arXiv:2303.06281v1 [cond-mat.quant-gas] 11 Mar 2023

偶极相互作用能否抑制偶极弛豫?

Pierre Barral[1*†]、Michael Cantara[1†]、Li Du[1†]、William Lunden[1],Julius de Hond[1], Alan O. Jamison[1] 和 Wolfgang Ketterle[1]

[1]马萨诸塞州剑桥市麻省理工学院电子学研究实验室、MIT-哈佛超冷原子中心和物理系，邮编 02139，美国。

*通讯作者。电子邮件：pbarral@mit.edu；
†这些作者对本研究的贡献相同。

当磁性原子的磁矩垂直于薄层排列时，它们之间具有排斥相互作用。我们通过实验和理论展示，这种相互作用能够抑制偶极弛豫；偶极弛豫是高磁性原子自旋混合物中的主要损失过程。利用镝，我们观察到寿命延长了一个数量级；根据我们通过实验研究验证的模型，寿命还有望再延长十倍。损失抑制为高磁性原子自旋混合物的量子模拟开辟了许多新的可能性。

引言

超冷原子或分子的实验常受不利的非弹性碰撞率限制。人们已开发出多种控制碰撞的方法，例如将原子隔离在深晶格中 [1]，通过束缚减少碰撞通道 [2]，或通过费什巴赫共振增强弹性碰撞，从而减轻其影响 [3]。特别是，利用电偶极子之间的排斥相互作用，极性分子在短程范围内免于发生化学反应；这一方法可在二维中实现，也可通过微波缀饰实现 [4, 5]。

本文探讨如何在镝中实现偶极屏蔽。镝是一种磁性很强的原子，其偶极相互作用比极性分子的小两个数量级。与分子相比，磁性原子的结构更简单，因此能够达到更低的温度，同时也为探索具有长程力的新型物质形态提供了一个可控、可调且相对简单的平台 [6–12]。镝的磁矩为 $10\,\mu_B$，其磁偶极-偶极相互作用比碱金属原子强 100 倍。然而，偶极弛豫——一种将塞曼能转化为动能的非弹性自旋翻转过程——发生速率也随偶极相互作用的平方而变化，严重限制了任何含有激发塞曼能级布居的云团的寿命。迄今为止，偶极弛豫占主导地位，使得许多关于高磁性原子自旋混合物的新现象无法通过实验实现 [13–15]。

利用偶极屏蔽防止原子发生偶极弛豫，需要深入理解偶极相互作用，因为它会驱动弹性和非弹性过程。然而，正如我们在此所展示的，抑制偶极弛豫是可行的，因为它主要发生在特定的原子间距处，而此时偶极势可能会降低波函数振幅。我们观察到偶极弛豫率降低了一个数量级；结合对衰减率的全面模拟，我们表明，在合理的参数条件下，抑制幅度还有望再提高一个数量级。在高磁场极限或极低温下，抑制程度可以任意增大。我们首先定性地阐述磁场、温度和屏蔽之间的相互作用，接着介绍实验结果，最后给出理论模拟。

基本原理

偶极-偶极相互作用在头尾相接的取向下呈吸引性，而在并排取向下呈排斥性。将原子限制在 xy平面内，并使磁矩沿 z方向垂直对齐，会产生以并排排斥为主的相互作用，并形成偶极势垒。偶极长度[1] $a_{\mathrm{dd}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu(10\mu_B)}{\hbar^2}^2$ 表示相互作用强度，而双粒子振子长度$a_z = \sqrt{\hbar/\mu\omega_z}$ 表示云团在z 方向上的延展。我们分别用 μ 和 ω_z 表示约化质量和陷阱频率。当偶极长度 $a_{\mathrm{dd}} > 0.34\ a_z$[16]，时，会出现偶极势垒；我们将这种情况称为准二维区制。因此，为了补偿偶极长度小 100 倍这一差异，镝原子实验所需的轴向频率是极性分子的 10,000 倍。我们的实验已达到这一范围，参数为 $a_z = 20$ nm和 $a_{\mathrm{dd}} = 10$ nm。

三个参数决定准二维情况下的损失率：由束缚决定的比值 a_{dd}/a_z、温度 T 和磁场 B。势垒随束缚增强而升高，最终达到纯二维

[1]这里我们采用二体碰撞中广泛使用的定义。在多体物理语境下，另一种定义 $a_{\mathrm{dd}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{3\hbar^2}(10\mu_B)^2$ 更为常见。

极限，当 $a_z \to 0$ 时，如图 1a 所示。随着温度降低，入射原子对的波函数在更大的范围内受到势垒抑制，因此两个原子到达近距离的可能性也随之降低。图 1b 展示了这种波函数屏蔽效应。随着磁场增强，发生偶极弛豫的范围缩小，屏蔽作用增强。事实上，磁场越强，释放能量越高，相应地，出射波函数振荡得越快（见图 1b 中的红色曲线）。由于偶极势按 $1/r^3$衰减，大部分衰变都来自出射波函数的第一个振荡波瓣，如图 1c 所示。因此，偶极弛豫的范围会随磁场增强而缩小。这也可以用半经典图像来解释：弗兰克-康登原理预言，自旋翻转发生在出射波函数的经典转折点 [2, 17], ，即释放的塞曼能等于离心势垒能量时。相应地，磁场越强，自旋翻转发生的位置越近，最终会落在入射原子感受到的势垒之后，从而受到强烈抑制。因此，屏蔽会从定性上改变偶极弛豫率对磁场的依赖关系。对于玻色子，在三维 [2, 15, 18] 和无屏蔽的二维几何构型中，弛豫率均随磁场增强而增加。然而，在二维情况下考虑势垒后，便会显现出偶极屏蔽的特征：弛豫率随磁场增强而降低（见补充信息）。

实验

在这里，我们通过实验研究这些原理。我们将 $\sim 8\times10^4$ 自旋极化^{162}Dy 原子装载到激发态 $|J=8,\ m_J=8\rangle$ 塞曼能级（详情见方法部分），并在光学晶格中形成一叠约 45 个薄薄的薄饼层（“薄饼”）。这些薄饼层的均方根（RMS）宽度达到 $a_z/2 = 10$ nm，半径为 5。7 μm。峰值密度为 2.9×10^9 cm^{-2}。实验在 $T \approx 1.6$ μK 下进行，高于玻色-爱因斯坦凝聚转变温度（300 nK），以避免我们的结果受到双粒子关联函数变化的影响 [19, 20]。量子化轴由沿 z 方向的外磁场确定。晶格光束采用蓝失谐，其径向排斥由同轴红失谐光学偶极阱补偿，如图2a 所示。受补偿光束最大激光功率的限制，轴向阱频率最高为 $\omega_z/2\pi = 260$ kHz。

通过测量原子损失，我们确定非弹性衰减系数$\beta_{3\mathrm{D}}$，其定义由三维密度 n的微分方程给出：

$$\frac{dn}{dt} = -\beta_{3\mathrm{D}} n^2. \tag{1}$$

我们根据测得的原子数、温度和阱频率计算密度，并对薄饼堆叠进行平均（另见方法部分）。有时我们会提到二维损失率 $\beta_{2\mathrm{D}}$ ，单位为 cm^2/s，它使用二维

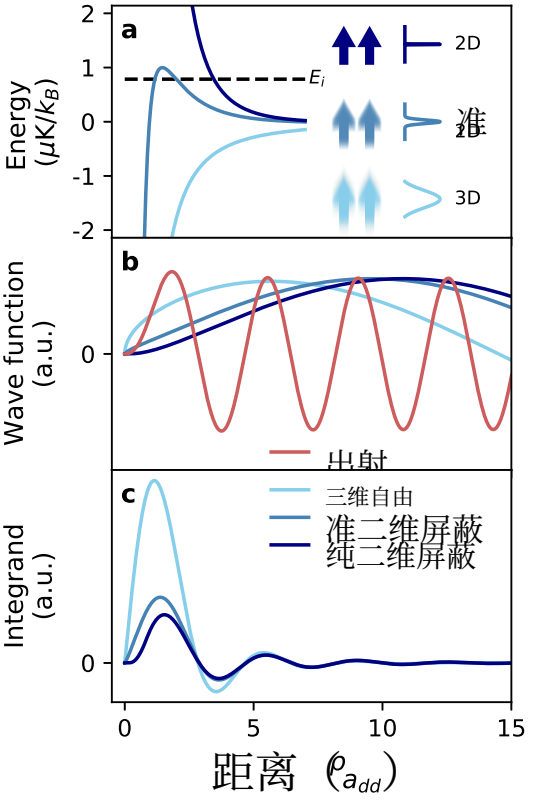


图1 偶极屏蔽原理 (a.) 两个原子之间由方程（6）给出的有效径向势，分别对应：无束缚（浅蓝色，三维）、准二维（ $\omega_z/2\pi = 300$ 千赫兹，钢蓝色）和纯二维（深蓝色）。入射能量由温度 $T = 1$ μK 给出。（b.）方程（6）在 $n = 0$ 、初始轨道角动量为 $m_i = 0$ 时的波函数解，对应上述三种束缚强度；红色曲线表示自旋翻转后的出射波函数，对应 $m_f = 2$ 和 $B = 500$ 毫高斯。对于这些参数，出射波函数的屏蔽效应可以忽略不计。（c.）费米黄金法则的被积函数（方程（2），另见补充信息中的方程（S21））。每条曲线均为（b.）中相应波函数、出射波函数与方程（4）中的双自旋翻转算符的乘积，并沿 z方向与谐振子波函数积分所得。此处实施的屏蔽对应浅蓝色曲线与钢蓝色曲线之差。对于该入射能量，可达到的最低衰减率对应深蓝色曲线。关于被积函数行为的说明，请参见补充信息。

密度。它通过轴向谐振束缚与 β_{3D} 相关，关系式为 $\beta_{2D} = \beta_{3D}/(a_z\sqrt{\pi})$。

我们的实验结果如图所示。2b-c。我们还将理论屏蔽衰减率（蓝色实线）与在相同的薄饼几何构型中，若没有弹性偶极势排斥原子时预期的衰减率（蓝色虚线）进行了比较。与三维几何构型中的损失率（红色）随 $\sqrt{B}$ 增加不同（关于

（这一标度关系的说明见补充信息），我们在图2b 中观察到了屏蔽的特征：对磁场的依赖性弱得多（蓝色实线）。

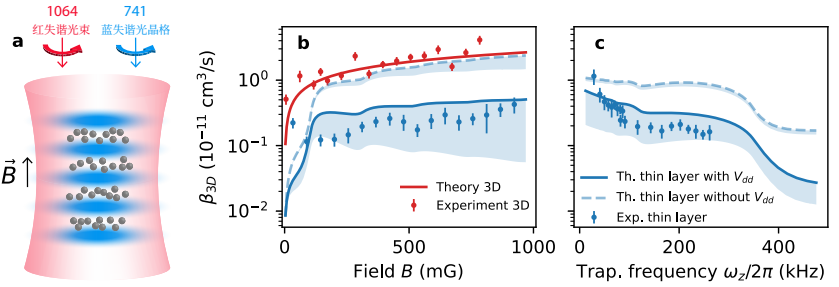


图 2 实验方案和结果。(a.) 囚禁几何结构。一个蓝失谐的 741纳米反射光束排斥原子，从而形成一维光晶格。光晶格的有限对比度以及原子在基态中的零点运动产生横向排斥势，该势由一束1064纳米红失谐光束补偿，从而形成可调节的横向谐振束缚。(b. 和 c.) 在大体积阱（红色）和薄层（蓝色）中实验测得的 β_{3D} 。曲线是使用费米黄金法则得到的理论曲线（推导过程见补充信息）。红色曲线表示三维中的衰减率 [15, 18], ，蓝色虚线表示光晶格 [2] 中未屏蔽原子的衰减率。蓝色实线考虑了弹性偶极-偶极相互作用引起的屏蔽。所有理论曲线均对入射动量进行了热平均。蓝色阴影区域对应于纳入范德华接触相互作用的情况（见补充信息）。(b.) 磁场变化时 β_{3D} 的测量结果。轴向囚禁频率为 $\omega_z/2\pi = 185$ 千赫，对应于 $a_z/2 = 13$ 纳米。(c.) 在恒定的 200毫高斯磁场下改变陷阱频率时对 β_{3D} 的测量。不确定度由原子数稳定性、云团温度测量和囚禁频率测量决定（见方法部分）。

我们处于准二维区制，这与纯二维情形在几个方面有所不同。与纯二维情形相比，准二维几何中有限的轴向延展会减弱径向势垒，使势垒高度降至与实验中的典型温度相当的能量。当塞曼能量大于轴向囚禁频率时，还会开启新的碰撞通道，部分释放能量转化为轴向激发，其余则转化为径向运动。因此，这些过程的弛豫会转移到更远的距离，从而削弱屏蔽。首个通道开启在图 2baround 100 mG as well as inFig. 3a-b. The aforementioned factors lead to a relaxation rate that does not decrease with magnetic field, as it would in the pure-2D case, but instead shows a weaker increase comparedtothe case without a dipolar barrier(dashedblue). Fig. 2c shows the loss rate coefficient as a function of axial confinement. The loss rate decreases with confinement due to enhanced shielding by the dipolar repulsion and closing axially excited states channels.

