ScienceDirect 收录的目录《计算物理学杂志》期刊主页：
www.elsevier.com/locate/jcp

arXiv:2303.06327v1 [physics.flu-dyn] 11 Mar 2023

光滑粒子动力学中任意几何形状流固界面的任意滑移长度

辛伟蔡[a,1], 臻李[b], 欣 卞[a,*]

[a]流体动力与机电系统国家重点实验室，浙江大学，中国浙江省杭州市 *310027*[b]机械工程系，克莱姆森大学，美国南卡罗来纳州克莱姆森市 *29634*

文章信息

文章历史：收稿日期 XX XX2023 年 最终稿收到日期 XX XX 2023年 接受日期 XX XX2023年 在线发表日期 XX XX 2023年

由编辑教授推荐。

摘 要

我们在光滑粒子流体动力学和光滑耗散粒子动力学模拟中，对任意几何形状的流固界面建立滑移边界条件模型。假设界面附近准稳态时的切向速度呈线性分布，则可指定任意滑移长度b，并据此计算每个边界粒子的人工速度。因此，b 作为输入参数，会影响界面附近耗散力和随机力的计算。当$b \to 0$时，可恢复无滑移条件；当$b \to \infty$时，则可实现自由滑移。从技术上讲，我们设计了两种不同的方法来计算任意边界粒子的人工速度。第一种方法原理简洁，适用于简单几何形状；第二种方法较为精细，可用于复杂几何形状。稳态流动和瞬态流动模拟得到的滑移长度均与预期一致。作为示例，我们广泛采用这两种方法模拟弯曲通道流、椭球体在管流中的动力学，以及复杂微血管内的流动，并在流固界面处指定所需的滑移长度。所提出的方法同样适用于其他粒子方法，例如耗散粒子动力学和移动粒子半隐式方法。

© 2023年 爱思唯尔公司。保留所有权利。

1. 引言

两个多世纪以来，人们通常接受流固界面处的无滑移假设，尤其是在宏观尺度的连续介质流动中 [1]。然而，在许多情况下，无滑移已不再成立，整个 20 世纪都充斥着关于如何规定正确边界条件的争论 [2]。事实上，滑移无处不在

*通讯作者电子邮箱： xcai@zju.edu.cn (Xinwei Cai), zli7@clemson.edu (李振), bianx@zju.edu.cn (卞鑫)

于自然界的界面处。例如，莲叶的特殊表面使其能够防水，这不仅让水滴轻松滑落，还显著减少了污染粒子的附着 [3]；蚜虫利用覆盖在其分泌蜜露上的疏水蜡层来保护和运输蜜露 [4]；鲨鱼皮具有减阻特性 [5], , 这些特性已被应用于人工材料 [6]。在介观/微观尺度上，滑移更为常见。例如，疏水毛细管中的流动 [7] 和碳纳米管中的水超快传输 [8–10] 都表现出界面处的表观滑移。上述例子都不再满足流固界面处的无滑移条件。显然，滑移是常态，而无滑移只是为方便起见而常采用的一种特殊情况。

纳维最早提出了线性滑移边界条件 [11] ，麦克斯韦随后引入了滑移长度 [12]对其进行扩展。托尔斯泰 [13] 对此作出了严格证明，布莱克 [14]也进一步进行了证明。根据纳维的假设，在流固界面处定义滑移速度为

$$\mathbf{v}_s = b\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}}, \tag{1}$$

其中，b 为滑移长度，$\mathbf{v}$ 为流体速度，$\mathbf{n}$ 为界面处的单位法向量。图1示意了界面处三种不同的滑移长度，其中$b = 0$和$b \to \infty$ 分别是无滑移和自由滑移这两种特殊情况。本世纪以来，滑移边界得到了进一步发展。Ou 等人 [15]通过实验表明，超疏水表面可使层流中的压力降最多降低40%；Kamrin 等人 [16] 推导了剪切流中表面高度呈周期性起伏时滑移边界的一般表达式；Zampogna 等人 [17] 提出了适用于湍流粗糙表面的广义滑移表达式。过去十年间，除线性理论外，滑移边界的非线性分析也得到了发展。Sander 等人 [18] 提出了排气滑移边界，以取代边界层外缘连续释放的气泡层；受槐叶萍叶片疏水特性的启发，Xiang 等人 [19] 仿制了一种含有连续气垫的滑移表面；Bottaro [20] 提出了可变形表面的概念，该表面由周期性铺设在刚性基底上的线弹性材料构成。

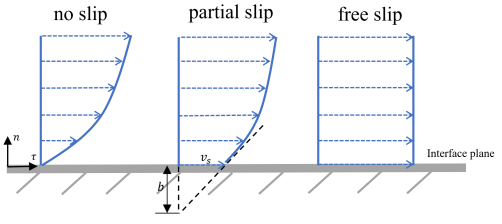


图 1：流固界面附近速度场示意图：无滑移时的滑移长度为 $b = 0$，部分滑移时为$b > 0$，自由滑移时为 $b = \infty$。

数值模拟的快速发展使人们能够轻易观察到滑移边界所引发的现象。在微米/纳米尺度，已有大量分子动力学模拟揭示了滑移边界 [10, 21, 22]。对于宏观/介观流动问题，格子玻尔兹曼和光滑粒子动力学（SPD）是两种常用方法。前者基于网格，实现滑移边界十分直接，已有多项相关研究证实了这一点 [23–25]。然而，对于SPD等无网格方法，如何模拟任意滑移长度仍不明确，尤其是在任意几何形状的界面处。

SPD分别指用于求解宏观或介观流动问题的光滑粒子流体动力学（SPH）或光滑耗散粒子动力学（SDPD）。其拉格朗日特性有利于处理具有动态特性的复杂界面，这类界面涉及耦合、界面追踪和移动边界。SPH最初用于模拟天体物理学现象，此后已广泛拓展至各种流动问题 [26–30]。Espa˜nol和Revenga [31] 在热力学的GENERIC框架下向SPH中引入随机力 [32] ，由此提出了SDPD，使其成为求解Landau-Lifshitz-Navier-Stokes方程 [1, 33–36]的有效方法。SDPD已被广泛用于研究各种介观流动的物理特性 [33, 34, 37–43]。迄今为止，人们已为在SPD中合理实现无滑移或任意流动边界条件付出了诸多努力 [40, 44–52]。对于滑移边界，Hu等人 [37] 简要提及了一种用于平板上方流动的实现方法；Pan等人 [53] 则为平面和圆形界面提出了Robin边界条件。

本文提出了一种适用于光滑粒子流体动力学（SPH）和耗散粒子动力学（SDPD）方法的滑移边界条件，可在任意几何形状的界面上实现任意滑移长度。该条件仅由一个输入参数表征，即滑移长度b，而该参数也与模拟中的输出滑移长度有效相等。我们设计了两种新颖的算法来实现预期的滑移长度：第一种算法扩展了 Morris 等人提出的插值方法，该方法作用于一对相互作用的流体粒子和边界粒子 [45], ；第二种算法则基于 Adami等人提出的求和方法，通过采用邻近流体粒子的平均效应实现 [48]。以下各部分的安排如下：第 2 节介绍流体力学的连续形式和离散形式方程；第 3 节描述这两种关键算法；第 4 节使用 SPD 对多个流动问题进行模拟，以验证所提出的两种算法的可靠性；最后，第 5 节总结本文。

2. 方法

2.1. 拉格朗日流体动力学方程及其边界条件

我们考虑一种等温牛顿流体，其遵循以下拉格朗日形式的连续性方程和纳维–斯托克斯方程

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{v}, \tag{2}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \frac{\eta}{3}\nabla\nabla\cdot\mathbf{v} + \rho\mathbf{f}, \tag{3}$$

其中， ρ、$\mathbf{v}$、p、 η 和$\mathbf{f}$ 分别表示物质密度、速度、压力、动力黏度和单位质量所受的体力。为闭合弱可压缩描述，需要采用状态方程（EOS）将压力与密度关联起来。文献中广泛使用类理想气体状态方程和类液体刚性状态方程 [26, 45], ，它们均可表示为一般形式：

$$p = \frac{c_s^2\rho_0}{\gamma}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} - 1\right] + \chi, \tag{4}$$

其中， ρ_0 为平衡密度。人工声速c_s 根据尺度分析 [26, 45] 选取，使压力场对密度的微小偏差产生强烈响应，从而实现准不可压缩性。

在这种情况下，方程（3）中的倒数第二项可能可以忽略。这里引入 χ 作为正常数，以确保离散粒子上的压力非负。

我们用滑移长度b来表征滑移边界，即纳维滑移长度。在该位置，速度剖面线性外推至固体内部时为零，如图 1 所示。流固界面处的剪切应力可描述为

$$\sigma^{\tau n} = \kappa v_s, \tag{5}$$

其中，κ 为表面摩擦系数，$v_s = |\mathbf{v}_s|$ 为滑移速度的大小，或流体与固体之间的相对速度。假设流体为牛顿流体，则进一步有

$$\sigma^{\tau n} = \eta \frac{\partial v^{\tau}}{\partial n}. \tag{6}$$

由于假设界面附近固体内部的v^{τ} 速度剖面为线性，结合方程（5）和方程（6），可得

$$v_s = \frac{\eta}{\kappa}\frac{\partial v^{\tau}}{\partial n} = b\frac{\partial v^{\tau}}{\partial n}, \tag{7}$$

其中，滑移长度b 等于动力黏度与表面摩擦系数之比。这是构建两种数值算法的关键关系。界面处法向的速度梯度为零 $\partial v^n/\partial n = 0$，对应于不可渗透边界条件；在数值算法中也应考虑这一条件。尽管我们在二维情形下阐述了该边界条件，将其推广到三维情形也很简单。

2.2. 光滑粒子动力学

关于光滑粒子流体动力学/耗散粒子动力学的全面介绍，请参阅近期的综述文章 [26, 27, 36]。为方便起见，我们将一些简单的符号定义为参考

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \tag{8}$$

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j, \tag{9}$$

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}/r_{ij}, \quad r_{ij} = \left|\mathbf{r}_{ij}\right|, \tag{10}$$

其中 $\mathbf{r}_i$、$\mathbf{v}_i$分别表示粒子 i 的位置和速度；$\mathbf{r}_{ij}$、$\mathbf{v}_{ij}$分别表示粒子 i和j的相对位置和速度；r_{ij}表示两者之间的距离，$\mathbf{e}_{ij}$ 是从 j 指向 i 的单位向量。每个粒子的位置按以下方式更新

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i. \tag{11}$$

密度场计算如下 [31]

$$\sigma_i = \frac{\rho_i}{m_i} = \sum_j W\left(r_{ij}\right) = \sum_j W_{ij}, \tag{12}$$

其中，σ 为数密度，定义为 ρ 与粒子质量m （常数）之比。请注意，方程 (12) 中的密度求和与方程 (11) 中的位置更新已经考虑了方程 (2) 中的连续性方程，因此

无需单独离散化 [31]。权重函数$W(r)$，也称为核函数，至少具有两个性质：

$$\lim_{h\to 0} W(\mathbf{r}-\mathbf{r}',h)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\quad \int W(\mathbf{r}-\mathbf{r}',h)\,d\mathbf{r}'=1, \tag{13}$$

其中，h 表示光滑长度。这意味着，所采用的任意核函数都应在$h \to 0$ 时收敛到狄拉克δ函数 δ，且其积分必须归一化。为兼顾计算效率和精度，通常采用由截断半径r_c 定义的有限支撑域。当两个粒子的距离大于r_c时，$W(r_{ij} \geq r_c, h) = 0$，它们的动力学之间不会产生直接影响。本文采用五次样条函数，其$r_c = 3h$，该函数已被证明具有较高精度 [45]:

$$W(s,h)=C_D\frac{1}{h^D}\begin{cases}(3-s)^5-6(2-s)^5+15(1-s)^5, & 0\le s<1;\\ (3-s)^5-6(2-s)^5, & 1\le s<2;\\ (3-s)^5, & 2\le s<3;\\ 0, & s\ge 3.\end{cases} \tag{14}$$

这里，$s = r_{ij}/h$，D 表示维数。归一化系数为$C_2 = 7/478\pi$和$C_3 = 3/359\pi$，分别对应二维和三维情形。

SPD中每个粒子的动量方程可简洁地表示如下：

$$m_i\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t}=\sum_j(\mathbf{F}^C_{ij}+\mathbf{F}^D_{ij}+\mathbf{F}^A_{ij}+\mathbf{F}^R_{ij})+\mathbf{F}^B. \tag{15}$$

这里，$\mathbf{F}^C_{ij}$ 和$\mathbf{F}^D_{ij}$ 分别是相邻粒子对之间的保守力和耗散力，两者之和对应于方程（3）中纳维–斯托克斯方程内由压力和黏性应力引起的力的离散化。本文将考虑两组公式。第一组如下 [37]

$$\mathbf{F}^{C1}_{ij} = -(\frac{1}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_j^2})\frac{\rho_j p_i+\rho_i p_j}{\rho_i+\rho_j}\frac{\partial W}{\partial r_{ij}}\mathbf{e}_{ij}, \tag{16}$$

$$\mathbf{F}^{D1}_{ij} = (\frac{1}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_j^2})\frac{2\eta_i\eta_j}{\eta_i+\eta_j}\frac{\mathbf{v}_{ij}}{r_{ij}}\frac{\partial W}{\partial r_{ij}}. \tag{17}$$

这里采用粒子平均压力和黏度，适用于处理多相问题。此外，我们还将考虑另一组明确满足热力学第 1*st* 定律和第 2*nd* 定律的公式 [31]

$$\mathbf{F}^{C2}_{ij} = -\left(\frac{p_i}{\sigma_i^2}+\frac{p_j}{\sigma_j^2}\right)\frac{\partial W}{\partial r_{ij}}\mathbf{e}_{ij}, \tag{18}$$

$$\mathbf{F}^{D2}_{ij} = \frac{\eta}{\sigma_i\sigma_j r_{ij}}\frac{\partial W}{\partial r_{ij}}\left(\frac{2D-1}{D}\mathbf{v}_{ij}+\frac{D+2}{D}\mathbf{e}_{ij}\cdot\mathbf{v}_{ij}\mathbf{e}_{ij}\right). \tag{19}$$

为尽量减轻所谓的拉伸失稳，我们采用 Adami等人提出的输运速度公式 [54],，该公式是源自 XSPH 的粒子移位技术之一 [26]。其核心思想是动态调整粒子的不规则分布，从而减少数值误差。在这一过程中，会产生一个附加力 $\mathbf{F}^A_{ij}$，如下所示

$$\mathbf{F}^{A1}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma_i^2}+\frac{1}{\sigma_j^2})(\mathbf{A}_i+\mathbf{A}_j)\cdot\frac{\partial W}{\partial r_{ij}}\mathbf{e}_{ij}, \tag{20}$$

其中，$\mathbf{A} = \rho\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})$ 是由两个向量的并矢积得到的张量。此外，$\mathbf{v}$ 是用于动量和力计算的速度，而 $\tilde{\mathbf{v}}$ 是经过修正的输运速度，用于更新每个粒子的位置，具体如下：

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i(t) + \delta t(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} - \frac{1}{\rho_i}\nabla\chi), \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathbf{v}}_i. \tag{22}$$

这里，δt 是时间步，恒定压力 χ 仅出现在方程（21）中，而不是动量方程中。由于输运速度 $\tilde{\mathbf{v}}$ 仅用于位置演化，因此线性动量得以严格守恒。遵循方程（16）中的相同离散形式，方程（21）展开如下

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i(t) + \delta t(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} - \frac{\chi}{m_i}\sum_j(\frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_j^2})\frac{\partial W}{\partial r_{ij}}\mathbf{e}_{ij}). \tag{23}$$

在介观尺度上，分子实体及其持续不断的运动表现为流体动力学方程中的随机应力。为了达到局部热力学平衡，随机应力与耗散应力这对力在本质上相互关联，并且必须遵循涨落耗散定理。在离散情况下，对于给定的耗散力表达式$\mathbf{F}_{ij}^{D}$，我们可以借助GENERIC框架获得相应的随机力$\mathbf{F}_{ij}^{R}$。例如，给定方程（19）中的$\mathbf{F}_{ij}^{D2}$，随机力的有理表达式如下

$$\mathbf{F}_{ij}^{R2} = \left(-\frac{20\eta}{3}\frac{k_BT}{\sigma_i\sigma_j r_{ij}}\frac{\partial W}{\partial r_{ij}}\right)^{1/2} d\overline{\mathscr{W}}_{ij}\cdot\mathbf{e}_{ij}, \tag{24}$$

其中$d\mathscr{W}$是一个 m 维纳过程独立增量的矩阵，且 $d\mathscr{W}$是.....的对称部分 it

$$d\overline{\mathscr{W}}_{ij} = (d\mathscr{W}_{ij} + d\mathscr{W}_{ij}^{T})/2. \tag{25}$$

此外，粒子i 与j之间的以下对称性得以保持

$$d\mathscr{W}_{ij} = d\mathscr{W}_{ji}. \tag{26}$$

维纳过程的独立增量满足以下便于记忆的伊藤规则

$$d\mathscr{W}_{ij}^{\alpha\beta}d\mathscr{W}_{kl}^{\kappa\lambda} = [\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}]\delta^{\alpha\kappa}\delta^{\beta\lambda}dt. \tag{27}$$

文献中还提出了各种其他形式的成对作用力，也存在不同的组合方式 [26, 27, 36]。然而，正如我们将要看到的，所提出的边界条件并不局限于任何特定的力的表达形式。因此，我们仅考虑上述两组形式。具体而言，$\mathbf{F}_{ij}^{C1}$、$\mathbf{F}_{ij}^{D1}$、$\mathbf{F}_{ij}^{A1}$用于光滑粒子流体动力学模拟；$\mathbf{F}_{ij}^{C2}$、$\mathbf{F}_{ij}^{D2}$、$\mathbf{F}_{ij}^{R2}$用于耗散粒子动力学模拟。显然，采用$\mathbf{F}_{ij}^{A}$ 的输运速度形式仅适用于SPH，而不适用于SDPD，因为后者已经具有用于重新分布粒子的随机力。$\mathbf{F}^{B}$ 是任意体力，例如重力产生的力，在SPH和SDPD模拟中只要有需要就会加入。时间积分采用速度Verlet方法进行。

3. 流固界面处任意滑移长度/速度的建模

随着微纳流体学的发展，小尺度下经常会观察到明显的壁面滑移。我们提出两种有效方法，用于在流固界面处实现任意滑移长度/速度，尤其适用于任意几何形状的界面。我们使用边界粒子描述任意固体，并将其静态放置在固体表面内侧、厚度为截断半径的一层区域中。

