arXiv:2303.06408v1 [math.CV] 11 Mar 2023

凯勒–爱因斯坦度量与障碍平坦性 II：单位球面丛

PETER EBENFELT、Ming Xiao 和 Hang Xu

摘要。本文研究由凯勒流形 (M, g) 上 Griffiths 负厄米向量丛 (E, h) 的单位球面丛 $S(E)$ 所形成的超曲面 Σ 的障碍平坦性。我们证明，若 (E, h) 的曲率满足分裂条件，且 (M, g) 具有常数里奇特征值，则 $S(E)$ 是障碍平坦的。此外，若所有这些特征值都严格小于 1，且 (M, g) 完备，则我们证明相应的球丛存在完备凯勒-爱因斯坦度量。

1. 引言

本文中，作者继续研究向量丛中的域这一背景下的凯勒–爱因斯坦度量与障碍平坦性。在最近的一篇论文中 [5] ，作者研究了由凯勒流形上的负厄米线丛的单位圆丛所形成的 CR 超曲面的障碍平坦性。作者证明了若干结果，其中包括：对于复流形 (L, h) 上的 M，如果由 g 诱导的凯勒度量 $-\mathrm{Ric}(L, h)$ 具有常数里奇特征值，那么单位圆丛 $S(L)$ 就是障碍平坦的。此外，如果所有里奇特征值都严格小于 1，那么圆盘丛存在完备凯勒–爱因斯坦度量。自然也可以考虑更一般的情形，即高秩厄米向量丛中的单位球面丛。本文的目标是找出向量丛应满足的恰当条件，以确保相应的球面丛障碍平坦。事实证明，这比线丛情形更为微妙（参见下文注记 1.5 以及本引言倒数第二段）；除了线丛情形中对里奇曲率提出的条件之外，我们还需要对曲率提出一项附加条件，具体如下文所述。

我们首先在经典背景下引入障碍平坦性的概念。对于边界光滑的强拟凸区域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$，Ω 上完备凯勒–爱因斯坦度量的存在性由以下 Fefferman 复 Monge-Ampère 方程的狄利克雷问题决定:

$$\begin{cases} J(u) := (-1)^n \det \begin{pmatrix} u & u_{\overline{z_k}} \\ u_{z_j} & u_{z_j \overline{z_k}} \end{pmatrix} = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $u > 0$ 位于 Ω 中。若 u 是方程 (1.1) 的解，则 $-\log u$ 是 Ω 上一个具有负 Ricci 曲率的完备凯勒–爱因斯坦度量的凯勒势。Fefferman [6]证明，方程 (1.1) 存在一个近似解 $\rho \in C^\infty(\Omega)$，它仅满足 $J(\rho) = 1 + O(\rho^{n+1})$，并证明这种近似解在模 $O(\rho^{n+2})$ 的意义下是唯一的。这种近似解 ρ 通常称为 Fefferman 定义函数。随后，Cheng 和 Yau [2] 证明了一个

2020 数学主题分类。32W20 32V15 32Q20。第一位作者部分获得美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1900955 和 DMS-2154368。第二位作者部分获得美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1800549 和 DMS-2045104。第三位作者部分获得国家自然科学基金委员会资助，项目编号为 12201040。

精确解 $u \in C^\infty(\Omega)$ 满足 (1.1)，现称为 Cheng–Yau 解。Lee 和 Melrose [9] 证明 Cheng–Yau 解具有如下渐近展开：

$$u \sim \rho \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \left(\rho^{n+1} \log \rho\right)^k, \tag{1.2}$$

