二维随机几何图中的极大团数量：欧几里得与双曲

HODAKA YAMAJI

东京大学信息科学与技术研究生院 东京大学
东京 113-8656，日本
hodakaymj@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

arXiv:2303.06301v1 [cs.DM] 11 Mar 2023

摘要： 极大团枚举在各种真实世界网络中都有应用，例如社交网络和蛋白质相互作用网络。对于一般的图输入，极大团的数量最多可达 $3^{|V|/3}$。然而，许多以往的研究表明，真实世界网络中的极大团数量远小于这一上限，且多项式延迟算法使我们能够在合理的时间内枚举这些极大团。为弥合最坏情况与实际情况之间的差距，我们考察两种广受关注的真实世界网络模型中的极大团数量：欧几里得随机几何图和双曲随机图。我们证明，对于任意 $\epsilon > 0$，以高概率，欧几里得随机几何图中的极大团数量的下界和上界分别为 $\exp(\Omega(|V|^{1/3}))$ 和 $\exp(O(|V|^{1/3+\epsilon}))$。对于双曲随机图，我们给出上下界 $\exp(\Omega(|V|^{(3-\gamma)/6}))$ 和 $\exp(O(|V|^{(3-\gamma+\epsilon)/6}))$，其中 γ 是介于 2 和 3 之间的幂律度指数。

关键词：极大团、随机几何图、真实世界网络

1 引言

1.1 背景

在图中检测所有极大团，是分析各个领域真实世界网络的重要工具：社交网络、蛋白质相互作用网络和网页图，因为团对应着网络中有意义的组成部分 [22, 21, 3]。这不仅有许多直接应用，其算法和技术也用于其他与团相关的方法，例如团渗流 [19]和 k-团计数 [17]。这是因为只需枚举极大团，就能检测出所有团。

对于一般的图输入，极大团的数量 $\mathcal{M}$ 最多可达 $3^{|V|/3}$ [20]。因此，枚举所有极大团是 NP难的。然而，许多研究表明，在真实世界网络中， $\mathcal{M}$ 远小于这一数量。因此，即使对于含有数百万个顶点的网络 [8]，多项式延迟算法的运行时间上界为$poly(|V|)\cdot\mathcal{M}$，也能在实际可行的时间内枚举所有极大团。此外，经典的 Bron-Kerbosch算法 [5] （加上图定向 [7]）在许多情况下都很高效 [9], ，尽管其最坏情况下的运行时间为 $O^*(3^{|V|/3})$，且不受 $\mathcal{M}$限制。由此，我们提出一个问题：**为什么真实世界网络中的极大团数量很少?**

在真实世界网络的研究中，人们会考察自然存在于各个领域的网络。从图结构来看，不同领域的网络似乎截然不同。然而，众所周知，它们具有一些共同特性。例如，它们具有

幂律度分布：顶点度为 k 的节点数量与 $k^{-\gamma}$成正比。在许多情况下， γ 介于 2 和 3 之间，这类网络称为无标度网络。此外，它们具有三元闭包性质，即如果两个顶点有共同邻居，那么它们很可能彼此相连。这一性质通常用一种称为聚类系数的指标来描述，而真实世界图通常具有较高的聚类系数。其他常见特性还包括树状结构、小直径和较小的团数。

真实世界网络中，组合性质研究最为深入的模型之一是双曲随机图[18]。该图通过在具有负曲率的二维空间中按照特定分布独立放置顶点，并连接距离不超过某一阈值的两个顶点而生成。因此，它被归类为随机几何图。已知双曲平面会自然地产生幂律度分布 [18]。此外，双曲随机图以高概率具有较高的聚类系数 [14], ，这使其有别于其他幂律模型，例如 Barab´asi-Albert[2] 和 Chung-Lu随机图。该模型中研究的参数包括： k-团的数量、团数 [12], 、树宽 [4], 、模块度 [6], 和直径 [13]。

1.2 我们的主要结果与贡献

本文研究双曲随机图中极大团的数量。我们还研究二维欧几里得随机几何图中的极大团数量；这类图是双曲随机图的欧几里得对应图。欧几里得随机几何图也被认为能够很好地表示某些类型的真实世界图 [15, 16], ，尽管它们不具有幂律度分布。我们的研究结果如下：

定理 1.1（主要结果 1）设 $r < 1$ 为常数。设 $\mathcal{M}$ 为连接距离为 r 的二维欧几里得随机几何图中的极大团数量。存在正常数 C_1 和 C_2，使得对所有 $\epsilon > 0$,

$$\Pr[\exp(C_1|V|^{1/3}) \leq \mathcal{M} \leq \exp(C_2|V|^{1/3+\epsilon})] \to 1$$

当 $|V| \to \infty$ 时。

定理 1.2（主要结果 2）设 $\gamma \in (2,3)$。设 $\mathcal{M}$ 为幂律度指数为 γ 的双曲随机图中的极大团数量。存在正常数 C_1 和 C_2，使得对所有$\epsilon > 0$,

$$\Pr[\exp(C_1|V|^{(3-\gamma)/6}) \leq \mathcal{M} \leq \exp(C_2|V|^{(3-\gamma)/6+\epsilon})] \to 1$$

当 $|V| \to \infty$ 时。

对于双曲随机图，我们考虑 $\gamma \in$ （2，3）的情形。此时，这些图是无标度的，并且以高概率含有 $\exp(\Omega(|V|^{(3-\gamma)/2}))$ 个团 [12]。对于一般图，极大团的数量远少于此，我们得到的界也远小于此。

为了证明主定理，我们考虑所谓的八面体图 O_t。该图的定义如下。令 $tK_2 = (V, E)$，其中 $V = \{1, 2, ..., 2t\}$ 和 $E = \{(i, i + t) : 1 \leq i \leq t\}$。因此， tK_2 是一个具有 t 条两两不相交的边的图。八面体图 O_t 是tK_2的补图。我们有以下来自先前研究的定理。

定理 1.3（Forklore）如果该图将 O_t 作为顶点诱导子图，那么极大团的数量至少为 2^t。

定理 1.4（M. Farber、M. Hujter 和 Z. Tuza [10]）若 $|V| \geq 4t$ 且不存在作为顶点诱导子图的 O_{t+1}，则极大团的数量上界为 $(|V|/t)^{2t}$。

令 $\tau(G)$ 为满足以下条件的最大 t：图 G 以 O_t 作为其顶点诱导子图。根据这些定理，剩下的只需对 τ 给出界。若 τ 是常数，则极大团的数量为多项式级。不幸的是，这对这两种随机几何图并不成立。不过，我们对 τ 给出的界远小于显然的 $O(|V|)$ 界。

直观来说，τ很小，因为任意一对不相连的顶点都有 $2t-2$ 个共同邻居，这与三元闭包性质相悖；也就是说，拥有共同邻居的两个顶点很可能彼此相连。随着 t 增大，这种违背会变得更加严重。我们可以在欧几里得和双曲随机几何图上对这一解释进行数学论证。尽管两种随机图中的距离定义不同，而且平行公设在双曲平面上并不成立，但针对它们的论证基本相同。

我们的贡献简要总结如下。首先，据我们所知，这是首项研究随机几何图中极大团数量的工作。我们阐明了 O_t 的重要性，并发展出几何和概率技术来确定其大小。这些技术适用于欧几里得平面和双曲平面。其次，我们发现了另一项关于 c-闭图的结果 [11]，进一步说明三元闭包性质在极大团中发挥着重要作用。最后，我们给出了真实世界图数据集中 τ 的上界。结果表明，即使在拥有数十万个顶点的网络中，τ 通常也至多为 5–20（见本文末尾的表1）。 $\mathcal{M}$ 的上界由 τ 给出，但仍远低于实际值。不过，实践中 τ 竟然如此之小，仍令人惊讶。

1.3 证明概要

这里我们解释如何界定 τ。对于下界，我们构造一些区域，使得位于这些区域上的顶点能够形成 O_t。这里我们采用一种称为泊松化的技术，该技术由 [23]引入。

为了推导上界，我们定义一组线段 $\mathcal{S} := \{vw : v,\ w \in V(G), \overline{v}$ 与 w 之间的距离大于连接距离$\}$。由于 $\mathcal{S}$ 有些类似于图的补图，与 O_t 同构的顶点诱导子图对应于 t 条两两不相交的线段（本文称之为“独立”线段）。我们很快发现，任意两条独立线段必定相交。因此，我们可以定义它们之间的“角”。根据鸽巢原理，如果 t 足够大，那么就存在一组基数可观的线段，其“角”很小（引理 2.10 和引理 3.14）。我们还证明，若两条相交线段之间的“角”很小，则其几何形状受到很大限制。固定一条线段后，其他线段的端点只能位于一些小区域内（推论 2.8 和推论 3.12）。结合这两个事实，我们可以推出 t 不可能太大，因为以高概率而言，这些小区域内的顶点数量不会太多。

与欧几里得随机几何图不同，双曲随机图中的顶点按非均匀分布放置。为此，我们根据线段端点周围的密度对线段进行分类。对于稠密区域中的线段，我们采取的处理方式与稀疏区域中的线段略有不同。不过，证明的整体策略与欧几里得随机几何图相同。

