arXiv:2303.06320v1 [math.CO] 11 Mar 2023

整数双次模多面体中整数点集合的刻画

Yuni Iwamasa*

2023年3月14日

摘要

本文给出了整数双次模多面体中整数点集合的两种刻画。这些刻画不要求给定集合满足无空洞性，即其凸包中的整数点集合与原集合相同。一种是拟阵交换公理的自然多重集推广，另一种则源于整数双次模多面体的切锥这一概念。

关键词：整数双次模多面体、交换公理、BS-凸集、M-凸集、跳跃系统

1 引言

整数次模多面体中的整数点集称为 M-凸集 [10]。这是由基族定义的拟阵的一种多面体推广。事实上，拟阵恰好是其基多面体中的整数点集，而基多面体是相对于该拟阵秩函数的整数次模多面体。因此，在上述关于拟阵基族的论述中，将“拟阵的秩函数”推广为“一般的整数次模函数”，便可得到 M-凸集的概念。

整数次模函数与 M-凸集之间的关系，可以看作共轭关系的离散版本。在凸分析中，众所周知 [13] ，正齐次闭真凸函数与闭凸集（的示性函数）之间通过勒让德–芬切尔变换存在一一对应关系。从这一角度看，整数次模函数（的 Lov´asz 扩展）对应于正齐次闭真凸函数，而 M-凸集则是与之对应的凸集。Murota 结合凸分析与次模/拟阵理论，在整数格上发展出一种称为离散凸分析（DCA）的“离散凸性”理论 [11]。在 DCA 中，M-凸性是整数格中整数点集的一种基本凸性概念。这里我们指出，M-凸集显然是无孔的，也就是说，M-凸集的凸包与整数格的交集恰好等于原集合；这自然是整数点集成为“凸”集所需的条件。

M-凸集满足若干交换型公理，这些公理是拟阵交换公理的多重集版本。与 M-凸集的多面体定义相比，这些公理更便于检验给定集合的 M-凸性，并可用于设计一种简单的

*京都大学信息学研究生院通信与计算机工程系，日本京都 606-8501。电子邮箱：iwamasa@i.kyoto-u.ac.jp

贪心算法来求解 M-凸集上的线性优化问题。值得一提的是，“满足交换公理的整数点集合是无孔的”这一事实并非显而易见。

本文讨论 M-凸集的一种双子模／δ-拟阵式推广。整数双次模多面体中的整数点集称为 BS-凸集 [9]，也可视为 δ-拟阵 [7, 4, 6, 12]的多面体推广；δ-拟阵与其可行集多面体中的整数点集相同（= 即相对于该 δ-拟阵秩函数的整数双次模多面体）。BS-凸集也可视为离散凸集，因为它对应于一个整数双子模函数（其 Lov´ász 延拓）的共轭函数，而该函数可视为正齐次真闭凸函数。

本文特别关注 BS-凸集的交换型刻画。目前已知若干种 BS-凸集的交换型刻画 [2, 5], ，但它们都额外要求给定集合是无洞集。例如，Bouchet 和 Cunningham 引入的跳跃系统 [5], 由某个交换公理定义；已知一个无洞集是 BS-凸集，当且仅当它是跳跃系统。然而，不能省略对给定集合无洞性的假设，因为存在不是无洞集的跳跃系统。迄今为止，尚无不对给定集合作任何假设的 BS-凸集交换型刻画。

我们的主要结果是提出了两种不对集合施加任何假设的 BS-凸集交换型刻画。其中一种是 δ-拟阵交换公理的自然多重集版本。另一种则基于整数双次模多面体的切锥这一概念。与 BS-凸集的多面体定义相比，这两种刻画都更便于检验给定集合的 BS-凸性。

2 预备知识

令 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{Z}$ 分别表示实数集和整数集。对于正整数 k，令$[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$。对于指标集 I和元组 $t \in \mathbf{R}^I$（或 $t \in \mathbf{Z}^I$或 $t \in \{-1, 0, 1\}^I$），其支撑集 $\mathrm{supp}(t)$ 定义为满足以下条件的指标 $i \in I$ 的集合：第 i 个元素 $t(i)$ 属于 t 且非零，即 $\mathrm{supp}(t) := \{ i \in I \mid t(i) \neq 0 \}$。

设 V为非空有限集。对于 $p, x \in \mathbf{R}^V$，我们定义 $\langle p, x \rangle := \sum_{u \in V} p(u)x(u)$。对于$X \subseteq \mathbf{R}^V$，分别用 $\mathrm{conv}(X)$ 和 $\mathrm{cone}(X)$ 表示 X的凸包和锥包。也就是说，

$$\mathrm{conv}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; n : \text{positive integer}, \, x_1, \ldots, x_n \in X, \, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$
$$\mathrm{cone}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \;\middle|\; n : \text{positive integer}, \, x_1, \ldots, x_n \in X, \, \mu_1, \ldots, \mu_n \geq 0 \right\}.$$