3.1. 界面处的保守力

边界粒子的压力必须根据流体来确定，以确保界面附近的压力梯度得到满足。因此，可以定义界面附近流体粒子$\mathbf{a}_A$ 与边界粒子$\mathbf{a}_B$ 之间的力平衡 [48]:

$$\mathbf{a}_A = -\frac{\nabla p_A}{\rho_A} + \mathbf{f} = \mathbf{a}_B. \tag{28}$$

根据定义，梯度等于方向导数乘以两个粒子之间的距离，因此边界粒子的压力可表示为

$$p_B = p_A + \rho_A(\mathbf{f} - \mathbf{a}_B) \cdot \mathbf{r}_{BA}. \tag{29}$$

引入 SPH 求和后，边界粒子的离散压力变为 [48]:

$$p_B = \frac{\sum_A p_A W_{BA} + (\mathbf{f} - \mathbf{a}_B) \cdot \sum_A \rho_A \mathbf{r}_{BA} W_{BA}}{\sum_A W_{BA}}. \tag{30}$$

此后，边界粒子 B在与任意相邻流体粒子计算成对保守力时，将p_B 作为其压力。这一压力边界条件非常重要，因为它能确保流固界面附近的密度分布平滑。

3.2. 界面处的耗散力

滑移边界源于界面处的黏性力弱于无滑移边界处的黏性力。基于这一观察，我们对流体粒子 A 与边界粒子 B之间的成对耗散力 $\mathbf{F}^D_{AB}$ 的计算进行修改。为在 SPD 中实现方程 (7)，我们将介绍以下两种方法。第一种方法中，我们将流体粒子视为中心粒子，并计算其到界面的距离。随后，考虑每个邻近边界粒子到界面的距离，并为其指定适当的人工速度。因此，在由流体粒子确定的界面位置处，可获得所需的滑移长度/滑移速度。为便于表述，我们称这种方法为以流体粒子为中心的方法。第二种方法中，我们将边界粒子视为中心粒子，并根据邻近流体粒子计算虚拟粒子的位置/速度。该虚拟粒子代表流体粒子对边界粒子的平均作用，而在由边界粒子确定的界面位置处，可获得所需的滑移长度/滑移速度。为便于表述，我们称这种方法为边界粒子中心法。

3.2.1. 以流体粒子为中心的方法

由于我们假设界面紧邻固体内部的切向速度 v^τ 呈线性分布，因此，如图2所示，滑移速度可根据粒子的属性近似表示为

$$v_s = b\frac{\partial v^\tau}{\partial y} \approx b\frac{v_A^\tau}{d_A + b}. \tag{31}$$

此处，$\mathbf{v}_A = (v_A^\tau, v_A^n)$表示流体粒子的速度。流体粒子$A$ 与界面的距离为d_A 。为了计算流体粒子A 与任意边界粒子B之间的$\mathbf{F}_{AB}^D$，我们需要根据界面处的滑移长度b 明确考虑滑移速度v_s 。为此，给B赋予人工速度$\mathbf{v}_B = (v_B^\tau, v_B^n)$，其在 τ 方向和n 方向上分别具有切向和法向分量，如下所示：

$$\begin{aligned} v_B^\tau &= -\frac{d_B}{d_A}(v_A^\tau - v_s) + v_s = \frac{b - d_B}{b + d_A}v_A^\tau, \\ v_B^n &= -\frac{d_B}{d_A}v_A^n, \end{aligned} \tag{32}$$

其中，d_B 是B到界面的距离。根据公式（32），A 与B之间速度的线性插值会在切向产生滑移速度v_s ，而在法向上速度为零（不可渗透条件）。此外，界面点C处的局部纳维滑移长度b 也得以保持。由于交点C 仅由流体粒子A 确定，且对于相互作用的边界粒子而言并无差异，因此我们将此方法称为以流体粒子为中心（FPC）的方法。

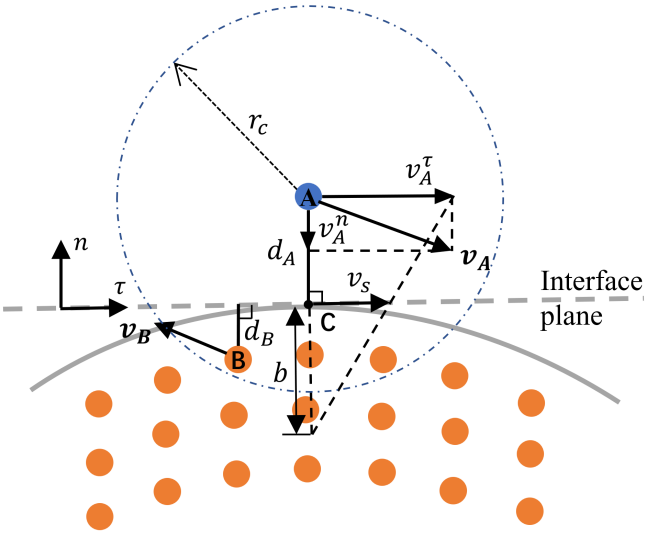


图2：以流体粒子为中心的方法示意图。给定一个流体粒子A，定义一个与固体表面相切的界面平面，使其垂直于线段AC，线段长度为d_A，其中C 为表面上的交点。选取笛卡尔坐标系，使 τ 方向位于界面平面内，n 方向垂直于该平面，同时C 和$\mathbf{v}_A$ 均位于 τn 平面内。因此，b 是沿n 方向的纳维滑移长度，$\mathbf{v}_s$ 是沿 τ 方向的滑移速度。由此，我们将一个三维问题简化为二维问题。B 是一个相邻边界粒子的示例，它与界面平面的距离为d_B 。计算A 和B之间的成对耗散力时，为B 指定一个人工速度$\mathbf{v}_B$，使v_A 与v_B 之间的线性插值在C处具有切向速度$v_C^\tau = v_s$ 和法向速度$v_C^n = 0$ 。对于同一个流体粒子A，其他任意邻近的边界粒子均按照与B相同的步骤处理。由于点C 仅由流体粒子A确定，因此该方法称为以流体粒子为中心的方法。此示意图中的固体处于静止状态。

不难得出$\mathbf{v}_{AB} = (v_{AB}^\tau, v_{AB}^n)$表示$A$ 粒子与B 粒子之间的相对速度，它直接参与

方程 (17) 或方程 (19) 中成对耗散力$\mathbf{F}_{AB}^{D}$ 的计算

$$\begin{aligned} v_{AB}^{\tau} &= \frac{d_A + d_B}{d_A + b} v_A^{\tau}, \\ v_{AB}^{n} &= \frac{d_A + d_B}{d_A} v_A^{n}. \end{aligned} \tag{33}$$

考虑方程（33）中的两个极限情况：首先，当 $b \to 0$ 时，我们得到

$$\begin{aligned} v_{AB}^{\tau} &= \frac{d_A + d_B}{d_A} v_A^{\tau}, \\ v_{AB}^{n} &= \frac{d_A + d_B}{d_A} v_A^{n}, \end{aligned} \tag{34}$$

这正是 SPH 方法 [44, 45] 中采用的经典无滑移边界条件；其次，当 $b \to \infty$

$$\begin{aligned} v_{AB}^{\tau} &= 0, \\ v_{AB}^{n} &= \frac{d_A + d_B}{d_A} v_A^{n}, \end{aligned} \tag{35}$$

这表示切向上为自由滑移。滑移边界与无滑移边界的实现方式之间的关键区别在于，前者必须像方程（33）那样区别处理切向分量和法向分量，而后者对这两个分量采用相同的缩放常数，如方程（34）所示。无论如何，法向上的不可渗透边界条件保持不变。

如果在非平面界面上发生滑移，主要任务是计算 d_A、d_B 以及界面的法向量 $\mathbf{n}$ 。只需付出少量额外努力，仍可为球体等其他简单几何形状实现这一点 [40, 45]。对于复杂几何形状，我们采用边界体积分数（BVF）方法 [55, 56] 来获取 d_A，具体见附录A。边界的单位法向量 $\mathbf{n}$ 可由下式得到

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\nabla\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|}, \tag{36}$$

而 φ的离散梯度基于粒子A

$$\nabla\varphi_A = \frac{1}{\rho_A} \sum_j \frac{\partial W}{\partial r_{Aj}} \mathbf{e}_{Aj}, \tag{37}$$

其中j 是边界粒子的索引。因此，我们利用方程 (A.7) 和 (36) 得到流体粒子A 和边界粒子B到界面的法向距离，表示为

$$d_A = d_{BVF}, \tag{38}$$

$$d_B = \mathbf{r}_{AB} \cdot \mathbf{n} - d_A. \tag{39}$$

此外，如果可移动固体物体的表面存在滑移边界，我们需要考虑图2所示交点C 处的刚体运动，做法与无滑移边界相同 [40]。方程 (31) 中的滑移速度修正为

$$v_s \approx b \frac{v_A^{\tau} - v_C^{\tau}}{d_A + b}. \tag{40}$$

在这种情况下，边界粒子B的人工速度为

$$\begin{aligned} v_B^\tau &= -\frac{d_B}{d_A}(v_A^\tau - v_s - v_C^\tau) + v_s + v_C^\tau \\ &= \frac{b-d_B}{b+d_A}v_A^\tau + \frac{d_A+d_B}{b+d_A}v_C^\tau, \\ v_B^n &= -\frac{d_B}{d_A}(v_A^n - v_C^n) + v_C^n. \end{aligned} \tag{41}$$

该方法所述的算法只需对现有的光滑粒子流体动力学代码进行简单修改，即可控制流固界面处的滑移边界，并将纳维滑移长度b 作为输入参数。

3.2.2. 边界粒子中心法

前一种方法需要频繁计算任意流体粒子到界面的距离，尤其对于复杂几何形状，这一过程十分繁琐。为避免这一缺陷，我们可以将一个边界粒子作为中心粒子，并考虑一个虚拟粒子E，它代表相邻流体粒子对该边界粒子的平均作用，如图3所示。给定一个边界粒子B，虚拟粒子E的位置和速度通过光滑粒子流体动力学插值计算如下：

$$\mathbf{x}_E = \frac{\sum_A \mathbf{x}_A W_{BA}}{\sum_A W_{BA}}, \tag{42}$$

$$\mathbf{v}_E = \frac{\sum_A \mathbf{v}_A W_{BA}}{\sum_A W_{BA}}. \tag{43}$$

随后，我们为B 赋予人工速度$\mathbf{v}_B = （v_B^\tau,\ v_B^n）$，如下：

$$\begin{aligned} v_B^\tau &= -\frac{d_B}{d_E}(v_E^\tau - v_s) + v_s = \frac{b-d_B}{b+d_E}v_E^\tau, \\ v_B^n &= -\frac{d_B}{d_E}v_E^n, \end{aligned} \tag{44}$$

其中，d_E 和d_B 分别是E 和B到界面的距离。根据方程（44），在E 和B之间对速度进行线性插值，会在切向产生滑移速度v_s，并在法向产生零速度（不可渗透条件）。此外，界面点C处的局部纳维滑移长度b 也得以良好保持。由于交点C 仅由边界粒子B 确定，且对于相互作用的流体粒子而言并无差异，因此我们将这种方法称为边界粒子中心法（BPC）。

若非平面界面处发生滑移，我们采用附录A中所述的BVF方法，在开始时仅计算一次每个边界粒子到界面的距离d_B 和法向量$\mathbf{n}$，

$$d_B = d_{BVF}, \tag{45}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\nabla\varphi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|}, \tag{46}$$

而 φ的离散梯度则基于粒子B

$$\nabla\varphi_B = \frac{1}{\rho_B}\sum_j \frac{\partial W}{\partial r_{Bj}}\mathbf{e}_{Bj}, \tag{47}$$

其中，j是边界粒子的索引。在模拟过程中，根据$\mathbf{x}_E$的位置，我们得到

$$d_E = \mathbf{r}_{EB}\cdot\mathbf{n} - d_B. \tag{48}$$

在实际应用中，法向量$\mathbf{n}$ 与$\mathbf{r}_{EB}$ 的方向几乎一致，因此E 的法向距离也可以近似为$d_E \approx |\mathbf{r}_{EB}| - d_B$。

此外，对于 运动固体，交点C 的刚体运动也会被考虑在内， s

$$\begin{aligned} v_B^{\tau} &= \frac{b-d_B}{b+d_E} v_E^{\tau} + \frac{d_E+d_B}{b+d_E} v_C^{\tau}, \\ v_B^{n} &= -\frac{d_B}{d_E}(v_E^{n} - v_C^{n}) + v_C^{n}. \end{aligned} \tag{49}$$

计算任意相邻流体粒子A 与边界粒子B之间的$\mathbf{F}_{AB}^{D}$ 时，需要用到相对速度$\mathbf{v}_{AB}$ 。计算过程与前一种方法相同，这里不再赘述。在这些计算中，B的人工速度保持不变，直到$\mathbf{x}_E$ 或$\mathbf{v}_E$ 更新为止。

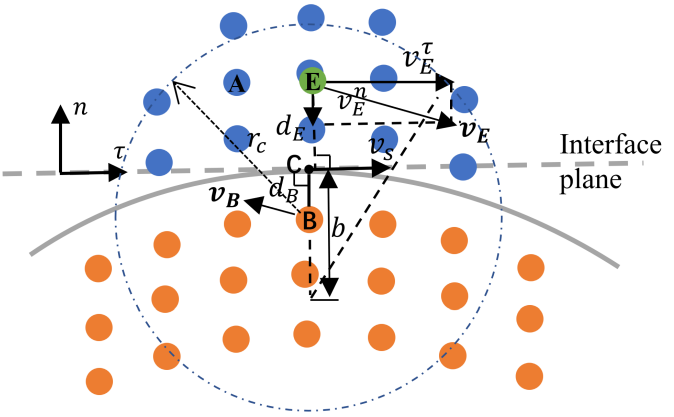


图3：边界粒子中心法示意图。给定一个边界粒子B，在固体表面上定义一个与固体表面相切的界面平面，使其垂直于线段BC，线段长度为d_B，其中C为表面上的交点。虚拟粒子E代表相邻流体粒子对B的平均影响，其位置x_E和速度v_E通过SPH插值计算得到。E到界面平面的距离为d_E。选取笛卡尔坐标系，使τ方向位于界面平面内，n方向垂直于该平面，同时C和v_E均位于τn平面内。因此，b为沿n方向的纳维滑移长度，v_s为沿τ方向的滑移速度。由此，我们将三维问题简化为二维问题。给B赋予人工速度v_B，使得v_E与v_B之间的线性插值在C点具有切向速度$\mathrm{v}_C^{\tau} = \mathrm{v}_s$和法向速度$\mathrm{v}_C^{n} = 0$。在计算边界粒子B与任意流体粒子A之间的成对耗散力时，人工速度v_B保持不变，直到x_E或v_E更新为止。由于点C完全由边界粒子B确定，因此这种方法称为边界粒子中心法。此示意图中固体处于静止状态。

3.2.3. 两种算法的评论

这里有几点需要说明。第一种方法是对 Morris 等人的方法 [45] 的扩展。它根据相互作用的一对流体粒子和边界粒子到界面的距离，确定后者的人工速度。这样，便可使两个粒子之间的插值速度在界面处达到期望值，即滑移速度。该方法精确，且可直接用于平壁、圆柱/球形物体等几何形状简单的界面。然而，对于复杂界面，该方法的应用会变得繁琐，因为必须频繁计算任意流体粒子到界面的距离。第二种方法基于 Adami等人的方法 [48]。它避免了频繁计算流体粒子到界面的距离。取而代之的是，

在模拟开始之前，只需计算一次每个边界粒子到界面的距离。在模拟过程中，为每个边界粒子创建一个虚拟粒子，并利用 SPH核函数，根据附近流体粒子对其位置和速度进行插值。该虚拟粒子代表流体粒子对相应边界粒子的平均作用，因此可根据前者计算后者的人工速度。虚拟粒子的位置和速度可以像方程 (12) 中那样，在密度求和循环中计算。从表面上看，第二种方法似乎牺牲了精度。然而，我们将通过数值算例证明，与第一种方法相比，第二种方法的误差可以忽略不计。

这两种方法所描述的边界粒子的人工速度仅用于计算耗散力，而不用于固体的运动学描述。若固体可以移动，则所有组成它的边界粒子会一同运动，并遵循附录 B 中所述的刚体动力学。

3.3 界面处的随机力

在耗散粒子动力学（SDPD）中，必须根据耗散力对随机力进行修正，以使涨落耗散定理在界面处也成立。我们首先回顾静止固体物体在界面处的特殊情况$b = 0$，即无滑移边界条件。将方程 (34) 中流体粒子与边界粒子之间的相对速度代入方程 (19) 中的耗散力表达式，可得

$$\mathbf{F}_{AB}^{D2} = \left(\frac{d_A + d_B}{d_A}\right) \frac{\eta}{\sigma_A \sigma_B r_{AB}} \frac{\partial W}{\partial r_{AB}} \left(\frac{2D-1}{D}\mathbf{v}_{AB} + \frac{D+2}{D}\mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{v}_{AB}\mathbf{e}_{AB}\right). \tag{50}$$

与两个流体粒子之间的耗散力相比，流体粒子与边界粒子之间的耗散力会产生有效黏度，其表达式为 [33]

$$\eta_{AB} = \frac{d_A + d_B}{d_A}\eta. \tag{51}$$

不难看出，这对于做刚体运动的固体物体同样成立。

根据 GENERIC结构 [32], ，我们可以直接得到A 与B之间的随机力：

$$\mathbf{F}_{AB}^{R2} = \left(\frac{d_A + d_B}{d_A}\right)^{1/2} \left(-\frac{20\eta}{3} \frac{k_B T}{\sigma_A \sigma_B r_{AB}} \frac{\partial W}{\partial r_{AB}}\right)^{1/2} d\overline{\mathscr{W}}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{AB} \tag{52}$$

因此，界面处满足涨落耗散定理。只需在方程 (24) 中用 η_{AB} 替换 η，方程 (52) 就是界面处正确的随机力。

对于流固界面处的一般部分滑移，可根据具有各向异性的有效黏度来修正随机力。相应地，A与B的随机力的各向异性缩放因子，其中$b > 0$，如下所示：

$$\begin{aligned} \tau &: \left(\frac{d_A + d_B}{d_A + b}\right)^{1/2}, \\ n &: \left(\frac{d_A + d_B}{d_A}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{53}$$