1.4 论文结构

在第2节中，我们定义欧几里得随机几何图并证明主定理。在第3.1–3.3节中，我们定义双曲随机图，并讨论如何将欧几里得平面上随机几何图的证明推广到双曲平面。对于上界，我们证明了主定理的较弱版本。在第3.4节中，我们讨论如何处理双曲随机图的非均匀性，并证明主定理的完整版本。最后，第4节为结论。

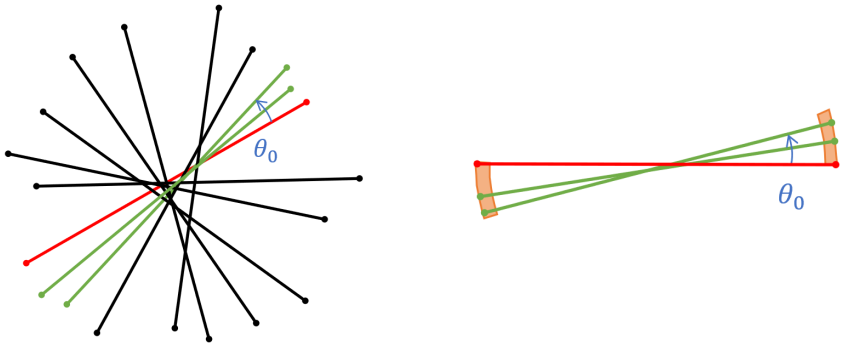


图 1：证明概要的示意图。左图展示了 t 独立线段，对应于 O_t 以及引理 2.10 和引理 3.14 的结论。右图展示了推论 2.8 和推论 3.12。

2 欧几里得随机几何图

2.1 定义

令 $n \in \mathbb{N}^+$，以及 $r \in (0, 1)$。一个二维欧几里得随机几何图 $G_{n,r}$ 由此得到 as 如下:

- 顶点集为 $V = \{1, 2, ..., n\}$。
- 顶点在 $[0,1]^2$ 上按照概率密度函数 $f(x, y) = 1$ 独立同分布。
- 边集 E 定义为 $\{(u, v) : dist(u, v) \leq r\}$

这里，$dist(u, v) = \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2}$ 其中 (u_x, u_y) 和 (v_x, v_y) 分别是 u 和 v 的 xy 坐标。从这里开始，我们通常将顶点与其位置视为一体。

给定 $[0,1]^2$ 上的一个区域 U（可在其中进行积分），定义 $F(U) := \int_U f(x, y)dxdy$。$F(U)$ 等于一个顶点位于 U 上的概率。注意，我们可以假设没有三个顶点位于同一条直线上，因为这种情况发生的概率为 0。这可以避免一些边界情况的论证。

2.1.1 泊松化

这在 [23]中介绍。设 N_n 为均值为 n的泊松随机变量。考虑 $G_{N_n, r}$ 其中顶点数量按照泊松分布 N_n选取。此时，在这样的随机图中，区域 U上的顶点数量服从均值为 $nF(U)$ 的泊松分布。特别地，U 上没有顶点的概率为 $e^{-nF(U)}$。此外，对于不相交区域 U_1 和 U_2，各区域上的顶点数量分别服从均值为 $nF(U_1)$ 和 $nF(U_2)$ 的独立泊松分布。因此，在泊松化随机几何图中，处理多个不相交区域的论证更为简单。设 A 是图的某种性质。那么

$$\begin{aligned}\Pr[G_{N_n,r} \text{ has } A] &\geq \Pr[G_{N_n,r} \text{ has } A | N_n = n] \cdot \Pr[N_n = n] \\ &= \Pr[G_{n,r} \text{ has } A] \cdot \frac{e^{-n} n^n}{n!}\end{aligned}$$

这里，$e^{-n}n^n/n!$ 根据斯特林近似，$=\Theta(n^{-1/2})$。因此，我们得到

$$\Pr[G_{n,r} \text{ has } A] \leq \Theta(n^{1/2}) \cdot \Pr[G_{N_n,r} \text{ has } A] \tag{2.1}$$

尽管我们的结果针对的是正态随机几何图 $G_{n,\ r}$，但我们使用这一技术推导极大团数量的下界。

2.2 极大团数量的下界

设 $k \geq 4$ 为一个整数。令 $o' = (1/2,\ 1/2)$。考虑采用以 o'为原点的极坐标系。令 $\theta_0 := \pi/(3k)$。对于 $1 \leq i \leq 2k$，定义 $U_i := \{(r',\ \phi)$: $r_1 \leq r' \leq r_2,\ 3(i-1)\theta_0 \leq \phi \leq (3(i-1)\ +1)\theta_0\}$其中 r_1: $= r/\sqrt{2+2\cos(\theta_0/2)}$，且 $r_2 := r/\sqrt{2+2\cos(2\theta_0)}$。经过一些计算，我们可以确认如下结论。

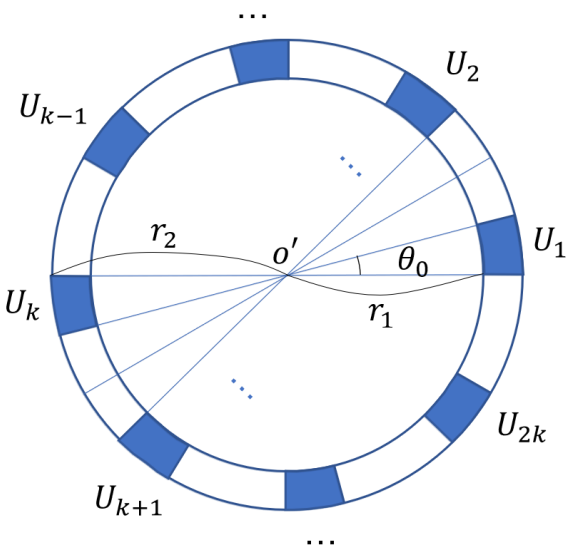


图 2：下界构造中 r_1、r_2、θ_0 和 U_i 的定义

命题 2.1 设 $1 \leq i \leq k$ 和 $1 \leq j \leq 2k$。对于位于 U_i 上的顶点 v，以及位于 U_j 上的顶点 w，

$$dist(v,w) > r \ (j = i+k)$$
$$dist(v,w) \leq r \ (j \neq i+k)$$

Proof: 设 r_v 和 r_w 分别为 v 和 w 的径向坐标。若 $j = i+k$，则

$$\begin{aligned}\{dist(v,w)\}^2 &= r_v^2 + r_w^2 - 2r_v r_w \cos\angle wo'v \\ &\geq r_v^2 + r_w^2 - 2r_v r_w \cos(\pi - \theta_0) \\ &\geq 2r_1^2 + 2r_1^2 \cos\theta_0 \\ &> r^2\end{aligned}$$

否则，$\{dist(v,\ w)\}^2 \leq 2r_2^2 + 2r_2^2$ 余弦 $2\theta_0 \leq r^2$ □

对于 $1 \leq i \leq k$，令 t_i 为 0-1 随机变量，当且仅当 U_i 和 U_{i+k} 各自至少包含一个顶点时，取值为 1。令 $t = \sum_{i=1}^{k} t_i$。那么，存在作为顶点诱导子图的 O_t。接下来只需给出 t 的下界。

命题 2.2 $F(U_1) = \Omega(\theta_0^3)$ 当 $\theta_0 \to 0$

Proof:

$$\begin{aligned} F(U_1) &= \frac{1}{2}\left(r_2^2\theta_0 - r_1^2\theta_0\right) \\ &= \frac{r^2\theta_0}{4}\left(\frac{1}{1+\cos(2\theta_0)} - \frac{1}{1+\cos(\theta_0/2)}\right) \\ &= \frac{r^2\theta_0}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\theta_0^2}{2} + O(\theta_0^4) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\theta_0^2}{32} + O(\theta_0^4)\right)\right) \\ &= \frac{15}{128}r^2\theta_0^3 + O(\theta_0^5) \\ &= \Omega(\theta_0^3) \end{aligned}$$

第三行中，我们使用了泰勒展开。□

命题 2.3 如果 $k = n^{1/3}$，那么存在一个正的常数 C，使得$\Pr[t \le Cn^{1/3}] \to 0$ 当$n \to \infty$

Proof: 考虑泊松化$G_{N_n,\ r}$。对于每个 i，U_i 上的顶点数服从均值为 $nF(U_1)$的独立同分布泊松分布。因此，t_1，...,t_k是独立同分布的随机变量。令 $p := 1 - e^{-nF(U_1)}$。这等于 U_i 上至少有一个顶点的概率。根据命题 2.2，$p = \Omega(1)$。此外，我们有 $\mathbb{E}[t] = kp^2 = \Omega(n^{1/3})$。由于 t_1，...,t_n相互独立，我们可以应用切尔诺夫界，得到 $\Pr[t \le kp^2/2] \le \exp(-\Omega(n^{1/3}))$。现在回到标准模型$G_{n,\ r}$。利用（2.1），可得 $\Pr[t \le kp^2/2] \le \Omega(n^{1/2}) \cdot \exp(-\Omega(n^{1/3}))$。当 $n \to \infty$时，该式趋于 0。□

结合该命题与定理 1.3，我们得到关于 $\mathcal{M}(G_{n,\ r})$ 的主定理。

推论 2.4 存在一个正常数 C，使得 $\Pr[\exp(Cn^{1/3}) \le \mathcal{M}(G_{n,\ r})] \to 1$ 当 $n \to \infty$ 时成立。

2.3 极大团数量的上界

设 $\overline{vw}$ 表示欧几里得平面上顶点 v 和 w 之间的线段。设 $\mathcal{S} := \{vw : v, w \in V(G)\ dist(v, w) > r\}$。注意，$\mathcal{S}$类似于随机图的补图。若 v_1w_1、v_1w_2、v_2w_1和 v_2w_2 均不属于 $\mathcal{S}$，则称 $\mathcal{S}$ 中的两条线段 v_1v_2 和 w_1w_2 是独立的。若$\mathcal{S}$ 中有两条或更多线段，且其中任意一对线段都相互独立，则称这些线段为独立线段。根据定义，显然下述命题成立。

命题 2.5 不存在作为顶点诱导子图的 O_{t+1} $\Leftrightarrow$ 不存在一个基数为 $t+1$ 的独立线段集合 $S \subseteq \mathcal{S}$。

因此，我们只需对 t 在 $G_{n,\ r}$ 上进行界定。通过初等几何，我们可以确认以下 g.