若整数点集 $B \subseteq \mathbf{Z}^V$满足 B 与其凸包中的整数点集一致，即 $B = \mathrm{conv}(B) \cap \mathbf{Z}^V$，则称其为无孔的。对于 $u \in V$，令 χ_u 表示第 u个单位向量。对于 $p \in \mathbf{Z}^V$，我们将 $\|p\|_1$ 定义为 p的 1-范数 $\sum_{u \in V} |p(u)|$。我们将 Φ 定义为 $\{-1, 0, 1\}^V$ 中 1-范数 $\|\alpha\|_1$ 为一或二的向量 α所组成的集合，即，

$$\Phi := \{ \pm\chi_u \mid u \in V \} \cup \{ \pm\chi_u \pm \chi_v \mid u, v \in V, \; u \neq v \}.$$

我们还定义

$$\Phi(p, q) := \{ \alpha \in \Phi \mid \|q - (p + \alpha)\|_1 = \|q - p\|_1 - \|\alpha\|_1 \} \qquad (p, q \in \mathbf{Z}^V),$$

$$\Phi_B(p,q) := \{\alpha \in \Phi(p,q) \mid p+\alpha \in B\} \qquad (B \subseteq \mathbf{Z}^V,\ p,q \in B)$$

我们假设以下出现的任意函数 f 在 $\{-1,0,1\}^V$ 上都满足 $f(\mathbf{0}) = 0$，其中 $\mathbf{0}$ 表示全零向量。函数 $f:\{-1,0,1\}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 称为双次模 (例如参见 [8, 第 3.5 节 (b)])，若其满足以下双次模不等式；

$$f(x) + f(y) \geq f(x \sqcap y) + f(x \sqcup y) \qquad (x, y \in \{-1,0,1\}^V),$$

其中，二元运算 $\sqcap$ 和 $\sqcup$ 定义为

$$(x \sqcap y)(u) := \begin{cases} x(u) & \text{if } x(u) = y(u), \\ 0 & \text{if } x(u) \neq y(u), \end{cases} \qquad (x \sqcup y)(u) := \begin{cases} x(u) & \text{if } x(u) = y(u) \text{ or } y(u) = 0, \\ y(u) & \text{if } x(u) = 0, \\ 0 & \text{if } 0 \neq x(u) \neq y(u) \neq 0 \end{cases}$$

对每个 $u \in V$。已知 [12]，函数 $f:\{-1,0,1\}^V \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 是双次模的，当且仅当其 Lov´asz 扩展 $\tilde{f}:\mathrm{R}^V \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 是（闭）凸的；定义在 $\{-1,0,1\}^V$ 上的函数的 Lov´asz 扩展的定义见 [12]。由于定义在 $\{-1,0,1\}^V$ 上的任意函数的 Lov´asz 扩展都是正齐次的，因此，从引言中所述的意义上说，双次模函数可以发挥正齐次适当闭凸函数的作用。我们称 f 是整数值的，如果 f 的所有有限值都是整数，即 f 是从 $\{-1,0,1\}^V$ 到 $\mathrm{Z} \cup \{+\infty\}$的函数。

对于双次模函数 $f:\{-1,0,1\}^V \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$，其双次模多面体 $\mathrm{P}(f)$ 是由以下条件定义的多面体

$$\mathrm{P}(f) := \left\{ p \in \mathbf{Z}^V \;\middle|\; \langle p, x\rangle \leq f(x)\ (\forall x \in \{-1,0,1\}^V) \right\}.$$

注意，$\tilde{f}$ 的 Lov´asz 延拓 $\tilde{f}$ 的共轭函数 $p \mapsto \sup_{x \in \mathbf{R}^V}\{\langle p, x\rangle - f(x)\}$ 是双次模多面体 $\mathrm{P}(f)$ 的示性函数，其中 $p \in \mathrm{R}^V$。$\mathrm{P}(f)$ 的切锥有如下简单表示，其中对于凸集 $C \subseteq \mathrm{R}^V$ 及点 $p \in C$，C 在 p 处的切锥定义为 $\mathrm{cone}(\{q - p \mid q \in C\})$。

引理 1（[1, 推论 3.6]）。设 $f:\{-1,0,1\}^V \to \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个双次模函数。对于 $p \in \mathrm{P}(f)$，$\mathrm{P}(f)$ 在 p 处的切锥与 $\mathrm{cone}(\{\alpha \in \Phi \mid p + \varepsilon\alpha \in \mathrm{P}(f)$ 重合，其中某个 $\varepsilon > 0\}$。

若 f 是整数值的，则 $\mathrm{P}(f)$ 是一个整数多面体 [5, 推论 5。4]，，称为整数双次模多面体。

若存在一个整数双子模函数 $f:\{-1,0,1\}^V \to \mathrm{Z} \cup \{+\infty\}$，使得 $B = \mathrm{P}(f) \cap \mathrm{Z}^V$，则称非空集合 $B \subseteq \mathrm{Z}^V$ 为 BS-凸集 [9]。注意，Lov´asz 扩展 f 的离散共轭函数 $\tilde{f}$ $p \mapsto \sup_{x \in \mathbf{Z}^V}\{\langle p, x\rangle - f(x)\}$ 是该 BS-凸集的示性函数，其中 $p \in \mathrm{Z}^V$。从这个意义上说，BS-凸集是引言中所描述的“离散凸”集合。

