsilon_{ijk} x_j \tau_{km} n_m dS \tag{18b}$$

其中，法向量 n_i指向粒子内部。在本问题中，$F_i^{ext} = T_i^{ext} = 0$。根据远场应力 $\tau_{ij}^{\infty} = \tau^{N,\infty}_{ij} + \tau^{ex,\infty}_{ij}$，粒子所受的力和力矩也为零。

注意，上述问题表述为具有远场速度的粒子周围的斯托克斯流u_i^{∞}以及具有流体体力 b_i的情形。在这种情况下，可以运用互易定理，得到刚体运动（U_i，Ω_i）的表达式。该定理在斯托克斯流领域历史悠久，详见经典文献 [2, 4]。下面给出（U_i，Ω_i）的最终公式；详细推导见附录 A。

粒子的刚体运动表达式满足以下关系：

$$\begin{bmatrix} R_{ij}^{FU} & R_{ij}^{F\Omega} \\ R_{ij}^{TU} & R_{ij}^{T\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ \Omega_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^{eff} \\ T_i^{eff} \end{bmatrix} \tag{19}$$

在上式中，R_{ij}^{FU}、$R^{F\Omega ij}$、R_{ij}^{TU}和 $R_{ij}^{T\Omega}$是黏度为 μ 的牛顿型流体中粒子的斯托克斯流阻力张量。该公式表明，粒子的平移和旋转等于其在斯托克斯流中的运动，此时粒子受到有效力和力矩：

$$F_i^{eff} = F_i^{ext} + F_i^{flow} + F_i^{poly} \tag{20a}$$

$$T_i^{eff} = T_i^{ext} + T_i^{flow} + T_i^{poly} \tag{20b}$$

上述表达式中的第一项对应于作用在粒子上的外力和力矩（F_i^{ext}, T_i^{ext}），在本问题中它们为零。第二项对应于外部流场 u_i^{∞}产生的有效力和力矩。这些量为：

$$F_k^{flow} = \int_{S_p} u_i^{\infty} \Sigma_{ijk}^{trans} n_j dS \tag{21a}$$

$$T_k^{flow} = \int_{S_p} u_i^{\infty} \Sigma_{ijk}^{rot} n_j dS \tag{21b}$$

在上述公式中，量 Σ_{ijk}^{trans}和 Σ_{ijk}^{rot} 分别是由于沿 k 方向的单位平移或单位转动而在斯托克斯流中粒子表面应力场的 ij 分量。法向量n_j 指向粒子内部，该表达式在粒子表面 S_p上积分。

式（20）中的最后几项是非牛顿应力产生的有效力和力矩。这些量为：

$$F_k^{poly} = -\int_V \frac{\partial v_{ik}^{trans}}{\partial x_j}\left(\tau_{ij}^{ex} - \tau_{ij}^{ex,\infty}\right) dV \tag{22a}$$

$$T_k^{poly} = -\int_V \frac{\partial v_{ik}^{rot}}{\partial x_j}\left(\tau_{ij}^{ex} - \tau_{ij}^{ex,\infty}\right) dV \tag{22b}$$

其中，积分体积位于粒子外部。量 v_{ik}^{trans}和 v_{ik}^{rot}表示粒子外部沿 i 方向的斯托克斯速度场，它们分别由沿 k 方向的单位平移或单位转动产生。量 τ_{ij}^{ex}表示粒子外部的附加应力，而量 $\tau^{ex,\infty}_{ij}$表示无粒子时的附加应力。

现在，我们将进行微扰展开，以估算小卡罗数和大卡罗数极限下的刚体运动（U_i，Ω_i）。速度场将按如下方式展开：

$$u_i = u_i^{(0)} + \delta u_i^{(1)} + O(\delta^2) \tag{23a}$$

$$u_i^{\infty} = u_i^{\infty,(0)} + \delta u_i^{\infty,(1)} + O(\delta^2) \tag{23b}$$

并以类似方式将流体的黏度展开为：

$$\eta = \mu + \delta A[\dot{\gamma}^{(0)}] + O(\delta^2) \tag{24}$$

在上述方程中，δ 是一个小参数：当 Carreau数较小（$Cu \ll 1$）时，$\delta = Cu^2$；当 Carreau数较大（$Cu \gg 1$）时，$\delta = Cu^{(n-1)}$。对于较小的 Carreau数，恒定黏度为 $\mu = 1$，而非线性函数为 $A[\dot{\gamma}] = \frac{1}{2}\epsilon(n-1)\,\dot{\gamma}^2$。这种情况对应于对零剪切速率平台的微弱偏离。对于较大的 Carreau数，恒定黏度为 $\mu = \beta$，而 $A[\dot{\gamma}] = \epsilon\dot{\gamma}^{n-1}$。这种情况对应于对无限剪切速率平台的微弱偏离。

现在，我们将上述展开式代入方程（19）–（22），以求得粒子的平移速度和转动速度（U_i，Ω_i），精确到 O（δ）。具体而言，对于流体作用力和力矩（方程（21）），我们需要远场速度 u_i^{∞}精确到 O（δ）。的表达式见方程（12）和（13），需要转换到粒子坐标系。对于聚合物力和力矩（方程（22）），我们还需要额外应力张量 $\tau_{ij}^{ex} - \tau^{ex,\infty}_{ij}$ 精确到O（δ）。该量的表达式为：

$$\tau_{ij}^{ex} - \tau_{ij}^{ex,\infty} = \delta A[\dot{\gamma}^{(0)}]\dot{\gamma}_{ij}^{(0)} - \delta A[\dot{\gamma}^{\infty,(0)}]\dot{\gamma}_{ij}^{\infty,(0)} + O(\delta^2) \tag{25}$$

其中，如前所述，在小 Carreau数极限（$Cu \ll 1$）下，$A[\dot{\gamma}] = \frac{1}{2}\epsilon(n-1)\,\dot{\gamma}^2$；而在大 Carreau数极限（$Cu \gg 1$）下，$A[\dot{\gamma}] = \epsilon\dot{\gamma}^{n-1}$。上述表达式取决于 O(1)剪切速率张量 $\dot{\gamma}^{(0)}_{ij}$ 和 $\dot{\gamma}^{\infty,(0)}_{ij}$，它们是 O(1)速度场的空间导数。 O(1)速度场 $u_i^{(0)}$ 是粒子周围的斯托克斯流，其远场速度为 $u^{\infty,(0)}_i$。对于粒子为椭球体且远场速度为抛物线型的特定情况（例如 O(1)中的式（12）和式（13））， $u_i^{(0)}$ 的解已知 [47, 48]。

3.3.2 椭球体公式

方程（19）-（22）描述了非牛顿流体中粒子的刚体运动。对于给定的速度场 u_i^{∞}和额外应力张量 τ_{ij}^{ex}，可以计算粒子的平移和转动速度（U_i，Ω_i）。进行此计算需要了解粒子的斯托克斯流特性。具体而言，需要知道粒子刚体运动所产生的粒子外部速度场（v_{ik}^{trans}，v_{ik}^{rot}）和应力场（Σ_{ijk}^{trans}，Σ_{ijk}^{rot}），并且需要知道阻力张量（R_{ij}^{FU}，$R^{F\Omega ij}$，R_{ij}^{TU}，$R_{ij}^{T\Omega}$）。这些量对于椭球体而言是已知的。

考虑一个半轴为（a，b，c）=（a_1，a_2，a_3）的椭球体，并选取与这些轴对齐的粒子坐标系。在这种情况下，方程（19）-（22）针对粒子的刚体运动可大幅简化。当外力和力矩均为零（$F_i^{ext} = T_i^{ext} = 0$）时，我们得到：

$$U_i = U_i^{Faxen} + \frac{1}{R_{ii}^{FU}} F_i^{poly} \qquad \text{(no summation over i)} \tag{26a}$$

$$\Omega_i = \Omega_i^{Faxen} + \frac{1}{R_{ii}^{T\Omega}} T_i^{poly} \qquad \text{(no summation over i)} \tag{26b}$$

其中，U_i^{Faxen}和 Ω_i^{Faxen}是根据椭球体的 Faxén公式得到的平移速度和转动速度。这些量为：

$$U_i^{Faxen} = -\frac{1}{3V_p} \int_{S_p} u_i^{\infty}(n_j x_j) dS \tag{27a}$$

$$\Omega_i^{Faxen} = -\frac{1}{V_p} P_{ij} \epsilon_{jrk} \int_{S_p} x_r u_k^{\infty}(n_m x_m) dS \tag{27b}$$

其中，$V_p = \frac{4\pi}{3} abc$ 是粒子体积，P_{ij} 是对角张量。该张量的 11 分量为 $P_{11} = \frac{1}{a_2^2 + a_3^2}$，其他对角分量可通过循环置换指标得到。若在质心 ($x_i = 0$) 处对速度场进行泰勒展开，可得到 Faxén 速度的近似表达式，其精度可达 $O((R/h)^2)$，这符合当前模型的近似阶数。由此可得：

$$U_i^{Faxen} = u_i^{\infty}(0) + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{3} a_k^2 \frac{\partial u_i^{\infty}}{\partial x_k \partial x_k}(0) + \dots \tag{28}$$

其中，远场速度 u_i^{∞}及其导数均在质心处取值。对于转动速度，可得：

$$\Omega_1^{Faxen} = \frac{1}{2} \omega_1^{\infty}(0) + \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2} E_{23}^{\infty}(0) + \dots \tag{29}$$