其中，τ 和n 分别是界面平面上的切向和法向。如果$b \to 0$，不难看出，由方程 (53) 确定的界面处随机力可还原为方程 (52)。

4. 数值结果

为展示所提出的两种滑移边界条件方法的能力，我们选取了多个示例，涵盖从简单到复杂的多种情形：平面和圆形界面周围的流动，以及任意几何形状的复杂界面周围的流动；瞬态和稳态流动；宏观流动，以及具有热涨落的介观流动。在可能的情况下，我们推导解析解，并与 SPD 模拟结果进行比较。如果解析解难以求得，我们则通过有限差分法或有限体积法构造解作为参考。由于两种方法所得结果的差异通常可以忽略不计，为避免冗余，我们仅展示边界粒子中心法的结果。如果没有其他可用的参考结果，我们会展示两种方法的结果并相互比较。

4.1. 库埃特流

我们首先考虑二维库埃特流，其稳态速度呈线性分布，如图 4 所示。上、下壁面之间的距离为$L = 10^{-3}$ m。位于$y = 0$ 处的下壁面始终静止，而上壁面以恒定速度$v_w = 1.25 \times 10^{-5}\mathrm{ms}^{-1}$ 沿x 方向运动。我们设定流体的运动黏度为$\nu = 10^{-6}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$，密度为 $\rho = 1000\mathrm{kgm}^{-3}$。因此，相应的雷诺数为$Re = v_w L/\nu = 0.0125$。当流动达到稳态时，两壁面上施加滑移边界条件时的速度解析解为

$$v_x(y) = \frac{v_w(y + b^{lo})}{L + b^{up} + b^{lo}}, \tag{54}$$

其中，b^{up} 和b^{lo} 分别为上、下壁面指定的滑移长度。

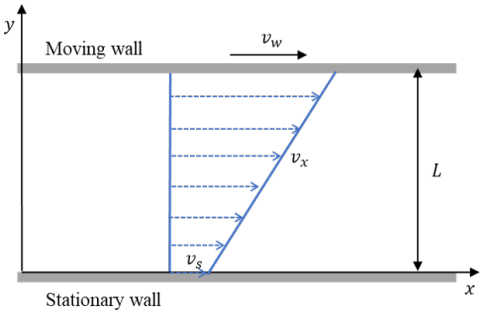
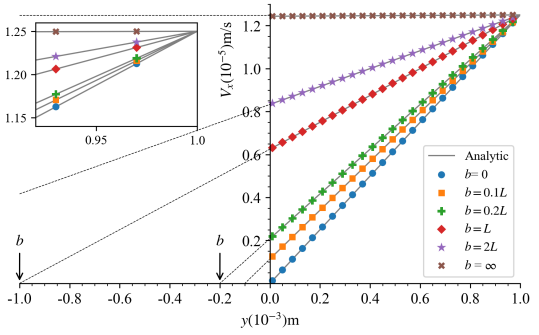
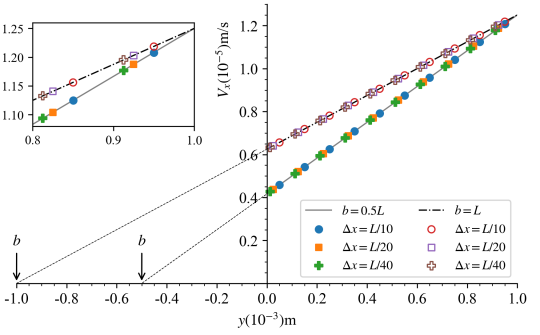


图 4：示意图 上壁面运动时库埃特流的示意图。上壁面或下壁面采用部分滑移边界条件 .

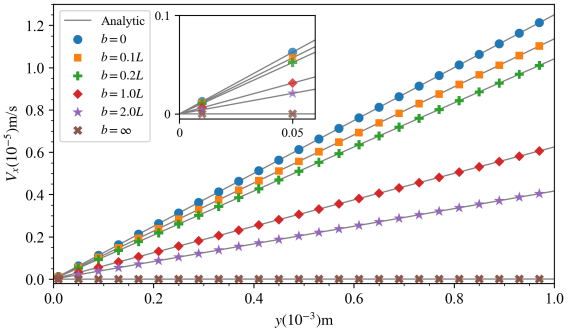
图 5(a) 展示了光滑粒子流体动力学模拟得到的速度剖面与方程 (54) 中解析解的对比。下方静止壁面设定了滑移长度，而上方运动壁面采用无滑移边界条件。以符号表示的模拟结果与各自对应的解析曲线完全重合。最左侧的曲线表示速度向边界内的外推，其与横坐标的交点对应不同的滑移长度。显然，模拟结果对于无滑移、任意部分滑移以及自由滑移边界条件均具有可靠性。此外，我们还对粒子分辨率进行了收敛性研究，如图 5(b) 所示。可以看出，对于单向流动，通道宽度方向上仅需 10 个粒子的模拟就足够了。



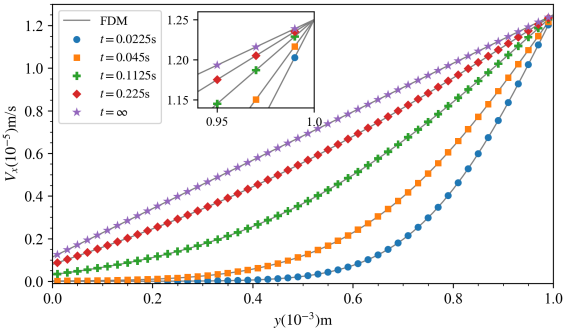
(a) 稳态下的模拟结果与解析解的比较：在下方静止壁面上施加不同的滑移长度b，在上方运动壁面上施加无滑移边界条件。速度剖面 y 截距绝对值表示模拟所得的滑移长度。



(b) 对 Δx 进行收敛性研究，取 $b = 0.5L$ 和 $b = L$，见图 5(a)。



(c) 稳态下的模拟结果与解析解的比较：在上方运动壁面上施加不同的滑移长度b，在下方静止壁面上施加无滑移边界条件。



(d) 瞬态下的模拟结果与有限差分法的解的比较：下方静止壁面的滑移长度为$b = 0.1L$，上方运动壁面采用无滑移边界条件。

图 5：库埃特流的光滑粒子流体动力学模拟速度剖面，$r_c = 3.0\Delta x$。图 5(a)、5(c) 和 5(d) 中的分辨率为 $\Delta x = L/50$。

此外，我们将上方运动壁面改为允许滑移，同时保持下方静止壁面为无滑移边界。图 5(c) 显示了模拟结果与解析解吻合良好，其中上方壁面设定了不同的滑移长度。上方壁面处的速度梯度与滑移长度成反比。当滑移长度趋于无穷大时，流体不受上方壁面驱动，保持静止。

最后，我们使用有限差分法（FDM）验证光滑粒子流体动力学模拟所得的时变速度剖面。在此情况下，下方静止壁面的滑移长度为$b = 0.1L$，而上方运动壁面则使流体逐渐从静止状态转为流动。图 5(d) 展示了不同时刻选取的速度剖面，光滑粒子流体动力学模拟结果与有限差分法的解高度吻合。这表明，所提出的方法能够处理单向时变流动。

4.2. 泊肃叶流

我们进一步考虑图6所示的具有非线性速度分布的二维泊肃叶流。上、下壁面之间的距离为$L = 10^{-3}$ m。下壁面位于$y = 0$，且两壁面均保持静止。流体的运动黏度为 $\nu = 10^{-6}\mathrm{m^2s^{-1}}$，密度为 $\rho = 1000\mathrm{kg\ m^{-3}}$。该流动由恒定体

力驱动，$F = 10^{-4}\mathrm{Nkg}^{-1}$ 作用于x 方向。因此，在无滑移边界条件下，流动的最大速度为$v_{max} = 1.25 \times 10^{-5}$ ms^{-1}，由此定义雷诺数为$Re = v_{max}L/\nu = 0$=0.0125。当流动达到稳态时，具有滑移边界条件的速度解析解如下

$$v_x(y) = -\frac{F}{2\nu}y^2 + \frac{FH(2b^{up} + L)}{2\nu(L + b^{lo} + b^{up})}y + \frac{Fb^{lo}H(2b^{up} + L)}{2\nu(L + b^{lo} + b^{up})}. \tag{55}$$

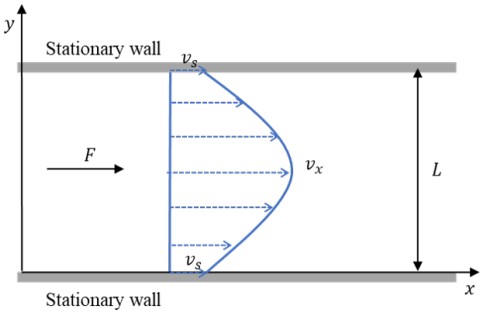
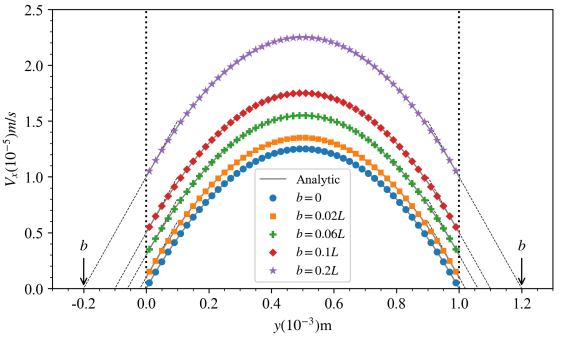


图6：体力驱动的泊肃叶流示意图：上壁面或下壁面施加滑移边界条件。

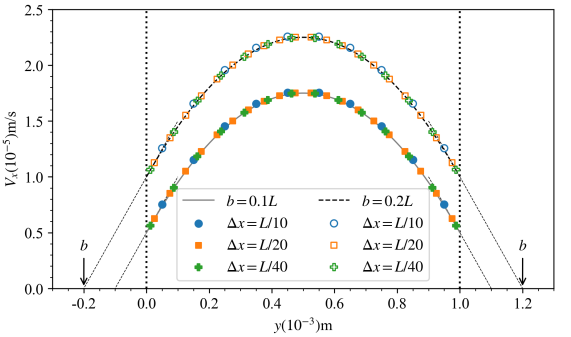
图7(a)展示了光滑粒子流体动力学（SPH）得到的速度剖面与方程（55）中的解析解的对比。下壁面和上壁面均设定了相同的滑移长度。初始时，通道内均匀分布着50个粒子。SPH模拟结果与解析解吻合良好。在流固界面处，速度分布是非线性的，因此利用界面处流体的速度梯度，将速度线性外推至固体内部。y–截距的大小表示模拟得到的滑移长度，与设定值一致。此外，我们对两个选定的滑移长度进行了分辨率研究，如图7(b)所示；即使模拟中只有10个粒子，其速度剖面也与解析解吻合。在另一种情况下，我们考虑下壁面为无滑移边界、上壁面具有不同滑移长度，结果如图7(c)所示。同样，SPH得到的速度与解析解一致，速度剖面向壁面内延伸所得的y截距也再现了预期的滑移长度。此外，我们还展示了图7(d)中的时变速度剖面；在选定时刻，模拟结果与有限差分法（FDM）的解高度吻合。

为考察所提出的方法在无序粒子构型下的表现，我们先使用耗散粒子动力学方法进行一次预模拟，并采用$r_c = 3\Delta x$，使粒子在热涨落作用下重新分布。随后，我们以无序粒子构型作为初始条件进行光滑粒子流体动力学模拟。当流动达到稳态时，新模拟中的粒子构型与先前以方格晶格上的粒子为初始条件的模拟有显著差异，如图 8(a) 所示。左侧快照显示了以方格晶格为初始构型的粒子分布，右侧快照则显示了初始时处于无序状态的粒子分布。由于高度无序的粒子构型会放大 SPH 求和中的数值误差，因此需要采用更大的截断半径$r_c = 4.5\Delta x$才能获得准确结果，如图 8(b) 所示。对于这一较大的截断半径，结果对 Δx 不敏感，如图 8(c) 所示；同样，只需在通道宽度方向上设置 10 个粒子即可。

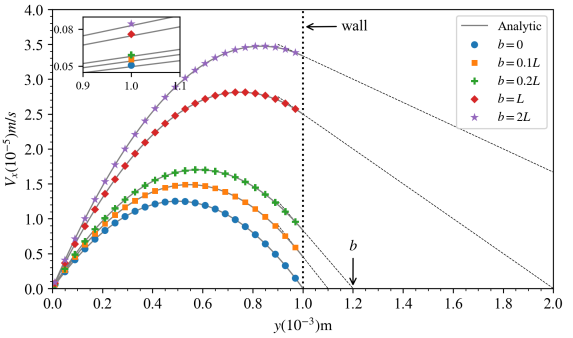
如图 9 所示，对于三种选定的



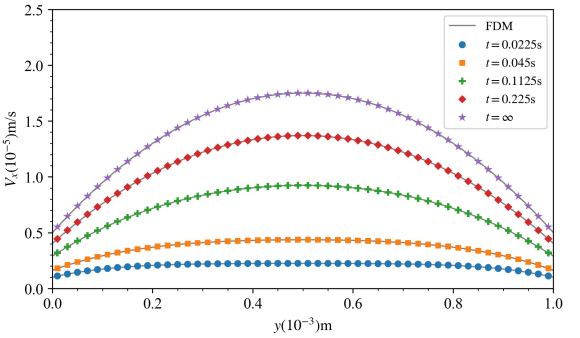
(a) 稳态下与解析解对比的模拟结果：两侧壁面均指定相同的滑移长度b。速度剖面的y轴截距绝对值表示模拟所得的滑移长度。



(b) 图 7(a) 中，当$b = 0.1L$ 且$b = 0.2L$ 时，对 Δx 进行收敛性研究。



(c) 稳态下与解析解对比的模拟结果：上壁面指定不同的滑移长度b，下壁面采用无滑移条件。速度剖面的y轴截距绝对值表示模拟所得的滑移长度。



(d) 瞬态下与有限差分法解对比的模拟结果。两侧壁面均采用滑移边界条件，且滑移长度相同，为$b = 0.1L$。

图 7：泊肃叶流中，$r_c = 3\Delta x$ 的 SPH模拟速度剖面。图 7(a)、7(c) 和 7(d) 中的分辨率为 $\Delta x = L/50$。

滑移长度。

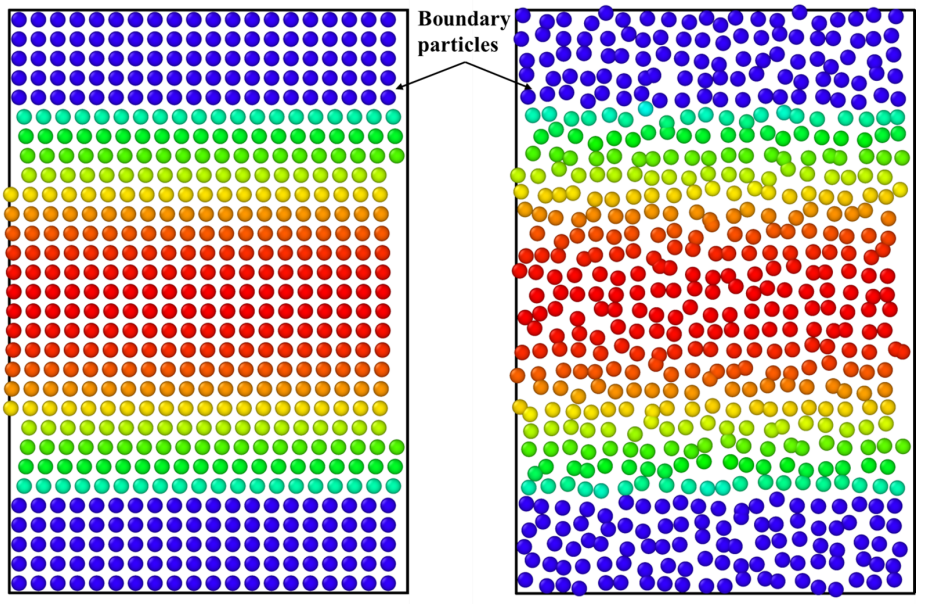
4.3. 泰勒-库埃特流

我们已经看到，这两种方法对于平面界面都效果良好。接下来，我们开始考虑发生在非平面几何流固界面处的滑移长度。第一个例子是所谓的泰勒-库埃特流 [57]。它由两个半径不同的圆柱体组成，半径分别为R_1 和R_2, ，两者都绕同一轴线以角速度 Ω_1 和 Ω_2, 旋转，如图 10(a) 所示。流体充满两个圆柱体之间的空间，因此内壁外侧是凸界面，外壁内侧是凹界面。稳态泰勒-库埃特流的通解为

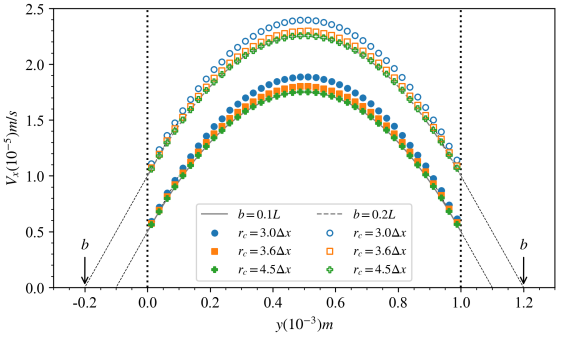
$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}, \tag{56}$$

其中A 和Ba 的待定常数。我们将两侧壁面的滑移边界条件定义如下

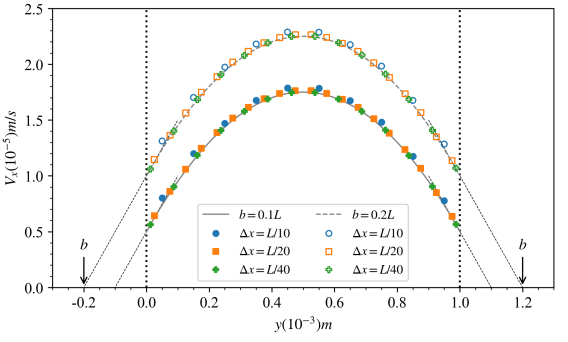
$$\begin{cases} v_\theta(R_1) - R_1\Omega_1 &= b^{in}\frac{dv_\theta}{d\theta}, \\ v_\theta(R_2) - R_2\Omega_2 &= -b^{out}\frac{dv_\theta}{d\theta}, \end{cases} \tag{57}$$



(a) 泊肃叶流稳态下的粒子构型：左图由方格晶格初始构型演化而来，右图由无序状态初始构型演化而来。颜色表示速度大小，蓝色为 0，红色为最大值。两个壁面的滑移长度均为$b = 0.1L$。