若非空集合 $J \subseteq \mathrm{Z}^V$ 满足以下交换公理 [5]，则称其为跳跃系统；该公理称为 2步公理：

（J-EXC）对于任意 p、$q \in J$ 和 $u \in \mathrm{supp}(q - p)$，

- 存在 $\alpha \in \Phi_B(p,q)$，使得 $u \in \mathrm{supp}(\alpha)$，或者
- $\|p(u) - q(u)\|_1 \geq 2$ 以及 $p + 2s_u \in J$，其中 $s_u \in \{\pm\chi_u\}$ 是满足 $s_u \in \Phi(p,q)$ 的唯一解。

上述条件可改述为：对于任意 p、$q \in J$ 和 $u \in \mathrm{supp}(q-p)$，对于满足 $s_u \in \Phi(p,q)$ 的唯一 $s_u \in \{\pm\chi_u\}$，有 $p+s_u \in J$；或者，对于某些满足 $s_v \in \Phi(p+s_u,q)$ 的 $v \in V$ 和 $s_v \in \{\pm\chi_v\}$，有 $p+s_u+s_v \in J$。这就是将（J-EXC）称为 2步公理的原因。

跳跃系统是对 BS-凸集的一种推广，具体如下。

命题 2 ([5, 定理 4.4 和 5。3])。 对于任意跳跃系统 $J \subseteq \mathbf{Z}^V$，其凸包$\mathrm{conv}(J)$ 是一个整数值双次模多面体。反过来，对于任意整数值双次模函数 $f:\{-1,0,1\}^V \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$，相应的 BS-凸集 $\mathrm{P}(f) \cap \mathbf{Z}^V$是一个跳跃系统。

命题 2 指出，对于无洞集 $B \subseteq \mathbf{Z}^V$，它是 BS-凸集当且仅当它是跳跃系统。虽然根据定义，所有 BS-凸集都是无洞的，但跳跃系统一般并非无洞。例如，集合 $\{0,2\} \subseteq \mathbf{Z}$ 是一个跳跃系统，但并非无洞。因此，不能省略给定集合无洞这一假设。

3 aBS-凸集的刻画

本节中，我们给出一个不对给定集合施加任何假设的 BS-凸集的两个交换型刻画。

第一个条件是从（J-EXC）中删除关于 $\|p(u)-q(u)\|_1 \geq 2$ 情形的第二个条件后得到的。

（Δ-EXC）对于任意 p、$q \in B$ 和 $u \in \mathrm{supp}(q-p)$，存在 $\alpha \in \Phi_B(p,q)$，使得 $u \in \mathrm{supp}(\alpha)$。

这里指出，若非空集合 $B \subseteq \{0,1\}^V$ 满足（Δ-EXC），则称其为 δ-拟阵 [7, 4, 6, 12] 。因此，条件（Δ-EXC）是 δ-拟阵交换公理的一种自然的多重集版本。

第二个条件源于切锥的概念。由 P(f) 的凸性，对于任意 $p,q \in \mathrm{P}(f) \cap \mathbf{Z}^V$，$q$ 与 p 之差 $q-p$ 属于 P(f) 在 p 处的切锥；根据引理 1，即 $q-p \in \mathrm{cone}(\{\alpha \in \Phi \mid p+\varepsilon\alpha \in \mathrm{P}(f)$，其中某个 $\varepsilon > 0\}$。下面的条件要求 $q-p$ 特别属于 $\mathrm{cone}(\Phi_B(p,q))$，并且可以取 $q-p$ 的非负组合系数为半整数。

(BS-EXC) For any $p,q \in B$, there exist $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in \Phi_B(p,q)$ such that $p+\sum_{i=1}^k \alpha_i/2 = q$.

我们的主要结果如下：

定理 3. 设 $B \subseteq \mathbf{Z}^V$ 是一个非空的整数点集合。以下条件 (a)、(b) 和 (c) 等价。

(a) B 是一个 BS-凸集，即对于某个定义在 $\{-1,0,1\}^V$ 上的整数双子模函数 f，有 $B = \mathrm{P}(f) \cap \mathbf{Z}^V$。

(b) B 满足 (Δ-EXC)。

(c) B 满足 (BS-EXC)。

蕴含关系 (c) $\Rightarrow$ $\Phi_B\ p\ q$ $p+\sum_{i=1}^k \alpha_i/2 = q$ $p\ q \in B$ $u \in$ α_1 α_2 … $\alpha_k \in$(b) 显然成立。事实上，对于任意 , , 存在 , , , (,)，使得根据 (BS-EXC) 成立。于是，对于每个 supp( )， α_1、α_2、…、α_k $q-p$ 中至少有一个必须满足 $u \in \mathrm{supp}(\alpha_i)$，这意味着 (Δ-EXC)。

(b) 的证明见第 $\Rightarrow$(a) 和 (a) 的证明见第 $\Rightarrow$ (c) 的证明见第 3.1 节和 3.2节，分别 .