命题 2.6 在欧几里得平面上，两条独立线段相交。

证明留待下一节给出。得益于该命题，我们可以定义两条独立线段之间的角。

设 $s := \overline{v_1v_2}$ 和 $s' := \overline{w_1w_2}$ 是独立线段。假设四个端点的逆时针顺序为 $v_1w_1w_2v_2$。令 q 为两条线段的交点。定义有向角 $\angle(s,\ s') := \angle w_1qv_1$。为方便起见，定义 $\angle(s,\ s) := 0$。有 $\angle(s,\ s') = \pi - \angle(s',\ s)$。因此，两条线段的顺序很重要。

接下来，我们考虑已知两条独立线段之间的角度时所满足的条件。同样，$s = v_1v_2$，$s' = w_1w_2 \in \mathcal{S}$ 是独立线段。假设 $v_1w_1v_2w_2$ 是四个端点的逆时针顺序。令 m 为 s 的中点。考虑以 m 为原点、$\overrightarrow{mv_1}$ 为极轴的极坐标系。令 (r_0, ϕ) 为 w_1 的极坐标。注意，$r_0 = dist(m, w_1)$ 和 $\phi = \angle w_1mv_1$ （参见图 3）。下一个命题指出，如果有向角 $\angle(s, s')$ 很小，那么 r_0 有紧致的界。

命题 2.7 设 $0 \le \theta_0 \le \pi/3$。若 $\angle(s, s') \le \theta_0$，则 $r_1 \le r_0 \le r_2$，其中

$$r_1 := (-1/2 + \cos\theta_0)\sqrt{\cos\theta_0} \cdot r$$
$$r_2 := (3/2 - \cos\theta_0)r$$

PROOF: 设 $\theta := \angle(s, s')$。设 q 为 s 与 s' 的交点。设 $a := dist(v_1, v_2)$ $b := dist(w_1, w_2)$ $c = dist(v_1, q)$ $d = dist(w_1, q)$。注意，a 是 s 的长度，且 $a > r$ 成立。b也同理。根据线段的独立性的定义，

$$dist(v_1, w_2) \le r \Rightarrow c^2 + (b-d)^2 - 2c(b-d)\cos(\pi - \theta) \le r^2$$
$$dist(v_2, w_1) \le r \Rightarrow (a-c)^2 + d^2 - 2(a-c)d\cos(\pi - \theta) \le r^2$$

必须成立。由第一个不等式可得

$$\begin{aligned}
&c^2 + (b-d)^2 - 2c(b-d)\cos(\pi - \theta) \le r^2 \\
&\Leftrightarrow (c + (b-d)\cos(\theta))^2 + ((b-d)\sin(\theta))^2 \le r^2 \\
&\Rightarrow c + (b-d)\cos(\theta) \le r \\
&\Rightarrow c - d \le r - b\cos(\theta)
\end{aligned}$$

用同样的方法，第二个不等式给出 $-(r - a\cos(\theta)) \le c - d$。无论 v_1, m, q, v_2 在 s 上如何排列，我们都有 $r_0^2 = (a/2 - c)^2 + d^2 + 2(a/2 - c)d\cos(\theta)$。我们可以如下给出 r_0 的上界和下界。

$$\begin{aligned}
r_0^2 &= (a/2-c)^2 + d^2 + 2(a/2-c)d\cos(\theta) \\
&\le (a/2 - c + d)^2 \\
&\le (a/2 + r - a\cos(\theta))^2 \\
&\le r^2(3/2 - \cos(\theta_0))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_0^2 &= (a/2-c)^2 + d^2 + 2(a/2-c)d\cos(\theta) \\
&\ge (a/2 - c + d)^2\cos(\theta) \\
&\ge (a/2 - r + b\cos(\theta))^2\cos(\theta) \\
&\ge r^2(-1/2 + \cos(\theta_0))^2\cos(\theta_0)
\end{aligned}$$

□

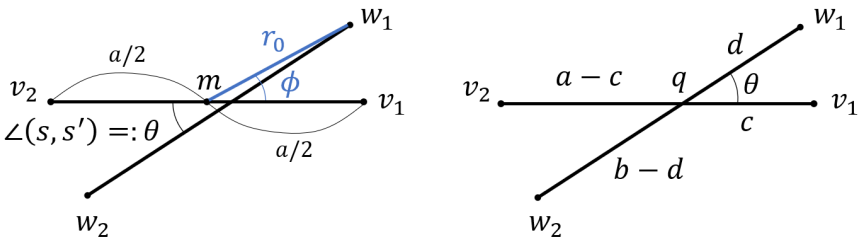


图 3：命题 2.7 中两条独立线段的点、长度和角的定义

如果 v_1, q, m, v_2 按此顺序排列，我们可以将 ϕ 界定为 $0 \le \phi \le \theta \le \theta_0$。同理，考虑另一种情况（$v_1, m, q, v_2$ 按此顺序排列），可得如下结果。

推论 2.8 设 $0 \le \theta_0 \le \pi/3$。若 $\angle(s, s') \le \theta_0$，则 w_1 或 w_2 必须位于区域 U_1 或区域 U_2 上，其中

$$U_1 := \{(r_0, \phi) : r_1 \le r_0 \le r_2, 0 \le \phi \le \theta_0\}$$
$$U_2 := \{(r_0, \phi) : r_1 \le r_0 \le r_2, \pi \le \phi \le \pi + \theta_0\}$$

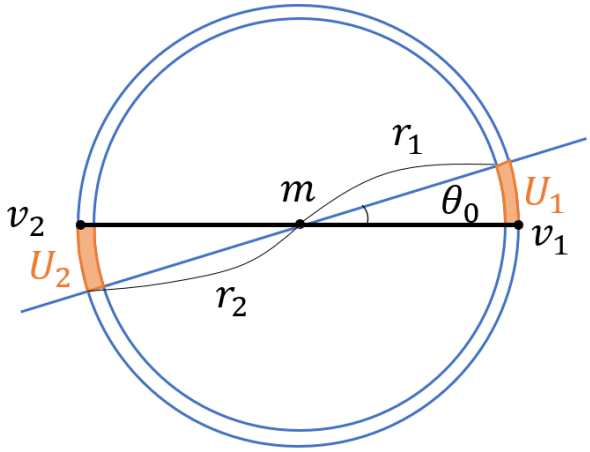


图 4：推论 2.8 中的 U_1 和 U_2

接下来得到如下引理：如果有向角足够小，那么独立线段的期望数量也很小。

引理 2.9 设 $s \in \mathcal{S}$ 是一条线段。对于常数 $0 \le \theta_0 \le \pi/3$，令 X 表示线段 s' 的数量，其中 s 和 s' 相互独立，且 $\angle(s, s') \le \theta_0$。那么，当 $\theta_0 \to 0$ 时，$\mathbb{E}[X] = nO(\theta_0^3)$。

Proof: 根据推论 2.8，X 至多为 U 中的顶点数：$= U_1 \cup U_2$。因此，$\mathbb{E}[X] \le$

$nF(U)$。接下来只需证明 $F(U_1) = F(U_2) = O(\theta_0^3)$，因为 $\theta_0 \to 0$，并且

$$\begin{aligned} F(U_1) &\le \frac{1}{2}r_2^2\theta_0 - \frac{1}{2}r_1^2\theta_0 \\ &= \frac{1}{2}r^2\theta_0\left((3/2-\cos(\theta_0))^2 - (-1/2+\cos(\theta_0))^2\cos(\theta_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}r^2\theta_0\left((2-2\cos\theta_0) + (-1/2+\cos\theta_0)^2(1-\cos\theta_0)\right) \\ &= \frac{9}{16}r^2\theta_0^3 + O(\theta_0^5) \end{aligned}$$

为推导出第四行，我们使用泰勒展开。□

为了充分利用引理 2.9，我们证明另一个引理：该引理指出，如果存在足够大的 O_t，我们总能取出一组线段，使其规模不可忽略，且它们之间的有向角很小。

引理 2.10 设 k 为正整数。若存在一组由 t 条独立线段构成的集合 $S \subseteq \mathcal{S}$，则存在一条线段 s' 和一组独立线段 $S' \subseteq \mathcal{S}$，使得

$$\begin{cases} |S'| \ge \lceil t/k \rceil \\ s' \in S' \\ \forall s'' \in S'.\angle(s', s'') \le \pi/k \end{cases} \tag{2.2}$$