我们已将损失率系数降低至约 1×10^{-12} cm^3/s。在光晶格中的大范围磁场下，我们实现了偶极弛豫率系数降低一个数量级以上

，相较于未屏蔽的情况。数值计算与实验结果吻合，因此可以将结果外推至当前实验能力范围之外：在 200 mG 磁场下，若轴向束缚为 500 kHz 且温度为 $2\times10^{-13}\,\mathrm{cm^3/s}$，可实现极为理想的损失率系数 1 μK。这与文献 [15] 中通过泡利抑制在费米子体系中测得的最低速率相当。在此条件下，轴向激发在能量上受到禁止，二维衰变率仅比纯二维极限高不到 3 倍。将温度降至 100 nK 后，弛豫率还可再降低 3 倍，达到 10^{-14} $\mathrm{cm^3/s}$ 的范围。为进一步了解这些数值的计算方式，我们将在下文介绍理论模型。

理论模型

偶极弛豫率可以根据费米黄金法则计算。2 个粒子的衰减率 Γ 为

$$\hbar\Gamma = 2\pi \left|\langle\Psi_{\mathrm{out}}|\,\hat{V}_{\mathrm{dd}}\,|\Psi_{\mathrm{in}}\rangle\right|^2 \rho(E), \tag{2}$$

其中，$\rho(E)$ 是能量为 E 时的最终态密度。入射波函数是处于最低谐振子态 $n_i=0$、横向动量为 k_i 的激发塞曼态，$\vec{\ }$。出射波函数是处于谐振子态 n_f、动量为 k_f 的较低能塞曼态，$\vec{\ }$。损失率系数 $\beta_{2\mathrm{D}}$ 与 Γ 的关系为 $\beta_{2\mathrm{D}}=\pi L^2\Gamma$，其中 L 是用于归一化波函数的横向盒子的半径。原子通过磁偶极-偶极相互作用耦合：

$$\hat{V}_{\mathrm{dd}} = \frac{\mu_0}{4\pi}(g_J\mu_B)^2\frac{\hat{\vec{J}}_1\cdot\hat{\vec{J}}_2 - 3(\hat{\vec{J}}_1\cdot\vec{u}_r)(\hat{\vec{J}}_2\cdot\vec{u}_r)}{r^3}, \tag{3}$$

其中，$\vec{r}$ 是原子间距（对应的单位矢量为 $\vec{u}_r$）。磁场沿 z 方向。处于初始自旋态 $|j_0\rangle=|m_{J_1}=8,\ m_{J_2}=8\rangle$ 的原子可以发生碰撞并保持在相同自旋态，也可以弛豫至 $|j_1\rangle=(|7,\ 8\rangle+|8,\ 7\rangle)/\sqrt{2}$ 或 $|j_2\rangle=|7,\ 7\rangle$。作用于 $|j_0\rangle$ 上的偶极-偶极算符为：

$$\hat{V}_{\mathrm{dd}}\,|j_0\rangle = \frac{\mu_0(Jg_J\mu_B)^2}{4\pi r^3}\left[\left(1-3\bar{z}^2\right)|j_0\rangle - \frac{3\bar{z}\bar{r}_+}{J^{1/2}}|j_1\rangle - \frac{3\bar{r}_+^2}{2J}|j_2\rangle\right] \tag{4}$$

$$= V_{\mathrm{dd},0}\,|j_0\rangle + V_{\mathrm{dd},1}\,|j_1\rangle + V_{\mathrm{dd},2}\,|j_2\rangle \tag{5}$$

与 $\bar{z}=z/r$ 和 $\bar{r}_+=(x+iy)/r$。方程（4）展示了偶极相互作用的三种效应：弹性散射过程、与 z成正比的单自旋翻转，以及通过 r 隐式依赖于 z 的双自旋翻转。

在 $z=0$ 的二维极限下，单自旋翻转项消失，弹性项则是纯排斥的 $1/\rho^3$ 势（其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$）。

该势在零温下有解析解($k_i = 0$) [21],而其他情况则必须通过数值方法求解。

我们假设处于准二维几何中，并忽略$V_{\mathrm{dd},\,0}$对z 运动的影响；随后将该运动因子分解，并用谐振子波函数描述（关于这一近似的讨论见方法）。方程（4）中算符的弹性部分沿 z 方向取平均。这导出了有效排斥势（见图1a），并得到一维径向薛定谔方程：

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{m^2-1/4}{\rho^2}\right)+\langle n|\,V_{\mathrm{dd},\,0}\,|n\rangle\right\}\phi=\frac{\hbar^2 k_i^2}{2\mu}\phi. \tag{6}$$

这里，态 $|n\rangle$ 是沿 z方向的 n^{th} 谐振子态。我们关注轨道角动量投影为零的入射态 $m_i = 0$，因为在任何合理的磁场下，这一通道都占主导地位（见补充信息）。

我们采用数值方法求解径向波函数的薛定谔方程，并利用该结果结合费米黄金法则（2）以微扰方式计算偶极弛豫率。图1 展示了偶极排斥（图1a）如何改变入射波函数（图1b），并减小跃迁矩阵元的积分（图1c）。

没有轴向激发时，只有双自旋翻转至最终自旋态$|j_2\rangle = |7,\ 7\rangle$ 和轨道态 $m_f = 2$ 才是允许的。在足够高的磁场下，碰撞过程中释放的能量可能超过 $\hbar\omega_z$，从而开启新的碰撞通道并导致轴向激发。能量守恒要求

$$\frac{\hbar^2 k_f^2}{2\mu}=\frac{\hbar^2 k_i^2}{2\mu}+\Delta j\mu_B g_J B-\Delta n\hbar\omega_z. \tag{7}$$

单自旋翻转通道（$\Delta j = 1$）要求 Δn 为奇数，这是因为方程（ $\bar{z}$ 中的 4）项具有奇对称性；而双自旋翻转（$\Delta j = 2$）要求 Δn为偶数。新开启的通道会提高衰减率，如图 3a–b 所示。此外，正如前文所述，它们还会降低屏蔽因子，这一点可从图 3c 中的小凹口看出。

因此，要获得极低的弛豫率，必须使原子保持在谐振子的基态，但这要求在足够低的磁场下工作。遗憾的是，我们在极低磁场下测得的弛豫率偏离了图2b 中的理论值，这很可能是因为光晶格和补偿光束的圆偏振不完美。σ^+ 与 σ^- 光的混合会在 $|m_J = +8\rangle$ 与其他偶数 $|m_J\rangle$ 态之间诱导拉曼耦合，从而通过自旋交换打开额外的弛豫通道 [18]。当 $>95\%$ 圆偏振纯度时，我们发现，对于 >100 毫高斯的磁场，实验衰变率与计算得到的偶极弛豫率一致；此时塞曼失谐会抑制拉曼耦合。

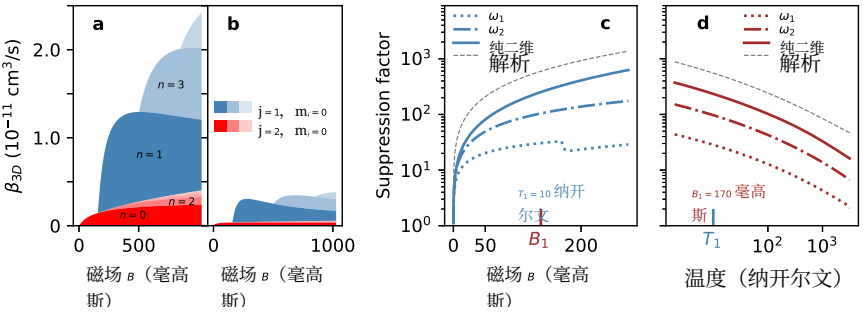


图 3 理论损失率系数。(a-b) 对 $m_i = 0$ 入射态的偶极弛豫率进行逐通道分解（适用于 $\mu_B B \gg k_B T$的情形，见补充信息），在 300 kHz 阱中，分别采用自由波函数 (a) 和屏蔽波函数 (b)。蓝色和红色分别表示单自旋翻转和双自旋翻转。随着磁场增大，不同谐振子态逐渐开放，对应不同深浅的颜色。(c-d) 抑制因子定义为采用屏蔽波函数和自由波函数得到的 β_{2D}之比，分别对应固定温度 T_1 (c) 和固定磁场 B_1 (d)。每张图均给出了 $\omega_1/2\pi = 300$ kHz (点线)、$\omega_2/2\pi = 1.8$ MHz (点划线)、纯二维情形（实线），以及补充信息中方程（S32）所详述的解析近似（灰色点线）对应的曲线。

讨论与展望

我们已经表明，薄层约束不仅会减少可用的碰撞通道数量，还能提供偶极屏蔽，从而强烈抑制原子间的偶极弛豫。原则上，在极低温度下，损失率可以任意低，屏蔽因子也可以无限大。理论还预测，如果强轴向束缚抑制碰撞通道的开启，那么强磁场也能将屏蔽后的碰撞率降至任意低的值。如上所述，只需对轴向束缚、偏振纯度和温度进行相当直接的改进，速率系数就有望达到 10^{-14} cm^3/s 量级。

我们的模拟和实验表明，即使热能与势垒高度相当，屏蔽效应也已经相当显著。当温度降至远低于势垒时，最终会产生指数级抑制 [22]。对于我们的实验参数，若温度从 1 μK 降至 100 纳开尔文，抑制效果将提高三倍。

在这项工作中，我们讨论了偶极相互作用中弹性与非弹性效应之间的相互影响。两者都随偶极长度变化，而极性分子的偶极长度可能大 10,000 倍。然而，较大的总角动量 $J = 8$ 使镝比极性分子更具优势：在拉伸态下，偶极-偶极势的弹性部分按 J^4 标度变化，而弛豫率在单自旋翻转时按 J^3 标度变化，在双自旋翻转时按 J^2 标度变化。

一个重要的比较指标是弹性散射率。在 1 高斯下，对于轴向频率为 2 MHz 的阱，未施加屏蔽时，非弹性二维截面为 20 nm。屏蔽会将这一数值降至 0.3 nm，而半经典偶极弹性碰撞截面为 $\sigma_{SC} = 180$ nm [21]。

要使好碰撞与坏碰撞的比例超过 100，就必须采用屏蔽。

此前已在具有费米统计的极性分子中观察到偶极屏蔽 [4]，，其屏蔽机制在定性上有所不同。由于相同费米子本身就具有各向同性的 p-波势垒，在受限几何中加入适度的偶极相互作用，首先会增强径向上的势垒，但也会减弱轴向上的势垒。因此，非弹性碰撞率会随偶极矩增大而先降低后升高 [23]。玻色子中则不会出现这种现象。对于这两类粒子，随着系统进一步进入二维区域，非弹性碰撞率最终都会降低，正如我们在本研究中所探讨的那样。我们的技术对于研究玻色偶极物种体相气体的自旋混合物至关重要。

总之，我们展示了一种在致密的玻色镧系元素云中实现长寿命自旋混合物的方法，为二维量子模拟实验开辟了新的可能性。借助这一技术，镝可用于研究具有偶极相互作用、且处于不同于目前极性分子 [24] 和里德堡原子 [25]所能达到的区域中的量子材料。稳定的自旋混合物对于通过自旋态的拉曼耦合实现自旋轨道耦合和人工规范势[26, 27]至关重要。通过抑制偶极弛豫，可以利用镧系元素的基态轨道角动量，避免碱金属原子的拉曼光束产生显著的光子散射率 [28]。

致谢。 感谢 Brice Bakkali-Hassani、Hanzhen Lin 和 Yu-Kun Lu 对本文提出意见。我们感谢美国国家科学基金会通过超冷原子中心和第 1506369 号资助提供支持，也感谢范内瓦·布什教职奖学金和美国陆军研究办公室 DURIP 资助。

作者贡献。 P.B.、M.C.、L.D.、W.L.、A.O.J. 和 W.K. 设计并搭建了实验装置；P.B.、M.C.、L.D. 和 J.d.H 开展了实验工作；P.B.、M.C.、L.D.、J.d.H 和 W.K. 开发了理论模型并进行了模拟；所有作者均参与了论文写作。

利益冲突。 作者声明不存在任何利益冲突。

方法

样品制备

我们在略高于相变温度的光偶极阱中制备了自旋极化的 $\sim 8 \times 10^4$ ^{162}Dy 原子，处于$|J = 8,\ m_J = -8\rangle$ 态。这些样品是在交叉光学偶极阱（ODT）中经过蒸发冷却后获得的；该阱装载自参考文献 [S29]所述的窄线宽磁光阱。使用热气体可以更容易地确定偶极弛豫率系数，而无需考虑凝聚分数的变化。

通过在磁场中沿 z 方向进行射频扫频的绝热快速通过，使最高自旋态 $|m_J = +8\rangle$ 得到布居。我们利用沿 z 轴对 741纳米激光束进行反射，形成一维光学晶格，从而制备出一叠准二维层。由于这些层的长宽比极大，我们称之为薄饼。晶格光束相对于 741纳米跃迁（其线宽为 $\Gamma/2\pi = 1.8$ 千赫兹）蓝失谐数吉赫兹，从而提供频率可控的紧密轴向束缚。使用同轴的垂直光学偶极阱来补偿蓝失谐晶格产生的横向排斥。晶格和垂直偶极阱通过时间常数为 50 毫秒的指数斜坡开启，使原子绝热地装载到二维层的最低振动态。在晶格斜坡的前 40 毫秒内，磁场迅速降至 40 毫高斯，以尽量减少偶极弛豫造成的损失。随后，在晶格装载斜坡的最后 10 毫秒内，磁场升至最终值；之后测量样品因非弹性碰撞而发生的衰变。