3.1 (b) ⇒ ⇒(a) 的证明

假设 B 满足条件（Δ-EXC）。由于（Δ-EXC）比（J-EXC）更强，集合 B 是一个跳跃系统。因此，根据命题 2，有 conv(B) $=$ P(f)，其中 f 是定义在 $\{-1,0,1\}^V$ 上的某个整数双子模函数。因此，只需证明 $B = \mathrm{conv}(B) \cap \mathbf{Z}^V$，即$B$ 是无孔的。

显然， $B \subseteq$ conv(B) $\cap$ Z^V。任取 $p^* \in$ conv(B) $\cap$ Z^V。当 B 为无限集时，我们将 B 替换为交集 $B \cap [-n\mathbf{1}, n\mathbf{1}]$，其中 $n \in$ 取充分大的 $+$ Z$p^* \in$，使得$B \cap [-n\mathbf{1}, n\mathbf{1}]$conv(^{V})，这里 1 表示 Z B 中的全一向量。由此得到的 Δ是有限集，且满足 (B -EXC)。因此，我们可以假设 是有限集。

Let

$$C := \left\{ (\lambda_p)_{p\in B} \in \mathbf{R}^B \;\middle|\; p^* = \sum_{p\in B} \lambda_p p,\ \sum_{p\in B} \lambda_p = 1,\ \lambda_p \geq 0\ (p \in B) \right\}.$$

由于 $p^* \in$ conv(B)$\cap$ Z^V，集合 C 非空。此外，根据 C的定义以及 B的有限性， C 是紧致的。定义函数 θ :$C \to$ R 如下:

$$\theta(\lambda) := \sum_{p\in B} \lambda_p \|p^* - p\|_1$$

对于 $\lambda = (\lambda_p)_{p\in B} \in C$。由于 θ 连续，且 C 是紧致非空集，函数 θ能取到其下确界，即存在 $\lambda^* \in C$，使得 $\theta(\lambda^*) = \inf \theta (= \min \theta)$。我们可以看出，$p^* \in B$ 当且仅当 $\min \theta = 0$。

反设 $p^* \notin B$，即 $\min \theta > 0$。令 $\lambda^* = (\lambda^*_p)_{p\in B} \in$ argmin θ。注意， $p^* \notin$ supp(λ^*)。取 $q, r \in$ supp(λ^*)，使得对于某个 $u' \in V$， $q(u') < p^*(u') < r(u')$；这样的q 和 r 存在，因为 $\sum_{p\in \mathrm{supp}(\lambda^*)} \lambda^*_p p = p^*$ 且 $p^* \notin$ supp(λ^*)。此处有如下结论。

引理 4. 存在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Phi_B(q, r)$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\ell \in \Phi_B(r, q)$，使得 $\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{j=1}^\ell \beta_j = 0$。

证明。令 G 表示一个无向图（允许存在自环），其顶点集为 supp($r-q$)，边集为 $E_q \cup E_r$，其中 E_q:= {supp(α) $\mid \alpha \in \Phi_B(q, r)$ }，且 E_r:= {supp(β) $\mid \beta \in \Phi_B(r, q)$ }。注意，对于每条边 $e \in E_q$（分别为 $e \in E_r$），唯一存在 $\alpha \in \Phi_B(q, r)$ 使得 $e =$ supp(α)（分别唯一存在 $\beta \in \Phi_B(r, q)$ 使得 $e =$ supp(β)）；我们将其记为 α_e （分别记为 β_e）。还要注意，根据 (Δ-EXC)，对于每个 $u \in$ supp($r - q$)，都有边分别在 E_q 和 E_r 中与 u 相接。

对于每个 $e \in E_q$ 和 $u \in e$，我们选取一条满足 $u \in f$ 的边 $f \in E_r$，并构造一个三元组 (e, u, f)。类似地，对于每个 $f \in E_r$ 和 $v \in f$，我们选取一条满足 $v \in e'$ 的边 $e' \in E_q$，并构造一个三元组 (f, v, e')。令 T 为上述构造的三元组集合。任取一个满足 $f_1 \in E_q$ 的三元组 (f_1, u_1, f_2) $\in T$。根据 T 的定义，唯一存在一个三元组 (f_2, u_2, f_3) $\in T$，使得 $f_2 = \{u_1, u_2\}$。类似地，唯一存在一个三元组 (f_3, u_3, f_4) $\in T$，使得 $f_3 = \{u_2, u_3\}$。重复上述过程，我们得到 G 中的一个无限游走 ($f_1, f_2, f_3, \ldots$)，其中当 i 为奇数时满足 $f_i \in E_q$，当 i 为偶数时满足 $f_i \in E_r$。由于 T 的有限性，无限游走 ($f_1, f_2, f_3, \ldots$) 必须包含一个周期结构 ($\ldots, e_1, e_2, \ldots, e_{2m}, e_1, \ldots$)，其中 $e_1 \in E_q$。这意味着 G 中存在一个闭游走 ($e_1, e_2, \ldots,$ e_{2m})，其中当 i 为奇数时满足 $e_i \in E_q$，当 i 为偶数时满足 $e_i \in E_r$。