Proof: 设 $s_0 = \overline{v_1v_2}$为 S中的一条线段。对于整数 $1 \le i \le k$，定义 $S_i := \left\{s \in S : \frac{i-1}{k}\pi \le \angle(s_0, s) < \frac{i}{k}\pi\right\}$。由于$\bigcup_{1\le i\le k} S_i = S$，我们有 $\sum_{i=1}^{k}|S_i| = t$。根据鸽巢原理，存在一个指标 i，使得 $|S_i| \ge \lceil t/k \rceil$。考虑在 S_i中取线段 s'，使得$\angle(s_0, s') = \min_{s''\in S_i}\angle(s_0, s'')$。若能证明 $\angle(s', s'') \le \angle(s'', s_0) - \angle(s', s_0)$，则结论成立。令 a为 s_0 与 s'的交点，b为 s_0 与 s''的交点，c为 s' 与 s''的交点。若 $a = b$，则显然成立。还有另外两种情况：v_1、b、a、v_2按此顺序排列在 s_0上；以及 v_1、a、b、v_2按此顺序排列在 s_0上。对于前一种情况，$\angle a = \angle(s_0, s')$、$\angle b = \pi - \angle(s_0, s'')$和 $\angle c = \angle(s', s'')$，其中 $\angle a$、$\angle b$、$\angle c$ 是 $\triangle abc$的内角。因此，

$$\begin{aligned} &\angle a + \angle b + \angle c = \pi \\ \Leftrightarrow\ &\angle(s', s'') = \pi - (\angle(s_0, s')) - (\pi - \angle(s_0, s'')) = \angle(s_0, s'') - \angle(s_0, s') \end{aligned} \tag{2.3}$$

这里，(2.3) 是由三角形的内角和等于 π 这一事实得出的。后一种情况也可以用类似的方法证明。
□

最后，我们结合这两个引理，给出 τ 的上界。之后，我们应用定理 1.4，得到极大团数量的上界。

定理 2.11 设 ϵ 是一个正的常数。设 $t = n^{1/3+\epsilon}$。那么，

$$\Pr[G_{n,r} \text{ has } O_t \text{ as its vertex-induced subgraph}] \to 0$$

当 $n \to \infty$ 时。

Proof: 令 $k := n^{1/3}$ 且 $\theta_0 := \pi/k$。假设$G_{n,r}$ 以 O_t 为其顶点诱导子图。对 t 和 k应用引理 2.10。于是存在一条线段 s' 和一组独立线段 S'，使得 (2.2) 成立。我们声称，对于某条特定的线段 s'，存在一组独立线段 S' 使得 (2.2) 成立的概率至多为 $\exp(-\Omega(n^\epsilon))$。根据引理 2.9，满足 (2.2) 第三个条件的线段数量至多为 U上的顶点数量，而其期望数量有界于 $O(n\theta_0^3) = O(1)$。然而，要满足 (2.2)，S' 的基数必须至少为 n^ϵ。

这意味着 U 上的顶点数量也必须至少为 n^{ϵ}。由于这些顶点是独立放置的，我们可以应用切尔诺夫界，得到概率上界 $\exp(-\Omega(n^{\epsilon}))$。

最后，我们对所有线段应用并集界，其数量至多为 $n(n-1)/2$。我们有

$$\Pr[G_{n,r} \text{ has } O_t \text{ as its vertex-induced subgraph}] \leq \frac{n(n-1)}{2} \exp(-\Omega(n^{\epsilon}))$$

当 $n \to \infty$ 时，这趋于 0。□

推论 2.12 存在一个正的常数 C，使得对所有 $\epsilon > 0$，概率 $[\mathcal{M}(G_{n,r}) \leq \exp(Cn^{1/3+\epsilon})] \to 1$ 当 $n \to \infty$ 时

3 双曲随机图

3.1 定义

给定 $n \in \mathbb{N}^+$、$\gamma \in (2, \infty)$ 和 $C \in \mathbb{R}$，令 $R := 2\log n + C$，且 $\alpha = (\gamma - 1)/2$。双曲随机图 $G_{n,\gamma,C}$ 按如下方式构造：

- 顶点集为 $V = \{1, 2, ..., n\}$。
- 顶点在双曲平面上独立同分布。用极坐标表示的概率密度函数为：

$$f(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\alpha \sinh(\alpha r)}{\cosh(\alpha R) - 1} & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

- 边集 E 由 $\{(u, v) : dist(u, v) \leq R\}$ 给出

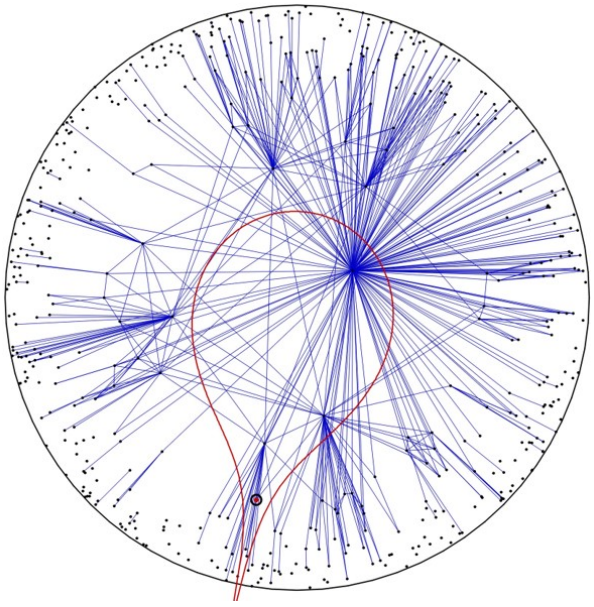


图 5：双曲随机图（$n = 500$, $\gamma = 2.1$）

在我们的研究中，我们关注这样的情形： $2 < \gamma < 3$ $(1/2 < \alpha < 1)$，此时生成的图以高概率为“无标度”图。设 (r_u, ϕ_u) 和 (r_v, ϕ_v) 分别是 u 和 v 的极坐标。令 $\theta := \pi - |\pi - |\phi_u - \phi_v||$。那么，双曲余弦定理表明

$$\cosh(dist(u,v)) = \cosh r_u \cosh r_v - \sinh r_u \sinh r_v \cos\theta$$

再次，定义 $F(U) := \int_U f(r, \theta) dr d\theta$。在双曲平面上， U的面积等于 $\int \sinh r dr d\theta =: \mu(U)$。令 $\rho(r, \theta) := \frac{dF}{d\mu} = f_{(r,\theta)} \sinh r$。由于 $\rho(r, \theta)$ 的值不依赖于 θ，我们有时将其记为 $\rho(r)$。直观地说， ρ 是一个顶点位于 (r, θ) 周围的单个单位正方形内的概率。对 ρ 求导，可以确认它关于 r 单调递减。因此，图在平面原点附近较为稠密。

令 o 为平面的原点。我们将 $B_0(d)$ 定义为满足 $dist(p, o) < d$ 的点集 p。换言之， $B_0(d) := \{(r, \phi) : r < d\}$。

3.2 极大团数量的下界

为了得到 $\mathcal{M}(G_{n,r,C})$ 的下界，我们采用与欧几里得随机几何图相同的方法，即选取一些区域，使得这些区域上的顶点构成 O_t。

令 $k \geq 4$ 为一个整数。令 $\theta_0 := \pi/(3k)$。对于 $1 \leq i \leq 2k$，定义 $U_i := \{(r, \phi) : r_1 \leq r \leq r_2, 3(i-1)\theta_0 \leq \phi \leq (3(i-1)+1)\theta_0\}$，其中 r_1 和 r_2 由下式确定：

$$\cosh(2r_1) = \frac{\cosh(R)}{\cos^2(\theta_0/2)}$$
$$\cosh(2r_2) = \frac{\cosh(R)-1}{\cos^2(\theta_0)}$$

现在假设 $r_1 < r_2 \leq R$。稍后我们将确认，在适当的 θ_0 和 n条件下，这一假设成立。

命题 3.1 设 $1 \leq i \leq k$ 和 $1 \leq j \leq 2k$。对于位于 U_i 上的顶点 v 以及位于 U_j上的顶点 w，

$$dist(v,w) > R \ (j = i+k)$$
$$dist(v,w) \leq R \ (j \neq i+k)$$

Proof: 设 r_v 和 r_w 分别为 v 和 w的径向坐标。若 $j = i+k$，则

$$\begin{aligned}
\cosh(dist(v,w)) &= \cosh r_v \cosh r_w - \sinh r_v \sinh r_w \cos\angle wov \\
&\geq \cosh r_v \cosh r_w - \sinh r_v \sinh r_w \cos(\pi - \theta_0) \\
&\geq \cosh^2 r_1 + \sinh^2 r_1 \cos\theta_0 \\
&\geq \cos^2(\theta_0/2)\cosh(2r_1) + \sin^2(\theta_0/2) \\
&> \cosh(R)
\end{aligned}$$

否则，

$$\begin{aligned}
\cosh(dist(v,w)) &\leq \cos^2(\theta_0)\cosh(2r_2) + \sin^2(\theta_0) \\
&\leq \cosh(R) - 1 + \sin^2(\theta_0) \leq \cosh(R)
\end{aligned}$$