磁场归零

实现对低磁场的控制至关重要，这可以通过防止更高的出射振动通道开放来最大限度地抑制偶极弛豫。我们设计了一种磁场归零方法，该方法利用了镝的克莱布什-戈尔丹系数之间的巨大差异。当原子的磁矩沿圆偏振成像光束的传播方向排列时，若磁偶极矩平行或反平行于成像光束的传播方向，散射光量会有显著差异。如图所示，通过对不同外磁场下的原子进行吸收成像，可以观察到偶极矩何时翻转，从而确定外磁场的零点。S1。

更具体地说，在玻色性镝的自旋极化（$m_J = -8$）样品中，σ_-、π 和 σ_+ 跃迁的克莱布什-戈尔丹系数分别为 1、1/9 和 1/153。我们沿磁场量子化轴 z，用左旋圆偏振（σ_L）光对自旋极化样品进行吸收成像。我们将光强和成像时间控制在足够低的水平，以避免光抽运。在较大的正磁场偏置下，原子感受到 σ_- 光，其对应的克莱布什-戈尔丹系数为 1，因此

原子计数较高。在较大的负磁场偏置下，原子感受到σ_+ 光，其对应的克莱布什-戈尔丹系数为 1/153，因此原子计数较低。横向磁场越弱，改变纵向磁场时的跃迁就越陡峭。通过这种方式，可以确定磁场各分量的零点设置。

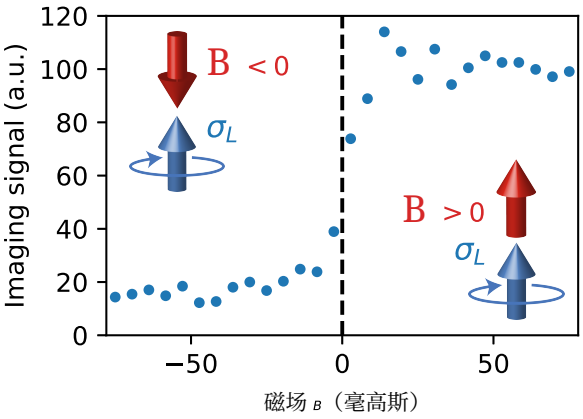


图 S1 确定磁场的零点。对于自旋极化的 $m_J = -8$镝原子和左旋圆偏振成像光，σ_+ 与 σ_- 跃迁的克莱布施-戈登系数存在巨大差异，因此当磁场穿过零点时，成像信号会呈现阶跃式变化。

晶格光的选择

深光学晶格需要聚焦紧密的晶格光束；若使用红失谐光束，这会导致不理想的强径向束缚。选择蓝失谐晶格，则可避免云团在横向的绝热压缩，以及在增强光学晶格时随之而来的大幅温升。选择蓝失谐晶格还能让原子暴露于较低的光强，并减少因圆偏振不完美而产生的不必要拉曼跃迁。不过，晶格造成的径向去约束需要得到补偿，我们通过红失谐光学偶极阱实现这一点，并借此独立控制轴向和横向阱频率（见图 S2 左）。

光晶格由钛宝石激光器发出的近共振 741 纳米光产生。经过光纤耦合和强度稳定后，该激光器可向原子提供约 300 mW 的光。

囚禁几何结构

原子被装载到一个光偶极阱中，该阱由三束1064 纳米激光束组成：两束光的光束腰为 40 μ米，在水平面内以 8° 交叉

，还有一束光的 64 μ米 束腰沿（垂直）方向传播 z。在偶极弛豫实验中，水平光束被关闭，垂直光束用于补偿蓝失谐光晶格的去俘获效应。晶格光束被聚焦至束腰为 50 μ米。其频率通常调谐至窄线宽的 1.8 千赫跃迁 [S30]的蓝侧 14.25 至 2.25 吉赫处。利用垂直俘获光束中的 8 瓦功率补偿横向反俘获势。我们通过原位图像（由于光学密度较高，使用失谐成像光获取）确认，蓝失谐光晶格得到了恰当补偿，且云团未发生位移。

加载前云团沿晶格方向的均方根延展长度为 $\sigma_{\mathrm{ODT}} \simeq 4.7\,\mu\mathrm{m}$。层间距为 $\lambda/2 \simeq 371\,\mathrm{nm}$ 时，加载的薄饼约有 $4\sqrt{\pi}\sigma_{\mathrm{ODT}}/\lambda = 45$ 个，初始原子数为 3×10^4，中心密度为 $n_0 = 2.9\times10^9\mathrm{cm}^{-2}$。 i^{th} 薄饼层中的密度分布由下式描述（见图S2）

$$n_i(t,\rho,z) = n_0(t)\exp\left(-z_i^2/(2\sigma_{\mathrm{ODT}}^2)\right)\exp\left(-\rho^2/(2\sigma_\perp^2)\right) \tag{S1}$$

其中 $z_i = i\frac{\lambda}{2}$和 $\sigma_\perp = \sqrt{\frac{k_B T_{\mathrm{lattice}}}{2\mu\omega_\perp^2}}$ $\sigma_{\mathrm{ODT}} = \sqrt{\frac{k_B T_{\mathrm{ODT}}}{2\mu\omega_{\mathrm{ODT}}^2}}$。参数 $\omega_{\mathrm{ODT}} = 2\pi\cdot 94\,\mathrm{Hz}$ 和 $T_{\mathrm{ODT}} = 150$ 纳开尔文描述光晶格加载前的云团，而 $\omega_\perp = 2\pi\cdot 200\,\mathrm{Hz}$ 和 $T_{\mathrm{lattice}} \simeq 1\,\mu\mathrm{K}$ 表征光晶格加载后的条件。中央的薄饼约含 900 个原子。薄饼的均方根宽度通常为 $\sigma_z \simeq 10\mathrm{nm}$，而径向宽度为 $\sigma_\perp = 5.7\,\mu\mathrm{m}$。

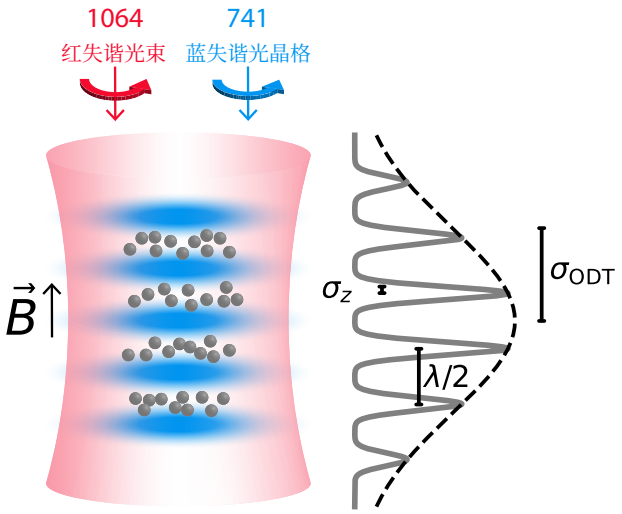


图 S2 囚禁几何结构与相关长度尺度。 左：主文图 2a 的复现。右：云团沿纵向的空间密度由轴向均方根宽度 $\sigma_z = a_z/2$、光晶格间距 $\lambda/2$ 以及加载热原子云的初始宽度 σ_{ODT}表征。

寿命分析

The 云团的衰变可通过方程 (1) 来描述三维密度 s

$$\frac{\mathrm{d}n_{3\mathrm{D}}}{\mathrm{d}t} = -\beta_{3\mathrm{D}} n_{3\mathrm{D}}^2. \tag{S2}$$

或使用二维方程

$$\frac{\mathrm{d}n_{2\mathrm{D}}}{\mathrm{d}t} = -\beta_{2\mathrm{D}} n_{2\mathrm{D}}^2. \tag{S3}$$

每个薄饼层中的密度之间的关系为

$$n_{3\mathrm{D}} = n_{2\mathrm{D}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-z^2/(2\sigma_z^2)\right) \tag{S4}$$

其中 $\sigma_z = \sqrt{\frac{\hbar}{4\mu\omega_z}} = a_z/2 \simeq 10$ nm。对方程（S2）进行积分并令其等于（S3），可得

$$\beta_{3\mathrm{D}} = 2\sqrt{\pi}\sigma_z \beta_{2\mathrm{D}}. \tag{S5}$$

在主论文中，我们使用 $\beta_{3\mathrm{D}}$ 来表征衰变。

在本文其余部分中，我们将省略密度的二维下标。方程（S3）在局域密度近似下，需要对云团体积积分，以关联观测量 N与原子数:

$$\frac{dN}{dt} = -\beta_{2\mathrm{D}} \int_{\mathcal{S}} n^2 \mathrm{d}\tau = -\beta_{2\mathrm{D}} \langle n \rangle \equiv -\beta_{2\mathrm{D}} \frac{N^2}{V_{\mathrm{eff}}}. \tag{S6}$$

有效体积 V_{eff} 按如下方式确定。对方程（S1）积分后，可得 $N = \sum_i N_i = \sum_i \int n_i \mathrm{d}\tau = n_0 2\pi\sigma_\perp^2 \sqrt{2\pi}\sigma_{\mathrm{ODT}}/(\lambda/2)$以及

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = -\beta_{2\mathrm{D}} \sum_i \int_{\mathcal{S}} n_i^2 \, 2\pi\rho \, \mathrm{d}\rho = -\beta_{2\mathrm{D}} n_0^2 \pi\sigma_\perp^2 \sum_i e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma_{\mathrm{ODT}}^2}}$$
$$= -\beta_{2\mathrm{D}} n_0^2 \pi\sigma_\perp^2 \frac{\sqrt{\pi}\sigma_{\mathrm{ODT}}}{\lambda/2}.$$

将方程（S6）中的 V_{eff} 代入，可得

$$V_{\mathrm{eff}} = 4\pi\sigma_\perp^2 \frac{2\sqrt{\pi}\sigma_{\mathrm{ODT}}}{\lambda/2}.$$

我们注意到 $\langle n \rangle = \frac{N}{2^{3/2} V_{\mathrm{eff}}}$，其中每个 $\sqrt{2}$因子都来自沿一个轴方向的高斯平均。为考虑

实验期间的适度加热，我们对温度 $T(t) = T_0 + v_T t$ 进行线性拟合，并用其缩放有效体积 $V_{\text{eff}}(t)$。我们拟合的微分方程 (S6) 的解为 $N(t) = \frac{N_0}{1+\beta_{2\text{D}} N_0 V_{\text{eff}} \ln(1+v_T t)/v_T}$，由此确定$\beta_{2\text{D}}$。原子数 $N(t)$ 通过飞行时间成像测量，测量值随保持时间变化（通常为数十毫秒）。

这里我们假设，每次偶极弛豫事件都会导致两个原子都损失。这一假设是合理的，因为当磁场强度大于几十毫高斯时，数微开尔文的有效阱深与自旋翻转所获得的动能相比可以忽略不计。实验速度足够快（数十毫秒），因此光晶格中的光子散射、背景碰撞和残余蒸发都不重要。

误差棒

图中误差棒表示的不确定度来自曲线拟合造成的统计误差，以及我们对 ω_{ODT}、T_{ODT}、$\omega_\perp$、ω_z 和 T_{lattice}不确定度的最佳估计。ω_{ODT} 是在光偶极阱中通过观察突然施加磁力后云团的振荡来测量的。$\omega_\perp$ 是通过调制垂直俘获光束的强度并观察参数加热共振来测量的。轴向阱频率ω_z（最高可达数百千赫兹）也通过参数加热进行测量。受驱动电子设备带宽的限制，这项测量只在浅光晶格中进行，结果再外推至更深的光晶格。温度通过飞行时间测量。

理论衰变率

我们在此总结用于得出图中理论预测的主要方程：1、2 和3。详细推导见补充信息。

我们回顾方程（4）

$$\hat{V}_{\text{dd}} |j_0\rangle = \frac{\mu_0 (J g_J \mu_B)^2}{4\pi r^3} \left[\left(1 - 3\bar{z}^2\right) |j_0\rangle - \frac{3\bar{z}\bar{r}_+}{J^{1/2}} |j_1\rangle - \frac{3\bar{r}_+^2}{2J} |j_2\rangle \right] \tag{S7}$$

该方程用于计算方程（6）中使用的势：

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{m^2 - 1/4}{\rho^2} \right) + \langle n | V_{\text{dd},\,0} | n \rangle \right\} \phi = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2\mu} \phi. \tag{S8}$$

这是我们针对入射（$m = 0, n = 0$）和出射（$m = 2$, n 偶宇称或 $m = 1$, n 奇宇称）波函数进行数值求解的方程。我们开发的代码结合了多种步长的网格，以便沿着 z恰当地对势进行平均，在小 ρ 处描述短程屏蔽，并在大距离处正确归一化波函数。根据温度、磁场、 z 阱的频率以及

所需精度，代码会确定合适的网格，并在该特定网格上计算入射波函数和谐振子态。随后，代码将这些结果分配到多个计算核心上，计算每个不同衰变通道对应的出射波函数，以及费米黄金法则中的相应积分。这种方法使代码能够在普通笔记本电脑上于合理时间内生成本文展示的图表。

归一化条件为：$\int_0^L \mathrm{d}\rho\, \phi_{n,\ m}(\rho)^2 = 1$ 对于半径为 L 的圆柱。我们的模型考虑了偶极相互作用对入射波函数和出射波函数的修正。动量为 k 时的自由径向波函数解为 $\phi_{n\,m}^{(\mathrm{free}),}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi k\rho}{L}} J_m(k\rho)$，它不依赖于 n。