由这样的闭游走 ($e_1, e_2, \ldots, e_{2m}$)，我们定义

$$(a_i, \alpha_i) := \begin{cases} (2, \alpha_{e_{2i-1}}) & \text{if } |e_{2i-1}| = 1, \\ (1, \alpha_{e_{2i-1}}) & \text{if } |e_{2i-1}| = 2, \end{cases} \qquad (b_i, \beta_i) := \begin{cases} (2, \beta_{e_{2i}}) & \text{if } |e_{2i}| = 1, \\ (1, \beta_{e_{2i}}) & \text{if } |e_{2i}| = 2. \end{cases}$$

于是，对每个 $i \in [m]$，都有 $\alpha_{e_{2i-1}} \in \Phi_B(q,r)$ 和 $\beta_{e_{2i}} \in \Phi_B(r,q)$。此外，我们可以看到 $\sum_{i=1}^m a_i \alpha_{e_{2i-1}} + \sum_{i=1}^m b_i \beta_{e_{2i}} = 0$。因此，引理得证。 □

令 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Phi_B(q, r)$ 以及 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\ell \in \Phi_B(r, q)$ 满足 $\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{j=1}^\ell \beta_j = 0$; 根据引理 4，这样的对象确实存在。于是，对充分小的 $\varepsilon > 0$，我们有如下 p^*的凸组合表示:

$$p^* = \big(\lambda^*_q - k\varepsilon\big)q + (\lambda^*_r - \ell\varepsilon)r + \sum_{p \in B \setminus \{q,r\}} \lambda^*_p p + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^k (q + \alpha_i) + \sum_{j=1}^\ell (r + \beta_j) \right).$$

令 $\lambda' = (\lambda'_p)_{p \in B}$ 表示 p^* 的相应系数，其中注意到 $\lambda' \in C$ 且 $\mathrm{supp}(\lambda') = \mathrm{supp}(\lambda^*) \cup \{ q + \alpha_i, r + \beta_j \mid i \in [k], j \in [\ell] \}$。

我们可以如下计算值 $\theta(\lambda')$。令

$$\begin{aligned}
S_+(q) &:= \{ u \in \mathrm{supp}(r - q) \mid p^*(u) \le q(u) < r(u) \text{ or } r(u) < q(u) \le p^*(u) \}, \\
S_-(q) &:= \{ u \in \mathrm{supp}(r - q) \mid q(u) < \min\{p^*(u), r(u)\} \text{ or } \max\{p^*(u), r(u)\} < q(u) \}, \\
s_u(q) &:= |\{ i \in [k] \mid u \in \mathrm{supp}(\alpha_i) \}| \qquad (u \in \mathrm{supp}(r - q)).
\end{aligned}$$

我们类似地定义 $S_+(r)$、$S_-(r)$ 和 $s_u(r)$。注意到，$\{S_+(q)\ S_-(q)\}$ 和 $\{S_+(r)\ S_-(r)\}$均构成 $\mathrm{supp}(r - q)$ 的二分划分。于是有

$$\theta(\lambda') = \theta(\lambda^*) + \varepsilon \left(\sum_{u \in S_+(q)} s_u(q) - \sum_{u \in S_-(q)} s_u(q) + \sum_{u \in S_+(r)} s_u(r) - \sum_{u \in S_-(r)} s_u(r) \right).$$

此外，由于 $\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{j=1}^\ell \beta_j = 0$，对于每个 $u \in \mathrm{supp}(r - q)$，我们有 $s_u(q) = s_u(r)$。因此，令 $S_+(q,r) := S_+(q) \cap S_+(r)$ 且 $S_-(q,r) := S_-(q) \cap S_-(r)$，可得

$$\begin{aligned}
\theta(\lambda') &= \theta(\lambda^*) + \varepsilon \sum_{u \in S_+(q,r)} (s_u(q) + s_u(r)) - \varepsilon \sum_{u \in S_-(q,r)} (s_u(q) + s_u(r)) \\
&= \theta(\lambda^*) - \varepsilon \sum_{u \in S_-(q,r)} (s_u(q) + s_u(r)), \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

其中第二个等式由 $S_+(q,r) = \emptyset$ 得出。根据 q 和 r 的选取，集合 $S_-(q,r)$ 等于 $\{ u \in \mathrm{supp}(r - q) \mid q(u) < p^*(u) < r(u)$ 或 $r(u) < p^*(u) < q(u) \}$，包含 u'; 因此它非空。根据 λ^* 的极小性，我们有 $\theta(\lambda') = \theta(\lambda^*)$，这意味着对于所有 $i \in [k]$ 和 $j \in [\ell]$，$\mathrm{supp}(\alpha_i) \cap S_-(q,r) = \mathrm{supp}(\beta_j) \cap S_-(q,r) = \emptyset$。