□

对于 $1 \leq i \leq k$，令 t_i 为 0-1 随机变量，当且仅当 U_i 和 U_{i+k} 上各自至少有一个顶点时，其值为 1。令 $t = \sum_{i=1}^{k} X_i$。那么，存在一个顶点诱导子图 O_t。同样，我们需要为 t给出下界。

命题 3.2 如果 $\theta_0 > 1/\sqrt{n}$，那么 $F(U_1) = \Omega(n^{-\alpha}\theta_0^3)$ 当 $n \to \infty$ 且 $\theta_0 \to 0$ 时

PROOF: 我们首先断言 $r_2 =$ 对数 $n + \Theta(1)$。只需证明双曲余弦$(2r_2) = \Theta(n^2)$，这可由 $R = 2$ 对数 $n + \Theta(1)$ 且 $\cos(\theta_0) > \frac{1}{2}$ 得出。用同样的论证，我们有 $r_1 =$ 对数 $n + \Theta(1)$。那么，$F(U_1)$ 可按如下方式计算。

$$\begin{aligned}
F(U_1) &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} f(r,\theta) dr d\theta \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} \rho(r,\theta) \sinh(r) dr d\theta \\
&\geq \rho(r_2) \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\theta_0} \sinh(r) dr \\
&= \frac{\theta_0}{2\pi} \frac{\alpha}{\cosh(\alpha R) - 1} \frac{\sinh(\alpha r_2)}{\sinh(r_2)} (\cosh(r_2) - \cosh(r_1)) \\
&= \Theta(\theta_0 n^{-1-\alpha})(\cosh(r_2) - \cosh(r_1))
\end{aligned}$$

在第三行中，我们利用了 $\rho(r)$ 是单调递减函数这一事实。这里，

$$\begin{aligned}
&\cosh(r_2) - \cosh(r_1) \\
&= \frac{1}{\cosh(r_2) + \cosh(r_1)} (\cosh^2(r_2) - \cosh^2(r_1)) \\
&= \Theta(n^{-1})(\cosh(2r_2) - \cosh(2r_1)) \\
&= \Theta(n^{-1}) \cosh(R) \left(\frac{1}{\cos^2(\theta_0)} - \frac{1}{\cos^2(\theta_0/2)} + \frac{1}{\cosh(R)\cos^2(\theta_0/2)} \right) \\
&= \Theta(n) \left(\frac{3}{4}\theta_0^2 + O(\theta_0^4) + \Theta(n^{-2}) \right) \\
&= \Theta(n\theta_0^2)
\end{aligned}$$

最后一个等式成立，因为 $\theta_0^2 > n^{-1} \gg n^{-2}$。□

作为命题 3.2 的一个推论，我们得到满足 $r_1 < r_2 \leq R$ 的条件。

推论 3.3 若 $\theta_0 > 1/\sqrt{n}$，则当 n 充分大且 θ_0 充分小时，$r_1 < r_2 \leq R$。

PROOF: 回顾一下，$r_2 =$ 对数 $n + \Theta(1)$，且 $R = 2$ 对数 $n + \Theta(1)$。因此，当 n 充分大时，我们有 $r_2 \leq R$。此外，回顾一下，当 $n \to \infty$ 和 $\theta_0 \to 0$ 时，双曲余弦(r_2) – 双曲余弦$(r_1) = \Theta(n\theta_0^2) > 0$，从而证明了当 n 充分大且 θ_0 充分小时，$r_1 < r_2$。□

命题 3.4 若 $k = n^{(1-\alpha)/3}$，则存在一个正常数 C，使得 $\Pr[t \leq Cn^{(1-\alpha)/3}] \to 0$，当 $n \to \infty$

PROOF: 与命题 2.3 中一样，考虑泊松化 $G_{N_n,\ \gamma,\ C}$。证明过程相同。我们只需确认，对于充分大的 n，$\theta_0 = \pi/(3n^{(1-\alpha)/3}) > 1/\sqrt{n}$，且 $nF(U_1) = \Omega(1)$。□

再次结合该命题与定理 1.3，我们得到关于$\mathcal{M}(G_{n,\ \gamma,\ C})$ 的主定理。

推论 3.5 存在一个正常数 C'，使得 $\Pr[\exp(C'n^{(1-\alpha)/3}) \leq \mathcal{M}(G_{n,\gamma,C})] \to 1$ 当$n \to \infty$时。

3.3 极大团数量的上界

为求 $\mathcal{M}(G_{n,\gamma,C})$ 的上界，我们证明引理 2.9 和引理 2.10 的双曲版本。与之前一样，我们先定义线段。令 vw 表示双曲平面上顶点 v 和 w 之间的线段（即最短测地线）。令 $\mathcal{S} := \{vw : v, w \in G(V)\ dist(v,w) > R\}$。我们按照欧几里得情形中的相同方式定义线段的独立性。首先，我们确认两条独立线段相交。为此，我们使用来自 [12] 的以下引理。

引理 *3.6*（[**12**]）设 a 和 b 是双曲平面上的点，其中 $dist(a, b) = R$。设 l 为一条经过 a 和 b的直线。设 c 和 d 位于由 l确定的同一半平面上。假设 $dist(a, c) \leq R$，$dist(b, c) \leq R$，$dist(a, d) \leq R$，且 $dist(b, d) \leq R$。那么，$dist(c, d) \leq R$。

此外，我们还将用到以下非欧几里得几何的基本事实。

命题 3.7（欧几里得命题 I-13）如果一条直线与另一条直线相交而形成角，那么它将形成两个直角，或者这些角的和等于两个直角。

命题 3.8（欧几里得命题 I-19）在任意给定的三角形中，较大角所对的边较长。

命题 3.9（萨凯里–勒让德定理 [24]）三角形的三个内角之和小于或等于两个直角。

请注意，所有这些引理和命题都不依赖于平行公设。因此，它们在欧几里得平面和双曲平面上均成立。

命题 3.10 在双曲平面上，两条独立线段相交。

Proof: 设 $s := v_1v_2$ 和 $s' := w_1w_2$ 是两条独立线段。设 l 是一条经过 v_1 和 v_2的直线。我们声称，w_1 和 w_2 位于由 l划分出的不同半平面上。我们用反证法证明这一点。假设 w_1 和 w_2 位于同一个半平面上。在 s这条线段上取点 p 和 q，使得 $dist(v_1,p) = (a - R)/2$，$dist(p,q) = R$，且 $dist(q,v_2) = (a - R)/2$，其中 $a := dist(v_1,v_2)$。若能证明 $dist(p,w_1) \leq R$，那么由对称性也有 $dist(q,w_1) \leq R$，$dist(p,w_2) \leq R$，以及 $dist(q,w_2) \leq R$。根据引理 3.5，可得 $dist(w_1,w_2) \leq R$。然而，这与$s' \in \mathcal{S}$矛盾。

现在的目标是证明 $dist(p, w_1) \leq R.$。聚焦于 $\triangle v_1w_1v_2$。根据独立线段的定义，w_1v_2 比 v_1v_2 短。因此，根据命题 3.9，$\angle w_1v_1v_2 < \angle v_1w_1v_2$。我们有 $\angle w_1v_1v_2 < \pi/2$。否则，$\angle w_1v_1v_2 \geq \pi/2$ 和 $\angle v_1w_1v_2 > \pi/2$，这与命题 3.8 矛盾。用同样的论证可得，$\angle w_1pv_2 < \pi/2$。根据命题 3.7，$w_1pv_1 = \pi - \angle w_1pv_2 \geq \pi/2$。因此，在 $\triangle w_1pv_1$ 上，$\angle w_1pv_1 > \angle w_1v_1p$。同样，根据命题 3.8，$v_1w_1$ 的长度大于pw_1。回想一下，$dist(v_1, w_1) \leq R$。因此，我们可以得出结论：$dist(p, w_1) \leq R$。□

注意，命题 3.10 的证明并不依赖平行公设。因此，这个证明也适用于欧几里得平面，从而证明命题 2.6。

我们也可以定义双曲平面上线段间的角。同样，$s = v_1v_2$，$s' = w_1w_2 \in \mathcal{S}$为独立线段。设 $v_1w_1v_2w_2$ 是四个端点的逆时针顺序。令 q 为两条线段的交点。定义 $\angle(s, s') := \angle w_1qv_1$。令 m 为 s的中点。考虑采用一个以 m 为原点、以 mv_1为极轴的极坐标系。令 (r_0, ϕ) 为 w_1的极坐标。此外，定义 $a := dist(v_1, v_2)$ $b := dist(w_1, w_2)$ $c = dist(v_1, q)$ $d = dist(w_1, q)$。这些定义汇总于图 3。

引理 3.11 令 $\theta := \angle(s, s')$。对于所有 $0 < \theta < \pi$,

$$R < a, b \leq R + 2\Delta(\theta) \tag{3.1}$$

$$e^c, e^d \geq \frac{\sin\theta}{2}\frac{1}{1+e^{-2R}}e^{R/2} \tag{3.2}$$

$$\cosh(R/2 - \Delta(\theta))\frac{1+\cos(\theta)}{2} \leq \cosh(r_0) \leq \cosh(R/2 + 2\Delta(\theta)) \tag{3.3}$$