其中，$\omega_i^{\infty} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k^{\infty}}{\partial x_j}$ 是在质心处取值的涡量，$E_{ij}^{\infty} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij}^{\infty}$是在质心处取值的应变率张量。转动速度的其他分量可通过循环置换指标得到。

在公式（26）中，阻力张量 R_{ii}^{FU}和 $R_{ii}^{T\Omega}$具有以下形式：

$$R_{11}^{FU} = 16\pi\mu abc \frac{1}{\chi_0 + \alpha_1 a_1^2} \tag{30a}$$

$$R_{11}^{T\Omega} = \frac{16\pi\mu abc}{3} \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2^2 \alpha_2 + a_3^2 \alpha_3} \tag{30b}$$

在上述公式中，χ_0和（α_1、α_2、α_3）是文献 [48]中给出的椭圆积分。若要获得对角张量的其他分量，只需适当更改 a_i 和 α_i 的指标。例如，对于 R_{22}^{FU}，将指标改为“2”；而对于 $R_{22}^{T\Omega}$，则将指标改为“1”和“3”。

为了计算作用于粒子上的聚合物力 F_i^{poly}和力矩 T_i^{poly}，可使用方程（22），该方程用到了由单位平移和单位转动引起的、粒子外部的斯托克斯速度场 v_{ik}^{trans}和 v_{ik}^{rot}。完整的 v_{ik}^{trans}和 v_{ik}^{rot}表达式见附录B。该公式还需要知道额外应力张量 $\tau_{ij}^{ex} - \tau^{ex,\infty}_{,ij}$（方程（25）），其中涉及粒子周围的 O一阶速度场。椭球体周围的一阶速度场解已在文献中计算得出 O（另见 [47, 48]）。完整表达式请参阅这些文献。

4 代码开发与验证

已知粒子在通道中的初始位置（x_0，y_0，z_0）和取向（θ_0，ϕ_0）（图 1 a），我们按如下方式追踪其位置和取向随时间的变化：

1. 从实验室坐标系转换到粒子坐标系：我们从实验室坐标系（图1(a)）转换到粒子坐标系（图 1 (b)），此时原点位于椭球体的质心，坐标轴与椭球体的半轴对齐。我们也将通道速度场 u_i^{∞}（方程（12）和（13））转换到该坐标系中。该速度场的计算范围截至 $O(\delta)$，其中 $\delta = Cu^2$对应小 Carreau数极限，而 $\delta = Cu^{n-1}$ 对应大 Carreau数极限。

2. 计算 Faxén速度：利用 u_i^{∞}的表达式，我们使用方程（28）和（29）计算 Faxén速度 U_i^{Faxen}和 Ω_i^{Faxen}。

3. 计算聚合物力和力矩：我们使用方程（22）计算作用于椭球体的聚合物力和力矩。对于聚合物力和力矩的每个分量，我们使用高斯求积，在椭球坐标中数值计算体积分。通常，径向使用15个求积点，纬向使用10个求积点，经向使用35个求积点。在被积函数中，我们使用方程（25）所述的附加应力表达式 $\tau_{ij}^{ex} - \tau^{ex,\infty}_{ij}$。请注意，被积函数还涉及辅助问题（$v_{ik}^{trans}$，$v_{ik}^{rot}$）中的量，该问题已事先单独求解并制成表格。

4. 计算刚体运动：利用 Faxén速度以及聚合物力/力矩，计算粒子在粒子坐标系中的刚体运动（方程（26）和（30））。

5. 转换回实验室坐标系并更新粒子位置和取向：将刚体速度（U_i，Ω_i）转换回实验室坐标系。然后更新粒子的位置和取向。控制粒子质心的方程为：

$$\frac{dx_i^{cm}}{dt} = U_i \tag{31}$$

控制投影向量随时间演化的方程为 $\frac{dp_i}{dt} = \epsilon_{ijk}\Omega_j p_k$。若用椭球体的取向角（$\theta$,—$\phi$）表示，这些方程可写为：

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \Omega_y \cos\phi - \Omega_x \sin\phi \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega_z - \Omega_x \cos\phi \cot\theta - \Omega_y \sin\phi \cot\theta, \end{aligned} \tag{32}$$

利用上述方程（31）和（32）更新粒子的位置和取向角。采用前向欧拉时间步进，时间步长选为 $10^{-3} < \Delta t < 10^{-2}$（无量纲单位）。

6. 重复上述步骤：重复步骤 1–5，直至模拟粒子运动经过足够长的时间。

我们开发了 MATLAB 代码来执行该算法。此前一篇发表的论文中，我们最初开发并使用这段代码，分析椭球体在二阶黏弹性流体中的运动 [16]。在本文中，我们修改了代码，以考虑低 Carreau数和高 Carreau数极限下的剪切变稀效应。为测试代码，我们模拟了低 Carreau数极限下球体在剪切变稀流体中的沉降。图 5 展示了模拟结果以及 [24]提供的理论结果。两者完全吻合，验证了我们的代码。

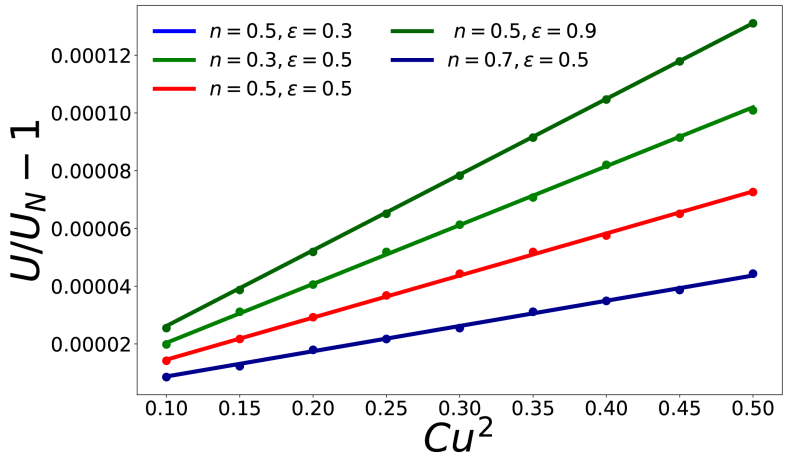


图5：剪切变稀流体中球体的沉降速度。 y轴表示沉降速度的分数增幅 U，与牛顿流体值 U_N 在零Carreau数时的值相比（$Cu = 0$）。实线表示 [24], 理论的结果，而圆点则表示本文采用基于互易定理的数值模拟所得的结果。

5 结果与讨论

在讨论中，我们将专注于椭球体的取向动力学，不讨论平移运动。我们发现，对于平移运动，并未出现横向迁移或颗粒升力等新现象 [24, 25]。我们将首先讨论小 Carreau数极限下的结果，随后讨论大 Carreau数极限下的结果。

除非另有说明，我们将考察一个等效颗粒半径为 $R = 0.1$ 的粒子，其长度以通道高度 h无量纲化。粒子的初始位置为 $[x_0, y_0, z_0] = [0, -0.5, 0]$。

5.1 取向动力学——小Carreau数极限（$Cu \ll 1$）

5.1.1 一般观察—— A_R、 Cu和 n的影响：

图 6 展示了形状参数（A_R）对牛顿流体和剪切变稀流体中椭球体取向动力学的影响。首先，我们注意到，粒子偏离球形越远，其翻滚周期就越长。对于长椭球颗粒（$A_R > 1$），周期随 A_R 增大而延长。对于扁椭球颗粒（$A_R < 1$），周期则随A_R 减小而延长。这些趋势显然是牛顿流动造成的，因为此时周期与$T \sim (A_R + 1/A_R)$成正比。其次，我们观察到，与牛顿流体相比，剪切变稀会缩短翻滚周期——参见图 6中的实线（剪切变稀）和虚线（牛顿型）。此外，剪切变稀会减小颗粒在 θ 中的振荡幅度。这些趋势与剪切变稀流体线性 流动中长椭球体所呈现的趋势相反，如 $Cu^2 \ll 1$ 极限下 [25]的研究所示。在他们的研究中，剪切变稀会延长长椭球体的旋转周期，并增大 θ的振荡幅度。下文将解释这一趋势上的差异。

对于本文分析的压力驱动流，偏应力场与施加在通道两端的压力梯度相平衡。由于施加的压降与剪切变稀修正无关，流动中产生的应力不会因剪切变稀而改变。由于流体中产生的应力场与牛顿型情形相同，黏度较低的剪切变稀流体必须比牛顿流体发生更大的变形，才能维持相同的应力和压降。由于时间周期T 和 θ 的振荡幅度与应变率/变形成反比，因此，如图6所示，随着剪切变稀程度增加，这两个量都会减小。