其中每个 $\eta_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ 和 ρ 都是 Fefferman 定义函数。展开式 (1.2) 表明，一般而言，程-丘解 u 只能期待具有有限阶的边界光滑性；也就是说，对于任意 $\varepsilon > 0$，$u \in C^{n+2-\varepsilon}(\Omega)$。Graham [8] 证明，程-丘解的$C^\infty$ 边界正则性所受的障碍实际上由最低阶障碍$\eta_1|_{\partial\Omega}$给出，即 η_1 在边界上的限制。更确切地说，在[8] 中，Graham 证明，若 $\eta_1|_{\partial\Omega}$（在 $\partial\Omega$ 上）恒等于零，则对于所有 $k \geq 1$，每个 η_k 在 $\partial\Omega$ 上都以无穷阶消失。因此，$\eta_1|_{\partial\Omega}$ 称为障碍函数。Graham 还证明（同上），对于任意 $k \geq 1$，系数 η_k 模 $O(\rho^{n+1})$ 与 Fefferman 定义函数 ρ的选取无关，并且由 $\partial\Omega$ 的局部 CR 几何局部决定。因此，对于$k \geq 1$，η_k 模 $O(\rho^{n+1})$ 是局部 CR 不变量，可定义在复流形中的任意强伪凸 CR超曲面上。特别地，障碍函数 $\mathcal{O} = \eta_1|_{\partial\Omega}$ 是局部 CR 不变量，可定义在任意强伪凸 CR超曲面 Σ上。若 Σ 是障碍函数 $\mathcal{O}$ 恒等于零的 CR超曲面，则称 Σ 为障碍平坦。障碍平坦超曲面中最基本的例子是球面 $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$；更一般地，任何局部 CR 微分同胚于球面某个开片的 CR超曲面也是如此。在任意一点的邻域内局部 CR 微分同胚于球面某个开片的 CR超曲面称为球形。

如上所述，本文的主要目标是将作者在 [5] 中关于凯勒流形上负 Hermitian 线丛的单位圆丛障碍平坦性的结果，推广到更一般的情形，即高秩厄米向量丛的球面丛。为了表述我们的结果，我们先回顾一些关于厄米向量丛与凯勒流形几何的标准事实和概念。设 (E, h) 是复流形 M 上的厄米（全纯）向量丛。记 $\pi : E \to M$ 为典范投影，并以 $E_z = \pi^{-1}(z)$ 表示 z 处的纤维。令 $\Theta = \Theta_{E\text{为}h}$ (E, h) 的 Chern 联络的曲率形式；因此，Θ 是一个取值于 End(E) 的 (1, 1)-形式。在每个点 $z \in M$，张量 $\Theta_z = \Theta(z)$ 可视为 $E_z \otimes T^1$ 上的$_z$ ^{0} Hermitian 双线性形式。我们作如下定义，后续的主要结果将用到它。

定义 1.1. 若在每个 $z \in M$ 处都存在一个厄米形式 H_z on$_{T^{1,z}}$ ^0M使得 $\Theta_z = h \cdot H_z$，则曲率 Θ 分裂；等价地，对于任意 $e \in E_z$ 和任意 $v \in T^1{}_{,z}$ ^0M，

$$\Theta_z(e \otimes v, e \otimes v) = h(e, e) \cdot H_z(v, v). \tag{1.3}$$

此外，若向量丛 (E, h) 是 曲率分裂的，即其曲率 Θ 分裂。我们注意到，在这种情况下，H_z 等于 (E, h) 在 z 处的里奇曲率，二者相差一个缩放因子。参见 2.1 中 §2 的 (

当厄米向量丛 (E, h) 是 Griffiths 负的，即对于所有非零的 $e \in E_z$、$v \in T^1$、$_z$ ^0M 以及 $z \in M$，都有 $\sqrt{-1}\Theta_z(e \otimes v, e \otimes v) < 0$ 时，其 Ricci 曲率的相反数 $-\text{Ric}(E, h)$ 会在 M 上诱导出一个凯勒度量 g。根据 Mok-Ng 中的引理 1.2.2 [11], , 相应的球面丛 $S(E) = \{e \in E : |e|_h = 1\}$ 是强伪凸的；此处，$|e|_h = \sqrt{h(e, e)}$ 表示 e 关于度量 h 的范数。

给定一个 n 维凯勒流形 (M, g)，令 Ric $= -i\partial\overline{\partial}\log\det(g)$ 表示相应的里奇张量。后者自然诱导出一个作用于全纯切空间 $T^1{}_{,z}$ ^0M的端同态，即里奇端同态，其定义为 Ric $\cdot g^{-1}$ for $z \in M$。该端同态的特征值