其中 $\Delta(\theta) :=$ 对数 $\left(2(1+e^{-2R})/(1+\cos(\theta))\right)$

Proof: 根据独立线段的定义， $dist(v_1, w_2)$、 $dist(v_2, w_1)$、 $dist(v_1, w_1)$ 和 $dist(v_2, w_2)$ 均小于或等于 R。因此,

$$\cosh(c)\cosh(b-d) + \sinh(c)\sinh(b-d)\cos(\theta) \leq \cosh(R) \tag{3.4}$$

$$\cosh(a-c)\cosh(d) + \sinh(a-c)\sinh(d)\cos(\theta) \leq \cosh(R) \tag{3.5}$$

$$\cosh(c)\cosh(d) - \sinh(c)\sinh(d)\cos(\theta) \leq \cosh(R) \tag{3.6}$$

$$\cosh(a-c)\cosh(b-d) - \sinh(a-c)\sinh(b-d)\cos(\theta) \leq \cosh(R) \tag{3.7}$$

由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}(3.4) \Leftrightarrow \cosh(b-d+c)\frac{1+\cos(\theta)}{2} + \cosh(b-d-c)\frac{1-\cos(\theta)}{2} &\leq \cosh(R)\\ \Rightarrow \frac{1+\cos(\theta)}{2}e^{b-d+c} &\leq e^R + e^{-R}\\ \Rightarrow b - d + c &\leq R + \Delta(\theta)\end{aligned} \tag{3.8}$$

对 (3.5) 进行同样的操作，可得

$$\begin{aligned}-(R-a) - \Delta(\theta) \leq c - d &\leq R - b + \Delta(\theta)\\ \Rightarrow -\Delta(\theta) \leq c - d &\leq \Delta(\theta)\end{aligned} \tag{3.9}$$

最后这些不等式成立是因为 $a, b > R$。将其代入 (3.9)，即可得到 (3.1)。由 (3.7) 可得

$$\begin{aligned}(4.6) \Leftrightarrow \cosh(a-c+b-d)\frac{1-\cos(\theta)}{2} + \cosh(a-c-b+d)\frac{1+\cos(\theta)}{2} &\leq \frac{e^R + e^{-R}}{2}\\ \Rightarrow \frac{1-\cos(\theta)}{2}e^{2R-c-d} &\leq e^R + e^{-R}\\ \Rightarrow \frac{1-\cos(\theta)}{2}\frac{e^R}{1+e^{-2R}} &\leq e^{c+d}\end{aligned}$$

将其与 (3.9) 相乘，可得

$$e^c, e^d \geq \frac{\sin\theta}{2}\frac{1}{1+e^{-2R}}e^{R/2}$$

对于 r_0,

$$\cosh(a/2-c)\cosh(d) + \sinh(a/2-c)\sinh(d)\cos(\theta) = \cosh(r)$$

请注意，无论 m 和 q 在 s 上如何排列，这一点都成立。我们有

$$\cosh(a/2-c+d)\frac{1+\cos(\theta)}{2} \leq \cosh(r) \leq \cosh(a/2-c+d)$$

最后，利用 (3.9) 推导出 (3.3)。□

推论 3.12 设 $\theta_0 \in (0, \pi)$。若 $\angle(s, s') \leq \theta_0$，则 w_1 或 w_2 必须位于 U_1 或 U_2 上，其中

$$U_1 := \{(r_0, \phi) : r_1 \leq r_0 \leq r_2, 0 \leq \phi \leq \theta_0\}$$
$$U_2 := \{(r_0, \phi) : r_1 \leq r_0 \leq r_2, \pi \leq \phi \leq \pi + \theta_0\}$$

这里，

$$r_1 := \cosh^{-1}\left(\cosh(R/2 - \Delta(\theta_0))\frac{1 + \cos(\theta_0)}{2}\right)$$
$$r_2 := R/2 + 2\Delta(\theta_0)$$

推论 3.13 设 s 为一条线段。设 $\theta_0 > 1/\sqrt{n}$。设 X 为线段的数量 s'，其与 s 和 $\angle(s, s') \leq \theta_0$相互独立，则

$$\mathbb{E}[X] = \sup_{(r,\theta)\in U}\{\rho(r, \theta)\}O(n^2\theta_0^3)$$

当 $n \to \infty$ 和 $\theta_0 \to 0$ 时。

Proof: 在此证明中，我们简记 $\Delta(\theta_0)$ 为 Δ。只需证明 $F(U_1) = \sup_{(r,\theta)\in U_1}\{\rho(r, \theta)\}O(n\theta_0^3)$。这里，

$$\begin{aligned}
F(U_1) &= \int_{U_1} f(r, \theta) dr d\theta \\
&= \int_{U_1} \rho(r, \theta) d\mu \\
&\leq \sup_{U_1} \rho(r, \theta) \int_{U_1} d\mu \\
&= 2\theta_0 \sup_{U_1} \rho(r, \theta)(\cosh(r_2) - \cosh(r_1)) \\
&= 2\theta_0 \sup_{U} \rho(r, \theta)(\cosh(R/2 + 2\Delta) - \cosh(R/2 - \Delta) \\
&+ \frac{1 - \cos(\theta_0)}{2}\cosh(R/2 - \Delta))
\end{aligned}$$

这里，我们可以给出上界

$$\begin{aligned}
&\cosh(R/2 + 2\Delta) - \cosh(R/2 - \Delta) \\
&= \frac{\cosh(R/2 + 2\Delta) - \cosh(R/2 - \Delta)}{3\Delta} \cdot 3\Delta \\
&\leq 3\sinh(R/2 + 2\Delta) \cdot \Delta \\
&\leq 3\sinh(R/2 + 2\Delta) \cdot \left(\frac{2(1 + e^{-2R})}{1 + \cos\theta_0} - 1\right) \\
&= O(n) \cdot \left(\frac{1 - \cos\theta_0 + 2e^{-2R}}{1 + \cos\theta_0}\right) \\
&= O(n) \cdot \left(O(\theta_0^2) + O(n^{-4})\right) = O(n\theta_0^2)
\end{aligned}$$

该不等式成立是因为双曲余弦(x)是凸函数。最后一个等式由假设$\theta_0^2 > n^{-1} \gg n^{-4}$得出。此外，

$$\frac{1 - \cos(\theta_0)}{2}\cosh(R/2 - \Delta) = O(\theta_0^2) \cdot O(n) = O(n\theta_0^2)$$

□

为了充分利用引理 3.13，我们证明引理 2.10 的双曲版本。其陈述完全相同。

引理 3.14 设 k 为一个正整数。如果存在一组由 $S \subseteq \mathcal{S}$构成的 t 条独立线段，那么存在一条线段 s' 和一组独立线段 $S' \subseteq \mathcal{S}$，使得

$$\begin{cases} |S'| \geq \lceil t/k \rceil \\ s' \in S' \\ \forall s'' \in S'. \angle(s', s'') \leq \pi/k \end{cases} \tag{3.10}$$

Proof: 引理 2.10 的证明同样适用于双曲平面，只有第 (2.3) 部分例外，因为在该部分中我们用到了三角形内角和等于 π 这一事实。我们可以用命题 3.8 替代这一事实。于是得到

$$\begin{aligned} &\angle a + \angle b + \angle c \leq \pi \\ \Leftrightarrow\ &\angle(s', s'') \leq \pi - (\angle(s_0, s')) - (\pi - \angle(s_0, s'')) = \angle(s_0, s'') - \angle(s_0, s') \end{aligned} \tag{3.11}$$

因此，我们可以证明相同的结论。□

由此不难证明主定理的一个有限版本。下一个命题指出，如果 O_t 的顶点不落在原点附近的区域内，我们就可以给出其大小的上界。

命题 3.15 设 $V' := \{v \in V(G_{n,\ \gamma,\ C}) :\ v$ 的径向坐标大于 $R/2\}$。设 $G'_{n,\ \gamma,\ C}$ 是由 V' 诱导的 $G_{n,\ \gamma,\ C}$ 的子图。设 $t = n^{(1-\alpha)/3+\epsilon}$，其中 ϵ 是任意正常数。则，

$$\Pr[G'_{n,\gamma,C} \textit{ has } O_t \textit{ as its vertex-induced subgraph}] \to 0$$

如 $n \to \infty$。

Proof: 我们在此不详细展开。不过，该陈述可以用与定理 2.11 相同的方法证明。最终我们断言，当 $\theta_0 := \pi/n^{(1-\alpha)/3}$ 时，$\rho(R/2) \cdot O(n^2\theta_0^3) = O(1)$。由于$\rho(R/2) = O(n^{-1-\alpha})$，结论得证。□

3.4 处理非均匀性

我们证明关于两个独立线段的其他事实。同样，我们将使用图 3 中对点、角和长度的定义。

推论 3.16 推论对于所有 $0 < \angle(s,\ s') < \pi$，$_{1\,2}$双曲余弦$(R/2 - \Delta(\pi/2)) \leq$双曲余弦$(r_0) \leq$双曲余弦$(R/2 + 2\Delta(\pi/2$ $))$.