我们将 λ^* 和 r 更新为 $\lambda^* \leftarrow \lambda'$ 和 $r \leftarrow r + \beta_1$。对于由此得到的 r，值 $\|r - q\|_1$严格减小，但集合 $S_-(q,r)$ 不变，因为 $\mathrm{supp}(\beta_1) \cap S_-(q,r) = \emptyset$。

有限次重复上述更新后，我们最终得到使 θ 和 $q, r \in \mathrm{supp}(\lambda^*)$ 最小的 $\lambda^* \in C$，使得 $S_-(q,r) = \mathrm{supp}(r - q)$。对于这样的 q和 r，我们再次重复上述更新。于是，由于 $S_-(q,r) = \mathrm{supp}(r - q)$，集合 $S_-(q,r)$ 对任意 $i \in [k]$ 和 $j \in [\ell]$ 都包含 $\mathrm{supp}(\alpha_i)$ 和 $\mathrm{supp}(\beta_j)$。因此，根据 (3.1)，由此得到的 $\lambda' \in C$ 使 θ严格减小，这与 λ^*的极小性矛盾。

3.2 (a) ⇒(c) 的证明

假设对于定义在 $\{-1, 0, 1\}^V$ 上的整数双子模函数 f，$B = \mathrm{P}(f) \cap \mathbb{Z}^V$。对于 $p \in B$，令 $\Phi_B(p) := \{ \alpha \in \Phi \mid p + \alpha \in B \}$。任取 $p, q \in B$。对于 $r \in \mathbb{Z}^V$，定义

$$v(r) := \sum \{ |r(u)| \mid u \in V : r(u)(q(u) - p(u)) \le 0 \}.$$

特别地，函数 v 对于 $\alpha \in \Phi_B(p)$ 衡量 α 相对于 $\Phi_B(p,q)$ 的违反程度；对于 $\alpha \in \Phi_B(p)$，我们有 $v(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha \in \Phi_B(p,q)$。下面是一个显然的观察。

引理 5. 设 $r, r' \in \mathbf{Z}^V$。则有

$$v(r)+v(r') \begin{cases} > v(r+r') & \text{if } r(u)r'(u) < 0 \text{ for some } u \in V, \\ = v(r+r') & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们考虑以下线性规划：

$$\text{(LP)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \sum \{ v(\alpha)\mu_\alpha \mid \alpha \in \Phi_B(p) \} \\ \text{subject to} & \sum \{ \mu_\alpha \alpha \mid \alpha \in \Phi_B(p) \} = q - p, \\ & \mu_\alpha \geq 0 \quad (\alpha \in \Phi_B(p)). \end{array}$$

只需证明：(i) 线性规划问题（LP）有可行解；(ii) 其最优值为 0；(iii) 它存在半整数最优解。事实上，(i)–(iii) 蕴含 $q - p = \sum_{\alpha \in \Phi_B(p,\ q)} \mu_\alpha \alpha$，其中某个非负半整数系数为 $\mu = (\mu_\alpha)_{\alpha \in \Phi_B(p,\ q)}$，特别地，$B$ 满足 (BS-EXC)。

在证明 (i) 和 (ii) 之前，我们先回顾关于 P(f) 和 B 的基本事实。对于 $x \in \{-1,0,1\}^V$，令 $\mathrm{supp}^+(x) := \{ u \in V \mid x(u) = 1 \}$，且 $\mathrm{supp}^-(x) := \{ u \in V \mid x(u) = -1 \}$。我们在 $\{-1,0,1\}^V$ 上定义偏序 $\preceq$：当且仅当 $\mathrm{supp}^+(x) \subseteq \mathrm{supp}^+(y)$ 且 $\mathrm{supp}^-(x) \subseteq \mathrm{supp}^-(y)$ 时，$x \preceq y$。对于 $p \in B$ 和 $u \in V$，我们定义

$$\mathrm{dep}(p, \chi_u) := \bigsqcap \left\{ x \in \{-1,0,1\}^V \;\middle|\; u \in \mathrm{supp}^+(x),\ \langle p, x \rangle = f(x) \right\},$$
$$\mathrm{dep}(p, -\chi_u) := \bigsqcap \left\{ x \in \{-1,0,1\}^V \;\middle|\; u \in \mathrm{supp}^-(x),\ \langle p, x \rangle = f(x) \right\},$$

其中 $\sqcap \emptyset := \mathbf{0}$。根据定义，若存在某个 $s_u \preceq \mathrm{dep}(p,\ s_v)$，则有 $s_u \in \{\pm\chi_u\}$ $s_u \preceq \mathrm{dep}(p,\ s_u) \preceq \mathrm{dep}(p,\ s_v)$。下列结论见于 [1]。