另一方面， [25] 所研究的线性（剪切）流是运动学控制的，其中背景流的速度场在牛顿型和剪切变稀流变性质之间保持不变。

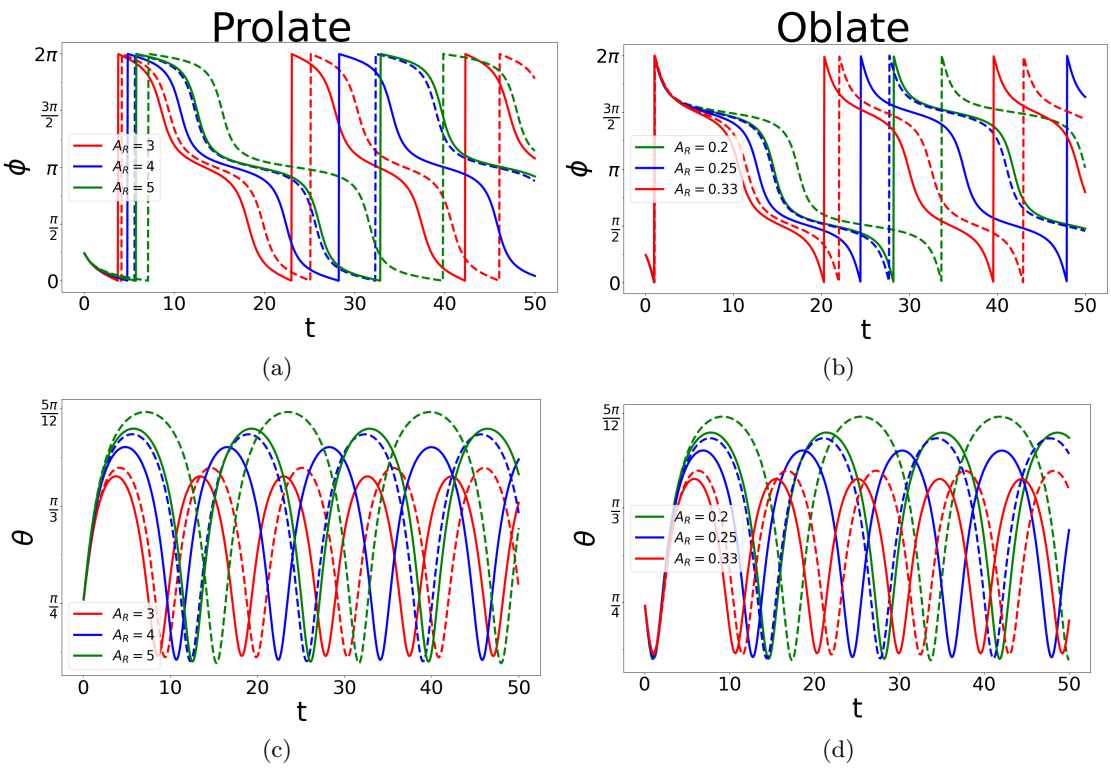
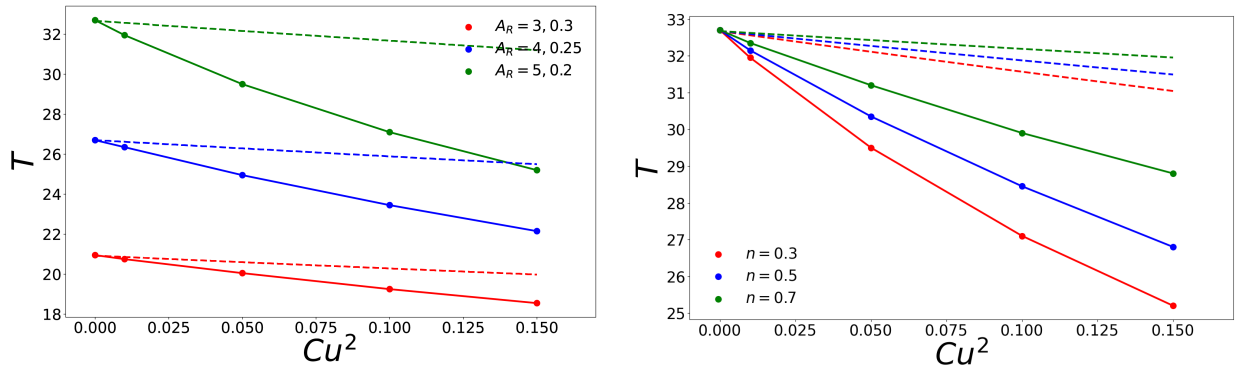


图 6：形状参数（A_R）对小 Carreau数极限（$Cu \ll 1$）下长旋转椭球和扁旋转椭球取向轨迹的影响。在所有这些图中，初始取向为 $\theta_0 = \pi/4$，$\phi_0 = \pi/4$。左侧的图显示长椭球体（$A_R > 1$），右侧的图显示扁椭球体（$A_R < 1$）。实线曲线表示 $Cu^2 = 0.1$ 和 $n = 0.3$的剪切变稀流体，虚线曲线表示牛顿流体（$Cu^2 = 0$）。

因此，剪切变稀流场中产生的应力场比牛顿型流场中的应力场弱。较弱的应力场反过来会对粒子施加较小的流体动力学力矩，使其旋转减慢、振荡幅度增大 θ。关于椭球体在剪切流中的翻滚行为及其与压力驱动流的比较，将在第6节中进一步讨论。

图 7 绘出了不同 Carreau数（Cu）、幂律指数（n）和形状参数（A_R）下长椭球体和扁椭球体的翻滚周期。这里可以观察到几个趋势。首先，我们清楚地看到，剪切变稀程度增加（即 Cu 增加或 n减小）会缩短翻滚周期，而且颗粒偏离球体越远，这种影响越显著。即使在线性剪切流中，[25], 剪切变稀的影响也会随着长椭球颗粒长宽比的增大而相应增强。原因很简单：对于体积相同的长椭球颗粒，随着其长宽比（A_R）增大，长轴在速度梯度 y-轴方向上的投影（由$a \sin\theta \sin\phi$给出）也会增大，因此颗粒受到流动剪切变稀特性的影响更强。扁椭球颗粒也适用类似的论述。有趣的是，比较 $A_R = 3$、4、5 长椭球颗粒与 $A_R = \frac{1}{3}$、1_4、1_5扁椭球颗粒时，我们发现它们的周期完全相同。这一观察表明，与牛顿型情形一样，周期 T 是（$A_R + 1/A_R$）的函数。

我们想说明的最后一点是，翻滚周期的缩短不能完全用粒子周围有效剪切速率的降低来解释。在牛顿型流动中，翻滚周期由经典的Jeffrey公式给出 $T = 2\pi(A_R + 1/A_R)\dot{\gamma}^{-1}{}_{\mathrm{loc}}$，其中 $\dot{\gamma}_{\mathrm{loc}}$是粒子质心处的局部应变率 $y = y_0$。在剪切变稀流体中估算翻滚周期的一种天真方法，是使用同一公式，同时注意到 $\dot{\gamma}_{loc}$ 会随着 Cu在通道中增大，或随着 n 减小而增大。图7 以点线展示了用这种方法估算出的周期。总体而言，虽然这种方法可以解释粒子周期缩短的部分原因，但与模拟结果并不吻合。这表明，不能通过对



(a) (b)

图7：在 $Cu \ll 1$ 极限下，不同（a）形状参数 A_R 和（b）幂律指数 n条件下，长椭球颗粒和扁椭球颗粒的翻滚周期。两幅图的初始取向均为 $\theta_0 = \pi/4$，$\phi_0 = \pi/4$。实线表示基于互易定理的数值估算结果，点线表示使用局部剪切率通过Jeffrey公式得到的结果，即 $T = 2\pi(A_R + 1/A_R)\,\dot{\gamma}^{-1}_{\text{局部}}$，其中 $\dot{\gamma}_{\text{loc}} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\underline{u}_x^{\infty,(0)} + Cu^2 u_x^{\infty,(1)}\right]$

Jeffrey理论来预测剪切变稀流中椭球体的周期。

5.1.2 初始取向的影响（θ_0，ϕ_0）：

接下来，我们分析初始取向（θ_0，ϕ_0）对牛顿型流动和剪切变稀流动中椭球体轨迹的影响。我们研究了六组初始取向：(θ_0, ϕ_0) =((π/4, 0), (π/4, π/4), (π/4, π/2), (π/3, 0), (π/3, π/4), (π/3, π/2)). 我们分析了长椭球颗粒和扁椭球颗粒。

首先，从图 8 (a,b) 可以看出，方位角 ϕ 随时间的演化与初始取向 θ_0 无关——换言之，对于相同的初始角度 ϕ_0，$\theta_0 = \pi/4$ 和 $\theta_0 = \pi/3$ 的曲线重合。对于长椭球颗粒，椭球体在 $\phi = m\pi$ 构型（$m = 0$，1）中停留的时间较长；而扁椭球颗粒在 $\phi = (m + \frac{1}{2})\pi$构型（$m = 0$，1）中停留的时间较长。$\phi = (m+\frac{1}{2})\pi$（长旋转颗粒）和 $\phi = m\pi$（扁旋转颗粒）区域中，牛顿型流体与剪切变稀流轨迹之间的偏差最大。这些趋势可以这样理解：椭球体的旋转由剪切应力产生的流体动力学力矩驱动。该力矩源自沿x方向的牵引力，以及沿 y轴的力臂（颗粒长度的投影）。因此，力臂最小的构型（例如，长椭球颗粒的 $\phi = m\pi$，扁椭球颗粒的 $\phi = (m + \frac{1}{2})\pi$）具有最低的旋转速率和最长的停留时间；而力臂最长的构型（例如，长椭球颗粒的$\phi = (m + \frac{1}{2})\pi$，以及扁椭球颗粒的 $\phi = m\pi$）具有最高的旋转速率，因此受剪切变稀影响最大。