Proof: 令 $\theta := \angle(s, s')$。由于对称性，引理 3.11 中的 (3.3) 对 $\pi - \theta$ 也成立。特别地，当 $\theta = \pi - \theta'$ 对某个 $0 < \theta' \leq \pi/2$ 成立时，我们有

$$\cosh(R/2 - \Delta(\theta'))\frac{1 + \cos(\theta')}{2} \leq \cosh(r_0) \leq \cosh(R/2 + 2\Delta(\theta'))$$

由于 $\cosh(R/2 - \Delta(\theta))\frac{1+\cosh(\theta)}{2}$ 和 $\cosh(R/2 + 2\Delta(\theta))$ 是 $0 < \theta \leq \pi/2$ 上的单调函数，因此我们可以得到 $\cosh(r_0)$ 的界。□

推论 3.17 当 n 足够大时，$_{1\,8}$双曲余弦$(R/2) <$双曲余弦(r_0) 且 $R/2 - 3$对数 $2 < r_0$。

Proof: 只需证明，当 n 足够大时，我们有 $_{18}$ 双曲余弦$(R/2)$ $<$ 双曲余弦$(R/2-3$对数 $2)$ $<\frac{1}{2}$ 双曲余弦$(R/2-\Delta(\pi/2))$。这里省略细节，因为这只是一个简单的计算任务。□

下面的命题说明， ϕ 可以用 θ 给出下界：$=\angle(s,\ s')$。

命题 3.18 若 $\theta>1/\sqrt{n}$，则当 $\overline{n}$充分大时，

$$\sin\phi\geq\frac{\sin^2\theta}{9}$$

Proof: 若 $\theta=\pi/2$，显然结论成立。否则，令 $\theta:=\angle(s,\ s')$。令 q 为 s 与s'的交点。令 $a:=dist(v_1,\ v_2)$ $b:=dist(w_1,\ w_2)$ $c=dist(v_1,\ q)$ $d=dist(w_1,\ q)$。根据双曲平面上的正弦定理，无论 m 和 q 在 s上的排列方式如何，均有

$$\frac{\sin\theta}{\sinh r_0}=\frac{\sin\phi}{\sinh d}$$

因此，

$$\begin{aligned}\sin\phi&\geq\frac{\sinh d}{\sinh r_0}\sin\theta\\&\geq\frac{e^d-e^{-d}}{e^{r_0}}\sin\theta\\&\geq\frac{\frac{\sin\theta}{2}\frac{e^{R/2}}{1+e^{-2R}}-1}{e^{R/2}e^{2\Delta(\pi/2)}}\sin\theta\\&\geq\frac{\sin^2\theta}{8}\left(\frac{1-e^{-R}}{(1+e^{-2R})^3}-\frac{8}{e^{R/2}e^{2\Delta(\pi/2)}\sin\theta}\right)\\&\geq\frac{\sin^2\theta}{9}\end{aligned}$$

当 n 充分大时，由于 $e^{-R}\to0$ 且 $e^{R/2}\sin\theta=\Omega(\sqrt{n})\ \to+\overline{\infty}$ □

引理 3.19 设 s 和 s' 为独立线段。设 h 为s 的中点 m 与原点之间的距离。假设 s的一个端点位于 B_0（$R/2$）中，且$\sin(\angle(s,s'))\ \geq 12e^{-h/4}$，则当 n充分大时， s' 的两个端点都在 B_0（$R/2$）之外。

Proof: 注意，对于 $\mathcal{S}$ 中的线段，不可能出现其两个端点都在 $B_0(R/2)$ 中的情况。我们用反证法证明该命题。根据对称性以及 $\sin(\pi-\angle(s,s'))$ $=\sin(\angle(s,s'))$ 这一事实，不失一般性，我们可以假设 w_1 在 $B_0(R/2)$ 中。

回顾 ， $\phi=\angle v_1mw_1$。我们有 $\phi=\angle v_1mo+\angle w_1mo$。因此， $\angle v_1mw_1$ 或 $\angle w_1mo$ mu st 大于 或等于 $\phi/2$。首先，假设 $\angle v_1mo\geq\phi/2$。根据引理 3.18，

$$\sin\frac{\angle v_1mo}{2}\geq\frac{\sin\phi}{4}\geq\frac{\{\sin(\angle(s,s'))\}^2}{36}\geq4e^{-h/2}$$

因此，

$$\begin{aligned}\cosh\{dist(v_1,o)\}&=\cosh(a/2)\cos(h)-\sinh(a/2)\sinh(h)\cos(\angle v_1mo)\\&>\cosh(a/2)\cosh(h)\sin^2\left(\frac{\angle v_1mo}{2}\right)\\&\geq\cosh(R/2)\frac{1}{2}e^h16e^{-h}\\&\geq8\cosh(R/2)\end{aligned}$$

这就产生了矛盾，因为 $dist(v_1,\ o)$ 必须小于或等于 $R/2$。另一方面，假设$\angle w_1mo \geq \phi/2$。那么，

$$\begin{aligned}\cosh\{dist(w_1,o)\} &\geq \cosh(r_0)\cosh(h)\sin^2\left(\frac{\angle w_1mo}{2}\right)\\ &> \frac{1}{8}\cosh(R/2)\frac{1}{2}e^h 16e^{-h}\\ &\geq \cosh(R/2)\end{aligned}$$

再次，这就产生了矛盾。□

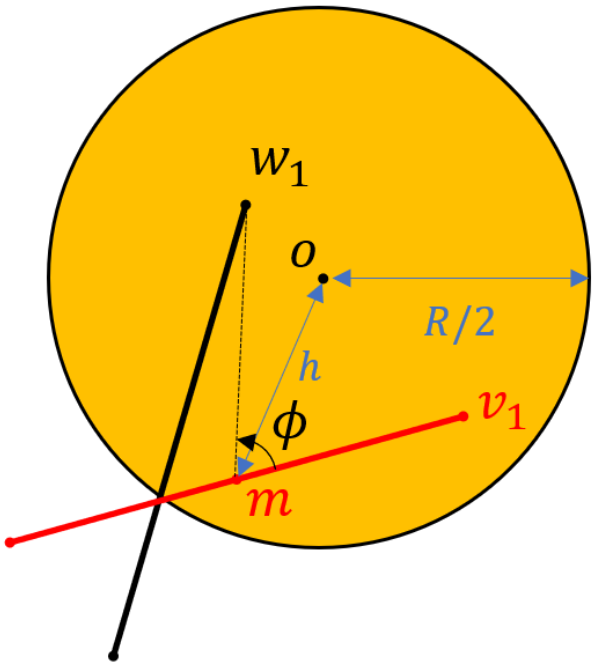


图 6：引理 3.19 中的情形。黄色区域是 $B_0(R/2)$。如果 $\angle(s,\ s')$很大，那么根据命题 3.18，ϕ 也必须很大。因此，v_1o 或 w_1o 的长度必定超过 $R/2$。

利用引理 3.19，我们将独立线段划分为若干集合，使得每个集合中的线段都满足以下某个条件。

- 它们之间的角并不太小，但位于稀疏区域（见（3.12））
- 它们之间的角很小，但可能位于稠密区域（见（3.13））

引理 3.20 设 k 为正整数。若存在一个由 t 条独立线段组成的集合 $S \subseteq \mathcal{S}$，则存在一条线段 s'及一个由独立线段组成的集合 $S' \subseteq \mathcal{S}$，使得

$$\begin{cases} |S'| \geq \lceil \frac{t}{3k} \rceil \\ s' \in S' \\ \forall s'' \in S'.\angle(s',s'') \leq \pi/k \\ \forall s'' \in S'.Both\ endpoints\ of\ s''\ are\ outside\ of\ B_0(R/2) \end{cases} \tag{3.12}$$

or

$$\begin{cases} |S'| \geq \lceil \frac{t}{3k} \rceil \\ s' \in S' \\ \forall s'' \in S'. \angle(s', s'') \leq 12e^{-h/4}\pi/k \\ \forall s'' \in S'. \textit{Both endpoints of } s'' \textit{ are outside of } B_0(\max\{R/2 - 3\log 2 - h, 0\}) \end{cases} \tag{3.13}$$

对于某个 $h \in [0, R]$。

Proof: 取一条线段 $s_0 \in S$，其端点位于 $B_0(R/2)$ 中。若不存在这样的线段，则引理 3.14 得证。令 $\theta_{s_0} := \arcsin(\min\{12e^{-h/4}, 1\})$。对于每个指标 $1 \leq i \leq k$，我们定义

$$S_i := \left\{ s \in S : \frac{i-1}{k}\theta_{s_0} \leq \angle(s_0, s) < \frac{i}{k}\theta_{s_0} \right\}$$

$$T_i := \left\{ s \in S : \theta_{s_0} + \frac{i-1}{k}(\pi - 2\theta_{s_0}) \leq \angle(s_0, s) < \theta_{s_0} + \frac{i}{k}(\pi - 2\theta_{s_0}) \right\}$$

$$U_i := \left\{ s \in S : \pi - \theta_{s_0} + \frac{i-1}{k}\theta_{s_0} \leq \angle(s_0, s) < \pi - \theta_{s_0} + \frac{i}{k}\theta_{s_0} \right\}$$