通道 $|j_0\rangle \to |j_f\rangle$，$|0\rangle \to |n_f\rangle$ 的二维损失率系数为

$$\beta_{\mathrm{2D}}^{j_f,n_f} = \frac{8\mu}{k_i k_f \hbar^3} \left| L \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \int_0^L \mathrm{d}\rho \phi_{n_f,j_f}(\rho)\chi_{n_f}(z) V_{\mathrm{dd},\,j_f}(\rho,z)\chi_0(z)\phi_0(\rho) \right|^2$$

其中 χ_n 是 n^{th} 谐振子态波函数：

$$\chi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi a_z^2}\right)^{1/4} H_n(z/a_z) e^{-\frac{z^2}{2a_z^2}}.$$

总损失率是对所有通道的求和：

$$\beta_{\mathrm{2D}} = \sum_{j_f,n_f} \beta_{\mathrm{2D}}^{j_f,n_f}.$$

并且与三维损失率的关系为 $\beta_{\mathrm{3D}} = \sqrt{\pi}\bar{a}_z \beta_{\mathrm{2D}}$。

对于图2 b-c，衰减率最终会对入射动量的热分布取平均（见补充信息）；对于其他所有图，则在平均动量处计算。

纯二维极限

在纯二维情况下，双自旋翻转势为 $V_{\mathrm{dd},\ 2}(\tilde{\rho}) \propto 1/\rho^3$。若忽略屏蔽，在低温极限下，我们发现二维衰变率为

$$\beta_{\mathrm{free}}^{\text{pure-2D}} = 4\pi^2 \frac{1}{J^2} \frac{E_{\mathrm{dd}}}{\hbar} a_{\mathrm{dd}}^4 k_f^2. \tag{S9}$$

因此 $\beta^{\text{pure-2D}}{}_{\text{自由}} \propto B$。若考虑屏蔽，则发现

$$\beta_{\mathrm{shielded}}^{\text{pure-2D}} \propto (1/\log(k_i))^2 \tag{S10}$$

其在零温时趋于零。在补充信息中详述的某些假设下，并注意到 x_2 贝塞尔函数的第一个零点

$J_2(x)$，可以发现，在某一场强范围内，衰减率表现为

$$\beta_{\text{shielded}}^{\text{pure-2D}} \propto k_f^{1/4} \exp\left(-2\sqrt{\frac{8a_{\text{dd}}k_f}{x_2}}\right), \tag{S11}$$

其在高磁场下趋于零。

关于各种近似的讨论

幺正极限。当衰减率接近幺正极限时，微扰结果会发生修正。然而，在我们的参数范围内，衰减率远小于幺正极限。A $\beta_{3\text{D}}$ ofhigh $10^{-12}\text{cm}^3/$ scorresponds toa $\beta_{2\text{D}} = \sigma\hbar k/\mu$ in thelow $10^{-6}\text{cm}^2/\text{s}$. This gives a $\sigma k \simeq 0.1 \ll 4$which putsus safely in the non-unitary regime [2]。

波函数代入近似。系统受到偶极势的两部分作用：一部分在自旋态基底中为对角形式，因此是弹性的；另一部分为非对角形式，会引起跃迁。通常，应对哈密顿量中最弱的部分采用微扰处理。这里的情况正是如此，因为 $\left|\hat{V}_{\text{非弹性dd}}/\hat{V}_{\text{弹性dd}}\right|^2 \simeq 1/J = 1/8$ 如方程（S7）所示。因此，我们在屏蔽波函数上计算衰减率。沿用先前的处理方法 [S2，S15、S18]，我们没有检验微扰理论中高阶项的重要性。

有效势近似。为计算波函数，我们假设有效势是通过对谐振子的 V_{dd} 态中的 n^{th} 进行平均得到的。这是耦合道计算的非绝热极限。存在一种完全绝热的方法，可用于计算准二维几何中两个相互作用偶极子的分子势 [S16]。这种方法会混合谐振子态，但我们发现，这只会影响短距离处的波函数，而这仅在高磁场下才重要。~在我们的实验中， k_f 保持在约 1 的量级，因此将 z运动限制在原有的谐振子态内是合理的。

费米黄金律近似。只有当衰减率小于系统的其他时间常数时，使用原始密度分布的费米黄金法则才有效。弛豫率 $\Gamma = \beta_{3\text{D}} n \simeq 10^2\text{s}^{-1}$ 确实小于碰撞率（约为 $10^3\,\text{s}^{-1}$），也小于 200 Hz 的阱频率。因此，这一假设成立。当损失率小于阱频率，且小于提供热化作用的弹性碰撞率时，系统将保持（准）平衡。

忽略分子势。背景 s波散射长度会改变镝的波函数 $a = 5.9$ nm。此前的一篇论文 [S2] 深入研究了其对铬的影响。然而，我们在大体积三维阱中观测到的衰减率（图 2中的红色曲线）与

[2]二维中的总截面为 $\sigma = \frac{4}{k}\sum_m \sin^2\delta$；鉴于我们的磁场，我们主要受 s 波贡献的影响。

不考虑散射长度的理论更为吻合。另一项镝实验 [S15] 在更宽的场强范围内也得到了类似结果。然而，短程分子势可能会影响二维结果，并可能解释为何我们测得的衰减率比理论预测值低数倍（见图 2中的阴影区域）。事实上，损失中相当大一部分来自小于范德华长度 $a_{\mathrm{vdW}} = 4.3\,\mathrm{nm}$ 且小于散射长度 $a = 5.9\,\mathrm{nm}$ 的原子间距。由于波函数在短程范围内快速振荡，对重叠矩阵元的贡献理应相互抵消。

参考文献

[S1]Wilpers, G., Binnewies, T., Degenhardt, C., Sterr, U., Helmcke, J., Riehle, F.: 采用超冷中性原子的光学钟。《物理评论快报》**89**(23)，230801(2002)

[S2] Pasquiou, B., Bismut, G., Beaufils, Q., Crubellier, A., Maréchal, E., Pedri,P.,Vernac, L., Gorceix, O., Laburthe-Tolra,B.：外场中偶极弛豫的控制。Physical Review A **81**，042716 (2010年)

[S3] Cornish, S.L., Claussen, N.R., Roberts, J.L., Cornell, E.A., Wieman, C.E.：具有宽范围可调相互作用的稳定 ^{85}Rb 玻色-爱因斯坦凝聚体。物理评论快报**85**, 1795–1798(2000)

[S4]Valtolina, G., Matsuda, K., Tobias, W.G., Li, J.-R., De Marco, L., Ye, J.: 将反应性分子通过偶极蒸发冷却至低于费米温度。《自然》**588**(7837), 239–243 (2020)[S5] Anderegg, L., Burchesky, S., Bao, Y., Yu, S.S., Karman, T., Chae, E., Ni, K.-K., Ketterle, W., Doyle, J.M.: 观测到超冷分子的微波屏蔽。《科学》**373**(6556), 779–782 (2021)[S6] Chomaz, L., Ferrier-Barbut, I., Ferlaino, F., Laburthe-Tolra, B., Lev, B.L., Pfau, T.: 偶极物理：磁性量子气体实验综述。《物理学进展报告》（2022）[S7] Lahaye, T., Menotti, C., Santos, L., Lewenstein, M., Pfau, T.: 偶极玻色量子气体的物理。《物理学进展报告》**72**(12), 126401 (2009)[S8] Lian, B., Ho, T.-L., Zhai, H.: 在镝的玻色-爱因斯坦凝聚体中寻找非阿贝尔相。Physical Review A **85**, 051606 (2012)[S9] Deng, Y., Cheng, J., Jing, H., Sun, C.-P., Yi, S.: 自旋轨道耦合偶极玻色-爱因斯坦凝聚体。物理评论快报**108**, 125301 (2012)[S10] Lian, B., Zhang, S.: 模拟玻色拉夫林波函数的单态莫特态。Phys. Rev. B **89**, 041110 (2014)[S11] Cui, X., Lian, B., Ho, T.-L., Lev, B.L., Zhai, H.: 利用强磁性镧系原子实现合成规范场。Physical Review A **88**, 011601 (2013)[S12] Babik, D., Roell, R., Helten, D., Fleischhauer, M., Weitz, M.: 冷铒原子的合成磁场。《物理评论A辑》**101**(5), 053603 (2020)[S13] Gopalakrishnan, S., Martin, I., Demler, E.A.: 自旋轨道耦合偶极玻色子的量子准晶。物理评论快报**111**, 185304 (2013)

[S14] Yi, S., Pu, H.: 偶极自旋凝聚体中的自发自旋纹理。物理评论快报 97, 020401 (2006)[S15] Burdick, N.Q., Baumann, K., Tang, Y., Lu, M., Lev, B.L.: 偶极弛豫的费米子抑制。物理评论快报 114, 023201 (2015)[S16] Ticknor, C.: 准二维偶极散射。Physical Review A 81, 042708 (2010)[S17] Condon, E.U.: 弗兰克-康登原理及相关主题。美国物理学杂志 15(5), 365–374 (1947)[S18] Hensler, S., Werner, J., Griesmaier, A., Schmidt, P., Görlitz, A., Pfau, T., Giovanazzi, S., Rzażewski, K.: 磁阱中的铬原子超冷气体里的偶极弛豫。应用物理学B 77(8), 765–772 (2003)[S19] Kagan, Y., Svistunov, B., Shlyapnikov, G.: 玻色凝聚对气体中非弹性过程的影响。JETP Lett 42(4) (1985)[S20] Burt, E.A., Ghrist, R.W., Myatt, C.J., Holland, M.J., Cornell, E.A., Wieman, C.E.: 相干性、关联与碰撞：从玻色-爱因斯坦凝聚体的衰变中得到的认识。物理评论快报 79, 337–340 (1997)[S21] Ticknor, C.: 二维偶极散射。Physical Review A 80, 052702 (2009)[S22] Micheli, A., Idziaszek, Z., Pupillo, G., Baranov, M.A., Zoller, P., Julienne, P.S.: 低维中反应性超冷极性分子的普适速率。物理评论快报 105, 073202 (2010)[S23] Quéméner, G., Bohn, J.L.: 受限几何和电场中的超冷分子动力学。《物理评论A辑》83(1), 012705 (2011)[S24] Micheli, A., Pupillo, G., Büchler, H.P., Zoller, P.: 二维阱中的冷极性分子：利用外场调控相互作用以实现新型量子相。Physical Review A 76, 043604 (2007)[S25] Browaeys, A., Lahaye, T.: 利用逐个控制的里德堡原子研究多体物理。《自然·物理》16(2), 132–142 (2020)[S26] Lin, Y.-J., Compton, R.L., Jiménez-García, K., Porto, J.V., Spielman, I.B.: 超冷中性原子的合成磁场。《自然》462(7273), 628–632 (2009)[S27] Lin, Y.-J., Jiménez-García, K., Spielman, I.B.: 自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体。《自然》471(7336), 83–86 (2011)

[S28] Burdick, N.Q., Tang, Y., Lev, B.L.：长寿命自旋轨道耦合简并偶极费米气体。《Physical Review X》**6**(3), 031022 (2016)[S29] Lunden, W., Du, L., Cantara, M., Barral, P., Jamison, A.O., Ketterle, W.：利用两阶段减速提高镝磁光阱的捕获速度。Physical Review A **101**, 063403 (2020)[S30]Lu, M., Youn, S.H., Lev, B.L.：原子镝中窄线宽激光冷却跃迁的光谱学。《物理评论A辑》**83**(1), 012510 (2011)[S31] Du, L., Barral, P., Cantara, M., de Hond, J., Lu, Y.-K., Ketterle, W.：50纳米尺度的原子物理：偶极原子双层系统的实现。arXiv (2023)[S32] Tang, Y., Sykes, A., Burdick, N.Q., Bohn, J.L., Lev, B.L.：强偶极玻色子 Dy 162 和 Dy 164 的 s 波散射长度。《物理评论A辑》**92**(2), 022703 (2015)

补充信息

这里我们介绍用于计算图 2 所示预期速率的理论模型。计算采用费米黄金法则的形式体系。为求完整，我们还推导并讨论此前在 [S2] 中概述、并在 [S31]中广泛使用的玻恩近似。我们将说明二者的等价性，然后讨论纯二维极限。

费米黄金法则和玻恩近似都是量子散射的微扰方法。前者将入射波和出射波分解为许多不同的通道，从而将计算有效地化为一维（即径向坐标）。后者计算偶极弛豫哈密顿量对入射平面波的微扰影响，使计算保持在二维。两种结果是等价的。对于我们所采用的方法，使用经偶极弹性势修正的初始波函数，将费米黄金法则推广起来更加容易。玻恩近似将仅针对未经修正的平面波进行介绍，而费米黄金法则形式将同时应用于经修正和未经修正的波函数。

偶极单位

对于以下推导，使用偶极单位很方便，以波浪号表示。长度无量纲化时采用偶极长度，即$\tilde{a}_z = a_z/a_{\mathrm{dd}}$，波函数变为 $\tilde{\phi} = a^{1/2}_{\mathrm{dd}}\ \phi$，动量变为 $\tilde{k}_i = k_i a_{\mathrm{dd}}$，能量则以偶极能量为单位进行测量 $E_{\mathrm{dd}} = \frac{\hbar^2}{2\mu a_{\mathrm{dd}}^2}$，因此 $\tilde{V}_{\mathrm{dd}} = V_{\mathrm{dd}}/E_{\mathrm{dd}}$。方程（4）变为

$$\hat{V}_{\mathrm{dd}}\,|j_0\rangle = \frac{2E_{\mathrm{dd}}}{\tilde{r}^3}\left[\left(1-3\tilde{z}^2\right)|j_0\rangle - \frac{3\tilde{z}\bar{r}_+}{J^{1/2}}\,|j_1\rangle - \frac{3\bar{r}_+^2}{2J}\,|j_2\rangle\right] \tag{S12}$$

and 方程（6），对于任意谐振子通道 n 变为

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tilde{\rho}^2} + \frac{m^2-1/4}{\tilde{\rho}^2} + \langle n|\,\tilde{V}_{\mathrm{dd},0}\,|n\rangle\right)\tilde{\phi}_{n,m} = \tilde{k}_i^2\tilde{\phi}_{n,m}. \tag{S13}$$