此时，我们想比较 ϕ 在这种流动中的演变与椭球体在其他类型流动中的情况。对于处于剪切变稀流体纯剪切流中的长椭球体，其变化趋势与此处观察到的相同：长椭球体在 $\phi = (m + \frac{1}{2})\pi$ 时旋转最快，在 $\phi = m\pi$ 构型下旋转最慢（见 [25]中的图4(b)和图4(c)）。另一方面，对于处于非线性黏弹性流体二次流中的椭球体，情况恰恰相反。在这类流动中，长椭球体（扁椭球体）的极大值（极小值）出现在 ϕ 时，而 $\phi = 0$ 或 $\phi = \pi$时则出现极小值（极大值）（见 $\phi = \pi/2$ 中的图6及第IV c节相关讨论）。这种差异的原因在于，在非线性黏弹性流中，作用于椭球体的流体动力学力矩由法向应力引起，而剪切变稀流中则由剪切应力引起。这些法向应力会产生沿 y方向的牵引力，以及沿 x方向的力臂。因此，当椭球体的取向使其最长轴与 x轴对齐时，作用于椭球体的流体动力学力矩最大，从而使其在此构型下具有更高的旋转速率。

接下来，我们分析 θ 在牛顿型流动和剪切变稀流中的时间演化（图8 (c,d)）。根据牛顿流体中 Jefferey 轨道的经典分析，我们知道 θ 的变化规律为

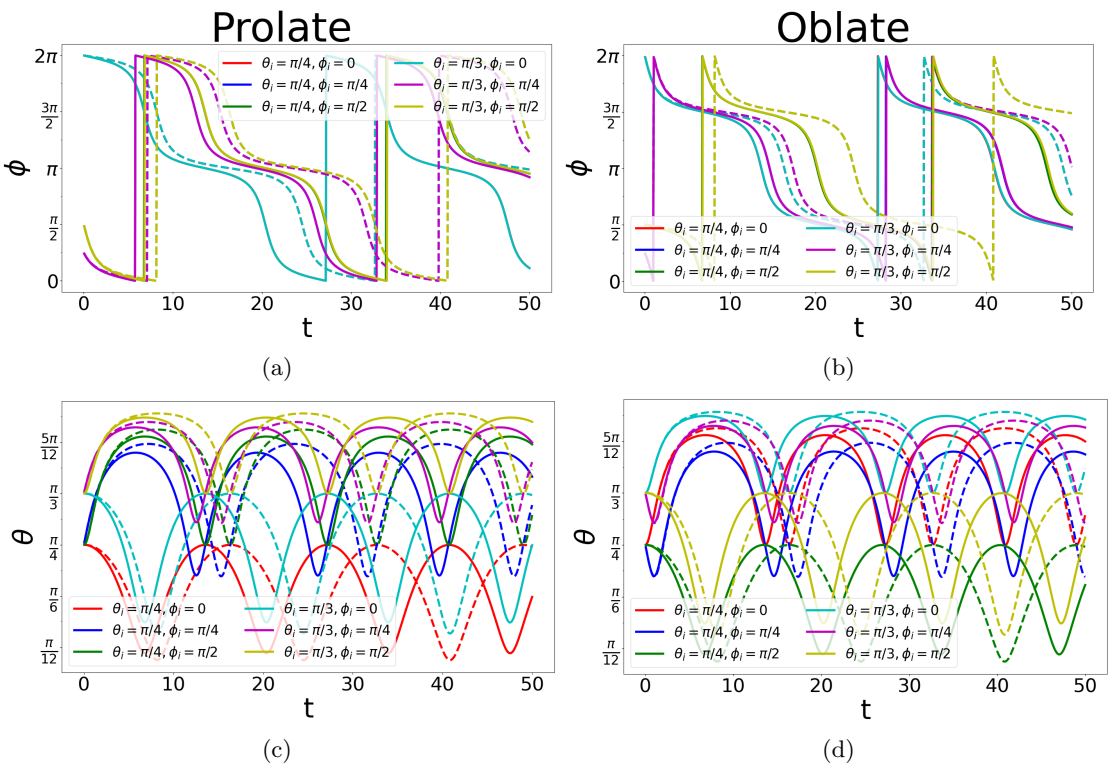


图8：在小Carreau数极限（$Cu \ll 1$）下，初始取向（θ_0，ϕ_0）对长旋转椭球和扁旋转椭球取向轨迹的影响。左侧图显示长旋转椭球（$A_R = 5$），右侧图显示扁旋转椭球（$A_R = 0.2$）。实线表示幂律指数为 $n = 0.3$ 和 $Cu^2 = 0.1$的剪切变稀流，虚线表示牛顿流体（$Cu^2 = 0$）。

$\frac{A_R^2-1}{A_R^2+1}$正弦2θ正弦2ϕ。我们还在剪切变稀流体中观察到该方程的类似特征。例如，我们发现 θ 由于 $\frac{A_R^2-1}{A_R^2+1}$ 符号变化，初始取向相同的长椭球颗粒与扁旋转颗粒之间会发生变化（比较图8 (c,d)中的同色曲线）。我们还发现，初始时释放的椭球体 $\theta_0 = \pi/2$或 $\theta_0 = 0$ 将具有 $\dot{\theta} = 0$，因此保持在初始角度。总体而言，我们发现剪切变稀会缩短 θ的周期并减小其振幅；不过，与前文讨论的其他影响因素相比，初始取向对这些量的影响较不显著（A_R、Cu和 n）。因此，本文不再进一步讨论这一影响。

5.2 取向动力学——大Carreau数极限（$Cu \gg 1$）

现在，我们分析大Carreau数极限（$Cu \gg 1$）下椭球体的旋转动力学，该极限刻画了流体黏度偏离较低牛顿平台 $\eta = \beta$的情况。在数学行为上，$Cu \ll 1$ 极限与 $Cu \gg 1$ 极限存在一些差异。首先，由于$Cu \gg 1$ 极限刻画的是偏离第二个牛顿平台的情况，因此任何偏离该平台的扰动都会增加流体的有效黏度。其次，对于大Carreau数极限，只有在 $Cu \to \infty$极限下才能恢复第二个牛顿平台，而在 $n \to 1$极限下则不能。相比之下，在小Carreau数极限下，通过 $n \to 1$ 或 $Cu \to 0$，或者两者兼具，便可恢复上平台。

5.2.1 总体观察—— A_R、Cu和 n的影响

图 9 绘出了扁椭球颗粒和长椭球颗粒在第二牛顿平台（$\phi(t)$ $\theta(t)$）以及剪切变稀区域（$Cu \to \infty$ 极限）中的角度轨迹。考察了不同的形状参数（$Cu \gg 1$，但为有限值）。可以得出几个重要观察结果。首先，图中显示，时间

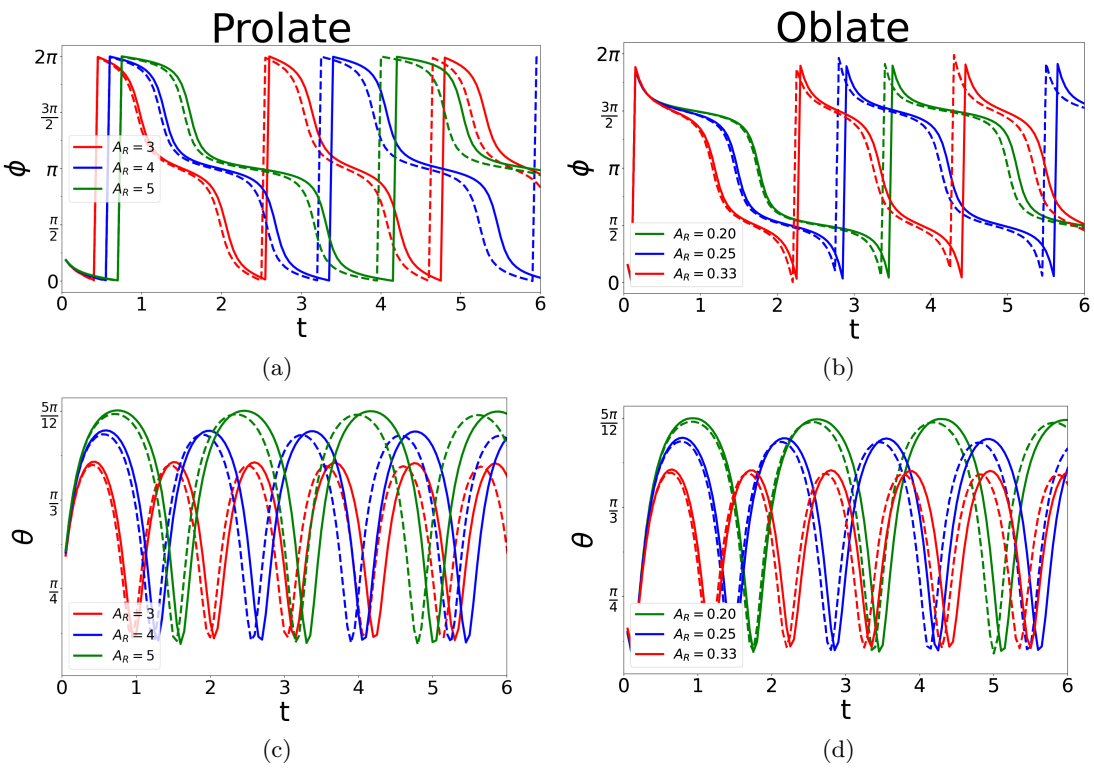
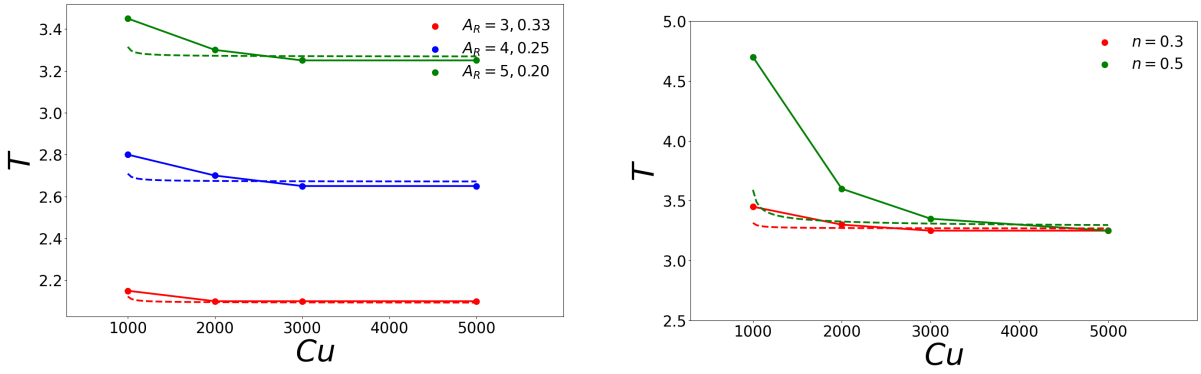