(b) $\Delta x = L/40$



(c) $r_c = 4.5\Delta x$

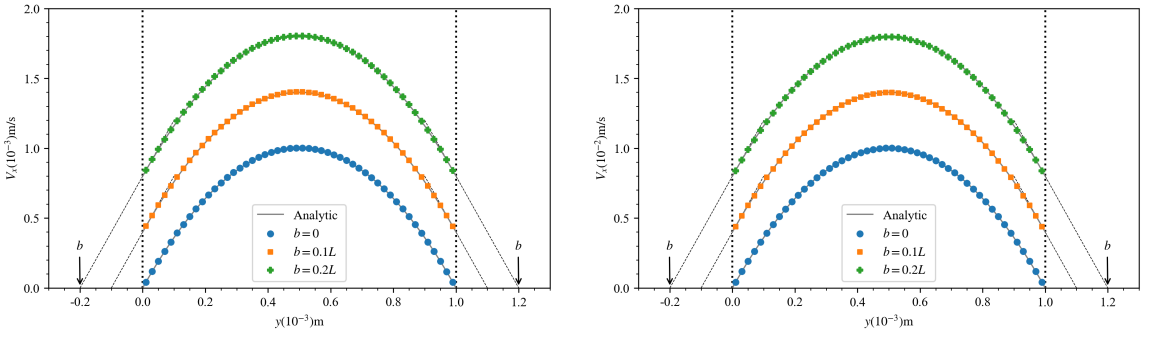
图 8：使用无序粒子进行的泊肃叶流光滑粒子流体动力学模拟结果，两个壁面的滑移长度相同：$b = 0.1L$ 和 $0.2L$

其中，b^{in} 和b^{out} 分别为内壁和外壁的指定滑移长度。结合方程（56）和方程（57），可解得A 和B:

$$A = \begin{vmatrix} R_1\Omega_1 & 1/R_1 + b^{in}/R_1^2 \\ R_2\Omega_2 & 1/R_2 - b^{out}/R_2^2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} R_1 - b^{in} & 1/R_1 + b^{in}/R_2^2 \\ R_2 + b^{out} & 1/R_2^2 - b^{out}/R_2^2 \end{vmatrix}, \tag{58}$$

$$B = \begin{vmatrix} R_1 - b^{in} & R_1\Omega_1 \\ R_2 - b^{out} & R_2\Omega_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} R_1 - b^{in} & 1/R_1 + b^{in}/R_2^2 \\ R_2 + b^{out} & 1/R_2^2 - b^{out}/R_2^2 \end{vmatrix}. \tag{59}$$

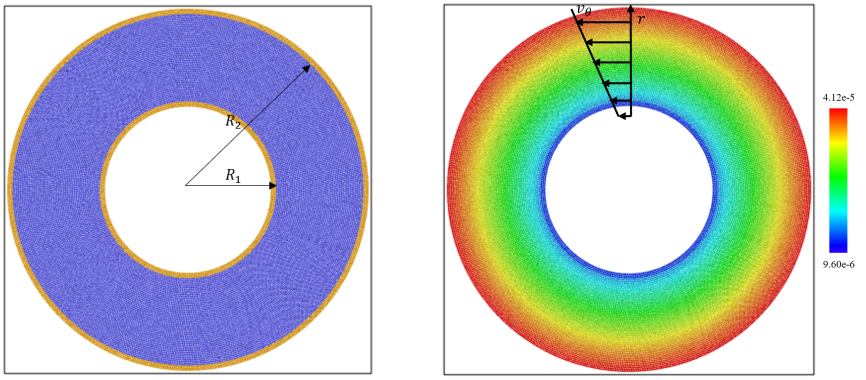
我们取内壁的$R_1 = 10^{-3}$m和$\Omega_1 = 0.01s^{-1}$，外壁的$R_2 = 2 \times 10^{-3}$m和$\Omega_2 = 0.02s^{-1}$。前者在界面处具有可变滑移长度，而后者在界面处保持无滑移边界条件。因此，内外壁之间的距离为$L = 10^{-3}$m。我们在通道中均匀布置50个光滑粒子流体动力学粒子，即 $\Delta x = L/50 = 2 \times 10^{-5}$m。流体密度取为 $\rho =$



(a) 雷诺数 = 1　　(b) 雷诺数 = 10

图9：初始粒子排列在方格晶格上的泊肃叶流光滑粒子流体动力学模拟结果，雷诺数 = 1 和雷诺数 = 10 时：$r_c = 3\Delta x$ 和 $\Delta x = L/40$。

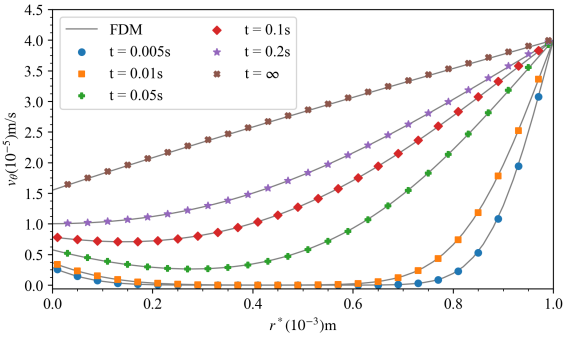
$1000\mathrm{kgm}^{-3}$，运动黏度为 $\nu = 10^{-6}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$。当两侧壁面均采用无滑移边界条件时，最大速度$v_{max} = \Omega R_2 = 4 \times 10^{-5}\mathrm{ms}^{-1}$，由此定义雷诺数$Re = Lv_{max}/\nu = 0.04$。图10(b)展示了此类流动的典型速度分布，例如，在内壁上指定滑移长度$b^{in} = 0.1L$。因此，本例中内壁外表面处存在滑移速度，速度向内壁内部外推后，会在距离b处降为零。



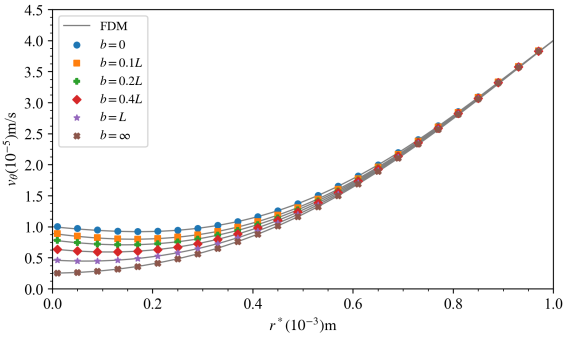
(a) 不同半径的构型。　　(b) 速度场。

图 10：内壁半径为 $R_1 = 10^{-3}m$、外壁半径为 $R_2 = 2 \times 10^{-3}m$ 且长度为 $L = R_2 - R_1 = 10^{-3}m$ 的泰勒-库埃特流示意图。内壁的滑移长度为 $b = L/10$，外壁为无滑移边界。

为进行定量评估，我们在内壁指定滑移长度为$b = 0.2L$，在外壁施加无滑移条件，并采用有限差分法构造一组参考解，见附录C。图11(a)展示了瞬态光滑粒子流体动力学结果与参考解的对比，其中非平面界面之间的非线性速度剖面得到了很好的捕捉，且两组结果高度吻合。此外，我们还旨在考察不同滑移长度对精度的影响。因此，我们针对内壁的不同滑移长度进行了光滑粒子流体动力学模拟，并相应地采用有限差分法构造参考解。我们选取$t = 0.1s$ 时刻的速度剖面展示于图11(b)，两组结果总体上仍保持一致。光滑粒子流体动力学与有限差分法的结果在其他时刻也相互吻合，为避免冗余，此处不再展示。



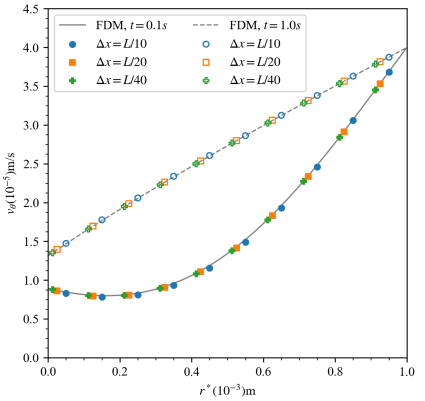
（a）内壁滑移长度为$b = 0.2L$ 时不同时间的瞬态结果，内壁为无滑移条件，外壁为无滑移条件。



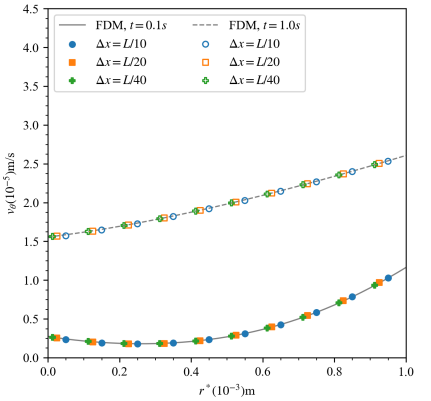
（b）$t = 0.1s$ 时内壁采用不同滑移长度的瞬态结果，内壁为无滑移条件，外壁为无滑移条件。

图 11：泰勒-库埃特流的 SPH 模拟速度剖面。

此外，我们还针对粒子分辨率进行了收敛性研究。图12展示了两个选定时刻$t = 0.1$s和1.0s的结果。图12(a)展示了内壁滑移长度为$b = 0.1L$、外壁无滑移时的结果；图12(b)则展示了内外壁滑移长度均为$b = L$ 时的结果。结果表明，即使分辨率低至 $\Delta x = L/10$（即通道内有10个粒子），滑移边界条件仍能得到良好描述。



(a) 内壁上的滑移长度$b = 0.1L$，而外壁上无滑移



(b) 内外壁上的滑移长度均为$b = L$ 外壁

图 12：泰勒-库埃特流中 Δx 与$r_c = 3\Delta x$ 的收敛性研究：两个选定时刻分别为$t = 0.1s$ 和$t = 1.0s$。

进行分辨率研究的另一种方法是增大曲率或减小壁面的半径。这里，我们将内半径缩小为原来的 1/5，同时保持两壁之间的距离不变，即$R_1 = 2 \times 10^{-4}m$ 和$R_2 = 1.2 \times 10^{-3}m$。角速度为 $\Omega = 1.04 \times 10^{-2}$ 的外壁采用无滑移边界条件，而内壁保持静止，并可具有不同的滑移长度。如图 13 所示，我们将稳态下 SPH模拟得到的速度剖面与方程 (56) 中不同滑移长度对应的解析解进行了比较。我们发现，粒子数增加 5 倍的 SPH 结果与解析解吻合良好，这与内壁曲率增大 5 倍的情况一致。速度的虚线延伸至内壁，其交点

与水平轴的交点表示滑移长度。

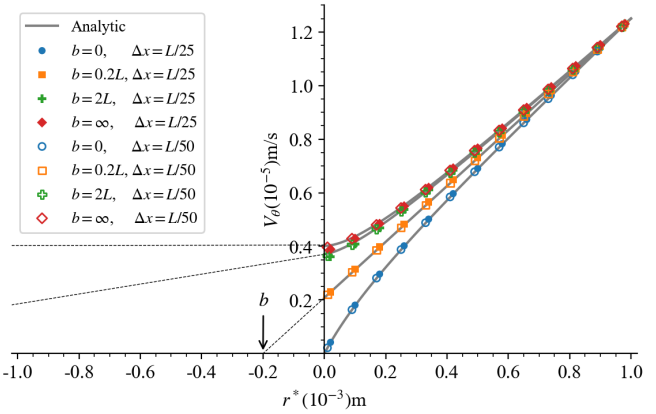


图 13：泰勒-库埃特流稳态下的 SPH模拟速度剖面：内壁具有不同的滑移长度b，外壁无滑移。内壁静止，外壁以角速度 1.04×10^{-2}s^{-1} 旋转。$R_1 = 0.2\times10^{-3}$m、$R_2 = 1.2\times10^{-3}$m，通道宽度$L = 10^{-3}m$； $\Delta x = L/50$，且$r_c = 3.0\Delta x$。

4.4. 迪恩流

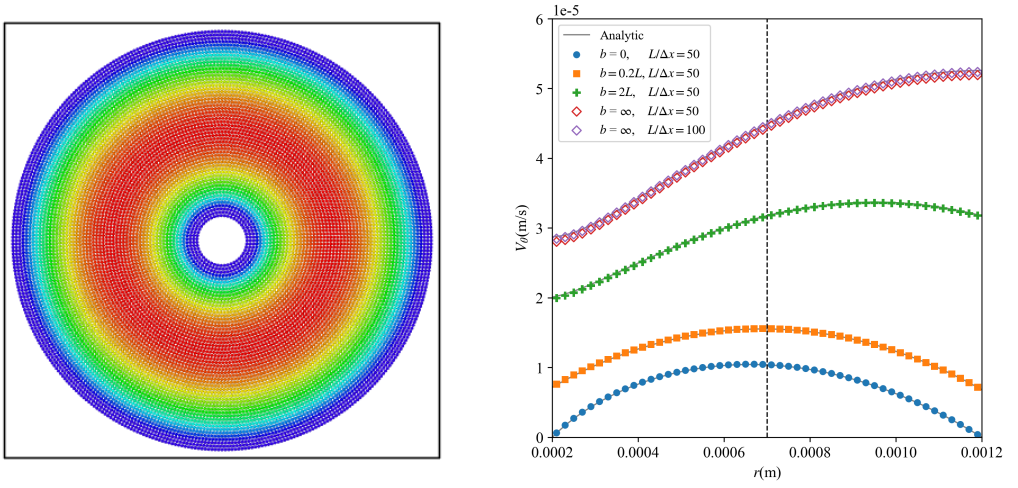
我们在泰勒-库埃特流中引入方位压力梯度，这种流动称为迪恩流 [58]。在我们的模拟中，内外壁均保持静止，并采用相同的滑移长度。为模拟压力梯度，在整个区域施加方位体力F_θ 以驱动流动。稳态迪恩流的通解为

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r} - \frac{F_\theta}{3\nu}r^2, \tag{60}$$

这会在没有体力的情况下恢复方程（56）。当指定与方程（57）相同的滑移边界条件，且 $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ 给定时，我们可以求解系数 A 和 B:

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_\theta}{3\nu}\frac{(2a-R_1)(R_2-b)R_1^3 + (2b+R_2)(R_1+a)R_2^3}{R_1^2(a-R_1)(R_2-b) + R_2^2(b+R_2)(R_1+a)}, \\ B &= -\frac{F_\theta}{3\nu}\frac{(2a-R_1)R_1^3}{R_1+a} + A_2\frac{R_1^2(a-R_1)}{R_1+a}. \end{aligned} \tag{61}$$

流体的密度取为 $\rho = 1000\text{kgm}^{-3}$，运动黏度为 $\nu = 10^{-6}\text{m}^2\text{s}^{-1}$。内壁和外壁的半径分别为 $R_1 = 2\times10^{-4}$ m 和 $R_2 = 1.2\times10^{-3}$m。沿各处切向的体力为 $F_\theta = 10^{-4}\text{Nkg}^{-1}$。图 14(a) 展示了 $b = 2\times10^{-4}$m 时的速度场，颜色从边界内侧的蓝色（最小值）渐变到红色（最大值）。图 14(b) 对不同滑移长度进行了定量比较，光滑粒子流体动力学模拟的速度剖面与解析解吻合良好。特别是对于自由滑移边界条件，当忽略界面上的黏性效应时，随着分辨率提高，光滑粒子流体动力学模拟的结果逐渐收敛。



(a) 滑移长度为 $b = 2 \times 10^{-4} m$ 时的速度场。 (b) 不同滑移长度下的速度剖面。

图 14：迪恩流的 SPH 模拟速度。$R_1 = 2 \times 10^{-4} m$，$R_2 = 1.2 \times 10^{-3} m$ 和 $L = 10^{-3} m$。内壁和外壁均设定了多个相同的滑移长度b。

4.5. 圆柱体中的流动

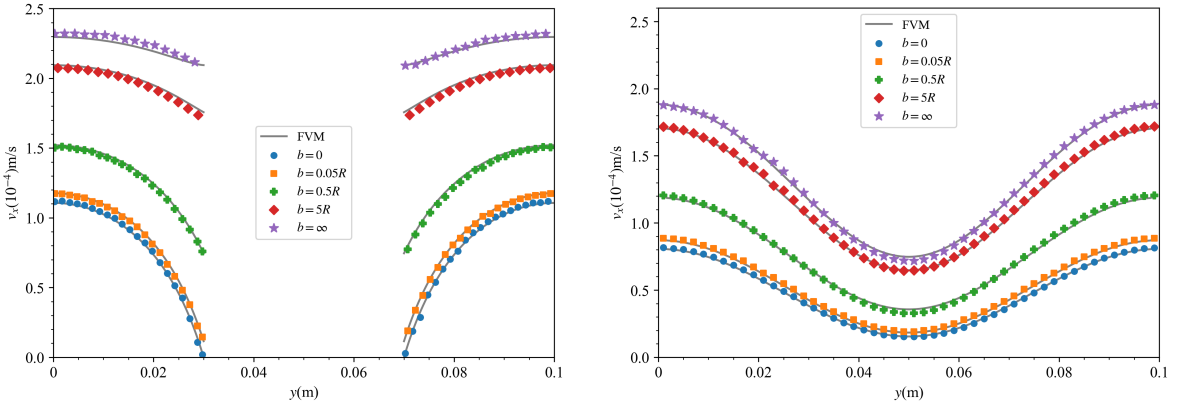
为考察更复杂流动中的滑移边界条件，我们研究流体流经圆柱周期晶格的情形。该构型取自 Morris 等人 [45],：在尺寸为 $L \times L$ 的周期盒中放置一个半径为 $R = 2 \times 10^{-2}\mathrm{m}$ 的圆柱，$= 0.1\mathrm{m} \times 0.1\mathrm{m}$，并施加 $F = 1.5 \times 10^{-7}\mathrm{Nkg}^{-1}$ 的体力驱动流动。流体的密度为 $\rho = 1000\mathrm{kgm}^{-3}$，运动黏度为 $\nu = 10^{-6}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$。采用无滑移边界条件时，流速的量级为 $v = 5 \times 10^{-5}\mathrm{ms}^{-1}$，由此定义雷诺数 $Re = vL/\nu = 1$。

流体从静止状态开始，在沿x 方向的体力驱动下达到稳态。为捕捉自由滑移（$b \gg 0$）流体行为，我们采用 $\Delta x = R/40 = 5 \times 10^{-4}\mathrm{m}$ 的光滑粒子流体动力学分辨率。为验证 SPH 模拟，我们还采用有限体积法（FVM）构建了不可压缩流在稳态下的对应解。具体而言，我们考察两个特定横截面上的速度剖面：路径 1 是一条沿y 方向并穿过圆柱中心的直线；路径 2 是另一条沿y 方向、距圆柱最远的直线。图 15 展示了圆柱表面具有不同滑移长度时路径 1 和路径 2 上的速度剖面。总体而言，SPH 结果与有限体积法的结果吻合良好。当滑移长度$b = 0$时，结果也与 Morris 等人的结果一致 [45]。