归一化条件为：$\int_0^L \mathrm{d}\tilde{\rho}\,\tilde{\phi}_{n,m}(\tilde{\rho})^2 = 1$ 对于半径为$L = La_{\mathrm{dd}}$的圆柱。我们的模型考虑了偶极相互作用对入射和出射波函数的修正。动量为 k的自由径向波函数解为 $\tilde{\phi}^{(\mathrm{free})}_{n\,m}(\tilde{\rho}) = \sqrt{\frac{\pi\tilde{k}\tilde{\rho}}{\tilde{L}}}\,J_m(\tilde{k}\tilde{\rho})$，它与 n无关。

费米黄金法则的推导

下面我们推导通道$|j_0\rangle \to |j_f\rangle, |0\rangle \to |n_f\rangle$的三维损失率系数表达式：

$$\beta_{3\mathrm{D}}^{j_f,n_f} = \frac{4\sqrt{\pi}}{\tilde{k}_i\tilde{k}_f}\tilde{a}_z\frac{E_{\mathrm{dd}}}{\hbar}a_{\mathrm{dd}}^3\left|\tilde{L}\int \mathrm{d}\tilde{z}\int_0^{\tilde{L}}\mathrm{d}\tilde{\rho}\,\tilde{\phi}_{n_f,j_f}(\tilde{\rho})\tilde{\chi}_{n_f}(\tilde{z})\tilde{V}_{\mathrm{dd},j_f}(\tilde{\rho},\tilde{z})\tilde{\chi}_0(\tilde{z})\tilde{\phi}_0(\tilde{\rho})\right|^2.$$

$\tilde{\chi}_n$ 是沿 z 方向的谐振子波函数。 $\tilde{a}_z$ 是以偶极长度为单位的谐振子长度。

费米黄金法则

费米黄金法则便于表示从初态到具有一定态密度的连续态的衰减率。用自由入射和平面出射波来计算费米黄金法则是很自然的，我们首先就这样做。然后将其展开为柱面波，最后用方程（S13）的屏蔽解取代这些波。

起点是使用方程（2）计算一对极化原子的衰减率 $\Gamma^{j_f,\ n_f\ \text{平面}}$入射原子以平面波进入谐振子势的基态，并以另一渐近平面波出射，处于谐振子态 n_f，自旋态为 $|j_f\rangle$。假设粒子被限制在长度为 L 的圆柱内，并受 z 方向的谐振子势约束。

$$\hbar\Gamma_{\mathrm{plane}}^{j_f,n_f} = 2\pi\left|\left\langle\Psi_{j_f,n_f}\right|\hat{V}_{\mathrm{dd}}\left|\Psi_{j_0,0}\right\rangle\right|^2\rho_p(E_f),$$

$\vec{}$与总波函数$|\Psi_{j,\ n}\rangle = |k\rangle\otimes|n\rangle\otimes|j\rangle$ 和

$$\langle\vec{\rho}|\vec{k}\rangle = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}}{\sqrt{\pi L^2}}$$
$$\langle z|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{1}{\pi a_z^2}\right)^{1/4}H_n(z/a_z)e^{-\frac{z^2}{2a_z^2}} = \chi_n(z)$$

态密度

在二维盒子中，体态密度为 $\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}$。在角度为 $\mathrm{d}\theta_k$ 的特定方向上，态密度为 $\rho_p(k_f) = \frac{\mu L^2}{4\pi\hbar^2}\mathrm{d}\theta_k$。——

平面波展开

为了充分利用偶极势的对称性，可以将平面波展开为球面波：

$$\left|\vec{k}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi k_i L}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\theta_k}\left|k,m\right\rangle, \tag{S14}$$

其位置表象如下:

$$\langle\vec{\rho}|k,m\rangle=\frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\phi_m(\rho)}{\sqrt{\rho}}. \tag{S15}$$

对所有可能的出射方向求和，速率为

$$\hbar\Gamma_{\text{plane}}^{j_f,n_f}=2\pi\int \mathrm{d}\theta_f\left|\sum_{m_i=-\infty}^{+\infty}\sum_{m_f=-\infty}^{+\infty} i^{m_i-m_f}e^{-im_i\theta_i+im_f\theta_f}\right.$$
$$\left.\langle k_f,m_f|\langle n_f|\langle j_f|\hat{V}_{\text{dd}}|j_0\rangle|0\rangle|k_i,m_i\rangle\right|^2\frac{2}{\pi k_i}\frac{2}{\pi k_f}\frac{\mu}{4\pi\hbar^2}. \tag{S16}$$

偶极相互作用

为简化问题，我们可以考察偶极势的选择定则。方程(3)可写为

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\text{dd}}&=\frac{\mu_0}{4\pi}(g_J\mu_B)^2\frac{\hat{\vec{J}}_1\cdot\hat{\vec{J}}_2-3(\hat{\vec{J}}_1\cdot\vec{u}_r)(\hat{\vec{J}}_2\cdot\vec{u}_r)}{r^3}\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}(g_J\mu_B)^2\frac{1}{r^3}\{\,\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z}\left(1-3\bar{z}^2\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\left(\hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-}+\hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+}\right)\\&\quad-\frac{3}{2}\bar{z}\left[\hat{J}_{1z}\left(\hat{J}_{2+}\bar{r}_-+\hat{J}_{2-}\bar{r}_+\right)+\hat{J}_{2z}\left(\hat{J}_{1+}\bar{r}_-+\hat{J}_{1-}\bar{r}_+\right)\right]\\&\quad-\frac{3}{4}\left(\hat{J}_{1+}\bar{r}_-+\hat{J}_{1-}\bar{r}_+\right)\left(\hat{J}_{2+}\bar{r}_-+\hat{J}_{2-}\bar{r}_+\right)\,\}\end{aligned}$$

由此得到方程(4)

$$\hat{V}_{\text{dd}}|j_0\rangle=\frac{2E_{\text{dd}}}{\tilde{r}^3}\left[\left(1-3\bar{z}^2\right)|j_0\rangle-\frac{3\bar{z}\bar{r}_+}{J^{1/2}}|j_1\rangle-\frac{3\bar{r}_+^2}{2J}|j_2\rangle\right]. \tag{S17}$$
$$=V_{\text{dd},0}|j_0\rangle+V_{\text{dd},1}|j_1\rangle+V_{\text{dd},2}|j_2\rangle \tag{S18}$$

与 $\bar{r}_+=\frac{\rho}{r}e^{i\theta}$和 $\bar{z}=z/r$。因此，$V_{\text{dd},0}$与 θ无关， $V_{\text{dd},1}$正比于 $e^{i\theta}$，而 $V_{\text{dd},2}$正比于 $e^{2i\theta}$。方程（S15）中的 $e^{im\theta}$ 使得求和（S16）的ˆ矩阵元 $\langle k_f,m_f|V_{\text{dd},j_f}|k_i,m_i\rangle$仅在 $m_f=m_i+j_f$时非零。此外，由于 $\bar{z}$是反对称的，而 χ_0和 $\bar{r}_+$都是对称的，$V_{\text{dd},1}$只能跃迁到奇数 n_f态，而$V_{\text{dd},2}$只能跃迁到偶数态。由此得到

$$\hbar\Gamma_{\text{plane}}^{j_f,n_f}=\frac{2\mu}{\pi^2k_ik_f\hbar^2}\int \mathrm{d}\theta_f\left|\sum_{m_i=-\infty}^{+\infty}e^{im_i\theta_f}\langle k_f,m_i+j_f|\langle n_f|V_{\text{dd},j_f}|0\rangle|k_i,m_i\rangle\right|^2. \tag{S19}$$

对称化

由于原子是玻色子，波函数需要进行对称化。所有自旋态都已经对称化。每个入射和出射 $|\vec{k}\rangle$ 态由（S14）变为 $\frac{|\vec{k}\rangle+|-\vec{k}\rangle}{\sqrt{2}}$。它通过将入射项和出射项分别乘以 $\sqrt{2}$，并对玻色子的偶数 m_i 和费米子的奇数求和，对求和式（S19）进行变换。出射通道的态密度除以 2，以避免重复计数。此外，由于括号积与 θ_f 无关，对 θ_f 积分后产生非零贡献的求和项，只有那些由模方产生的、在 m_i 上为对角的项。由此得到：

$$\Gamma_{\mathrm{sym}}^{j_f,n_f}=\frac{8\mu}{\pi k_i k_f\hbar^2}\sum_{\text{even } m_i}\left|\langle k_f,m_i+j_f|\langle n_f|V_{\mathrm{dd},j_f}|0\rangle|k_i,m_i\rangle\right|^2. \tag{S20}$$

s-波散射

鉴于我们的参数范围，我们只保留 $m_i=0$ 通道，即 s-波通道。这表明偶极势的相关作用范围远小于入射德布罗意波长。这是因为，对于大多数磁场而言 $k_f\gg k_i$（当磁能与温度相当时的讨论，请参见补充信息中的“比较玻恩近似与费米黄金法则”一节）。出射波函数在距离$\sim|m_f|/k_f\sim 1/k_f$ 处开始振荡，因此积分在该距离处截断（见图 S6）。在此之前，自由波函数 $\phi_m(\rho)$ 在$\sqrt{\rho}(k\rho)^{|m|}$中像贝塞尔函数一样增长，而偶极势则按 $1/\rho^3$变化。因此，积分的形式为$\int_0^{|m_f|/k_f}\rho\mathrm{d}\rho(k_f\rho)^{|m_f|}\frac{1}{\rho^3}(k_i\rho)^{|m_i|}\propto k_f^{|m_f|}k_i^{|m_i|}\int_{|m_i|-|m_f|+1}^{|m_i|+|m_f|-2}k_f\left(\frac{k_i}{k_f}\right)^{|m_i|}\sqrt{B\left(\frac{k_BT}{B}\right)^{|m_i|/2}}$，这意味着所有满足 $m_i\neq 0$ 的项都会受到极大抑制，只要磁场能量高于温度（1μK，约为$\propto$10毫高斯）。因此

$$\hbar\Gamma_{\mathrm{sym}}^{j_f,n_f}=\frac{8\mu}{\pi k_i k_f\hbar^2}\left|\langle k_f,m_f=j_f|\langle n_f|V_{\mathrm{dd},j_f}|0\rangle|k_i,0\rangle\right|^2.$$

波函数替换

我们已将方程（S14）中的平面波展开为柱面波函数，它们是自由粒子的薛定谔方程的解，即不含偶极相互作用项的方程（S13）。现在，我们用包含偶极相互作用项的完整薛定谔方程的解替换这些自由柱面波函数 ϕ_m，这些解$\phi_{n,m}$现在取决于谐振子通道 n。此时，初态为屏蔽波函数，费米黄金法则描述其偶极衰变。这样的替换是成立的，因为平面波展开（S14）在大距离处仍然成立，这是由于$1/\rho^3$ 中的偶极势比离心 $1/\rho^2$ 势衰减得更快。

β_{2D}的计算

速率 Γ_{sym} 表示两个玻色子处于圆柱形盒（半径为L）中的谐振子态 $n=0$ 时发生衰变的单位时间概率。我们关注通过$\mathrm{d}n_{2D}/\mathrm{d}t = -\beta_{2D} n_{2D}^2$定义的衰减率 β_{2D}，对于均匀气体，该衰减率可积分为$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = -\beta_{2D} N^2/(\pi L^2)$。对于均匀分布在该区域内的 N个原子，微分方程将所有可能的原子对组合 $N(N-1)/2$ 的衰减率相加。每次衰变都会损失两个原子，因此对于较大的 N，有$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = -2\Gamma \binom{N}{(N-1)_2} \sim -\Gamma N^2$。由此得到$\beta_{2D} = \pi L^2 \Gamma$:

$$\beta_{2D}^{j_f,n_f} = \frac{8\mu}{k_i k_f \hbar^3} \left| L \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \int_0^L \mathrm{d}\rho \phi_{n_f,j_f}(\rho) \chi_{n_f}(z) V_{\mathrm{dd},j_f}(\rho,z) \chi_0(z) \phi_0(\rho) \right|^2 .$$

该$\phi_{n,\,j}$ 波函数要么是自由波函数，如图 1b 中的浅蓝色曲线所示；要么是通过方程（6）修正后的波函数，如同一图中的蓝色和深蓝色曲线。

β_{3D}的计算

β_{3D} 的最终方程由方程（S5）推出，因此

$$\beta_{3D}^{j_f,n_f} = \frac{4\sqrt{\pi}}{\tilde{k}_i \tilde{k}_f} \tilde{a}_z \frac{E_{\mathrm{dd}}}{\hbar} a_{\mathrm{dd}}^3 \left| \tilde{L} \int \int_0^{\tilde{L}} \mathrm{d}\tilde{z}\, \mathrm{d}\tilde{\rho}\, \tilde{\phi}_{n_f,j_f}(\tilde{\rho}) \tilde{\chi}_{n_f}(\tilde{z}) \tilde{V}_{\mathrm{dd},j_f}(\tilde{\rho},\tilde{z}) \tilde{\chi}_0(\tilde{z}) \tilde{\phi}_0(\tilde{\rho}) \right|^2 \tag{S21}$$