图9：形状参数（A_R）对大 Carreau 数极限（$Cu \gg 1$）下长旋转椭球和扁旋转椭球取向轨迹的影响。左侧图展示长旋转椭球，右侧图展示扁旋转椭球。实线表示 $Cu = 1000$ 和 $n = 0.3$ 条件下的剪切变稀流，虚线表示无量纲黏度为 $\beta = 0.1$ 的牛顿平台（$Cu \to \infty$）。所有图中的初始取向均为 $\theta_0 = \pi/4$，$\phi_0 = \pi/4$。

周期和振幅对于 θ 在牛顿平台区间（$Cu \to \infty$）中比在剪切变稀区间（Cu 有限）更小。出现这些趋势的原因是，剪切变稀区间的黏度高于牛顿平台，导致流体中的应变率较低，因此翻滚周期更长，且 θ 的振荡幅度更大，正如前文所述。图中还显示，粒子形状偏离球体越多（长旋转颗粒的 $A_R > 1$ 和扁旋转颗粒的 $A_R < 1$），牛顿平台情形与剪切变稀情形之间的动力学差异就越显著。最后，就取向而言，角度 ϕ 在大Carreau数极限和小 Carreau数极限下的表现相似（比较图 9与图 6）。在这两种情况下，椭球体都倾向于让长轴沿流动（x）方向排列，这对应于长旋转颗粒的 $\phi = m\pi$ 和扁旋转颗粒的 $\phi = (m + \frac{1}{2})\pi$ 取向。在这些取向下，剪切变稀情形与牛顿型情形之间的差异最小（见图 9(a,b)），而力臂最大的取向则表现出剪切变稀情形与牛顿型情形之间最大的差异。

图 10 绘出了不同形状参数（A_R）、Carreau数（Cu）和幂律指数（n）下，大Carreau数范围内椭球体的翻滚周期。这些图表明，随着Carreau数增大，周期逐渐减小并趋于一个恒定值，达到一个不依赖于 Cu 的牛顿平台，其中 $Cu \to \infty$。不过，周期的变化远比小Carreau数极限下观察到的变化温和得多（比较图7 和图 10）。出现这一现象的原因是，在小Carreau数极限下，黏度的变化按 $\epsilon(n-1)Cu^2$ 缩放；而在大Carreau数极限下，变化按ϵCu^{n-1} 缩放，其对 Cu 和n的依赖变化较弱。与此前观察到的情况类似，我们发现，长宽比相同的长旋转颗粒和扁旋转颗粒具有相同的周期，而且颗粒偏离球体越远，剪切变稀的影响越显著。最后，在图 10 中，我们还绘出了根据经典Jeffery轨道方程计算得到的周期$T = 2\pi(A_R + 1/A_R)\dot{\gamma}_{loc}^{-1}$，其中 $\dot{\gamma}_{loc}$是粒子质心处的局部剪切率。人们会



(a) (b)

图10：在 $Cu \gg 1$ 极限下，不同 (a) 形状参数 A_R 和 (b) 幂律指数 n对应的长旋转椭球和扁旋转椭球的翻滚周期。初始取向为 $(\theta_0 = \pi/4, \phi_0 = \pi/4)$，流变参数为 $\beta = 0.1$。对于 (a)，$n = 0.3$；对于 (b)，$A_R = 5$。实线表示基于互易定理的数值估算结果，点线表示使用Jeffrey公式并采用局部剪切率所得的结果——即 $T = 2\pi(A_R + 1/A_R)\,\dot{\gamma}^{-1}{}_{\mathrm{loc}}$，其中 $\dot{\gamma}_{\mathrm{loc}} = \frac{\partial}{\partial y}\left[u_x^{\infty,(0)} + Cu^{n-1}u_x^{\infty,(1)}\right]$。

预期 $\dot{\gamma}_{loc}$ 会随Carreau数（Cu）和幂律指数（n）变化，从而解释图中观察到的一些趋势。我们发现，虽然该方程确实能解释部分趋势，但其结果与模拟结果并不重合，不过相比图7中的小Carreau数极限，吻合程度似乎更好。再次，这些结果表明，不能用斯托克斯流中的简单思路来描述剪切变稀流体中颗粒的翻滚行为。最后还要指出，图10 中的周期与小Carreau数极限下的图（图7）采用了不同的坐标轴。 $Cu \to \infty$ 极限下的翻滚周期比 β 极限小 $Cu = 0$ 倍，这是因为通道中的剪切速率大了 $1/\beta$ 倍。这将在下一节讨论相关趋势时发挥作用；届时我们会比较椭球体在压力驱动流与简单剪切流中的翻滚行为。

6 简单剪切流中椭球体的微观流体动力学比较

本节探讨椭球体在剪切变稀流体的库埃特流中的运动。该流动的示意图如图所示：11，与前文相同，坐标轴原点设在通道中心。不过，此处的流动由上壁面以恒定速度 $2\mathcal{U}_c$运动来驱动。所有长度均以高度 h、速度以 $\mathcal{U}_c$、剪切速率以 $\dot{\gamma}_c = \mathcal{U}_c/h$、时间以 $\dot{\gamma}_c^{-1}$、黏度以 η_0、应力以 $\tau_c = \eta_0\dot{\gamma}_c$为基准进行无量纲化。不存在粒子时的速度场可用无量纲形式表示为：

$$u_x^{\infty} = 1 + y \tag{33}$$

Carreau数定义为：

$$Cu = \lambda_t\dot{\gamma}_c = \lambda_t\mathcal{U}_c/h \tag{34}$$

我们观察到，未受扰动的速度场与黏度无关，因此在牛顿型流体和扰动剪切变稀情形（$\mathcal{O}(Cu^2)$ 和 $\mathcal{O}(Cu^{n-1})$）下相同。

将椭球体置于线性背景流中，除未受扰动的背景流外，还会在粒子周围产生扰动场。与前文相同，为描述粒子运动，我们在两个极限下对扰动场进行微扰：小 Carreau 数（以 Cu^2 为微扰参数）和大 Carreau 数（以 Cu^{n-1} 为微扰参数）。在这两种微扰求解方案中，首阶问题均为牛顿型，其解已见于文献，也可参阅标准教科书（[49, 第 3]章）。对于剪切变稀修正，我们采用互易定理，求解小 Carreau 数极限下 $\mathcal{O}(Cu^2)$ 处以及大 Carreau 数极限下$\mathcal{O}(Cu^{n-1})$ 处粒子的刚体运动。

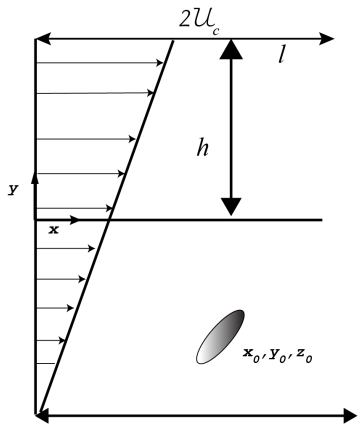
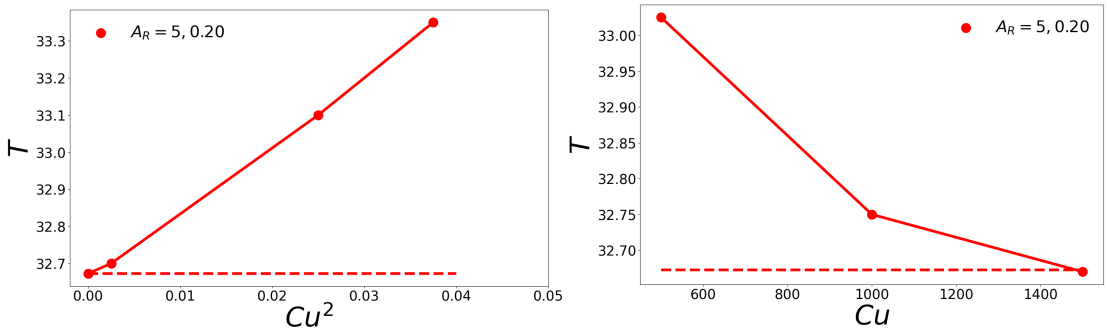