我们还在 $\Delta x = R/20$ 的较低光滑粒子流体动力学分辨率下进行了模拟，并在图 16 中展示了结果。我们观察到，当滑移长度较小（$b \leq 0.5R$）时，较低的分辨率已足够；当滑移长度较大（$b \geq 5R$）时，则需要较高的分辨率。

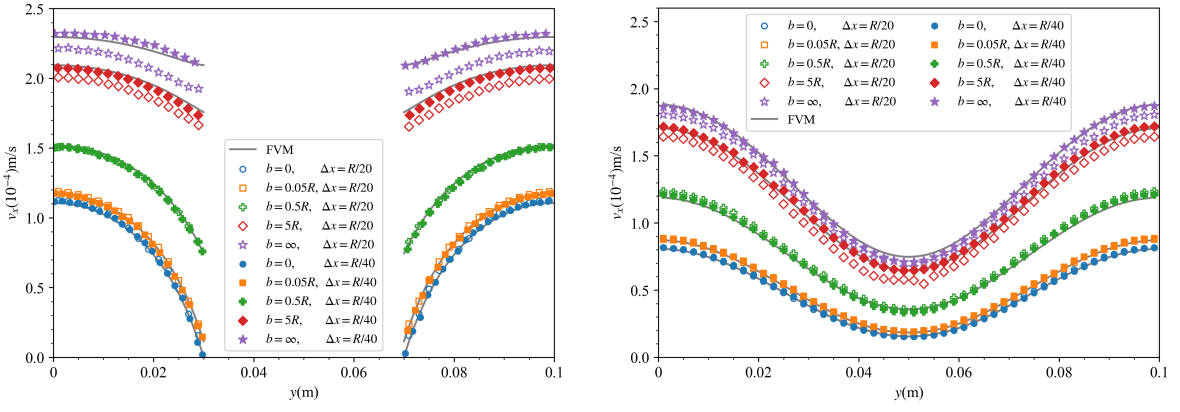
此外，图 17 对比了光滑粒子流体动力学与有限体积法的流场和流线结果，其中固体表面的滑移长度为 $b = 0.5R$。光滑粒子流体动力学的结果是通过使用核函数将粒子插值到笛卡尔网格上获得的。我们观察到，光滑粒子流体动力学模拟的结果与有限体积法的结果吻合良好。

最后，我们计算了半径不同的圆柱在不同滑移长度下的阻力系数，作用于



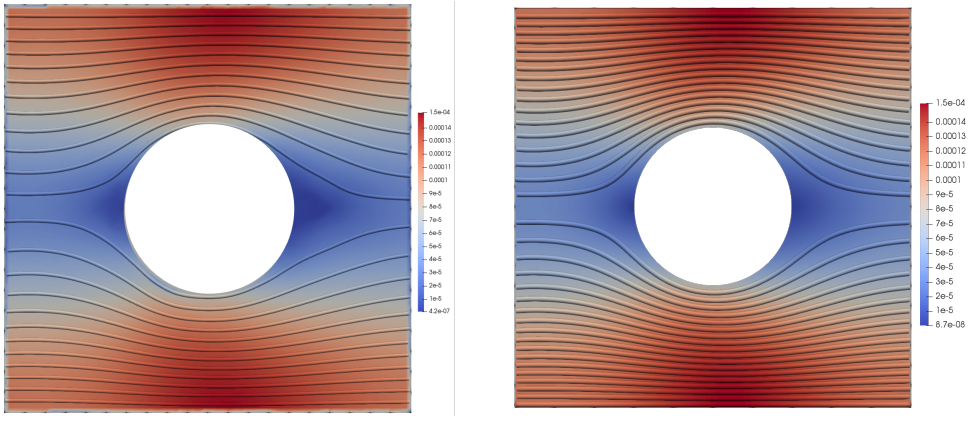
（a）路径 1　　（b）路径 2

图 15：圆柱表面采用滑移边界条件时的速度剖面：光滑粒子流体动力学（SPH）中，$r_c = 3\Delta x$ 和 $\Delta x = R/40$；与有限体积法（FVM）的对比。



（a）路径 1　　（b）路径 2

图 16：不同光滑粒子流体动力学粒子分辨率下的收敛性研究，$r_c = 3\Delta x$。



(a) 光滑粒子流体动力学　　(b) 有限体积法

图 17：固体表面滑移长度为 $b = 0.5R$ 时，圆柱绕流的速度场和流线：光滑粒子流体动力学与有限体积法的比较。

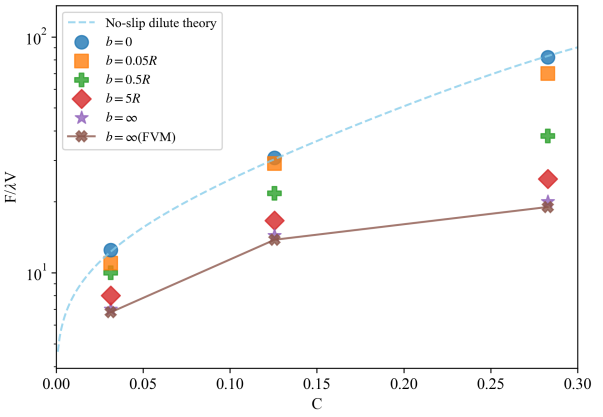


图 18：SPH模拟得到的圆柱绕流阻力系数。浓度 $C = \pi R^2/L^2$。对于无滑移边界条件，参考值采用稀释理论。随着滑移长度增加，阻力系数降低。对于自由滑移边界条件，参考值取自有限体积法模拟。

表面。阻力系数定义为

$$\lambda = \frac{F}{\rho \nu V}, \tag{62}$$

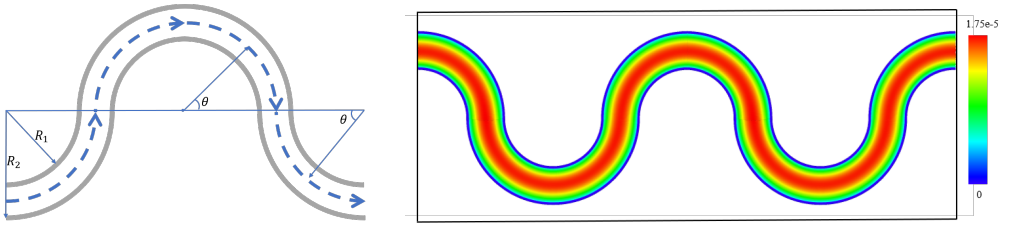
其中，F 是圆柱受到的阻力，V 是远场速度。在图 18 中，我们给出了半径分别为 $R = 1 \times 10^{-2}\mathrm{m}$、$2 \times 10^{-2}\mathrm{m}$ 和 $3 \times 10^{-2}\mathrm{m}$ 时不同滑移长度对应的阻力系数，这些半径分别对应于横轴上的不同固体浓度$C = \pi R^2/L^2$。对于无滑移边界条件的结果，我们参考了先前的研究 [40, 59]。我们观察到，对于无滑移边界条件，SPH结果与稀释理论一致。随着滑移长度增加，阻力系数降低并趋于特定值。对于自由滑移边界条件，我们采用有限体积法模拟的结果作为参考，它们与SPH模拟的结果一致。

4.6. 由半圆和三角函数描述的通道中的流动

曲线边界通道中的流动十分常见。为便于讨论，我们首先模拟一个通道中的流动，该通道的轴线由反向连接的半圆描述，如图 19(a) 所示。因此，可在流动方向上施加周期边界条件，周期在完整圆周结束处闭合。一侧壁面形成的内半径为 $R_1 = 1.5 \times 10^{-3}\mathrm{m}$，另一侧壁面定义的外半径为 $R_2 = 2.5 \times 10^{-3}\mathrm{m}$。因此，通道的相应宽度始终为 $L = 1 \times 10^{-3}\mathrm{m}$。粒子分辨率取为$\Delta x = L/50$，这使得通道横截面上有 50 个粒子。流体密度取为 $\rho = 1000\mathrm{kgm}^{-3}$，运动黏度取为 $\nu = 10^{-6}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$。在各处沿通道方向施加体力 $F = 10^{-4}\ \mathrm{Nkg}^{-1}$，以驱动流动。通道中的特定横截面可用角度 θ 表示，该角度定义在柱坐标系中，其中心与内壁曲率中心重合。

图19(b)展示了速度场的一个快照，作为两侧壁面具有相同滑移长度$b = 0.1L$ 的示例。这里，蓝色表示速度为$v = 0$的静止边界，红色表示通道中部的最大速度$v = 1.75 \times 10^{-5}\mathrm{ms}^{-1}$。速度分布与前文提到的泊肃叶流或迪恩流非常相似。流体靠近流固界面处的速度存在明显滑移。此外，我们

考察两侧壁面具有不同滑移长度的情况，并将 SPH 结果与有限差分法（FDM）结果进行比较。有限差分法的求解过程见附录 D。具体而言，我们选取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$处的两个代表性横截面进行比较。如图20所示，对于四种滑移长度，SPH模拟结果与有限差分法结果一致。我们强调，这种流动的结果不同于迪恩流，因为半圆形通道反向连接，导致速度剖面不对称。值得注意的是，SPH模拟很好地捕捉到了流动剖面中细微的不对称性。



(a) 半圆形通道示意图。 (b) 两侧壁面具有相同滑移长度$b = 0.1L$ 时的速度大小。

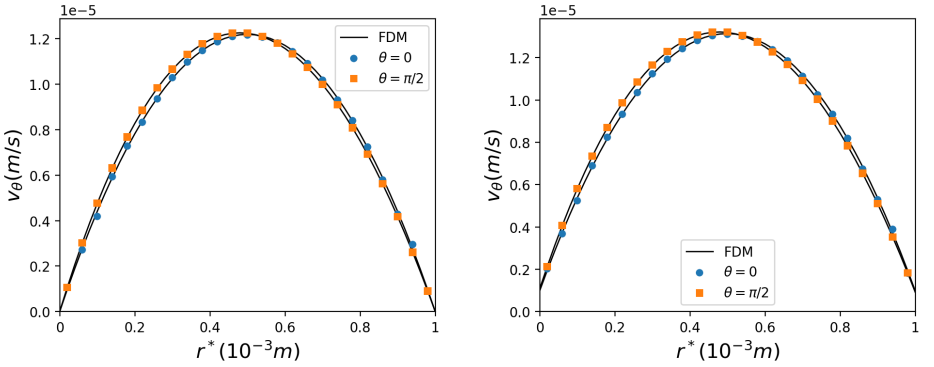
图19：流体在半圆形通道中的周期流：$R_1 = 1.5 \times 10^{-3}m$、$R_2 = 2.5 \times 10^{-3}m$，以及两壁面之间的距离$L = 10^{-3}m$。流动由沿通道方向的切向体力驱动。

接下来，我们构建一个由三角函数描述的通道，如图21(a)所示。通道的中心线由余弦函数描述，其振幅为$A = 1 \times 10^{-3}m$，周期为$T = 6 \times 10^{-3}m$。通道宽度为$L = 1 \times 10^{-3}m$。流体的性质和体力与前述半圆形通道的情况相同。图21(b)展示了两侧壁面具有相同滑移长度$b = 0.1L$ 时速度大小的一个示例快照。我们还考虑了壁面上的其他滑移长度，并在图22中给出了流体粒子中心法（FPC）和边界粒子中心法（BPC）的结果。具体而言，我们考察了图21(a)所示 $\theta = 2\pi$ 处横截面的速度剖面。将速度剖面线性外推至壁面，可定义模拟中的滑移长度。总体而言，FPC和BPC方法的结果非常接近，这使我们确信它们具有良好的准确性。

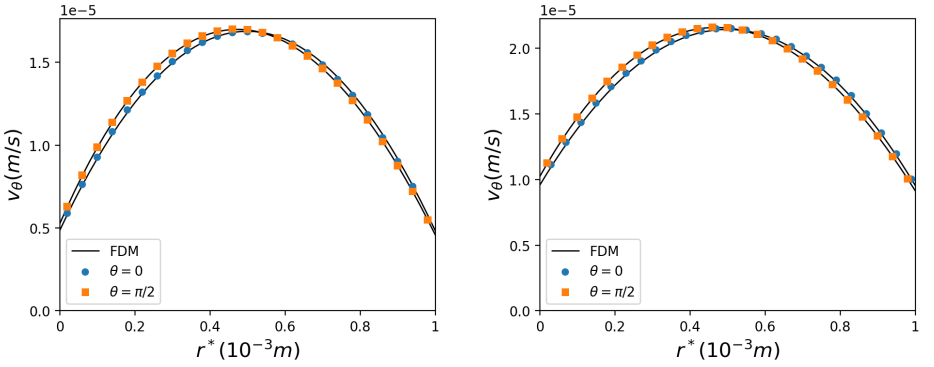
如图23所示，对于时变通道流，滑移边界显著提高了流量。对于半圆形通道，光滑粒子流体动力学的结果与有限差分法的结果一致。对于由余弦函数描述的通道，FPC和BPC方法的结果彼此重合，因此我们只展示后者。

4.7. 任意几何形状通道中的流动

我们进一步考虑流经任意几何形状通道的流动。几何形状的轮廓是用普通绘图软件中的画笔绘制的，如图24所示，其中写有“ZJU”三个字母，并刻意沿x 方向周期性连接。此外，我们还在通道中任意嵌入了五只“求是鹰”（浙江大学的校徽）和两颗心形图案。整个矩形区域的尺寸为$B_x \times B_y = 0.02\text{m} \times 0.01\text{m}$。通道宽度统一设为$L = 10^{-3}\text{m}$，粒子分辨率为 $\Delta x = L/50 = 2 \times 10^{-5}\text{m}$，对应总计230769个光滑粒子流体动力学粒子。流体密度和运动黏度分别设为 $\rho = 10^3\text{kgm}^{-3}$ 和$\nu = 10^{-6}\text{m}^2\text{s}^{-1}$，并在整个流体中沿$x$ 方向施加恒定体力 $F = 8 \times 10^{-3}\text{Nkg}^{-1}$。如果

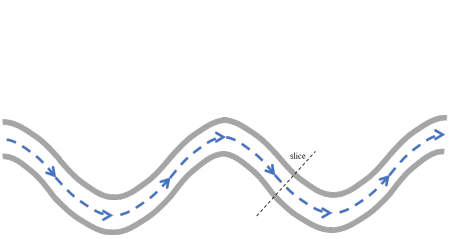


（a）无滑移。 (b) $b = 2 \times 10^{-5} m$.

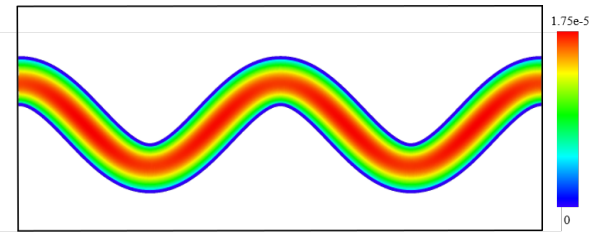


(c) $b = 1 \times 10^{-4} m$. (d) $b = 2 \times 10^{-4} m$.

图20：半圆形通道内流动的SPH模拟速度剖面：选取位于 $\theta = 0$ 和 $\pi/2$处的两个横截面。两侧壁面的滑移长度相同。有限差分法（FDM）的结果作为参考。SPH在通道横向布置了50个粒子，而FDM在相同距离内也采用了50个网格点。为清晰起见，仅显示一半数据。



(a) 余弦函数描述的通道示意图



(b) 两侧壁面具有相同滑移长度$b = 0.1L$ 时的速度大小。

。

图21：余弦函数描述的通道中的周期流。流动由沿通道方向的切向体力驱动。

壁面采用无滑移边界条件，则流场的特征速度约为$v = 10^{-4} ms^{-1}$，相应的雷诺数为$Re = vL/\nu = 0.1$。

不同滑移长度下的光滑粒子流体动力学模拟结果如图25所示。比较不同滑移长度下流场的速度分布可见，壁面滑移长度越大，整体流场越明显地抬升。由于

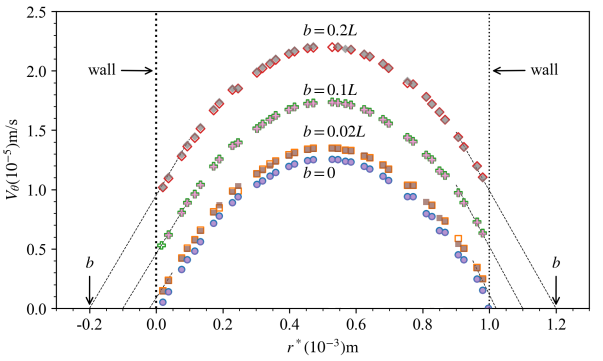
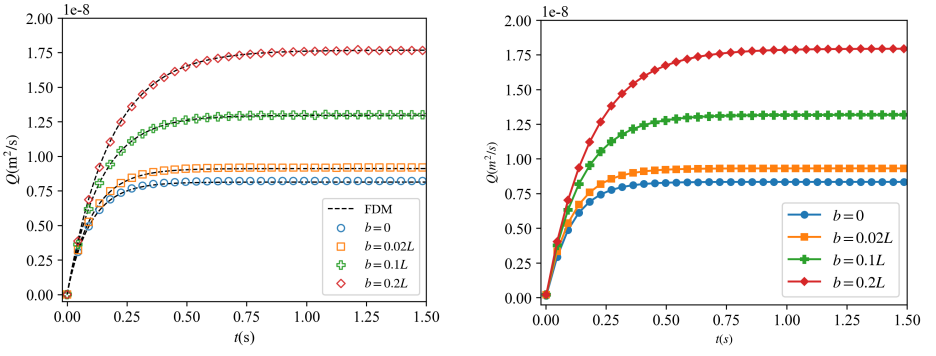


图22：余弦函数描述的通道中流动的光滑粒子流体动力学模拟速度剖面。两侧壁面的滑移长度相同。考虑图21(a)所示的横截面。空心符号表示采用以流体粒子为中心的方法得到的结果，实心符号表示采用边界粒子中心法得到的结果。