注意，前因子 $E_{\mathrm{dd}} a_{\mathrm{dd}}^3/\hbar$ 有助于检查单位，但不便于观察偶极相互作用的标度关系。当波函数未受偶极-偶极势修正时，它们为：$\tilde{\phi}_{n,\,m}(\tilde{\rho}) = \sqrt{\pi \tilde{k} \tilde{\rho}/\tilde{L}}\, J_m(\tilde{k}\tilde{\rho})$ 和 $\tilde{\chi}_n(\tilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi \tilde{a}_z^2}\right)^{1/4} H_n(\tilde{z}/\tilde{a}_z) e^{-\frac{\tilde{z}^2}{2\tilde{a}_z^2}}$，由此得到二维速率：

$$\beta_{2D}^{\mathrm{free}} = \frac{9}{2\pi J^2} \frac{\hbar}{\mu} a_{\mathrm{dd}}^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^L \mathrm{d}\xi\, 2\pi\rho\, \mathrm{d}\rho\; J_{j_f}(k_f \rho) \frac{\rho^2}{(\rho^2 + \xi^2 \tilde{a}_z^2)^{3/2}} J_0(k_i \rho) \right.$$
$$\left. \frac{1}{\sqrt{2^{n_f} n_f!}} H_{n_f}(\xi) e^{-\xi^2} \right|^2$$

这明确显示了 $a_{\mathrm{dd}}^2 \propto (10\mu_B)^4$ 标度关系。

总衰变率

因此，总速率是所有通道速率之和:

$$\beta_{3D} = \sum_{j_f,n_f} \beta_{3D}^{j_f,n_f} .$$

动量平均

˜得到的速率取决于入射动量 k_i。由于气体处于热态，横向有许多被占据的状态，我们对动量进行积分，以得到平均衰减率

$$\bar{\beta}_{3D} = \frac{1}{\pi\kappa^2}\int_0^\infty 2\pi k \beta_{3D}(k) e^{-k^2/\kappa^2}\,\mathrm{d}k$$

与 $\kappa = \sqrt{k_B \overline{T/E_{dd}}}$。图 2b-c 中展示的结果是平均动量下的速率。但由于这项计算的计算量相当大，且会模糊通道开启的特征，因此本文其余部分仅展示在平均动量 $k_i = \kappa\sqrt{\pi}/2$ 下计算的结果。例如，图 1a-b 中波函数的入射能量为 $E_i = E_{dd}\kappa^2\pi/4$。

范德瓦耳斯相互作用

除了偶极相互作用之外，还存在短程范德瓦耳斯相互作用。为了了解模型对该接触相互作用的敏感程度，我们还使用了在 $a_s = 5.9\mathrm{nm}$ 处具有硬核势的模拟波函数；该处对应镝的有效背景 s-波散射长度 [S32], ，同时在其他位置保留偶极势。我们在入射和出射径向波函数 ϕ 于此位置设置节点，并从该距离处向外积分。由此得到图 2中阴影区域的下界。

玻恩近似

定义

玻恩近似是描述势散射的标准方法。二维情况下的这一方法已在 [S2], 中介绍，但缺少明确的最终公式，而我们希望在此给出该公式。我们要寻找完整哈密顿量的本征态:

$$(E - \hat{H}_0)\,|\Psi\rangle = \hat{V}_{dd}\,|\Psi\rangle \tag{S22}$$

with

$$\hat{H}_0 = H_{2D} + H_n + \hat{H}_B = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_{2D}^2 + \hbar\omega_z\left(n+\frac{1}{2}\right) + \mu_B g_J B_z\left(\hat{J}_{z,1} + \hat{J}_{z,2}\right) \tag{S23}$$

和 $\hat{}\, V_{dd}$ 由方程（S17定义。我们将格林算符 $\hat{}\, G_0$ 定义为 $(E - \hat{}\, H_0 \pm i\eta)\hat{}\, G_0 = \mathbb{1}$，最终取极限 $\eta \to 0$。我们省略波函数中的表面归一化系数，使得: $\langle\vec{\rho}|\vec{k}\rangle = e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}$; $\langle\vec{\rho}|\vec{\rho}'\rangle = \delta_{2D}(\vec{\rho}-\vec{\rho}')$ 且 $\langle\vec{k}|\vec{k}'\rangle = (2\pi)^2\delta_{2D}(\vec{k}-\vec{k}')$ [3]。

[3] It follows that:

$$\mathbb{1}_{2D} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^2\vec{k}\,|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}| = \int \mathrm{d}^2\vec{\rho}\,|\vec{\rho}\rangle\langle\vec{\rho}|$$

$$\Psi(\vec{\rho}) = \langle\vec{\rho}|\Psi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^2\vec{k}\,\langle\vec{\rho}\,|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}\,|\,\Psi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^2\vec{k}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}\psi(\vec{k})$$

玻恩近似

根据定义，$|\Psi\rangle = \hat{G}_0\hat{V}_{\rm dd}|\Psi\rangle$ 是本征值方程（S22）的一个解。此外，若我们有方程 $|\Psi_0\rangle$ 的一个解 $(E-\hat{H}_0)|\Psi_0\rangle = 0$，那么 $|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle + \hat{G}_0\hat{V}_{\rm dd}|\Psi\rangle$ 也是一个解。一阶玻恩近似是指计算解的一阶部分：

$$|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle + \hat{G}_0\hat{V}_{\rm dd}|\Psi_0\rangle \tag{S24}$$

取 $|\Psi_0\rangle = |\vec{k}_i\rangle \otimes |n=0\rangle \otimes |j_0\rangle$，其能量为：$E = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\hbar\omega_z + 16\mu_B g_J B_z$。请注意，我们稍后会通过将 $|\vec{k}_i\rangle$ 替换为 $\frac{|\vec{k}_i\rangle+|-\vec{k}_i\rangle}{\sqrt{2}}$ 来对入射态进行对称化，~~因此~~最好跟踪那些最终会变成 $\frac{e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{\rho}}+e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{\rho}}}{\sqrt{2}}$ 的 $e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{\rho}}$ 项。

计算 $\psi_{n_f,\ j_f}(\vec{k})$

我们将问题分解为若干通道 $(n_f,\ j_f)$。最终，我们希望得到散射波函数的位置表象，但格林算符在动量空间中的表达式更简单。将 $|\Psi\rangle$ 投影到 $\langle j_f|\langle n_f|\langle k|$上时，方程 (S24) 中的第一项在 $(n_f,\ j_f) \neq (n_i=0,\ j_0)$下消失。因此需要计算的矩阵元为

$$\psi_{n_f,j_f}(\vec{k}) = \langle j_f|\langle n_f|\langle\vec{k}|\hat{G}_0\hat{V}_{\rm dd}|\vec{k}_i\rangle|0\rangle|j_0\rangle$$

格林算符从左侧作用时，会穿过态；这些态是方程 (H_0 S23) 中 的本征态，因此得到

$$\psi_{n_f,j_f}(\vec{k}) = \frac{1}{E-\frac{\hbar^2k^2}{2\mu}-\hbar\omega_z\left(n_f+\frac{1}{2}\right)-\mu_B g_J B_z(16-\Delta m)\pm i\eta}\langle j_f|\langle n_f|\langle\vec{k}|\hat{V}_{\rm dd}|\vec{k}_i\rangle|0\rangle|j_0\rangle \tag{S25}$$

对于通道 $\Delta m = 1,\ 2,\ j_1,\ j_2$ 分别成立。令：

$$\frac{\hbar^2k_f^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2k_i^2}{2\mu} - \hbar\omega_z\Delta n + \mu_B g_J B_z\Delta m$$

利用 $\Delta n = n_f - n_i$，分母可简化为 $\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(k_f^2 - k^2 \pm i\eta\right)$。我们引入恒等式 $\int {\rm d}^2\vec{\rho}|\vec{\rho}\rangle\langle\vec{\rho}|$，得到

$$\psi_{n_f,j_f}(\vec{k}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{k_f^2-k^2\pm i\eta}\int {\rm d}^2\vec{\rho}\,{\rm d}z e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_i)\cdot\vec{\rho}}\chi^*_{n_f}(z)V_{{\rm dd},\,j_f}(\vec{\rho},z)\chi_0(z).$$

$\psi(\vec{k}) = \langle\vec{k}|\Psi\rangle = \int {\rm d}^2\vec{\rho}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}\Psi(\vec{\rho})$

其中势采用方程（S17）中的记号。

计算 $\Psi_{n_f,\ j_f}(\vec{\rho})$
在位置表象中，我们有

$$\Psi_{n_f,j_f}(\vec{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^2\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}\psi_{n_f,j_f}(\vec{k})$$
$$= \frac{2\mu}{\hbar^2}\int \mathrm{d}^2\vec{\rho}_1 \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^2\vec{k}\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{\rho}-\vec{\rho}_1)}}{k_f^2-k^2\pm i\eta}}_{I} e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{\rho}_1}\int \mathrm{d}z\chi^*_{n_f}(z)V_{\mathrm{dd},\,j_f}(\vec{\rho}_1,z)\chi_0(z)$$

在 Mathematica 中计算积分 I 需要几个步骤:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty k\,\mathrm{d}k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_k\frac{e^{ik|\vec{\rho}-\vec{\rho}_1|\cos\theta_k}}{k_f^2-k^2\pm i\eta}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty k\,\mathrm{d}k\frac{2\pi J_0\left(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}_1|\right)}{k_f^2-k^2\pm i\eta}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(-2\pi K_0\left(\sqrt{-k_f^2\mp i\eta}|\vec{\rho}-\vec{\rho}_1|\right)\right)\\
&= -\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(\sqrt{k_f^2\pm i\eta}|\vec{\rho}-\vec{\rho}_1|\right)\xrightarrow[\eta\to 0]{} -\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(\sqrt{k_f^2}|\vec{\rho}-\vec{\rho}_1|\right),
\end{aligned}$$

其中 K_0 是自变量为复数的第二类修正贝塞尔函数， $H_0^{(1)}$ 是第一类汉克尔函数。为了得到出射通量，我们只保留汉克尔函数平方根中的 $+$ 解，并进行远场展开 $H_0^{(1)}(k_f|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_f\rho}}e^{ik_f\rho}e^{-ik_f\vec{u}_\rho\cdot\vec{\rho}'}e^{-i\pi/4}$，因此写成 $k_f = k_f\vec{u}_\rho$ 后，我们得到

$$\Psi_{n_f,j_f}(\vec{\rho}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{-i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k_f\rho}}e^{ik_f\rho}e^{-i\pi/4}\int \mathrm{d}^2\vec{\rho}_1 e^{-i\left(\vec{k}_f-\vec{k}_i\right)\cdot\vec{\rho}_1}$$
$$\int \mathrm{d}z\chi^*_{n_f}(z)V_{\mathrm{dd},\,j_f}(\vec{\rho}_1,z)\chi_0(z).$$

为了进一步简化，我们首先引入谐振子波函数乘积 $\chi^*_{n_f}(z)\chi_0(z)$的傅里叶变换 $\mathcal{H}_{n_f}$ ：

$$\chi^*_{n_f}(z)\chi_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}q_z e^{iq_zz}\mathcal{H}_{n_f}(q_z) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}q_z e^{-iq_zz}\mathcal{H}_{n_f}(-q_z),$$

然后定义 $\vec{q} = k_f - k_i + q_z\vec{u}_z$ 和 $\vec{r}_1 = \vec{\rho}_1 + z\vec{u}_z$ ，得到

$$\Psi_{n_f,j_f}(\vec{\rho}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{-1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k_f \rho}}e^{ik_f\rho}e^{+i\pi/4}\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}q_z \mathcal{H}_{n_f}(-q_z) \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_1} V_{\mathrm{dd},\,j_f}(\vec{r}_1).$$

我们引入偶极-偶极相互作用的傅里叶变换

$$\mathcal{V}_{j_f} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1 e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_1} V_{\mathrm{dd},\,j_f}(\vec{r}_1),$$

并定义散射振幅 f，使得

$$\Psi_{n_f,j_f}(\vec{\rho}) = \frac{e^{ik_f\rho}}{\sqrt{\rho}}e^{i\pi/4} f(\vec{k}_f - \vec{k}_i, n_f, \Delta m).$$

因此

$$f(\vec{k}_f - \vec{k}_i, n_f, \Delta m) = \frac{\mu}{\hbar^2}\frac{-1}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{k_f}}\int \mathrm{d}q_z \mathcal{H}_{n_f}(-q_z)\mathcal{V}_{\Delta m}(\vec{k}_f - \vec{k}_i, q_z). \tag{S26}$$

傅里叶变换为

$$\hat{\mathcal{V}}(\vec{k}, q_z) = \mu_0(J g_J \mu_B)^2 \Bigg(\left(\hat{k}_z\hat{k}_z - 1\right)|j_0\rangle\langle j_0| + \frac{1}{J^{1/2}}\hat{k}_z\hat{k}_+ |j_1\rangle\langle j_0| + \frac{1}{2J}\hat{k}_+\hat{k}_+ |j_2\rangle\langle j_0| \Bigg) \tag{S27}$$

with $\bar{k}_+ = \frac{k_x + ik_y}{\sqrt{k^2+q_z^2}}$ and $\bar{k}_z = \frac{q_z}{\sqrt{k^2+q_z^2}}$

对称化
我们始终保留了一项 $e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{\rho}_1}$，它是 $\Psi_0^{k_i}(\vec{\rho}_1)$。要对玻色子波函数进行对称化，我们只需将其改为 $\frac{e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{\rho}_1}+e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{\rho}_1}}{\sqrt{2}}$，从而得到

$$f_S(\vec{k}_f, \vec{k}_i, n_f, \Delta m) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(\vec{k}_f - \vec{k}_i, n_f, \Delta m) + f(\vec{k}_f + \vec{k}_i, n_f, \Delta m)\right).$$

散射截面
通量通过波函数梯度定义 $\frac{\hbar}{\mu}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{i}\Psi^*\vec{\nabla}\Psi\right]$。$\vec{J}_i = \frac{\hbar\vec{k}_i}{\mu}$是 $\Psi_0(\vec{\rho}) = e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{\rho}}$的入射流。出射波流的主要贡献来自其径向部分，因为梯度中的其他项按 $1/\rho^2$而非 $1/\rho$ 衰减：$\vec{J}_f \simeq \frac{\hbar k_f}{\mu}\frac{1}{\rho}|f_S(\vec{k}_f,\ \vec{k}_i,\ n_f,\ \Delta m)|^2$。该

30 偶极相互作用能抑制偶极弛豫吗?