图11：剪切变稀流体库埃特流中的椭球体。该装置与压力驱动流所用的装置相同，不同之处在于，流动由上壁面的运动驱动。



(a) (b)

图12：剪切变稀流体线性流中长旋转椭球和扁旋转椭球的旋转周期，分别处于 (a) 小 Cu 和 (b) 大 Cu 区间。实线曲线表示基于互易定理的模拟所得的剪切变稀流体解，虚线曲线表示使用 Jeffrey轨道公式得到的牛顿流体解。流变参数包括 $n = 0.3$ 和 $\beta = 0.1$，初始取向由 $(\theta,\ \phi) = (\pi/4,\ \pi/4)$ 给出

这项分析的结果给出了小 Carreau 数和大 Carreau 数微扰方案下，剪切变稀流体的库埃特流中椭球体的翻滚周期。结果绘于图 12。在图 Cu 12(a) 所示的小 情形下，我们观察到，随着剪切变稀程度增加，周期也随之增长。此前 [25]也报告过这一结果。在黏度的牛顿极限（$Cu \to 0$）下，周期也会趋于 Jefferey 轨道公式给出的值（见点线）。当前分析中更值得关注的是图 Cu 12(b)所示的大 数微扰极限下的结果。这是此前文献中未曾发表过的新颖结果。我们观察到，随着粒子周围的流体持续发生剪切变稀，周期开始缩短。当 Carreau 数极大时，周期随后又趋于 Jefferey 轨道公式给出的值。值得注意的是，在这两种微扰方案的牛顿极限（$Cu \to 0$ 和 $Cu \to \infty$）下，周期都趋于相同的常数值。

与前几节讨论的压力驱动流相比，我们注意到剪切变稀流体线性流中椭球体微观流体动力学存在以下差异：

1. 在压力驱动流中，周期随Carreau数增加而单调递减。另一方面，在线性流中，周期呈现非单调变化。在低Carreau数区域，周期随Carreau数增加而增大；而

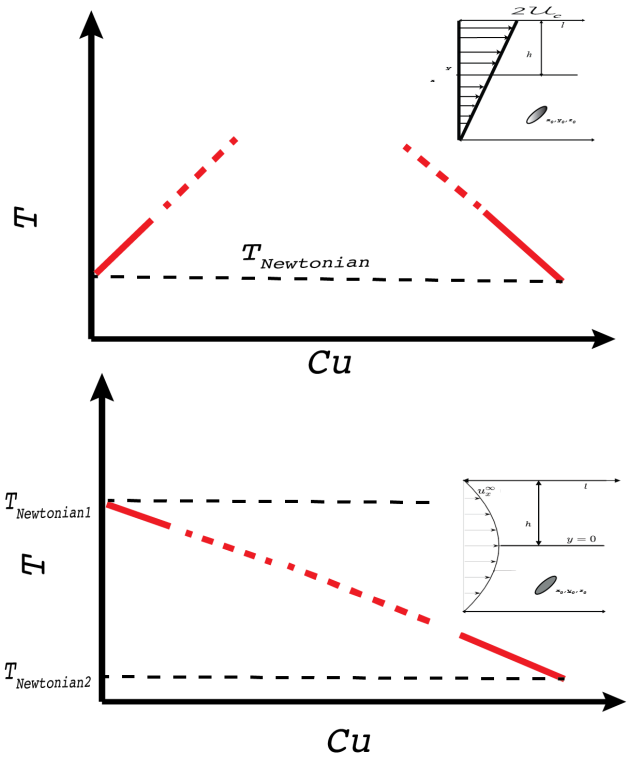


图13：剪切变稀流体的线性流（上）和压力驱动流（下）中椭球体旋转周期的示意图（图示未按比例绘制）。红色实线表示基于互易定理的摄动分析所揭示的已知行为，红色虚线表示假设。黑色虚线表示相应的牛顿平台区。 $T_{Newtonian2} = \beta \times T_{Newtonian1}$

另一方面，在高Carreau数情况下，周期随Carreau数增加而减小。

2. 在压力驱动流中，两个牛顿极限（低、高 Carreau 数）下的周期不同，这是因为这两个极限下的背景流和牛顿黏度不同。在线性流中，两个牛顿极限下的周期相同，因为这两个极限下的背景流也相同。

这两种差异在图中以示意图形式展示。13

7 结论

本文分析了椭球体在剪切变稀流体的压力驱动流中的运动。剪切变稀流变学由 Carreau模型描述。我们结合摄动方法与互易定理，阐明长旋转椭球和扁旋转椭球的取向动力学。首先，分别针对小 Carreau数极限和大 Carreau数极限，构造 Carreau模型的近似形式。接下来，修正经典压力驱动（泊肃叶）流动方程，以考虑由流变学引起的剪切变稀修正。最后，利用互易定理以及椭球体在牛顿型流动中的迁移率关系，对该问题的取向运动学进行数值计算。

我们得出以下结论：

- 剪切变稀流体中的椭球体会以周期性方式翻滚。换言之，剪切变稀并不能消除牛顿流体中 Jeffrey轨道的简并性。Jefferey轨道的简并性归因于牛顿流体动量方程的对称性。剪切变稀流变学虽然是非线性的，仍然保留了动量方程的对称性。

- 在小 Carreau数极限下（$Cu \ll 1$），我们发现，与线性剪切流相比，椭球体在压力驱动流中的翻滚行为截然不同。在压力驱动流中，剪切变稀（$Cu > 0$）会使翻滚周期比牛顿流体中的更短（$Cu = 0$）。粒子处于剪切流中时，剪切变稀则会导致相反的趋势——也就是说，与牛顿型流体中的对应情况相比，翻滚周期更长 [25]。出现这种相反趋势的原因是：本文研究的压力驱动流由压力控制，而剪切流则由运动学控制。在前一种情况下，剪切变稀会使粒子上的剪切速率增大，因此翻滚周期更短。在后一种情况下，剪切变稀会使粒子所受应力降低，因此翻滚周期更长。

- 我们还观察到，剪切变稀流体中的椭球体与黏弹性流体中的椭球体，其旋转行为存在显著差异。在剪切变稀流体中，长旋转颗粒沿剪切梯度方向排列时旋转速度最快，沿流动方向排列时则最慢。Boger流体中的长旋转颗粒则呈现相反的趋势（例如二阶流体 [16, 20]）。这一趋势可归因于：在剪切变稀流中，流体动力学力矩由剪切应力引起；而在黏弹性流中，力矩则由法向应力引起。因此，流体动力学力矩来源不同意味着，在黏弹性流体中，长旋转颗粒沿流动方向取向时力臂最大；而在剪切变稀流体中，长旋转颗粒沿剪切方向取向时力臂最大。扁旋转颗粒也呈现出类似趋势。

- 在简单剪切流中，椭球体翻滚的周期随 Carreau数呈非单调趋势。当 Carreau数较小时，周期会从其牛顿流体值开始增加；而当 Carreau数较大时，周期则会逐渐减小，回到相同的牛顿流体值。另一方面，在压力驱动流中，翻滚周期随 Carreau数单调减小。此外，对于压力驱动流，不同牛顿极限（$Cu \to 0$）和（$Cu \to \infty$）下的周期并不相同。对于压力驱动流，高 Carreau $Cu \to \infty$ 下牛顿极限中的周期是低 Carreau（$Cu \to 0$）下牛顿极限中周期的 β 倍。

未来，当前分析可进一步扩展，以纳入其他非弹性非牛顿流体的影响，例如黏度空间变化的流体 [23, 50] 或密度空间变化的流体 [51–53]。同样，除了椭球体之外，也可采用相同的理论框架分析其他形状的颗粒，如片状体 [54] , 、细长体[6] 以及前后不对称颗粒 [55] 。还可分析压力驱动流以外的其他流动问题，例如剪切变稀流体中的沉降 [18] 。最后，也可考虑惯性 [6–8], 、粒子尺寸 [56], 以及壁面效应等高阶影响。

致谢

作者感谢美国化学会石油研究基金（资助编号：ACSPRF61266-DNI9）提供的资助。

附录 A：粒子周围刚体运动互易定理的推导

假设在液体的同一控制体 V 中有两个速度场。两个速度场均满足含体力的斯托克斯方程，即：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \qquad \frac{\partial \tau_{ij}^N}{\partial x_j} + b_i = 0 \tag{35}$$

其中， $\tau_{ij}^N = \mu\dot{\gamma}_{ij} – p\delta_{ij}$ 是黏度为 μ的标准牛顿应力张量， b_i 是空间变化的体力。我们将在上述符号中添加上标，以区分两个流场——（α）是流