（a）半圆形通道。 （b）由余弦函数描述的通道。

图23：弯曲通道中的流量。

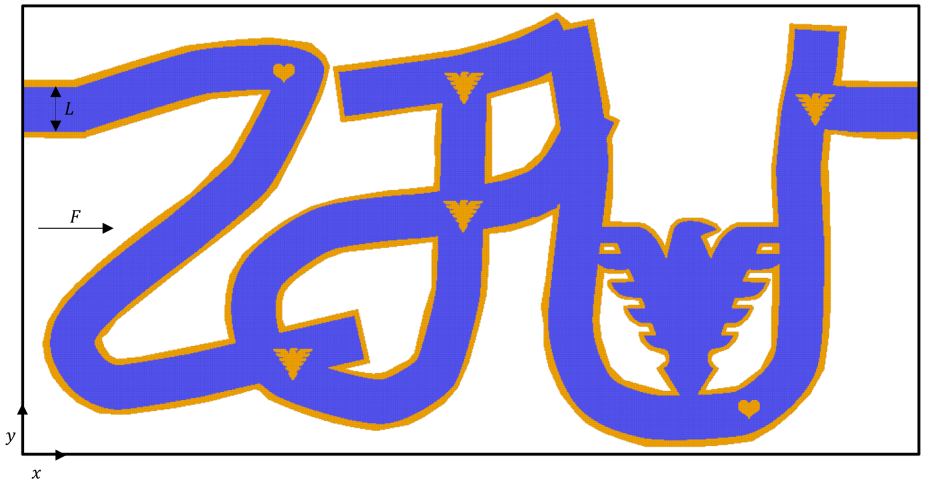
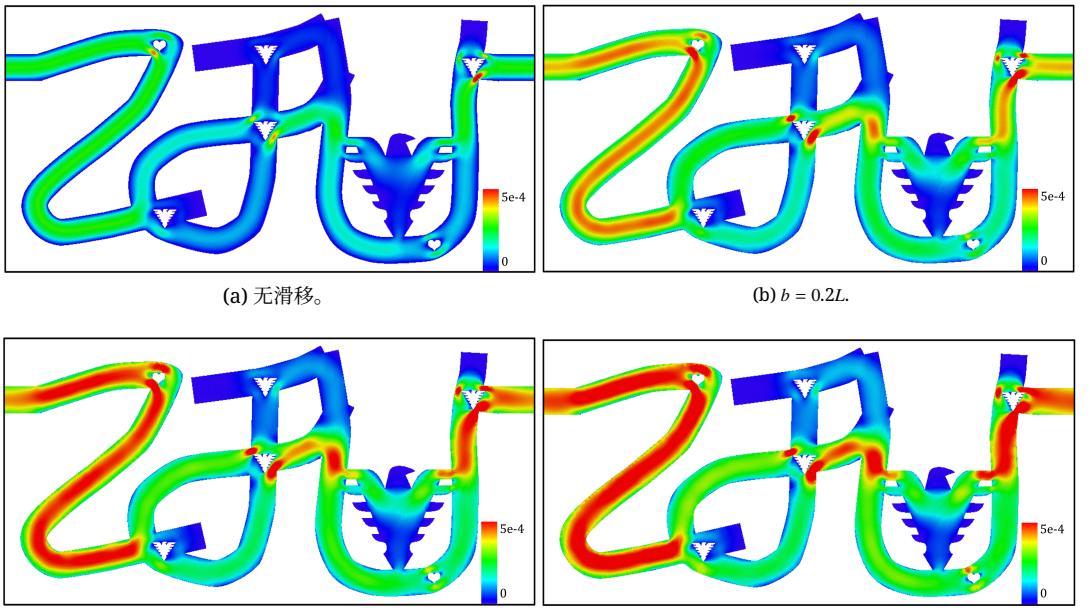


图24：流体流经任意几何形状通道的示意图。沿x方向施加周期性边界条件。黄色粒子表示壁面，蓝色粒子表示流体。沿x 方向对流体施加恒定体力。

通道形状复杂，且体力沿x方向作用，不一定沿着通道方向，因此速度分布与前述示例不同。尽管如此，只要通道的某一部分沿x方向延伸，其局部速度分布通常与



(a) 无滑移。 (b) $b = 0.2L$.

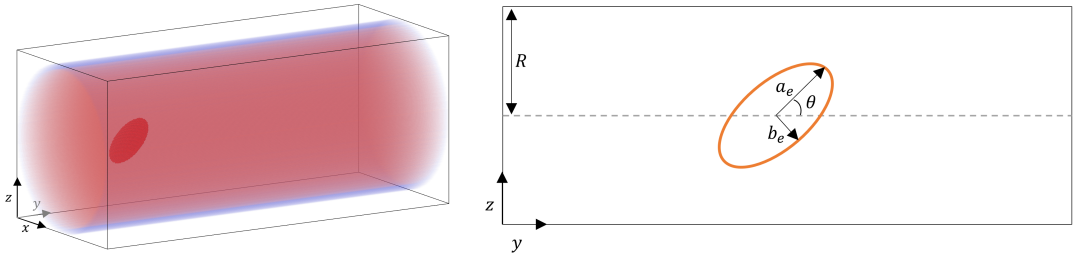
(c) $b = 0.5L$。 (d) $b = L$。

图25：壁面上不同滑移长度对应的速度大小。色标设置为 $[0, 5 \times 10^{-4}\mathrm{ms}^{-1}]$。

泊肃叶流。结果 来自 FPC 和 BPC 方法的结果几乎完全相同，因此我们仅展示后者 .

4.8. 哈根-泊肃叶流中的椭球体动力学

到目前为止，我们考察的都是静止固体边界内的复杂流动。接下来，我们进一步研究这些方法在移动边界情况下的表现。为此，我们考察三维椭球体在哈根-泊肃叶流中的动力学，如图26(a)所示。管道内的流动由y方向上的体力驱动，并在同一方向上采用周期性边界条件。一个中性浮力椭球粒子最初被放置在管道内，其中心位于管道轴线上。我们考虑三个半轴分别为$a_e > b_e = c_e$的特殊情形，因此该椭球体为长椭球体。长椭球体在y-z 平面上的横截面呈椭圆形，如图26(b)所示，其中长轴a_e 沿y 方向与其形成角度 θ 。

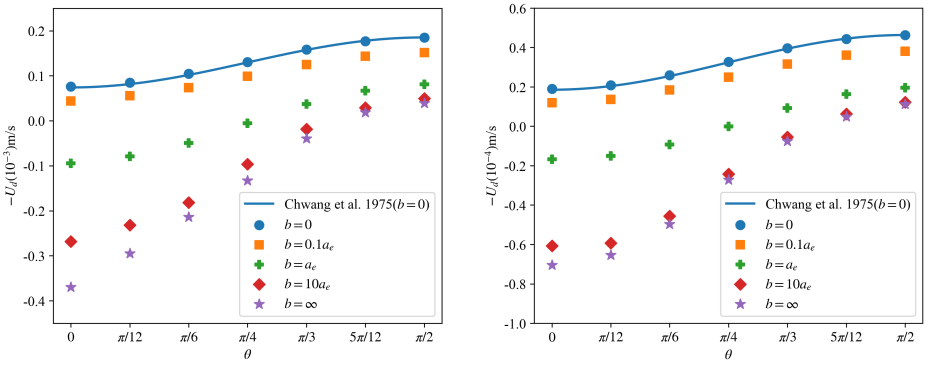


(a) 管道中的椭球体。 (b) 经过椭球体中心的y-z 平面上的横截面。

图2：哈根-泊肃叶流中椭球体的示意图和构型

在以下模拟中，我们将椭球体的长轴设为 $2a_e = 10^{-4}\mathrm{m}$，轴比设为 $a_e : b_e :$

$c_e = 2:1:1$。我们考虑两种管道半径，即$R = 1.5a_e$ 和 $3a_e$，管道长度设为$L = 5R$，以使周期效应可以忽略。密度和运动黏度分别为 $\rho = 10^3 \mathrm{kgm}^{-3}$ 和 $\nu = 10^{-6}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$。在没有椭球体的哈根-泊肃叶流中，若体力 $F = 4\nu U_c/R^2$, , 则稳态时流动的最大速度为$U_c = 10^{-3}\mathrm{ms}^{-1}$，由此定义雷诺数为$Re = 2a_e U_c/\nu = 0.1$。我们采用的光滑粒子流体动力学分辨率为 $\Delta x = a_e/20$，且$r_c = 3\Delta x$。



(a) $R/a_e = 1.5$ (b) $R/a_e = 3$

图27：不同管道半径下，椭球体在哈根-泊肃叶流中的差异速度。

由于椭球体与管壁之间的流体动力学相互作用，椭球体的平移速度与流动速度不同。具体而言，可定义差异速度[1] 为$U_d = U_e - U_c$，其中U_e 是椭球体沿y方向的速度分量。对于椭球体和壁面均采用典型无滑移边界条件的情况，差异速度始终为负，且随着倾斜角 θ 增大，其绝对值也增大。图27给出了两种不同管道半径下的光滑粒子流体动力学计算结果，与 Chwang 等人 [60] 针对无滑移边界条件所得的结果吻合良好。若椭球体表面采用滑移边界，其速度会显著增加。当椭球体表面的滑移长度为$b > a_e$时，如图27所示，在 $\theta < \pi/4$时，其运动速度甚至超过流动的最大速度。

4.9. 含热涨落的介观尺度库埃特流

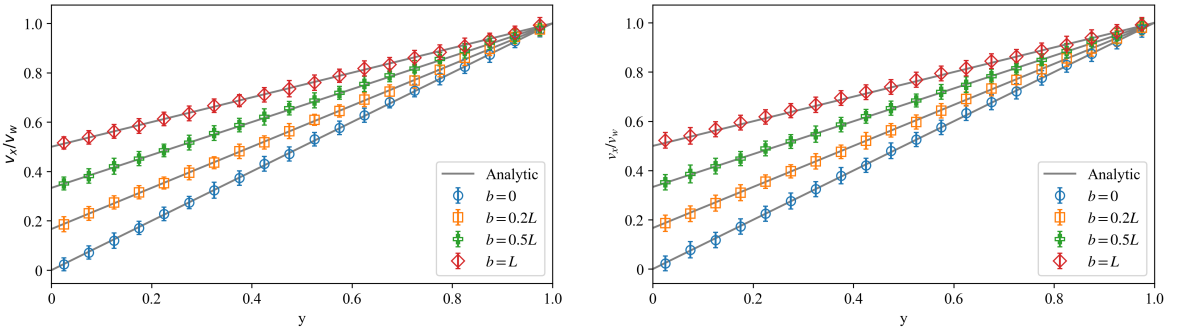
我们进一步考虑存在热涨落的介观流动，可使用耗散粒子动力学方法进行模拟。给定一个边长为$3D$ $L = 10^{-5}\mathrm{m}$ 的立方体盒，流体质量密度为 $\rho = 10^3\mathrm{kgm}^{-3}$，总质量$M = L^3\rho = 10^{-12}\mathrm{kg}$；流体的运动黏度为 $\nu = 10^{-6}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$。$y$ 方向上有两个壁面：具有无滑移边界的上壁面以$v_{up} = 0.01\mathrm{ms}^{-1}$ 的速度运动，对应的雷诺数$Re = v_{up}L/\nu = 0.1$；具有不同滑移长度的下壁面保持静止。温度$T = 293.15\mathrm{K}$，玻尔兹曼常数$k_B = 1.38 \times 10^{-23}\mathrm{m}^2\mathrm{kgs}^{-2}\mathrm{K}^{-1}$。

为避免小物理量（如k_B）引起的舍入误差，我们在介观模拟中采用无量纲数。具体而言，长度、能量和质量均取为 1，即$L^* = 1$，$(k_BT)^* = 1$ 和

[1]这称为滑移速度 在其他参考文献中。由于此处滑移速度与边界条件相关，因此我们将其重新命名为差异速度。

$M^* = 1$。因此，密度 $\rho^* = 1$、运动黏度 $\nu^* = \nu/(k_B T L^2/M)^{1/2} = 1572.2$，以及时间$t^*$ 的单位为 $(M(L)^2/(K_B T))^{1/2}$。为简便起见，下文省略 *。

图28展示了两种温度下，下壁面具有不同滑移长度时的SDPD模拟平均速度剖面。误差棒表示100个稳态矩的标准差。通道中有20个粒子，足以再现解析解。



(a) $T = 293.13K$ (b) $T = 313.13K$

图28：介观尺度库埃特流的SDPD模拟平均速度剖面。

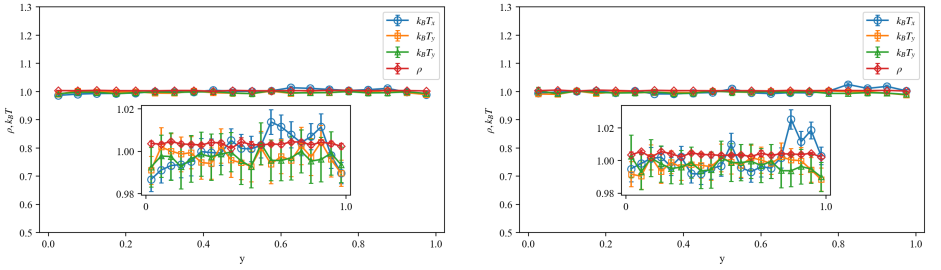
我们可以将方向温度定义为粒子随机运动所产生的平均动能，如下所示：

$$k_B T_x = < m(v_x - v_x^{bg})^2 >, \tag{63}$$

$$k_B T_y = < m v_y^2 >, \tag{64}$$

$$k_B T_z = < m v_z^2 >, \tag{65}$$

其中，$\mathbf{v}^{bg} = (v_x^{bg}, 0, 0)$ 是库埃特流背景速度的线性分布。图29展示了通道内采用无滑移和滑移边界条件的SDPD 模拟温度和密度；可以看到，边界条件算法未产生数值伪影。



(a) 两侧壁面均为无滑移。 (b) 下壁面的滑移长度为$b = 0.2L$，上壁面为无滑移。

图2 9：介观尺度库埃特流的耗散粒子动力学模拟中的温度和平均密度分布。

4.10. 布朗球

我们模拟了溶剂中中性浮力球的随机运动。设球体半径 R、流体密度 ρ 和温度 k_BT 均为单位值。运动黏度为 $\nu = 15$。我们采用长度为 $L = 15R$ 的立方体盒，并在三个方向上施加周期性边界条件。我们采用三种不同的分辨率 $\Delta x = R/5 = 0.2$、$R/8 = 0.125$ 和 $R/10 = 0.1$，以验证结果的收敛性。速度尺度为 $v_t = \sqrt{3k_BT/m}$，声速取为$c = 20v_t$。为获得平滑的统计平均值，我们使用不同的随机种子进行了20次模拟。图30展示了具有不同滑移长度时球体速度的概率分布函数（PDF）。球体表面的滑移边界不会改变其速度 PDF；其分布与无滑移表面时相同。两者均符合麦克斯韦-玻尔兹曼分布，如

$$P(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}} exp(\frac{-mv^2}{2k_BT}). \tag{66}$$

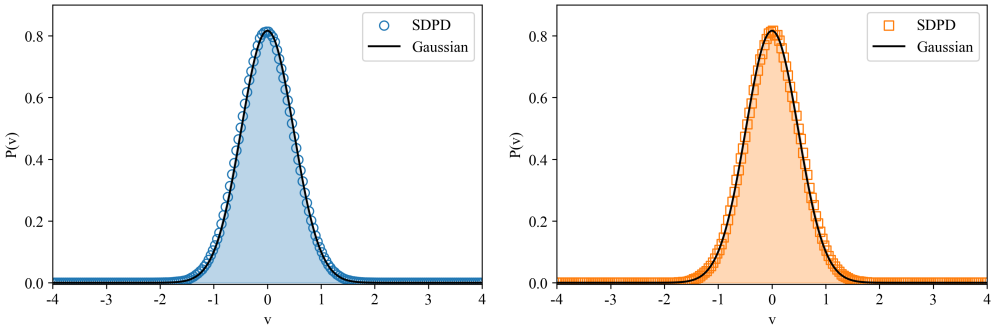
然而，球体的迁移率强烈依赖于其表面的边界条件。根据斯托克斯定律，不可压缩流体中球体在稳态下的迁移率为 [61]

$$\mu = \frac{1}{6\pi\rho\nu R}\frac{1+3\rho\nu/\kappa R}{1+2\rho\nu/\kappa R} = \frac{1}{6\pi\rho\nu R}\frac{1+3bR}{1+2bR}. \tag{67}$$

进一步结合爱因斯坦关系，可得

$$D_t = \mu k_BT = \frac{k_BT}{6\pi\rho\nu R}\frac{1+3bR}{1+2bR}, \tag{68}$$

其中 D_t 是布朗球的平移扩散系数。实际应用中，我们可以通过测量球体在两种不同滑移长度下的均方位移（MSD）来验证扩散系数，如图31所示。耗散粒子动力学（SDPD）的结果与理论解在统计不确定性范围内一致；其中，滑移边界条件提高了布朗球的迁移率。



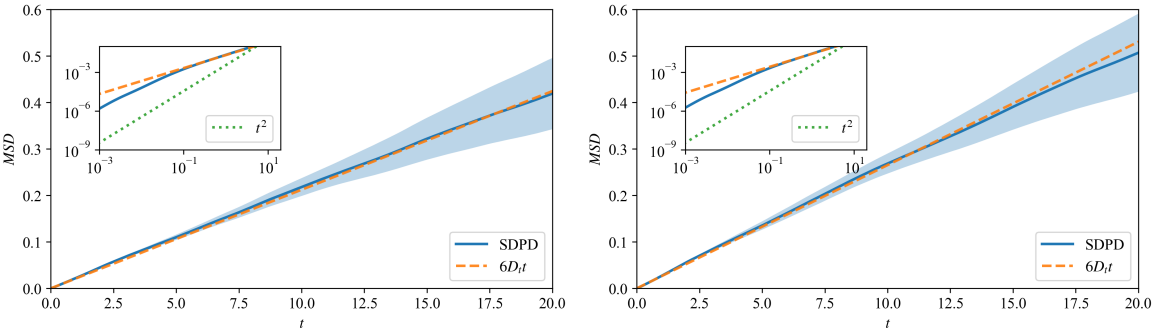
（a）$b = 0$ (b) $b = 0.5R$

图 30：球体速度的概率分布函数。

类 似地，采用无滑移边界条件的球体的转动扩散系数为

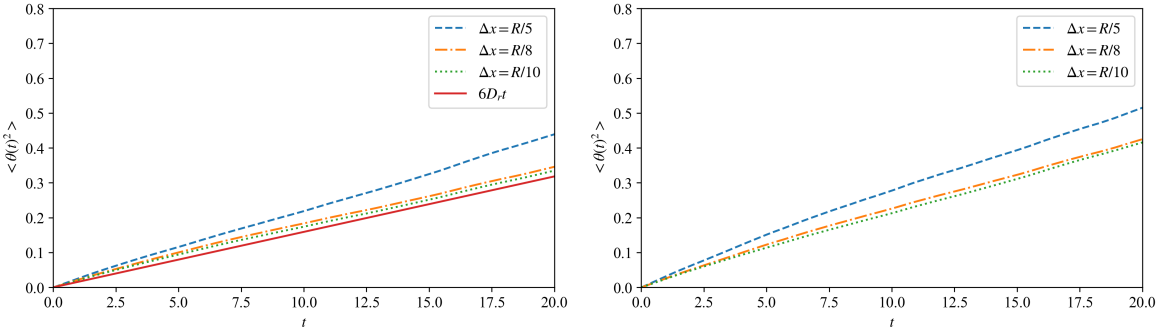
$$D_r = \frac{k_BT}{8\pi\rho\nu R^3}. \tag{69}$$