引理 6（[1]）。（1）设 $p \in B$、$u \in V$ 和 $s_u \in \{\pm\chi_u\}$。则有

$$s_u \in \Phi_B(p) \iff p + \varepsilon s_u \in \mathrm{P}(f) \text{ for some } \varepsilon > 0 \iff \mathrm{dep}(p, s_u) = \mathbf{0}.$$

（2）设 $p \in B$、u、$v \in V$ 满足 $u \neq v$、$s_u \in \{\pm\chi_u\}$ 和 $s_v \in \{\pm\chi_u\}$。假设 $p + s_u \notin B$。则有

$$s_u + s_v \in \Phi_B(p) \iff p + \varepsilon(s_u + s_v) \in \mathrm{P}(f) \text{ for some } \varepsilon > 0 \iff -s_v \preceq \mathrm{dep}(p, s_u).$$

我们证明命题 (i)。由 P(f) 的凸性及引理 1，可得 $q - p \in \mathrm{cone}(\{ \alpha \in \Phi \mid p + \varepsilon\alpha \in \mathrm{P}(f)$，其中某个 $\varepsilon > 0 \})$。此外，可以看出

$$\mathrm{cone}(\{ \alpha \in \Phi \mid p + \varepsilon\alpha \in \mathrm{P}(f) \text{ for some } \varepsilon > 0 \}) = \mathrm{cone}(\Phi_B(p)),$$

这意味着 (LP) 有一个可行解，即命题 (i) 成立。包含关系 ($\supseteq$) 显然。为证明反向包含关系 ($\subseteq$)，任取 $\alpha \in \Phi$，使得对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $p + \varepsilon\alpha \in \mathrm{P}(f)$。若对于某个 $u \in V$ 和 $s_u \in \{\pm\chi_u\}$，有 $\alpha = s_u$，则由引理 6 (1) 可得 $s_u \in \Phi_B(p)$。设对于某些互不相同的 u、$v \in V$、$s_u \in \{\pm\chi_u\}$ 和 $s_v \in \{\pm\chi_v\}$，有 $\alpha = s_u + s_v$。若 s_u，则 $s_v \in \Phi_B(p)$，从而 $\alpha \in \mathrm{cone}(\Phi_B(p))$；证毕。否则，由引理 6 (2)，可得 $s_u + s_v \in \Phi_B(p)$。这就完成了 (i) 的证明。

我们证明陈述 (ii)。以下引理是证明的关键。

引理 7. 对于 u、v、$w \in V$，设 $s_u \in \{\pm\chi_u\}$、$s_v \in \{\pm\chi_v\}$ 和 $s_w \in \{\pm\chi_w\}$。若 s_u、$-s_u + s_v \in \Phi_B(p)$，则 $s_v \in \Phi_B(p)$。此外，若 $s_u + s_v$、$-s_v + s_w \in \Phi_B(p)$ 且 $s_u \neq -s_w$，则 $s_u + s_w \in \Phi_B(p)$ 或 s_u、$s_w \in \Phi_B(p)$。

证明。首先证明前一个结论。注意，由 $-s_u + s_v \in \Phi_B(p)$，我们有 $u \neq v$。反设 $s_v \notin \Phi_B(p)$。那么，由 $-s_u + s_v \in \Phi_B(p)$ 和引理 6 (2)，我们有 $s_u \preceq \mathrm{dep}(p, s_u) \preceq \mathrm{dep}(p, s_v)$，这意味着 $\mathrm{dep}(p, s_u) \neq \mathbf{0}$。因此，由引理 6 (1)，$s_u \notin \Phi_B(p)$，这与假设 $s_u \in \Phi_B(p)$ 矛盾。

接下来证明后一个结论。注意，由 $s_u + s_v, -s_v + s_w \in \Phi_B(p)$，我们有 $u \neq v \neq w$。假设 $s_u \notin \Phi_B(p)$。由 $s_u + s_v \in \Phi_B(p)$ 和引理 6 (2)，我们有 $-s_v \preceq \mathrm{dep}(p, -s_v) \preceq \mathrm{dep}(p, s_u)$，这意味着 $\mathrm{dep}(p, -s_v) \neq \mathbf{0}$。因此，由引理 6 (1)，$-s_v \notin \Phi_B(p)$。此外，由 $-s_v + s_w \in \Phi_B(p)$ 和引理 6 (2)，我们得到 $-s_w \preceq \mathrm{dep}(p, -s_w) \preceq \mathrm{dep}(p, -s_v) \preceq \mathrm{dep}(p, s_u)$。因此，$s_u \neq -s_w$ 意味着 $u \neq w$，并且由引理 6 (2)，我们得到 $s_u + s_w \in \Phi_B(p)$。