场一，而（χ）是流场二。这两个流场通过格林第二恒等式相互关联，该恒等式表述为：

$$\int_S u_i^{(\alpha)} \tau_{ij}^{N,(\chi)} n_j dS + \int_V u_i^{(\alpha)} b_i^{(\chi)} dV = \int_S u_i^{(\chi)} \tau_{ij}^{N,(\alpha)} n_j dS + \int_V u_i^{(\chi)} b_i^{(\alpha)} dV \tag{36}$$

在上述表达式中，S 是控制体的表面，n_i 是控制体的外法向量。虽然这个表达式看起来晦涩难懂，但它非常有用。它表明，如果已知一个流场（例如，流动（χ））的信息，就可以获得另一个流场（例如，流动（α））的信息。如下文所示，该表达式也可推广至非牛顿流体。

对于我们的问题，两个流场如下：

流场 1：刚性粒子周围的非牛顿流动 我们将选择流场一（上标为 α）作为粒子周围的扰动流，其背景速度为 u_i^∞，体力为 $b_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{ij}^{ex}\right)$。因此，我们设：

$$u_i^{(\alpha)} = u_i - u_i^\infty \tag{37a}$$

$$\tau_{ij}^{N,(\alpha)} = \tau_{ij}^N - \tau_{ij}^{N,\infty} \tag{37b}$$

$$b_i^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{ij}^{ex} - \tau_{ij}^{ex,\infty}\right) \tag{37c}$$

在上述表达式中，带有上标“∞”的量表示不存在粒子时的速度场和应力场（即仅由 u_i^∞引起），而不带上标的量则表示存在粒子时的场。为方便起见，我们选择扰动量，这样可以简化后续的代数运算。

流动 2：刚体运动粒子周围的斯托克斯流 我们将把流动二（带上标χ）视为同一粒子在进行刚体运动时周围的斯托克斯流。换言之，我们令

$$u_i^{(\chi)} = v_i \tag{38a}$$

$$\tau_{ij}^{N,(\chi)} = \Sigma_{ij} \tag{38b}$$

$$b_i^{(\chi)} = 0 \tag{38c}$$

其中，v_i 和 Σ_{ij} 分别是刚体运动粒子周围的速度场和应力场。在粒子表面上，$v_i = V_i + \epsilon_{ijk}\omega_j x_k$，其中 x_k 是从粒子质心指向外的位移向量，而 V_i 和 ω_i分别是平移速度和旋转速度。粒子所受的外力和力矩分别为 F_i^{aux}和T_i^{aux}。它们与平移速度和旋转速度之间可通过已知的阻力关系联系起来。

现在，我们将两个流动的相关信息代入上面的积分表达式（36）。我们选择控制体 V为粒子外部的体积。由于我们处理的是扰动量，因此无需对无穷远处的表面进行积分。于是得到：

$$\int_{S_p} \left(u_i - u_i^\infty\right) \Sigma_{ij} n_j dS = \int_{S_p} v_i \left(\tau_{ij}^N - \tau_{ij}^{N,\infty}\right) n_j dS + \int_V v_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{ij}^{ex} - \tau_{ij}^{ex,\infty}\right) dV \tag{39}$$

其中，S_p 是粒子表面，n_i 是指向粒子内部的法向量（它是控制体 V的外法向量）。注意到总应力张量为 $\tau_{ij} = \tau_{ij}^N + \tau_{ij}^{ex}$，我们可以对最后一个积分进行分部积分，从而简化上述表达式。由此得到：

$$\int_{S_p} \left(u_i - u_i^\infty\right) \Sigma_{ij} n_j dS = \int_{S_p} v_i \left(\tau_{ij} - \tau_{ij}^\infty\right) n_j dS - \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(\tau_{ij}^{ex} - \tau_{ij}^{ex,\infty}\right) dV \tag{40}$$

推导的下一步是注意到，速度场在粒子表面上表现为刚体运动。因此，在表面上，$u_i = U_i + \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k$；而对于另一种流动，$v_i = V_i + \epsilon_{ijk}\omega_j x_k$。代入这些表达式可得：

$$U_i F_i^{aux} + \Omega_i T_i^{aux} = V_i F_i^{ext} + \omega_i T_i^{ext} + \int_{S_p} u_i^{\infty} \Sigma_{ij} n_j dS - \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\tau_{ij}^{ex} - \tau_{ij}^{ex,\infty} \right) dV \tag{41}$$

在上述表达式中，F_i^{ext}和 T_i^{ext}分别是非牛顿流动（即流动 u_i）中作用于粒子的外力和力矩，而 F_i^{aux} 和 T_i^{aux}分别是另一种流动（即流动 v_i）中作用于粒子的外力和力矩。

在推导的最后部分，我们注意到，与流场 v_i 相关的所有量都是刚体平移和旋转（V_i、ω_i）的线性函数。换言之，我们可以用这些刚体运动表示流场 v_i 和应力场 Σ_{ij}：

$$v_i = v_{ik}^{trans} V_k + v_{ik}^{rot} \omega_k \tag{42a}$$
$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{ijk}^{trans} V_k + \Sigma_{ijk}^{rot} \omega_k \tag{42b}$$

在上述表达式中，v_{ik}^{trans}表示沿“k”方向单位平移所产生的“i”方向流场。其他量的符号表示法也类似。对于力和力矩 F_i^{aux}与 T_i^{aux}，我们将其写为：

$$F_i^{aux} = R_{ij}^{FU} V_j + R_{ij}^{F\Omega} \omega_j \tag{43a}$$
$$T_i^{aux} = R_{ij}^{TU} V_j + R_{ij}^{T\Omega} \omega_j \tag{43b}$$

其中 R_{ij}^{FU}，$R^{F}\Omega^{ij}$，R_{ij}^{TU}以及 $R_{ij}^{T\Omega}$是粒子的斯托克斯流阻力张量。将上述两个表达式（42）和（43）代入积分表达式（41），并进行一些代数运算后，我们得到非牛顿流体中粒子平移和转动速度的最终表达式。

$$\begin{bmatrix} R_{ij}^{FU} & R_{ij}^{F\Omega} \\ R_{ij}^{TU} & R_{ij}^{T\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ \Omega_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^{eff} \\ T_i^{eff} \end{bmatrix} \tag{44}$$

有效力和力矩由正文中的公式（20）-（22）给出。

附录B：单位平移和旋转产生的速度场 n

根据 Kim and Karilla [4], 速度场 v_{ik}^{trans}和 v_{ik}^{rot}由以下表达式给出。在这些公式中，除非明确说明，否则重复指标不表示求和。

$$v_{ik}^{trans} = \frac{1}{16\pi\mu} R_{kk}^{FU} \left[\delta_{ik} G_0 - x_k \frac{\partial G_0}{\partial x_i} + \frac{a_k^2}{2} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_i \partial x_k} \right] \tag{45a}$$
$$v_{ik}^{rot} = \frac{3}{32\pi\mu} R_{kk}^{T\Omega} \sum_{j=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{jkm} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\delta_{ij} G_1 - x_j \frac{\partial G_1}{\partial x_i} + \frac{a_j^2}{4} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i \partial x_j} \right] \tag{45b}$$

在上述表达式中，G_n 的表达式为：

$$G_n(x,y,z) = \int_{\lambda}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t} - 1 \right)^n \frac{dt}{\Delta(t)} \tag{46}$$

其中 $\Delta(t) = \sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}$，且 $\lambda(x,\ y,\ z)$ 为.....的正根

$$\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t} = 1 \tag{47}$$

参考文献

[1] E. M. Purcell，低雷诺数下的生命，《美国物理学杂志》45 (1977) 3–11. doi:10.1119/ 1.10903.[2] J. Happel, H. Brenner，低雷诺数流体动力学：流体力学与输运过程，第二版，Springer Netherlands，多德雷赫特，1983. doi:10.1007/978-94-009-8352-6.[3] L. G. Leal，高级输运现象：流体力学与对流输运过程，第7卷，剑桥大学出版社，2007.[4] S. Kim, S. Karilla，微观流体动力学：原理与精选应用，第二版，Dover Publications，米尼奥拉，纽约，2005.[5] L. G. Leal，黏性流体中的粒子运动，《流体力学年度评论》12 (1980) 435–76. URL: www.annualreviews.org.[6] G. Subramanian, D. L. Koch，简单剪切流中近球形粒子取向的惯性效应，《流体力学杂志》557 (2006) 257–296. doi:10.1017/S0022112006009724.[7] V. Dabade, N. K. Marath, G. Subramanian，惯性对简单剪切流中各向异性粒子取向动力学的影响，《流体力学杂志》791 (2016) 631–703. doi:10.1017/ jfm.2016.14.[8] N. K. Marath, G. Subramanian，平面线性流中各向异性粒子的惯性取向动力学，《流体力学杂志》844 (2018) 357–402. doi:10.1017/jfm.2018.184.[9] J. Einarsson, F. Candelier, F. Lundell, J. R. Angilella, B. Mehlig，弱流体惯性对Jeffery轨道的影响，《物理评论E：统计、非线性与软物质物理》91 (2015). doi:10.1103/PhysRevE.91.041002.[10] J. Einarsson, F. Candelier, F. Lundell, J. R. Angilella, B. Mehlig，小雷诺数下椭球体在简单剪切流中的旋转，《Physics of Fluids》27 (2015). doi:10.1063/1.4921543.[11] G. D'Avino, P. L. Maffettone，黏弹性液体中的粒子动力学，《Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics》215 (2015) 80–104. doi:10.1016/j.jnnfm.2014.09.014.[12]G. D'Avino, F. Greco, P. L. Maffettone，悬浮液黏弹性引起的粒子迁移及其在微流控器件中的相关性，《流体力学年度评论》49 (2017) 341–360. URL: https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010816-060150. doi:10.1146/annurev-fluid-010816-060150.[13] J. Einarsson, M. Yang, E. S. Shaqfeh，流体弹性对爱因斯坦黏度的影响，《物理评论：流体》3 (2018). doi:10.1103/PhysRevFluids.3.013301.[14] W. L. Murch, E. S. Shaqfeh，黏弹性流体中颗粒沉降的集体效应，《物理评论：流体》5 (2020). doi:10.1103/PhysRevFluids.5.073301.[15] A. Zhang, W. L. Murch, J. Einarsson, E. S. G. Shaqfeh，黏弹性剪切流中球形粒子所受的升力与阻力，《Journal of non Newtonian Fluid Mechanica》(2020). URL: https://www. sciencedirect.com/science/article/pii/S0377025720300471.[16] S. Wang, C. W. Tai, V. Narsimhan，一般二阶流体无界二次流中的椭球体动力学，《Physics of Fluids》32 (2020). doi:10.1063/5.0030517.[17] P. Brunn，黏弹性流体中刚性粒子的运动*，《Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanicr》7 (1980) 271–288.[18] S. Kim，二阶流体中椭球体的运动，《Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics》21 (1986) 255–269.[19] P. Brunn，二阶流体中刚性粒子的缓慢运动，《流体力学杂志》82 (1977) 529–547. doi:10.1017/S0022112077000822.[20] C. W. Tai, S. Wang, V. Narsimhan，二阶流体中非球形粒子的横向迁移——任意二次流中的粒子动力学理论，《流体力学杂志》895 (2020). doi:10.1017/jfm.2020.300.