图 32 显示，球体半径方向上有 8 个和 10 个粒子时，球体的转动运动几乎没有差异；滑移边界也会增强球体的转动迁移率。



(a) $b = 0$ (b) $b = 0.5R$

图31：球体的平移均方位移：斜率表示扩散系数，阴影表示20次模拟的标准差。插图以双对数尺度展示了从弹道区间到扩散区间的转变。



(a) $b = 0$ (b) $b = 0.5R$

图 32：具有滑移长度的球体的转动均方位移：分辨率研究。

4.11. 任意几何形状微血管中椭圆柱的动力学

最后，我们模拟椭圆柱在微血管人工网络中的动力学过程，如图 33 所示。为便于比较光滑粒子流体动力学（SPH）和耗散粒子动力学（SDPD）的模拟结果，我们在两种方法中均采用无量纲单位。矩形模拟区域的尺寸为 2×1，通道宽度 L 在 0.08 至 0.16 之间变化，粒子分辨率为 $\Delta x = 2\times10^{-3}$。我们设定密度为 $\rho^* = 1$，运动黏度为 $\nu^* = 1572.2$，温度为 $(k_B T)^* = 1$。椭圆的半长轴和半短轴分别为 $a_e = 2b_e = 0.02$。在 x 方向施加体力 $F = 1.98 \times 10^{10}$。对于壁面上的无滑移边界，流动的最大速度约为 $v = 15722$，相应的雷诺数约为 $Re = 1$。

图 34 展示了不同边界条件下 SPH 模拟在同一选定时刻$t = 0.225$ 的六幅快照。色彩图表示流动的速度大小，其最大值和最小值分别设为 22800 和 0。我们在椭圆粒子和壁面的表面分别施加不同的滑移长度，以b^e 和b^w表示。在图 34(a)、34(b)、34(c) 和 34(d) 中，我们对血管壁施加无滑移边界，但对椭圆表面施加不同的滑移长度。尽管这四种情况的流场相似，但由于椭圆表面性质不同，其迁移率也有显著差异。

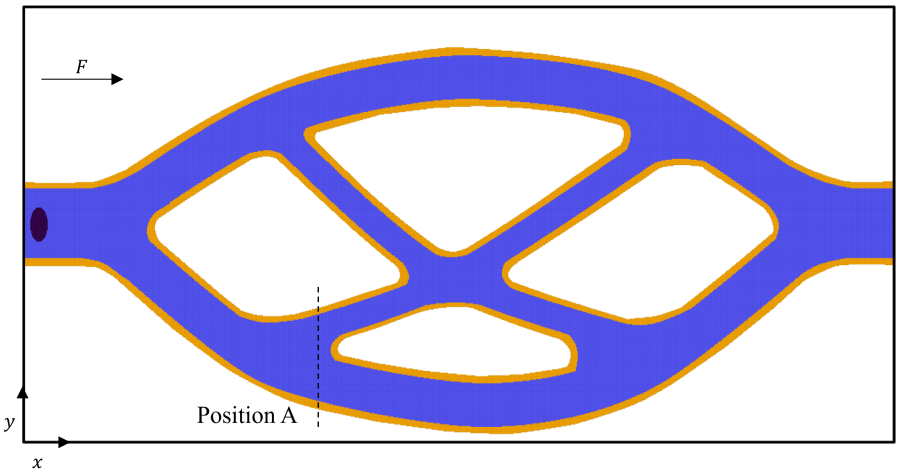


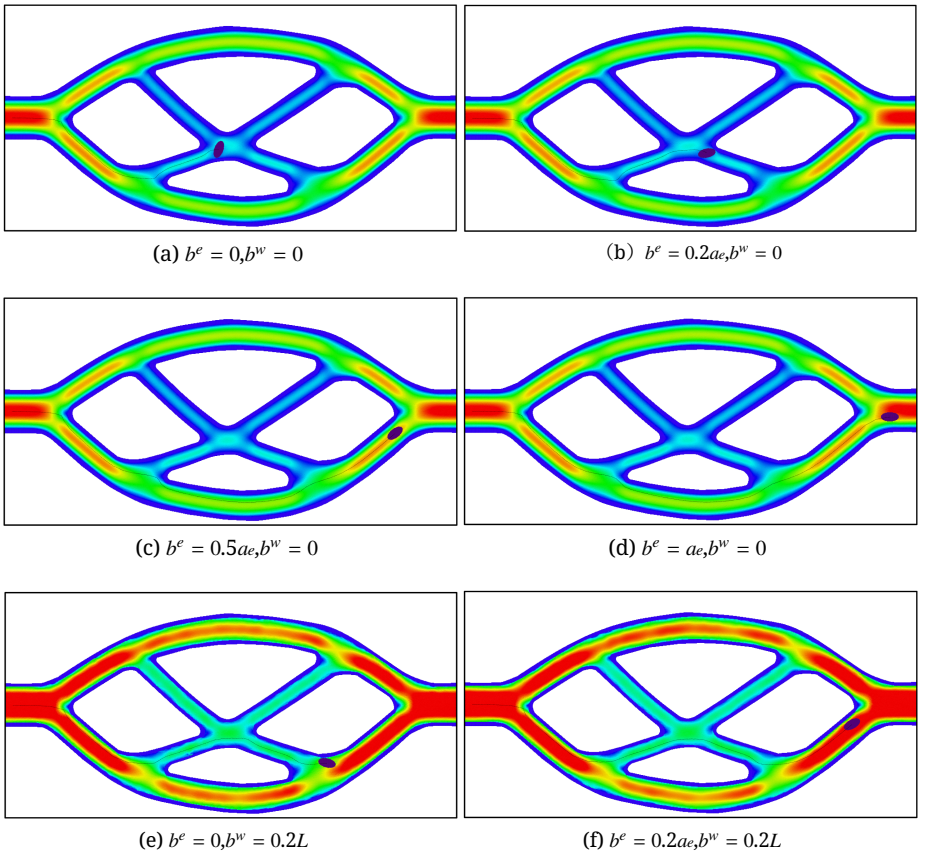
图 33：初始时刻任意几何形状微血管中的椭圆柱示意图。黄色、蓝色和紫色粒子分别代表壁面、流体和椭圆柱。沿x 方向对流体施加恒定体力。沿x方向施加周期性边界条件。位置 A 是椭圆柱轨迹的一个分支点。

具体而言，表面滑移长度为$b^e = a_e$ 的椭圆几乎到达出口，而表面无滑移、$b^e = 0$ 的椭圆仍在半程附近翻滚。此外，由于可能发生分支，椭圆表面的滑移长度也可能彻底改变其轨迹。例如，如图 35 所示，在分支位置 A，$b^e < 0.5a_e$ 和 $b^e \geq 0.5a_e$ 对应的椭圆取向不同，因此下游轨迹也不同。当壁面存在滑移时，流场会增强，如图 34(e) 和 34(f) 所示。与图 34(a) 中界面无滑移的情况相比，椭圆的速度和轨迹都可能发生变化。

我们进一步开启相同微血管中流体的热涨落，耗散粒子动力学的结果见图 36。与相同滑移长度下图 34(b) 和图 34(c) 中光滑粒子流体动力学的结果相比，椭圆的布朗运动会产生更多扩散轨迹，因此沿通道行进的距离更短。

5. 结论

本文提出了两种算法，用于在 SPH 和耗散粒子动力学（SDPD）模拟中，为任意几何形状的流固界面实现任意滑移长度：以流体粒子为中心的方法（FPC）和边界粒子中心法（BPC）。这两种算法涉及界面附近流体粒子与边界粒子之间成对耗散力和随机力的计算。FPC方法以流体粒子为中心，并进一步确定表面上的一个交点，在该点指定所需的滑移长度/速度。随后，计算与之相互作用的边界粒子的人工速度。BPC方法以边界粒子为中心，并进一步确定表面上的一个交点，在该点指定所需的滑移长度/速度。相应地，根据与之相互作用的流体粒子的位置/速度创建一个具有平均位置/速度的虚拟粒子，随后计算该边界粒子的人工速度。对于简单几何形状的静止界面，FPC方法可重现Morris 等人 [45] 针对无滑移边界条件所做的工作。该方法精确，但需要频繁

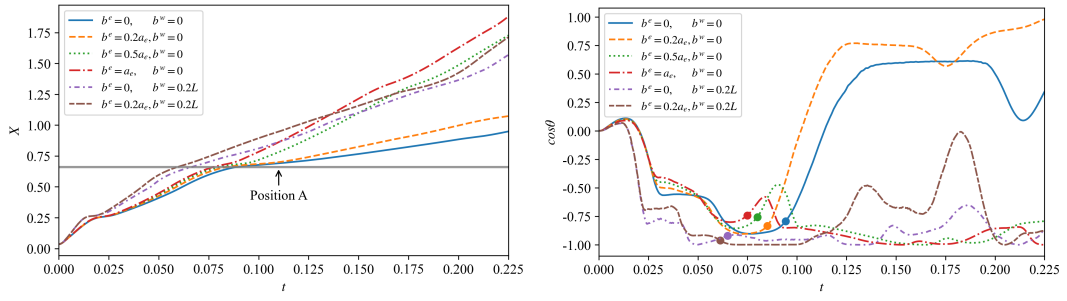


(a) $b^e = 0, b^w = 0$ (b) $b^e = 0.2ae, b^w = 0$

(c) $b^e = 0.5ae, b^w = 0$ (d) $b^e = ae, b^w = 0$

(e) $b^e = 0, b^w = 0.2L$ (f) $b^e = 0.2ae, b^w = 0.2L$

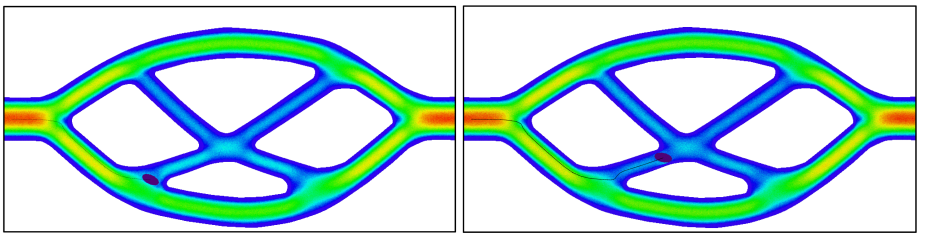
图34：使用SPH方法得到的微血管中椭圆在同一时刻$t = 0.225$的快照：b^e 和b^w 分别表示椭圆和壁面的滑移长度。黑线表示椭圆的轨迹。



(a) X (b) 余弦θ

图35：界面具有不同滑移长度时，微血管中椭圆柱的动力学。左：椭圆柱质心沿x方向的位移随时间的变化。右：椭圆柱半长轴与x方向夹角的余弦随时间的变化。在初始时刻，$X = 0.035$，且半长轴指向y方向。分支位置A为$X = 0.66$，椭圆柱首次通过该位置的时间约为$t = 0.6$至0.09。

计算流体粒子到界面的距离。对于平面和球体等其他简单几何形状的界面，这项工作轻而易举；但对于复杂几何，则会变得繁琐且耗费计算资源。BPC方法与Adami等人 [45] 针对无滑移边界条件所做的工作相似。通过对边界粒子周围相邻流体粒子的影响取平均，这种方法的精度似乎不如前者。然而，



(a) $b^e = 0.2a_e, b^w = 0$ （b）$b^e = 0.5a_e, b^w = 0$

图36：采用耗散粒子动力学方法，在同一时刻$t = 0.225$拍摄的血管内椭圆快照

BPC方法仅涉及SPH插值，即使对于复杂几何也易于实现。在将两种算法应用于一系列不同几何形状通道中的流动问题后，与解析解、有限差分/有限体积方法的参考结果以及FPC方法的结果相比，BPC方法的误差可以忽略不计。

致谢

蔡和 X. Bian 感谢中国国家自然科学基金（项目编号：12172330）的资助。X. Bian 还获得了浙江大学百人计划的启动经费。

参考文献

[1] L. D. Landau, E. M. Lifshitz，《流体力学：理论物理学教程》第6卷，第6卷，Pergmon出版社，1959。[2] C. Neto, D. R. Evans, E. Bonaccurso, H.-J. Butt, V. S. Craig，牛顿流体中的边界滑移：实验研究综述，《物理学进展报告》68（12）（2005）2859。[3] W. Barthlott, C. Neinhuis，圣洁莲花的纯净，或生物表面如何避免污染，《Planta》202（1）（1997）1–8。[4] N. Pike, D. Richard, W. Foster, L. Mahadevan，蚜虫如何摆脱困境，《伦敦皇家学会会刊》。B辑：生物科学 269（1497）（2002）1211–1215。[5] W. Reif, A. Dinkelacker，快速游动鲨鱼鳞片的流体动力学，《地质学与古生物学新年鉴——论文集》（1982）184–187。[6] J. Oeffner, G. V. Lauder，鲨鱼皮的流体动力学功能及其两种仿生应用，《实验生物学杂志》215（5）（2012）785–795。[7] J. P. Rothstein，超疏水表面上的滑移，《流体力学年度评论》42（2010）89–109。[8] M. Majumder, N. Chopra, R. Andrews, B. J. Hinds，碳纳米管中的增强流动，《自然》438（7064）（2005）44–44。[9] J. K. Holt, H. G. Park, Y. Wang, M. Stadermann, A. B. Artyukhin, C. P. Grigoropoulos, A. Noy, O. Bakajin，通过亚2纳米碳纳米管实现快速质量传递，《科学》312（5776）（2006）1034–1037。[10] E. Papadopoulou, C. M. Megaridis, J. H. Walther, P. Koumoutsakos，无压力梯度纳米泵：图案化纳米管中水的超快速传输，《化学物理学杂志B》126（3）（2022）660–669。[11] C. Navier，关于流体运动定律的回忆录，《法国科学院院刊》6（1823）（1823）389–440。[12] J. C. Maxwell，VII. 关于温度不均匀导致稀薄气体中产生的应力，《伦敦皇家学会哲学汇刊》170（1879）231–256。[13] D. Tolstoi，液体在固体表面上滑移的分子理论，加拿大国家研究委员会，1954。[14] T. D. Blake，液体与固体之间的滑移：重新审视D. M. Tolstoi（1952）的理论，《胶体与表面》47（1990）135–145。[15] J. Ou, B. Perot, J. P. Rothstein，利用超疏水表面实现微通道层流减阻，《流体物理学》16（12）（2004）4635–4643。[16] K. Kamrin, M. Z. Bazant, H. A. Stone，任意周期表面的有效滑移边界条件：表面迁移率张量，《流体力学杂志》658（2010）409–437。[17] G. A. Zampogna, J. Magnaudet, A. Bottaro，粗糙表面上的广义滑移条件，《流体力学杂志》858（2019）407–436。[18] W. C. Sanders, E. S. Winkel, D. R. Dowling, M. Perlin, S. L. Ceccio，高雷诺数平板湍流边界层中的气泡摩擦阻力减阻，《流体力学杂志》552（2006）353–380。[19] Y. Xiang, S. Huang, T.-Y. Huang, A. Dong, D. Cao, H. Li, Y. Xue, P. Lv, H. Duan，满江红叶层级结构的水下超疏液性，《美国国家科学院院刊》117（5）（2020）2282–2287。[20] A. Bottaro，自然或工程表面上的流动：伴随均匀化视角，《流体力学杂志》877（2019）P1。[21] J. Koplik，流体动力学的连续介质推论，载于：APS三月会议摘要，1998，第U1–02页。