散射到角度 $\mathrm{d}\theta_f$ 范围内的微分散射截面为

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta_f}\,\mathrm{d}\theta_f = \frac{k_f}{k_i}|f_S(\vec{k}_f,\vec{k}_i,n_f,\Delta m)|^2.$$

因此，总散射截面为

$$\sigma(\vec{k}_i,n_f,\Delta m) = \frac{k_f}{k_i}\int \mathrm{d}\theta_f|f_S(\vec{k}_f,\vec{k}_i,n_f,\Delta m)|^2.$$

$\beta_{2\mathrm{D}}$ 损失系数
损失系数为 $\beta = \sigma v = \sigma\frac{\hbar k_i}{\mu}$。它仍取决于 k_i 的方向。然后对所有可能的入射方向取平均：$\beta_{2D}(k_i,n_f,\Delta m) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\theta_i\beta_{2D}(\vec{k}_i,n_f,\Delta m)$，得到
—

$$\beta_{2D}(k_i,n_f,\Delta m) = \frac{\mu}{\hbar^3}\frac{1}{32\pi^4}\int \mathrm{d}\theta_i\int \mathrm{d}\theta_f\left|\int \mathrm{d}q_z\mathcal{H}_{n_f}(-q_z)\right.$$
$$\left.\left(\mathcal{V}_{\Delta m}(\vec{k}_f-\vec{k}_i,q_z)+\mathcal{V}_{\Delta m}(\vec{k}_f+\vec{k}_i,q_z)\right)\right|^2.$$

比较玻恩近似和费米黄金法则

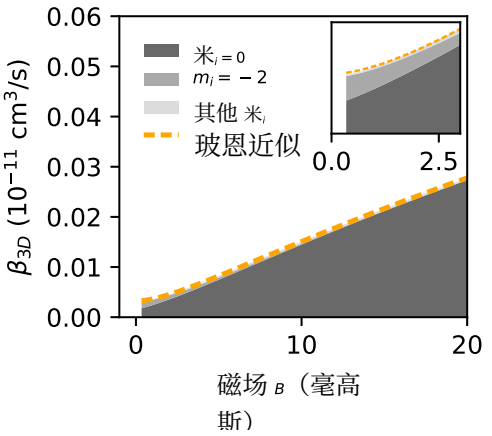


图 S3 费米黄金法则与玻恩近似的比较。灰色阴影区域根据方程（S20）采用自由波函数计算，其中包括多个 m_i 入射分波。橙色曲线表示玻恩近似。插图放大显示了较小磁场下的情况。

在求和中纳入所有入射 m_i 分波后，玻恩近似和费米黄金法则给出相同的结果

方程 (S19)。这是预料之中的，因为二者都是通过一阶微扰理论计算得出的。从最终表达式中不容易看出这一点，但在图 S3中可以看到。在高磁场下，只有 $m_i = 0$通道有贡献，因为速率与 $k_f(k_i/k_f)^{|m_i|}$成比例。然而，在磁场足够低时，入射和出射动量相当，其他通道也变得同样重要，尤其是 $m_i = -2 \to 0$。

纯二维极限

我们在正文中提到，随着磁场增强，纯二维情形下的衰减率会持续受到抑制。原因是，磁场越强，出射动量越大，弛豫作用的范围也越短。偶极势会排斥原子，从而屏蔽内侧区域。下面我们推导纯二维情形下的屏蔽弛豫率。首先推导未屏蔽情形。然后，我们利用已知的 [S21] 零温屏蔽波函数，并在长距离处将其与自由低动量波函数衔接，以计算屏蔽后的弛豫率。这将展现出令人惊叹的现象：磁场增强时，弛豫率反而降低。我们还将说明，降低温度可以进一步抑制弛豫。我们尚未在实验装置中达到这一状态，但相信只需稍加改进便可实现，并认为这一理论处理能够为理解该系统提供启示。

从方程（S21）出发，可以写出横向束缚无限强时的二维速率（$\tilde{\chi}_0(z) = \delta(z)$）。唯一的衰变通道是 $j_f = 2$ 和

$$\beta^{\text{pure-2D}} = \frac{4}{\tilde{k}_i \tilde{k}_f} \frac{E_{\text{dd}}}{\hbar} a_{\text{dd}}^2 \left| \tilde{L} \int_0^{\tilde{L}} d\tilde{\rho} \tilde{\phi}_f(\tilde{\rho}) \tilde{V}_{\text{dd},2}(\tilde{\rho}) \tilde{\phi}_0(\tilde{\rho}) \right|^2 \tag{S28}$$

其中 $\tilde{V}_{\text{dd},\,2}(\tilde{\rho}) = \left(\frac{-3}{2J}\right) \frac{2}{\tilde{\rho}^3}$。

自由波函数情形

若忽略屏蔽，波函数具有简单的形式 $\phi_m(\tilde{\rho}) = \sqrt{\frac{\pi \tilde{k} \tilde{\rho}}{\tilde{L}}} J_m(\tilde{k}\tilde{\rho})$。在低温极限下，入射贝塞尔函数的形式为 $J_0(\tilde{k}_i \tilde{\rho}) \simeq 1$。积分 $\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{J_2(kx)}{x^2} = \frac{k}{3}$ 和

$$\beta_{\text{free}}^{\text{pure-2D}} = 4\pi^2 \frac{1}{J^2} \frac{E_{\text{dd}}}{\hbar} a_{\text{dd}}^2 \tilde{k}_f^2. \tag{S29}$$

因此 $\beta^{\text{pure-2D}}{}_{\text{自由}} \propto B$。

屏蔽波函数情形

若将偶极屏蔽势考虑在内，结果将截然不同。我们将展示两种效应：速率会随着磁场增强和温度降低而下降。温度越低意味着更强的

屏蔽，而更强的磁场会缩短相互作用范围，从而也增强屏蔽。为简化模型，我们只考虑入射波函数受到屏蔽，因为出射波函数已经受到离心势垒的作用。在纯二维情况下，入射波函数的微分方程由方程（6）得出：

$$\left(-\frac{d^2}{d\tilde{\rho}^2}+\frac{-1/4}{\tilde{\rho}^2}+\frac{2}{\tilde{\rho}^3}\right)\tilde{\phi}=\tilde{k}_i^2\tilde{\phi} \tag{S30}$$

其解析结果可由下式得出： [S21] 但仅适用于零温˜($k_i = 0$)，且涉及修正贝塞尔函数。在有限温度下，若不存在偶极相互作用项，则可用常规贝塞尔函数求得解。因此，我们在短程处使用修正贝塞尔函数解，直到 $\tilde{\rho}_0$ 使得$2/\tilde{\rho}_0^3 = \tilde{k}_i^2$。然后，我们将该函数与具有相移 δ的有限温度自由解拼接。于是，入射波函数为

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{\text{in}}(\tilde{\rho}) =&\alpha\sqrt{\tilde{\rho}}K_0\left(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}}}\right) && \text{for } \rho<\rho_0\\ =&\sqrt{\frac{\pi\tilde{k}\tilde{\rho}}{\tilde{L}}}\left(\cos(\delta)J_0(\tilde{k}\tilde{\rho})-\sin(\delta)Y_0(\tilde{k}\tilde{\rho})\right) && \text{for } \rho\geq\rho_0\end{aligned}$$

其中， K_0 是修正贝塞尔函数， J_0 和 Y_0 分别是第一类和第二类贝塞尔函数。 α 是通过在拼接位置 $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0$ 处令波函数及其导数相等而得到的归一化系数，该位置位于长度为 L的˜盒子中，由此可得

$$\alpha=\frac{\left(\cos(\delta)J_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0)-\sin(\delta)Y_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0)\right)\sqrt{\frac{\pi\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0}{\tilde{L}}}}{\sqrt{\tilde{\rho}_0}K_0(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}_0}})}$$

with

$$\delta=\arctan\left(\frac{rJ_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0)+J_1(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0)}{rY_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0)+Y_1(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0)}\right) \tag{S31}$$

and

$$r=\frac{1}{\tilde{k}_i}\left(\frac{\tilde{\phi}'(\tilde{\rho}_0)}{\tilde{\phi}(\tilde{\rho}_0)}-\frac{1}{2\tilde{\rho}_0}\right).$$

现在我们分别探讨两个极限：低温和高磁场。

低温极限

可以求得入射波函数在低温下的行为。我们预计，随着屏蔽增强，低温下的衰减率会受到抑制

。 r 系数可以改写为：

$$r = \frac{K_1\left(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}_0}}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}_0}}\right)},$$

可用于通过方程展开 δ （S31） [4]：

$$\delta \xrightarrow[\tilde{k}_i\to 0]{} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\left(3\gamma+\log\left(\tilde{k}_i\right)\right)}\right),$$

求得：

$$\alpha \xrightarrow[\tilde{k}_i\to 0]{} \frac{-2}{\log\left(\tilde{k}_i\right)}\sqrt{\frac{\pi\tilde{k}_i}{\tilde{L}}}.$$

它给出了低温下入射波函数的以下表达式：

$$\tilde{\phi}_{\text{in}}(\tilde{\rho}) = \frac{-2}{\log\left(\tilde{k}_i\right)}\sqrt{\frac{\pi\tilde{k}_i\tilde{\rho}}{\tilde{L}}}K_0\left(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}}}\right).$$

这反映在衰减率和 β^{pure} ${}^2\text{D}_{\text{屏蔽}} \propto \left(1/\text{对数}\left(\tilde{k}_i\right)\right)^2$ 中，它们在低温下趋于零。

这与自由波函数的情况大不相同；后者即使在零温下也有一个有限的极限。图3d展示了温度越低，屏蔽因子越大的现象。

中等磁场近似

这里我们利用屏蔽波函数，推导方程（S28）中积分的近似解析公式。贝塞尔函数的积分没有简单的表达式 K 乘以另一个贝塞尔函数 J 或 Y 以及偶极势 [5]。我们已完成全面的数值计算（见下文）。不过，通过用具有已知积分的函数近似贝塞尔函数，可以得到适用于中等磁场的近似解析结果。图S4 说明了我们为计算该积分所采用的不同近似。当磁场相对于温度足够高时 [6]，，出射贝塞尔波函数会发生振荡，并在拼接点之前首次变为零$\tilde{\rho}_0$ （见图S4）。于是，我们可以在此处截断积分，因为剩余部分会被 $1/\tilde{\rho}^3$ 势阻尼。只有当入射波

[4]注意，将该方程与二维硬核势的相移形式$\tan^{\delta} \simeq {}_{2\ \ln}{}^{\pi}((\tilde{k}_i\tilde{a}/2)+\gamma)$ 相等，即可从 [S21] 中恢复出通用的偶极散射结果~~$a = 2e^{2\gamma}$~~。[5]实际上还有一种涉及梅杰尔 G 函数的表达式，但与我们采用的近似相比，它并不能带来多少启发。[6]这对应于 $x_2/\tilde{k}_f < \tilde{\rho}_0$ 因此 $x_2\hbar/(a_{\text{dd}}\sqrt{4\mu\mu_B g_J B}) < \tilde{\rho}_0 = (2/\tilde{k}_i^2)^{1/3}$ 由此得到 $B \simeq 0.3\text{G}$。

函数在该零点之后不会增大太多时，这种做法才成立；否则它会抵消势导致的衰减，使振荡的第二个波瓣对积分的贡献超过第一个波瓣。入射波函数会指数增长，直到某个距离 $\tilde{\rho}_i$，该距离为我们的模型所能承受的磁场强度设定了上限[7]。定义 $\tilde{D} = x_2/\tilde{k}_f < \tilde{\rho}_0$ 其中$x_2 \simeq 5.13$ 是 $J_2(x)$的第一个零点，则由方程（S28）得到的衰减率为

$$\beta^{\text{pure-2D}}_{\text{shielded}} = \frac{4}{\tilde{k}_i\tilde{k}_f}\frac{E_{\text{dd}}}{\hbar}a_{\text{dd}}^2\left|\tilde{L}\int_0^{\tilde{D}} d\tilde{\rho}\sqrt{\frac{\pi\tilde{k}_f\tilde{\rho}}{\tilde{L}}}J_2(\tilde{k}_f\tilde{\rho})\frac{2}{\tilde{\rho}^3}\alpha\sqrt{\tilde{\rho}}K_0\left(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}}}\right)\right|^2$$

$$= \frac{36\pi^2}{J^2}\frac{E_{\text{dd}}}{\hbar}a_{\text{dd}}^2\left(\frac{\cos(\delta)J_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0) - \sin(\delta)Y_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0)}{K_0(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}_0}})}\right)^2 \times$$

$$\left|\int_0^{\tilde{D}} d\tilde{\rho}J_2(\tilde{k}_f\tilde{\rho})\tilde{\rho}^{-2}K_0\left(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}}}\right)\right|^2.$$