[21] J. Gong, V. A. Shaik, G. J. Elfring, 活性粒子穿越突变黏度梯度（2022）。URL: http://arxiv.org/abs/2208.09548。doi:https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.09548。[22] V. A. Shaik, G. J. Elfring, 黏度梯度中活性粒子的流体动力学，《Physical Review of Fluids》（2021）。[23] C. Datt, G. J. Elfring, 黏度梯度中的活性粒子，《Physical Review Letters》123（2019）。doi:10.1103/PhysRevLett.123.158006。[24] C. Datt, G. J. Elfring, 剪切变稀流体中粒子的动力学与流变学，《Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics》262（2018）107–114。doi:10.1016/j.jnnfm.2018.03.016。[25] S. A. Abtahi, G. J. Elfring, 剪切变稀流体中的Jeffery轨道，《Physics of Fluids》31（2019）。doi:10. 1063/1.5125468。[26] K. Pietrzyk, H. Nganguia, C. Datt, L. Zhu, G. J. Elfring, O. S. Pak, 剪切变稀流体中自推进粒子周围的流动，《Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics》268（2019）101–110。doi:10.1016/j. jnnfm.2019.04.005。[27] G. J. Elfring, 复杂流体中活性粒子的力矩，《流体力学杂志》829（2017）。doi:10.1017/jfm.2017.632。[28] B. Van Gogh, E. Demir, D. Palaniappan, O. S. Pak, 粒子几何形状对其在剪切变稀流体中游动的影响，《流体力学杂志》938（2022）。doi:10.1017/jfm.2022.116。[29] G. J. Elfring, E. Lauga, 复杂流体中的运动理论，载于：S. Spagnolie（编），《生物系统中的复杂流体》，生物与医学物理、生物医学工程，Springer Science+Business Media，2015。doi:10.1007/978-1-4939-2065-5{_}{_}8。[30] C. Datt, L. Zhu, G. J. Elfring, O. S. Pak, 在剪切变稀流体中游动，《流体力学杂志》784（2015）R1。doi:10.1017/jfm.2015.600。[31] H. Nganguia, K. Pietrzyk, O. S. Pak, 剪切变稀流体中的游动效率（2017）。URL: http://arxiv.org/abs/1712.01305http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.96.062606。doi:10.1103/PhysRevE.96.062606。[32]K. Qin, O. S. Pak, 剪切变稀流体中的Purcell 游动器，《Phys. Rev. Fluids》8（2023）33301。URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.8.033301。doi:10.1103/ PhysRevFluids.8.033301。[33] V. Anand, I. C. Christov, 运用壳理论重新审视广义牛顿流体在细长弹性管中的稳态黏性流动，《Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)》101（2021）e201900309。doi:10.1002/zamm.201900309。[34] V. Anand, I. C. Christov, 稳态黏性流动导致的超弹性管变形，载于：H. Altenbach, A. Belyaev, V. A. Eremeyev, A. Krivtsov, A. V. Porubov（编），《广义连续体与结构中的动力过程》，Springer高级结构材料丛书第103卷，Springer Nature，Cham，瑞士，2019，第17–35页。doi:10.1007/978-3-030-11665-1{_}2。[35] V. Anand, S. C. Muchandimath, I. C. Christov, 流体动力鼓胀测试：无需测量变形的材料表征，《ASME J. Appl. Mech.》87（2020）051012。doi:10.1115/1.4046297。[36] V. Anand, J. D. J. Rathinaraj, I. C. Christov, 非牛顿流固相互作用：幂律流体内部流动导致的微通道静态响应，《J. Non-Newtonian Fluid Mech.》264（2019）62–72。doi:10.1016/j.jnnfm.2018.12.008。[37] A. Venkatesh, V. Anand, V. Narsimhan, 利用低雷诺数下的复杂流体剥离线弹性薄片，《Journal of non Newtonian fluid mechanics》（2022）。[38] V. Anand, I. C. Christov, 柔顺黏弹性管中的瞬态可压缩流动，《Phys. Fluids》32（2020）112014。doi:10.1063/5.0022406。[39] R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager,《聚合物液体动力学》第1卷，第2版，John Wiley，纽约，1987。

[40] V. Anand，均匀热通量边界条件下，黏性耗散作用中简化Phan-Thien-Tanner流体的滑移对传热和熵产生特性的影响：指数形式，《应用热工程》98（2016）。doi:10.1016/j.applthermaleng.2015.12.025。[41] V. Anand，浸没于等温外部流体中的圆管内纳米流体层流的熵产生分析，《能源》93（2015）。doi:10.1016/j.energy.2015.09.019。[42]R. P. Chhabra, J. F. Richardson，非牛顿流体行为，载于：《非牛顿流动与应用流变学》第2版，Butterworth-Heinemann，牛津，2008，第1–55页。doi:10.1016/ B978-0-7506-8532-0.00001-9。[43] V. Anand, I. C. Christov，非对称滑移对压力驱动非牛顿微流中传热增强和熵产生降低的作用，《传热学杂志》141（2019）。doi:10.1115/1.4042157。[44] V. Anand，滑移定律对均匀热通量边界条件下微通道中幂律流体压力驱动流动的传热和熵产生的影响，《能源》76（2014）716–732。URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2014.08.070。doi:10.1016/j.energy.2014.08.070。[45] E. Boyko, H. A. Stone，狭窄通道中剪切变稀流体的流量-压降关系：近似解及与实验的比较，《流体力学杂志》923（2021）。doi:10.1017/jfm.2021.621。[46] C. J. Pipe, T. S. Majmudar, G. H. McKinley，高剪切速率黏度测量，载于：《流变学学报》第47卷，2008，第621–642页。doi:10.1007/s00397-008-0268-1。[47] C. P. Martin, S. Wang, S. Kim，斯托克斯流中椭球体表面的牵引力：二次环境流场，《Physics of Fluids》31（2019）。doi:10.1063/1.5054698。[48] S. Wang, C. P. Martin, S. Kim，广义积分作为椭球体周围爬流中的难题，《Physics of Fluids》31（2019）。doi:10.1063/1.5050510。[49] M. D. Graham，微观流体动力学、布朗运动与复杂流体，第1版，Cambridge University Press，2018。URL: www.cambridge.org/mathematics。[50] R. Dandekar, A. M. Ardekani，黏度分层流体中的游动薄片，《流体力学杂志》（2020）。doi:10.1017/jfm.2020.352。[51]A. K. Varanasi, N. K. Marath, G. Subramanian，线性分层流体中沉降椭球形粒子的旋转，《流体力学杂志》933（2022）A17。URL: https: //www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112021010168/type/journal_article。doi:10.1017/jfm.2021.1016。[52] A. K. Varanasi, G. Subramanian，黏性密度分层流体中的球体运动，《流体力学杂志》949（2022）A29。URL: https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112022007601/type/journal_article。doi:10.1017/jfm.2022.760。[53]R. V. More, A. M. Ardekani，分层流体中的运动，《流体力学年度评论》（2022）。URL: https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120720-011132。doi:10.1146/ annurev-fluid-120720-011132。[54] R. Dandekar, V. A. Shaik, A. M. Ardekani，密度分层流体中的游动薄片，《流体力学杂志》874（2019）210–234。doi:10.1017/jfm.2019.445。[55] F. Candelier, B. Mehlig，静止流体中非对称哑铃体的沉降，《流体力学杂志》802（2016）174–185。doi:10.1017/jfm.2016.350。[56] P. Anand, G. Subramanian，压力驱动通道流中的惯性迁移：超越Segre-Silberberg聚焦（2023）。