[22] N. V. Priezjev，致密聚合物薄膜边界滑移的剪切速率阈值，《物理评论E》80（3）（2009）031608。[23] F. Verhaeghe, L.-S. Luo, B. Blanpain，滑移流态下微通道流动的格子玻尔兹曼建模，《计算物理学杂志》228（1）（2009）147–157。[24] J. Sundin, S. Bagheri，不同表面时间尺度下毛状表面与湍流的相互作用，《流体力学杂志》861（2019）556–584。[25] L. Yang, Y. Yu, L. Yang, G. Hou，离散统一气体动理学格式中无滑移和滑移边界条件的分析与评估，《物理评论E》101（2）（2020）023312。[26] J. J. Monaghan，光滑粒子流体动力学，《物理学进展报告》68（8）（2005）1703–1759。[27] D. J. Price，光滑粒子流体动力学与磁流体动力学，《计算物理学杂志》231（3）（2012）759–794。[28] A. Zhang, P. Sun, F. Ming, A. Colagrossi，光滑粒子流体动力学及其在流固相互作用中的应用，《水动力学学报》29（2）（2017）187–216。[29] T. Ye, D. Pan, C. Huang, M. Liu，复杂流体流动的光滑粒子流体动力学（SPH）：方法与应用的近期进展，《流体物理学》31（1）（2019）011301。[30] C. Zhang, Y.-j. Zhu, D. Wu, N. A. Adams, X. Hu，光滑粒子流体动力学：方法学发展与近期成果，《水动力学学报》34（5）（2022）767–805。[31] P. Español, M. Revenga，光滑耗散粒子动力学，《物理评论E》67（2）（2003）026705。[32] M. Grmela, H. C. Öttinger，复杂流体的动力学与热力学。I. 一般形式体系的建立，《物理评论E》56（6）（1997）6620–6632。[33] X. Bian, Z. Li, M. Deng, G. E. Karniadakis，周期性区域和异质相邻多区域中的涨落流体动力学：热平衡，《物理评论E》92（5）（2015）053302。[34] X. Bian, M. Deng, Y. H. Tang, G. E. Karniadakis，剪切流中异质相邻多区域内流体动力学涨落的分析，《物理评论E——统计、非线性与软物质物理》93（3）（2016）1–13。[35] X. Bian, M. Deng, G. E. Karniadakis，剪切流中流体动力学涨落关联的解析与计算研究，《计算物理通讯》23（1）（2018）93–117。[36] M. Ellero, P. Español，关于你一直想了解却不敢问的SDPD，《应用数学与力学》39（1）（2018）103–124。[37] X. Hu, N. Adams，用于宏观与介观流动的多相SPH方法，《计算物理学杂志》213（2）（2006）844–861。[38] S. Litvinov, M. Ellero, X. Hu, N. A. Adams，用于悬浮液中聚合物分子的光滑耗散粒子动力学模型，《物理评论E》77（6）（2008）066703。[39] A. Vázquez-Quesada, M. Ellero, P. Español，具有热涨落的黏弹性流体光滑粒子流体动力学模型，《物理评论E——统计、非线性与软物质物理》79（5）（2009）1–17。[40] X. Bian, S. Litvinov, R. Qian, M. Ellero, N. A. Adams，采用光滑耗散粒子动力学对悬浮粒子进行多尺度建模，《流体物理学》24（1）（2012）012002。[41] H. Lei, C. J. Mundy, G. K. Schenter, N. K. Voulgarakis，采用光滑耗散粒子动力学模拟纳米尺度流体动力学，《化学物理学杂志》142（19）（2015）194504。[42] K. Müller, D. A. Fedosov, G. Gompper，满足角动量守恒的光滑耗散粒子动力学，《计算物理学杂志》281（2015）301–315。[43] T. Ye, N. Phan-Thien, C. T. Lim, L. Peng, H. Shi，混合光滑耗散粒子动力学与浸入边界法，用于模拟流动中的红细胞，《物理评论E》95（6）（2017）1–14。[44] H. Takeda, S. M. Miyama, M. Sekiya，采用光滑粒子流体动力学对黏性流动进行数值模拟，《理论物理进展》92（5）（1994）939–960。[45] J. P. Morris, P. J. Fox, Y. Zhu，使用SPH模拟低雷诺数不可压缩流，《计算物理学杂志》136（1）（1997）214–226。[46] J. J. Monaghan, J. B. Kajtar，适用于任意边界的SPH粒子边界力，《计算物理通讯》180（10）（2009）1811–1820。[47] S. Litvinov, M. Ellero, X. Hu, N. A. Adams，壁面约束耗散粒子动力学中的粒子分层效应，《物理评论E——统计、非线性与软物质物理》82（6）（2010）1–5。[48] S. Adami, X. Hu, N. Adams，光滑粒子流体动力学的广义壁面边界条件，《计算物理学杂志》231（21）（2012）7057–7075。[49] X. Bian, Z. Li, G. E. Karniadakis，通过区域分解实现基于光滑粒子流体动力学的多分辨率流动模拟，《计算物理学杂志》297（2015）132–155。[50] S. Marrone, A. Colagrossi, M. Antuono, G. Colicchio, G. Graziani，一种精确的SPH方法，用于模拟物体周围低雷诺数和中等雷诺数下的黏性流动，《计算物理学杂志》245（2013）456–475。[51] A. Valizadeh, J. J. Monaghan，弱可压缩SPH固壁模型研究，《计算物理学杂志》300（2015）5–19。[52] N. Moreno, M. Ellero，光滑耗散粒子动力学中的任意流动边界条件：广义虚拟流变仪，《流体物理学》33（1）（2021）。[53] W. Pan, J. Bao, A. M. Tartakovsky，适用于满足Robin边界条件的纳维–斯托克斯方程的光滑粒子流体动力学连续边界力法，《计算物理学杂志》259（2014）242–259。[54] S. Adami, X. Hu, N. Adams，光滑粒子流体动力学的输运速度公式，《计算物理学杂志》241（2013）292–307。[55] D. W. Holmes, J. R. Williams, P. Tilke，采用光滑粒子流体动力学模拟多孔介质中的低雷诺数流动，《国际岩土力学数值与解析方法期刊》35（4）（2011）419–437。[56] Z. Li, X. Bian, Y.-H. Tang, G. E. Karniadakis，一种适用于任意复杂几何的耗散粒子动力学方法，《计算物理学杂志》355（2018）534–547。[57] G. I. Taylor，VIII. 两个旋转圆柱体之间黏性液体的稳定性，《皇家学会哲学汇刊》

伦敦。A辑，刊载数学或物理性质论文 223 (605-615) (1923) 289–343. [58] W. R. Dean，《弯曲通道中的流体运动》，《伦敦皇家学会会刊》。A辑，刊载数学和物理性质论文 121 (787) (1928) 402–420. [59] A. S. Sangani, A. Acrivos，周期性圆柱阵列周围的缓慢流动及其在传热中的应用，《国际多相流》8 (3) (1982) 193–206. [60] A. T. Chwang，低雷诺数流动的水动力学。第3部分：椭球形粒子在二次流中的运动，《流体力学杂志》72 (1) (1975) 17–34. [61] X. Bian, C. Kim, G. E. Karniadakis，布朗运动111年，《软物质》12 (30) (2016) 6331–6346. [62] S. Winitzki，误差函数及其反函数的便捷近似，通过私人通信获得的讲义 (2008). [63] T. Miller Iii, M. Eleftheriou, P. Pattnaik, A. Ndirango, D. Newns, G. Martyna，用于生物物理分子动力学的辛四元数方案，《化学物理学杂志》116 (20) (2002) 8649–8659.

附录A. 边界体积分数法

对于形状任意的固体物体，可以利用 SPH核函数 [55, 56]的归一化性质，计算流体粒子/边界粒子到界面的距离d。在此方法中，边界体积分数（BVF） [56] 定义为

$$\phi_i = \frac{1}{\sigma_i}\sum_j W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', h). \tag{A.1}$$

其中，i和j 分别表示中心粒子和相邻边界粒子，而 σ_i 是中心粒子的数密度，其定义见方程（12）。为兼顾理论与计算上的便利，我们可以采用高斯函数作为核函数

$$W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', h) = C_D \frac{1}{h^D} e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{h^2}} \tag{A.2}$$

其中$C_D = \frac{1}{\pi^{D/2}}$为归一化系数。当界面为平面，或其曲率半径远大于$r_c$时，可以通过下式计算 ϕ

$$\phi_i = \varphi(d) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{d}^{+\infty} W(r_{ij}, h)dxdy = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}(\frac{d}{h}). \tag{A.3}$$

这里，$\mathrm{erfc}(\frac{d}{h})$是互补误差函数，定义为

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty} e^{-t^2}dt. \tag{A.4}$$

此外，我们还可以得到 $\mathrm{erfc}(z)$ 的近似表达式 [62]

$$\mathrm{erfc}(z) \approx 1 - \mathrm{sgn}(z)\sqrt{1-\exp\left(-z^2\frac{4/\pi + az^2}{1+az^2}\right)}, \tag{A.5}$$

及其反函数

$$\mathrm{erfc}^{-1}(z) \approx \mathrm{sgn}(1-z)\sqrt{\sqrt{(\frac{2}{a\pi}+\frac{\ln z(2-z)}{2})^2 - \frac{\ln z(2-z)}{a}} - (\frac{2}{a\pi}+\frac{\ln z(2-z)}{2})}. \tag{A.6}$$

这里，常数 $a = 0.147$。在方程 (A.3) 中，$\phi_i = 0$ 当粒子 i 到界面的距离大于 r_c 时；$\phi_i = 0$当粒子位于界面上时。给定一个粒子构型，我们通过方程 (A.1) 中的 SPH插值计算 ϕ_i，然后利用方程 (A.3) 的反函数计算粒子 i 到界面的距离，即

$$d/h = \varphi^{-1}(\phi_i) \approx \mathrm{erfc}^{-1}(2\phi_i). \tag{A.7}$$

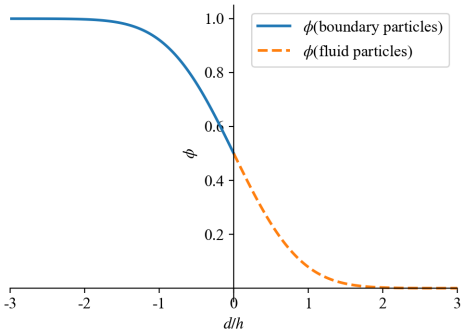


图 A.37：边界体积分数 ϕ 与d/h之间的关系。我们通过方程 (A.1) 计算粒子的 ϕ，然后通过方程 (A.7) 计算粒子到界面的距离。对于流体粒子，ϕ 的取值范围为 0 – 0.5，且通过方程 (A.7) 计算得到的d/h 为正；对于边界粒子，ϕ 的取值范围为 0.5 – 1，因此d/h 为负。

图 (A.37) 展示了 d/h 与 ϕ_i 之间的关系。由于光滑长度 h 在整个模拟过程中保持恒定，d 仅取决于 ϕ_i 的值。在三维中，我们采用相同的思路并得到

$$\phi_i = \varphi(d) = \int_d^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2\pi W(r_{ij},h) r dr dz = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}(\frac{d}{h}), \tag{A.8}$$

其表达式与二维情况下相同。因此，距离d 仍通过方程 (A.6) 和
(A.7).

附录 B. 刚体动力学

刚体的平移和旋转可由经典的牛顿方程和欧拉方程描述，如下所示：

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{F} \\ \mathbf{I}\cdot\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega}\times[\mathbf{I}\cdot\mathbf{\Omega}] &= \mathbf{T} \end{aligned} \tag{B.1}$$

其中，**U**和 Ω 分别为质心的平移速度和角速度。M 为总质量，**I** 为惯性张量。**F** 和**T** 分别表示作用于刚体上的总力和力矩。由于 SPD 模拟中的刚体由粒子组成，因此可以直接计算粒子的平移。对于旋转，我们采用单位四元数 [63]

$$\mathbf{q} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \tag{B.2}$$

其中 $\sum_i q_i = 1$。四元数可表示从空间固定坐标系（**r**）到本体固定坐标系（**r′**）的旋转矩阵 **A(q)**

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{r} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{A}(\mathbf{q})^T\mathbf{r}' \end{aligned} \tag{B.3}$$

其中

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2-q_3^2 & 2(q_1q_2+q_0q_3) & 2(q_1q_3-q_0q_2) \\ 2(q_1q_2-q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3+q_0q_1) \\ 2(q_1q_3+q_0q_2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

这里，单位四元数的四个分量为

$$\begin{aligned} q_0 &= cos(\frac{\theta}{2})cos(\frac{\phi+\psi}{2}) \\ q_1 &= sin(\frac{\theta}{2})cos(\frac{\phi-\psi}{2}) \\ q_2 &= sin(\frac{\theta}{2})sin(\frac{\phi-\psi}{2}) \\ q_3 &= cos(\frac{\theta}{2})sin(\frac{\phi+\psi}{2}) \end{aligned} \tag{B.5}$$

其中，(ϕ,θ,ψ) 是三个欧拉角。因此，方程 (B.5) 表示单位四元数与欧拉角之间的关系。在体固坐标系中，刚体先绕z轴旋转 ϕ ，再绕x'轴旋转 θ ，最后绕z'轴旋转 ψ 。

在体固坐标系中，四元数的运动和旋转如下

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q_0} \\ \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \\ \dot{q_4} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \\ \dot{\Omega_x} &= \frac{T_x}{I_{xx}} + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\Omega_y\Omega_z \\ \dot{\Omega_y} &= \frac{T_y}{I_{yy}} + \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}\Omega_z\Omega_x \\ \dot{\Omega_z} &= \frac{T_z}{I_{zz}} + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}\Omega_x\Omega_y \end{aligned} \tag{B.6}$$

这里，I_{xx}、I_{yy}、I_{zz} 是刚体惯性张量的对角元素。Ω_x、Ω_y、Ω_z 和 T_x、T_y、T_z 分别是体固坐标系中的角速度和力矩分量。

每个时间步，构成固体的各个边界粒子所受的力和力矩会累加为作用于刚体的力和力矩。随后，先更新质心的物理量，再通过四元数更新边界粒子。

附录C. 瞬态泰勒-库埃特流的纳维–斯托克斯方程

泰勒-库埃特流由两个半径不同的圆柱体组成R_1 和R_2, ，二者绕同一轴旋转，角速度分别为 Ω_1 和 Ω_2。柱坐标下瞬态泰勒–库埃特流的 NS 方程为

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2}) \tag{C.1}$$

其中v_θ是θ方向上的速度分量。我们将滑移边界条件定义如下

$$\begin{aligned} v_\theta - R_1\Omega_1 &= b^{in}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \\ v_\theta - R_2\Omega_2 &= -b^{out}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

在有限差分法中，我们对方程 (C.1) 进行求解，并在空间上达到二阶离散精度，使用$N = 201$个空间点的分布。我们用$v^t_{\theta,i}$表示时间t时离散点的速度，其中索引i表示r方向上点的标签。离散形式如下：

$$v^{t+1}_{\theta,i} = v^t_{\theta,i} + \Delta t\nu\left(\frac{v^t_{\theta,i+1} - 2v^t_{\theta,i} + v^t_{\theta,i-1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{r}\frac{v^t_{\theta,i+1} + v^t_{\theta,i-1}}{2\Delta x} - \frac{v^t_{\theta,i}}{r^2}\right), \tag{C.3}$$

其中$1 < i < N$。离散边界条件为：

$$\begin{aligned} v_{\theta,i=1} &= \frac{2r\Omega_1\Delta x + (4v_{\theta,i=2} - v_{\theta,i=3})b^{in}}{2\Delta x + 3b^{in}}, \\ v_{\theta,i=N} &= \frac{2r\Omega_2\Delta x + (4v_{\theta,i=N-1} - v_{\theta,i=N-2})b^{out}}{2\Delta x + 3b^{out}}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

附录 D. 瞬态半圆通道流动的纳维–斯托克斯方程

对于由半圆函数描述的通道中的瞬态流动，我们采用以下柱坐标系下的纳维–斯托克斯方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) &= F_\theta + \nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) &= \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{D.1}$$

其中F_θ表示平行于θ方向的体力。令R_1和R_2分别表示壁面的内半径和外半径。于是，我们将滑移边界条件和不可渗透条件定义如下：

$$\begin{aligned} v_\theta &= b\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, r = R_1 \\ v_\theta &= -b\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, r = R_2 \\ v_r &= 0, r = R_1, R_2 \end{aligned} \tag{D.2}$$

其中，b表示壁面上的滑移长度。入口和出口边界条件以及周期性边界条件区域如下

$$\begin{aligned} v_\theta(r) &= v_\theta(R_1 + R_2 - r), \theta = 0 \\ v_r(r) &= v_r(R_1 + R_2 - r), \theta = 0 \\ v_\theta(\theta = \pi) &= v_\theta(\theta = 0) \\ v_r(\theta = \pi) &= v_r(\theta = 0) \end{aligned} \tag{D.3}$$

在有限差分法中，我们分别在r 和 θ 方向上取$N_r = 51$ 个点和$N_\theta = 301$ 个点。我们用$v^t_{\theta,i,j}$ 和$v^t_{r,i,j}$ 表示时间t时离散点的速度，其中索引i、j 分别表示r 和 θ方向上点的标签。我们采用空间二阶离散精度求解方程（D.1），如下所示

$$\begin{aligned} v^{t+1}_{\theta,i,j} &= v^t_{\theta,i,j} + F_\theta \Delta t \\ &+ \nu\left(\frac{v^t_{\theta,i+1,j} - 2v^t_{\theta,i,j} + v^t_{\theta,i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r^2}\frac{v^t_{\theta,i,j+1} - 2v^t_{\theta,i,j} + v^t_{\theta,i,j-1}}{(\Delta\theta)^2} + \frac{1}{r}\frac{v^t_{\theta,i+1,j} - v^t_{\theta,i-1,j}}{2\Delta r}\right. \\ &+ \left.\frac{2}{r^2}\frac{v^t_{r,i,j+1} - v^t_{r,i,j-1}}{2\Delta\theta} - \frac{v^t_{\theta,i,j}}{r^2}\right)\Delta t - v^t_{r,i,j}\frac{v^t_{\theta,i+1,j} - v^t_{\theta,i-1,j}}{2\Delta r}\Delta t - \frac{v^t_{\theta,i,j}}{r}\left(\frac{v^t_{r,i,j+1} - v^t_{r,i,j-1}}{2\Delta\theta} + v^t_{r,i,j}\right)\Delta t \end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned} v^{t+1}_{r,i,j} &= v^t_{r,i,j} + \nu\left(\frac{v^t_{r,i+1,j} - 2v^t_{r,i,j} + v^t_{r,i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r^2}\frac{v^t_{r,i,j+1} - 2v^t_{r,i,j} + v^t_{r,i,j-1}}{(\Delta\theta)^2} + \frac{1}{r}\frac{v^t_{r,i+1,j} - v^t_{r,i-1,j}}{2\Delta r}\right. \\ &- \left.\frac{2}{r^2}\frac{v^t_{\theta,i,j+1} - v^t_{\theta,i,j-1}}{2\Delta\theta} - \frac{v^t_r}{r^2}\right)\Delta t - v^t_{r,i,j}\frac{v^t_{r,i+1,j} - v^t_{r,i-1,j}}{2\Delta r}\Delta t - \frac{v^t_{\theta,i,j}}{r}\left(\frac{v^t_{r,i,j+1} - v^t_{r,j-1}}{2\Delta\theta} - v^t_{\theta,i,j}\right)\Delta t \end{aligned} \tag{D.5}$$

这里，索引为 $1 < i < N_r$, $1 < j < N_\theta$。对于滑移边界和不可渗透条件，离散形式如下

$$\begin{aligned} v^t_{\theta,i=1,j} &= \frac{(4v^t_{\theta,i=2,j} - v^t_{\theta,i=3,j})b}{2\Delta\theta + 3b} \\ v^t_{\theta,i=N_r,j} &= \frac{(4v^t_{\theta,i=N_r-1,j} - v^t_{\theta,i=N_r-2,j})b}{2\Delta\theta + 3b} \\ v^t_{r,i=0,j} &= 0 \\ v^t_{r,i=N,j} &= 0 \end{aligned} \tag{D.6}$$

对于入口和出口边界条件以及周期性条件，我们有

$$\begin{aligned} v^t_{\theta,i,j=1} &= v^t_{\theta,i,j=1}(R_1 + R_2 - r) \\ v^t_{r,i,j=1} &= v^t_{r,i,j=1}(R_1 + R_2 - r) \\ v^t_{\theta,i,j=N} &= v^t_{\theta,i,j=1} \\ v^t_{r,i,j=N} &= v^t_{\theta,i,j=N} \end{aligned} \tag{D.7}$$