由于 $S_i \cup T_i \cup U_i = S$, $\sum_{i=0}^{k-1} |S_i| + |T_i| + |U_i| \geq t$。根据鸽巢原理，存在一个指标$i$，使得 S_i、U_i 或 T_i 的基数大于或等于 $\lceil t/(3k) \rceil$。令 S' 为这样的集合。考虑在 S' 中取线段 s'，使得 $\angle(s_0, s') = \min_{s'' \in S'} \angle(s_0, s'')$。若 $S' = S_i$ 或 $S' = U_i$，则 $\angle(s', s'') \leq \angle(s_0, s'') - \angle(s_0, s') \leq \theta_{s_0}/k \leq 12e^{-h/4}\pi/k$。第三个条件 (3.13) 得以满足。此外，根据推论 3.17，s'' 的端点必须位于一个圆之外，该圆的半径为$R/2 - 3\log 2$，圆心为 m。因此，第四个条件 (3.12) 得以满足。我们已经证明 s' 和S' 满足 (3.13)。若 $S' = T_i$，则必有 $12e^{-h/4} < 1$，从而 $S'(= T_i)$ 非空。因此，$\sin(\angle(s_0, s)) \geq \sin(\theta_{s_0}) = 12e^{-h/4}$。根据引理 3.19，$s'' \in S'$ 的两个端点都必须位于 $B_0(R/2)$ 之外，且 (3.12) 成立。□

定理 3.21 设 ϵ 为正常数。设 $t = n^{(1-\alpha)/3+\epsilon}$。那么，

$$\Pr[G_{n,\gamma,C} \textit{ has } O_t \textit{ as its vertex-induced subgraph}] \to 0$$

当 $n \to \infty$ 时。

Proof: 令 $k := n^{(1-\alpha)/3}$ 且 $\theta_0 := \pi/k$。假设 $G_{n,\ r}$ 以 O_t 作为其顶点诱导子图。对 t 和 k应用引理 3.20。与证明 2.11 中一样，存在一条线段 s' 和一组独立线段 S'，使得 (3.12) 或 (3.13) 成立。我们首先断言，对于某条特定线段s'，存在一组独立线段 S' 使得 (3.12) 成立的概率至多为 $\exp(-\Omega(n^\epsilon))$。根据推论 3.13，可能属于 S' 的线段的期望数量可由 $\rho(R/2) \cdot O(n^2\theta_0^3) = O(n^{-1-\alpha}) \cdot O(n^2 \cdot n^{-(1-\alpha)}) = O(1)$ 所界定。然而，S' 的大小必须为n^ϵ。由切尔诺夫界可得该概率界。接下来我们断言，对于某条特定线段s'，存在一组独立线段 S' 使得 (3.13) 成立的概率至多为 $\exp(-\Omega(n^\epsilon))$。同样，只需证明满足 (3.13) 第三和第四个条件的线段期望数量为 $O(1)$。令 $\theta_{s_0} := 12e^{-h/4}\pi/k = 12e^{-h/4}\theta_0$。这里，

$$\begin{aligned} (\text{The expected value}) &\leq n\rho(\max\{R - 3\log 2 - h, 0\}) \cdot O(n\theta_{s_0}^3) \\ &= n \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \cdot (\cosh(\alpha R) - 1)^{-1} e^{-(1-\alpha)(R/2 - 3\log 2 - h)} \cdot O(ne^{-3h/4}\theta_0^3) \\ &= nO(n^{-2\alpha} n^{-1+\alpha} e^{(1-\alpha)h}) \cdot O(ne^{-3h/4}\theta_0^3) \\ &= O(n^{1-\alpha} e^{-h(3/4-(1-\alpha))}\theta_0^3) \\ &= O(n^{1-\alpha}\theta_0^3) \ (\because 1/2 < \alpha < 1) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

最后，我们对所有线段应用并集界，得到

$$\Pr[G_{n,\gamma,C} \text{ has } O_t \text{ as its vertex-induced subgraph}] \leq \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2\exp(-\Omega(n^{\epsilon}))$$

当 $n \to \infty$ 时趋于 0。□

定理 3.22 存在一个正常数 C'，使得对所有 $\epsilon > 0$,

$$\Pr[\mathcal{M}(G_{n,\gamma,C}) \leq \exp(C' n^{(1-\alpha)/3+\epsilon})] \to 1$$

当 $n \to \infty$ 时

4 结论

本文从一个问题入手：为什么真实世界网络中的极大团数量很少？为了解释这一现象，我们考察了两种真实世界网络模型中的极大团数量：欧几里得随机几何图和双曲随机图。为了界定其数量，我们聚焦于与 O_t 同构的顶点诱导子图。类似的几何和概率技术适用于这两种随机图。未来，我们感兴趣的是，O_t 的性质是否会对真实世界图上的团枚举算法产生积极影响。此外，向高维空间的推广仍是一个开放问题。

参考文献

[1] W. Aiello, F. Chung, and L. Lu. 大规模图的随机图模型。载于第*32*届 *ACM* 年度计算理论研讨会论文集，第171-180页，2000年。[2] R. Albert, and A. L. Barab´asi，复杂网络的统计力学。《现代物理评论》，74(1):47，2002年。[3] L. Becchetti, P. Boldi, C. Castillo, and A. Gionis. 大规模图中局部三角形计数的高效半流式算法。载于第*14*届 *ACM SIGKDD* 知识发现与数据挖掘国际会议论文集，第16-24页，2008年。[4] T. Bl¨asius, T. Friedrich, and A. Krohmer. 双曲随机图：分隔集与树宽。载于第*24*届欧洲算法年会论文集，第1-16页，2016年。[5] C. Bron, and J. Kerbosch. 算法 457：求无向图中的所有团。《*ACM* 通讯》，16(9):575-577，1973年。[6] J. Chellig, N. Fountoulakis, and F. Skerman. 双曲随机图的直径。《复杂网络杂志》，10(1):cnab051，2022年。[7] N. Chiba, and T. Nishizeki. 森林度与子图枚举算法。*SIAM*计算杂志，14(1):210-223，1985年。[8] A. Conte, R. Grossi, A. Marino, and L, Versari. 大规模网络分析的亚线性空间有界延迟枚举：极大团。载于第*43*届自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP 2016*），第55卷，148:1-148:15，2016年。[9] D. Eppstein, M. L¨offler, and D. Strash. 枚举大型稀疏真实世界图中的所有极大团。《实验算法学杂志》，18:1-3，2013年。[10] M. Farber, M. Hujter, and Z. Tuza. 图中团数量的上界。《网络》，23(3):207-210，1993年。

[11] J. Fox, T. Roughgarden, C. Seshadhri, F. Wei, and N. Wein. 在社交网络中寻找团：一种新的无分布模型。*SIAM*离散数学杂志，49(2):448-464，2020年。[12] T. Friedrich, and A. Krohmer. 双曲随机图中的团。载于第*34*届 *IEEE*计算机通信会议论文集，第1544-1552页，2015年。[13] T. Friedrich, and A. Krohmer. 双曲随机图的直径。*SIAM*离散数学杂志，32(2):1314-1334，2018年。[14] L. Gugelmann, K. Panagiotou, and U. Peter. 随机双曲图：度序列与聚类。载于第*39*届自动机、语言与编程国际研讨会（*ICALP 2012*），第573-585页，2012年。[15] M. Haenggi, J. G. Andrews, F. Baccelli, O. Dousse, and M. Franceschetti. 用于无线网络分析与设计的随机几何和随机图*IEEE*通信领域精选期刊，27(7):1029-1046，2009年。[16] D. J. Higham, M. Raˇsajski, and N. Prˇzulj. 将几何图拟合到蛋白质相互作用网络。《生物信息学》，24(8):1093-1099，2008年。[17] S. Jain, and C. Seshadhri. 精确团计数中枢轴法的威力。载于第*13*届国际网络搜索与数据挖掘会议论文集，第268-276页，2020年。[18] D. Krioukov, F. Papadopoulos, M. Kitsak, A. Vahdat, and M. Bogun´a. 复杂网络的双曲几何。《物理评论*E*》，82(3):036106，2010年。[19] J. M. Kumpula, M. Kivel¨a, K. Kaski, and J. Saram¨aki. 快速团渗流的顺序算法。《物理评论*E*》，78(2):026109，2008年。[20] J. W. Moon, and L. Moser. 关于图中的团。《以色列数学杂志》，3(1):23-28，1965年。[21] T. Nepusz, H. Yu, and A. Paccanaro. 检测蛋白质相互作用网络中的重叠蛋白质复合物。《自然·方法》，9(5):471-472，2012年。[22] G. Palla, I. Der´enyi, I. Farkas, and T. Vicsek. 揭示自然与社会中复杂网络的重叠社区结构。《自然》，435(7043):814-818，2005年。[23] M. Penrose. 随机几何图。牛津大学出版社，第5卷，2003年。[24] P. J. Ryan. 欧几里得与非欧几里得几何：解析方法。剑桥大学出版社，1986年。

图	$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert$	τ
amazon0601	403394	2443408	5
as-skitter	1696415	11095298	15
ca-AstroPh	18772	198050	7
com-dblp	317080	1049866	4
com-youtube	1134890	2987624	7
email-Enron	36692	183831	7
email-EuAll	265214	364481	8
合并的 Facebook	4039	88234	19
hrg	180705	968205	4
loc-gowalla 边	196591	950327	8
soc-buzznet	101164	2763067	14
soc-digg	770800	5907133	17
soc-Epinions1	75879	405740	10
web-Google	875713	4322051	5
web-NotreDame	325729	1090108	5
web-Stanford	281903	1992636	5
wiki-Talk	2394385	4659565	13
wiki-topcats	1791489	25444207	10
wiki-Vote	7115	100762	8

表1：SNAP图数据集上 τ 的上界（即图包含 O_t 作为其顶点诱导子图时 t 的最大值）