□

反设线性规划问题（LP）的最优值严格为正。设$\mu^* = (\mu^*_\alpha)_{\alpha \in \Phi_B(p)}$是一个最优解。任取 $\alpha_0 \in (\Phi_B(p) \setminus \Phi_B(p, q)) \cap \mathrm{supp}(\mu^*)$（根据最优值为正的假设，这样的$\alpha_0$ 存在）。那么存在 $u \in \mathrm{supp}(\alpha_0)$使得 $\alpha_0(u)(q(u) - p(u)) \leq 0$。由于$\sum_{\alpha \in \Phi_B(p)} \mu^*_\alpha \alpha = q - p$，存在 $\alpha_1 \in \mathrm{supp}(\mu^*)$使得$\alpha_0(u) + \alpha_1(u) = 0$，或者等价地，$\alpha_0(u)\alpha_1(u) = -1$。于是，对于 $\varepsilon := \min\{\mu^*_{\alpha_0}, \mu^*_{\alpha_1}\}$，我们得到 $q - p$的如下非负组合表示：

$$q - p = \big(\mu^*_{\alpha_0} - \varepsilon\big)\alpha_0 + \big(\mu^*_{\alpha_1} - \varepsilon\big)\alpha_1 + \sum_{\alpha \in \Phi_B(p) \setminus \{\alpha_0, \alpha_1\}} \mu^*_\alpha \alpha + \varepsilon(\alpha_0 + \alpha_1). \tag{3.2}$$

由引理 7 可知 $\alpha_0 + \alpha_1 = 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 \in \Phi_B(p)$，或者存在 $s_v \in \{\pm\chi_v\}$ 和$s_w \in \{\pm\chi_w\}$，对于某些 $v, w \in V$，使得 $s_v, s_w \in \Phi_B(p)$ 且 $s_v + s_w = \alpha_0 + \alpha_1$。因此，(3.2) 的右端可视为 $\alpha \in \Phi_B(p)$ 的非负组合。令 $\mu' = (\mu'_\alpha)_{\alpha \in \Phi_B(p)}$ 表示相应的系数。

对于这样的 μ'，我们有

$$\begin{aligned}\sum \{\, v(\alpha)\mu'_\alpha \mid \alpha \in \Phi_B(p) \,\} &= \sum \{\, v(\alpha)\mu^*_\alpha \mid \alpha \in \Phi_B(p) \,\} - \varepsilon(v(\alpha_0) + v(\alpha_1) - v(\alpha_0 + \alpha_1)) \\ &\leq \sum \{\, v(\alpha)\mu^*_\alpha \mid \alpha \in \Phi_B(p) \,\} - \varepsilon,\end{aligned}$$

其中，不等式由 $\alpha_0(u)\alpha_1(u) = -1$ 以及引理 5推出。这与 μ^* 的极小性矛盾。因此，陈述 (ii) 成立。

陈述 (iii) 直接由以下事实得出：根据例 1 和定理 20] ，对于满足以下条件的整数矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{Z}^{m \times n}$：对每个列指标 j，以及整数向量 $b \in \mathbf{Z}^m$ 和 $c \in \mathbf{Z}^n$，线性规划 $\min \{\langle c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ 存在一个半整数最优解（如果最优解存在）。由于我们的线性规划问题（LP）符合上述情形，且根据 (ii) 存在最优解，因此可得陈述 (iii)。

致谢

作者感谢 Satoru Fujishige 提出的宝贵意见。本研究得到日本 JSPS KAKENHI 项目资助，项目编号为 JP20K23323、JP20H05795、JP22K17854。

参考文献

[1] K. Ando 和 S. Fujishige。论双拟模多面体的结构。Mathematical Programming，74：293–317，1996。

[2] K. Ando、S. Fujishige 和 T. Naitoh。用于在整数双次模多面体上最小化可分凸函数的贪心算法。日本运筹学会杂志，37(3)：188–196，1994。[3] G. Appa 和 B. Kotnyek。网络矩阵的双向有向推广。《Networks》，47(4)：185–198，2006。[4]A. Bouchet。贪心算法与对称拟阵。Mathematical Programming，38：147–159，1987。[5] A. Bouchet 和 W. H. Cunningham。δ-拟阵、跳跃系统与双拟模多面体。《SIAM离散数学杂志》，8(1)：17–32，1995。[6] R. Chandrasekaran 和 S. N. Kabadi。伪拟阵。《离散数学》，71：205–217，1988。[7] A. Dress 和 T. F. Havel。度量向量空间中判别式的一些组合性质。《数学进展》，62：285–312，1986。[8] S. Fujishige。《次模函数与优化》。爱思唯尔，阿姆斯特丹，第2版，2005。[9] S. Fujishige。双拟模多面体、单纯划分与离散凸性。《离散优化》，12：115–120，2014。[10] K. Murota。凸性与Steinitz交换性质。《数学进展》，124：272–311，1996。[11] K. Murota。《离散凸分析》。SIAM，费城，2003。[12] L. Qi。有向次模性、有向拟阵与有向次模流。Mathematical Programming，42：579–599，1988。[13] R. T. Rockafellar。《凸分析》。普林斯顿大学出版社，1970。