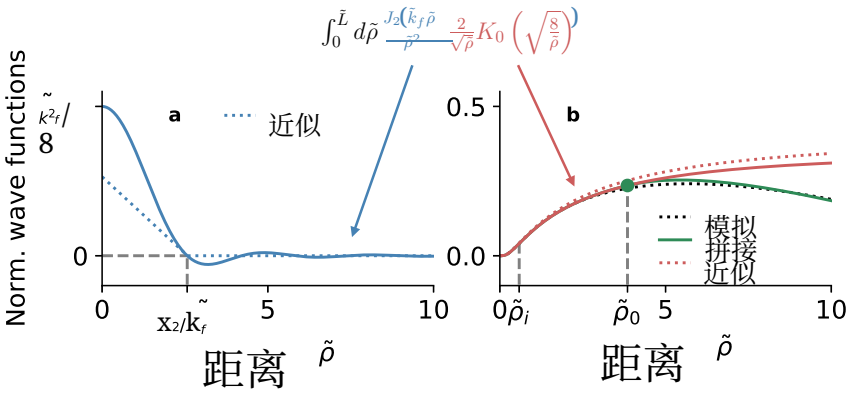


图 S4 计算屏蔽衰减率时所用近似的示意图。被积函数 $J_2(\tilde{k}_f\tilde{\rho})/\tilde{\rho}^2$ 中对应出射波函数、势和面积元的左侧部分以蓝色实线绘出。出射波函数在 $x_2/\tilde{k}_f$ 处的第一个零点被截断，随后从该点向内进行泰勒展开。被积函数中对应入射波函数的右侧部分以红色实线绘出。通过在 $\tilde{\rho}_0$ 处将其拼接来确定归一化因子，最终将其展开为一个简单的指数函数（红色虚线）。将总拼接波函数（先红色后绿色）与完全模拟得到的波函数（灰色虚线）进行比较。我们的模型要求 $\tilde{\rho}_i < x_2/\tilde{k}_f < \tilde{\rho}_0$。

˜这种拼接仅用于确定 ϕ_f 的归一化因子。正如我们所提到的，我们进一步简化波函数的函数形式如下:

[7]上限为 $x_2/\tilde{k}_f > \tilde{\rho}_i \simeq 0.58$，对应于 $B \simeq 13\,\text{G}$。这个估计比较保守，因为该模型能够容忍高达 50 G 的磁场。

˜如图 S4 所示。我们对 $\tilde{\rho} = x_2/k_f$ 中的贝塞尔 J函数进行泰勒展开

$$\frac{J_2(\tilde{k}_f\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}^2} \simeq \tilde{k}_f^3 \left(\frac{J_1(x_2) - J_3(x_2)}{2x_2^2}\right)\left(\tilde{\rho} - \frac{x_2}{\tilde{k}_f}\right),$$

并将 $\tilde{\rho} = 0$ 中的第二类修正贝塞尔函数近似为

$$K_0\left(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}}}\right) \simeq \exp\left(-\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}}}\right)\frac{\sqrt{\pi}\tilde{\rho}^{1/4}}{2\cdot 2^{1/4}}$$

该积分

$$\int_0^{\tilde{D}} d\tilde{\rho}\left(1 - \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{D}}\right)\tilde{\rho}^{1/4}e^{-\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}}}} = \frac{16}{945}f\left(\tilde{D}\right)$$

with

$$f\left(\tilde{D}\right) = \frac{1}{\tilde{D}}\left[e^{-\sqrt{\frac{8}{\tilde{D}}}}\tilde{D}^{1/4}\left(-256 + 32\sqrt{2}\tilde{D}^{1/2} + 480\tilde{D} - 48\sqrt{2}\tilde{D}^{3/2} + 21\tilde{D}^2\right)\right.$$
$$\left. -8\cdot 2^{3/4}\sqrt{\pi}\left(-32 + 63\tilde{D}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{2^{3/4}}{\tilde{D}^{1/4}}\right)\right]$$

总体上得到

$$\beta_{\text{shielded}}^{\text{pure-2D}} = \frac{256\pi^3}{99225\sqrt{2}}\left(\frac{J_1(x_2) - J_3(x_2)}{2x_2}\right)^2 \times$$
$$\left(\frac{\cos(\delta)J_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0) - \sin(\delta)Y_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0)}{K_0(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}_0}})}\right)^2 \frac{1}{J^2}\frac{E_{\text{dd}}}{\hbar}a_{\text{dd}}^2\tilde{k}_f^4 f^2\left(\frac{x_2}{\tilde{k}_f}\right). \quad \text{(S32)}$$

该解析表达式与数值积分的吻合情况见图S5。

高场极限

f 的复杂性使人难以把握衰减率β的行为。可以对 f 在高磁场下进行展开，这会大大简化方程。然而，只有在数千高斯的磁场下，这种展开才有效；这与最初的假设相矛盾，即x_2/k_f 大于入射波函数指数抑制区域的极限 $\tilde{\rho}_i$ 。尽管如此，它仍能很好地描述曲线的整体行为，并有助于理解衰减率的抑制。在大磁场极限下，将数值和归一化前因子κ 设为：

$$\kappa = \frac{8\pi^3}{105}\left(\frac{J_1(x_2) - J_3(x_2)}{2x_2}\right)^2\left(\frac{\cos(\delta)J_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0) - \sin(\delta)Y_0(\tilde{k}_i\tilde{\rho}_0)}{K_0(\sqrt{\frac{8}{\tilde{\rho}_0}})}\right)^2 x_2^{7/4}$$

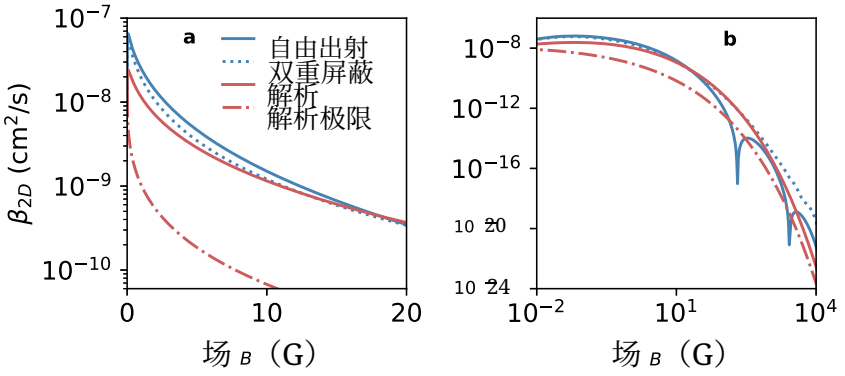


图 S5 二维中的偶极衰减率。展示了两个磁场范围内模拟和解析得到的衰减率系数。蓝色曲线表示采用模拟波函数计算的速率，其中考虑了入射和出射通道中的偶极排斥（虚线），或仅考虑入射通道中的偶极排斥（蓝色曲线）。红色曲线表示解析结果，其中仅在入射波函数中考虑屏蔽。实线对应方程（S32），虚线对应其高场极限，即方程（S33）。

可得

$$\beta^{\text{pure-2D}}_{\text{shielded}} = \kappa \frac{1}{J^2} \frac{E_{\text{dd}}}{\hbar} a_{\text{dd}}^2 \tilde{k}_f^{1/4} \exp\left(-2\sqrt{\frac{8\tilde{k}_f}{x_2}}\right), \tag{S33}$$

或 $\beta^{\text{pure-2D}}{}_{\text{屏蔽}} \propto B^{1/8} \exp\left(-\xi B^{1/4}\right)$，这与自由波函数的情形截然不同；在后者中，衰减率随磁场线性增加。图S5 展示了这种指数抑制。抑制因子可以任意大。即使在高磁场下，我们的解析公式（S32）和（S33）也能正确再现曲线的整体形状，尽管我们的近似无法完全捕捉衰减率中出现的精确振幅及零点˜，这些零点出现在 x_2/k_f 变为 $< \tilde{\rho}_i$时。

经典转折点

我们已在正文中解释，弗兰克–康登原理预测自旋翻转会发生在出射波函数的经典转折点处。我们刚才介绍的低温屏蔽情形提供了一个反例：入射波函数也存在一个需要考虑的经典转折点。当外场足够强时，出射波函数会在入射波函数受到抑制的区域内振荡多次。因此，被积函数会受到多次振荡的贡献，而不只是第一次振荡。

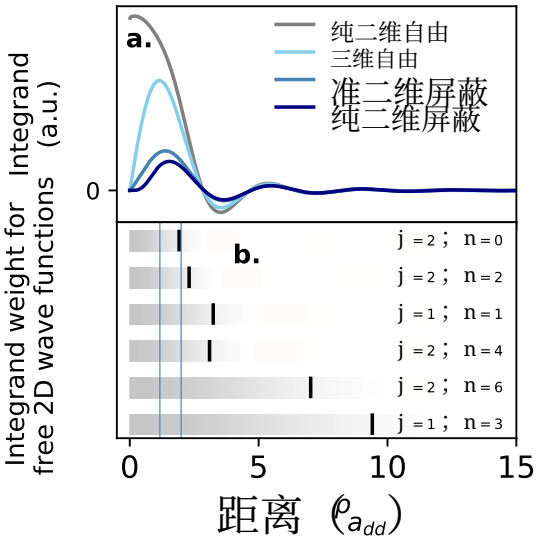


图 S6 费米黄金法则的被积函数。（a.）蓝色曲线与图 1 中的曲线相同，来源于方程（S21）。灰色曲线在短程处经过缩放，表示使用自由波函数的纯二维几何这一虚构情形。（b.）以灰度显示的同一被积函数（针对自由波函数）的振幅。展示了多个 n- 通道的单 $j = 1$ 和双 $j = 2$ 自旋翻转。顶部的条形与（a.）中的灰色曲线相同。蓝色竖线表示准二维情形下偶极相互作用占主导、超过方程（6）中其他能量项的区间。黑色竖线位于 $\sqrt{12}/k_f$处，其中 k_f 为出射动量。

—

被积函数的行为

三维中的偶极弛豫率已在其他文献中计算过[S2，S15，S18]。在参考文献 [S2], 中，作者指出，弛豫率的主要贡献来自出口通道中粒子经典转折点附近的区域。这可以这样理解：方程（2）中的被积函数是平坦的入射波函数、一个 $1/r^3$ 势、一种随$(k_f r)^2$ 增加的球贝塞尔函数以及一个体积元$4\pi r^2$的乘积。被积函数的变化形式为 r ，并一直增加到 $r \approx 1/k_f$ ，此处贝塞尔函数开始振荡。如图S6a所示，二维情形则有所不同。由于体积元为 $2\pi\rho$，对于纯二维中的自由波函数，被积函数变为平坦，因此直到 $\sim 1/k_f$，对弛豫率的贡献都是均匀的。因此，内区域（经典禁阻区）有很大的贡献。

从二维中自由波函数这一虚构情形转到具有屏蔽波函数的真实准二维情形，会产生两种影响。首先，沿着 z对自旋翻转势取平均，从而减小被积函数的短程贡献。实际上，在准二维情形下 $\langle \frac{\bar{r}^2_+}{r^3} \rangle_{n=0} \propto 1/a_z\rho^2$，这使得被积函数在 0 处趋于 $\rho \to 0$ (见图 S6a，浅蓝色）。随后，屏蔽进一步减小短程振幅（见图 S6a，钢蓝色）。

图 S6b 中的两条蓝色竖线标示了偶极相互作用占主导、超过离心项和动能项的空间区域。从图 1a 中也可以看出这一点：当准二维蓝色曲线中的偶极相互作用贡献大于离心浅蓝色曲线的绝对值以及入射动能时，便处于该区域。屏蔽主要发生在这片空间区域内，因此我们只能期待从该区域向内的范围内偶极弛豫有所减小。

因此，出射动量越大，相互作用的作用范围就越短，从而增大屏蔽因子。从图 3c 可以看出，屏蔽因子随磁场增强而增大。类似地，轴向运动的激发会减小最终的径向动量，因此使弗兰克-康登点进一步向外移动。图 S6b 显示，对于出射径向动量较小的通道，被积函数在屏蔽内区域以外很远处仍有贡献。

三维中的磁场标度关系

我们在正文中提到，玻色子的衰减率按 $\sqrt{B}$ 标度变化。利用费米黄金法则可以理解这一结果。三维中的出射波函数 ψ 是一个球贝塞尔函数 $l = 2$ 。其在半径为 L 的球体中的归一化条件给出 $\psi \propto k_f/\sqrt{L} j_2(k_f r)$。因此，在 r 较小时，它会按 $k_f^3 r^2$ 增长，随后在 $1/k_f$ 处开始振荡。将入射平坦波函数、出射波函数、体积元 $4\pi r^2$ 以及势 $1/r^3$ 在 0 到 $1/k_f$ 之间的乘积积分，可得一个与 k_f 成正比的矩阵元。由于我们考虑的是由 k_f 标记的球面波，因此采用一维态密度 $\propto 1/k_f$。综合起来可得

$$\Gamma_{3D} \propto k_f \propto \sqrt{B}.$$

通过对二维通道的所有贡献求和，也能得到相同结果，但这更为复杂，因为谐振子的波函数会发挥作用；不过从图中可以看出：2b：自由二维曲线最终会与三维曲线相交。