称为 (M,g) 的里奇特征值，并且按定义是 $z\in M$ 的函数。由于 Ric 和 g 均为厄米张量，所有里奇特征值都是实数值。对于固定的 z，我们对里奇特征值进行标记，使得 $\lambda_1(z)\le\cdots\le\lambda_n(z)$。注意，$\lambda_i(z)$ 之和，即里奇端同态的迹，给出了 z 处的数量曲率。若每个 $\lambda_i(z)$（其中 $1\le i\le n$）都是 M 上的常数函数，则称凯勒流形 (M,g) 具有常数里奇特征值；等价地，里奇端同态的特征多项式 $\mathrm{Ric}\cdot g^{-1}\colon T^{1,0}_zM\to T^{1,0}_zM$ 在每个点 $z\in M$ 处都相同。

我们的第一个主要结果如下。

定理 1.2. 设 (E,h) 是复流形 M 上的厄米全纯向量丛。假设 (E,h) 是 *Griffiths* 负的，且其曲率分裂。令 g 为 M 上由 $-\mathrm{Ric}(E,h)$ 诱导的凯勒度量。若 (M,g) 具有常数里奇特征值，则 $S(E)$ 是障碍平坦的。

请回想，障碍平坦性的概念源于域上完备凯勒–爱因斯坦度量的研究背景。自然会问，在我们所考虑的情形下，相应的球丛 $B(E)=\{e\in E:|e|_h<1\}$（E,h）上是否存在完备凯勒–爱因斯坦度量（全局地）。我们将证明以下结果：

定理 *1.3.* 设 $n\ge1$、$k\ge1$ 和 $m=n+k$。设 M 是维数为 n 的复流形，且 *(E, h)* 是 M 上秩为 k 的厄米全纯向量丛，满足 *(E, h)* 是 *Griffiths* 负的，且其曲率分裂。令 g 为 M 上由 $-$ *Ric(E, h)* 诱导的凯勒度量。假设 *(M, g)* 是完备的，且具有常数里奇特征值。若所有里奇特征值都严格小于 *1*，则球丛 *B(E)* 上存在唯一的完备凯勒–爱因斯坦度量 $\widetilde{g}$，其里奇曲率等于 $-(m+1)$。此外，该度量由以下凯勒形式诱导

$$\widetilde{\omega}(w,\overline{w}):=-\frac{1}{m+1}\pi^*(\mathrm{Ric})|_w+\frac{1}{m+1}\pi^*(\omega)|_w-i\partial\overline{\partial}\log\phi(|w|_h),\tag{1.4}$$

其中，ω 和Ric 分别是(M,g)的凯勒形式和里奇形式，π：向量丛的典范纤维投影。此外，ϕ：$(-1,1)\to\mathbb{R}^+$ 是一个偶实解析函数，仅取决于(M,g)的里奇端同态的特征多项式。（更准确地说，ϕ 由命题4.1 在取 λ_i为里奇特征值时给出。）

如果厄米向量丛是由同一个厄米线丛的多个副本直和而成，那么它自动满足曲率分裂条件（参见命题2.1）。因此，我们得到定理1.2 和1.3的以下推论。

Coro论 1.4。设(L,h_0) 是复流形 M 上的负线丛。设 t

$$(E,h)=(L,h_0)\oplus\cdots\oplus(L,h_0),$$

其中右侧有 k 个(L,h_0) 的副本。令 g 为由$-\mathrm{Ric}(E,h)$诱导的凯勒度量。若(M,g) 具有常数里奇特征值，则 $S(E)$ 是障碍平坦的。此外，若(M,g) 还是完备的，且所有里奇特征值都严格小于1，则球丛 $B(E)$ 存在唯一的完备凯勒–爱因斯坦度量，其里奇曲率等于$-(m+1)$，其中 $m=n+k$，而 n 是 M 的维数。

注 1.5。在推论 1.4 的设定下，Webster [14] 证明，对于 $n=1$ 和 $k\ge2$，*S(E)* 是球形的，当且仅当 *(M, g)* 具有常高斯曲率 $K=-2/k$。注意，此处的度量 g是[14]中所用度量的 k 倍。这个结果说明了 *(E, h)* 为线丛 $(k=1)$ 与其为秩 $k\ge2$向量丛这两种情形之间的差异。在前一种情形下，只要 M 紧致，无论 K 取何值，圆丛是球形的当且仅当 K 为常数。

注 1.6。结合注 1.5 中 Webster 的结果与推论 1.4 可知，对于 $n = 1$和 $k \geq 2$，若 (M, g) 的高斯曲率为常数但不等于 -2，则 $S(E)$ 障碍平坦但非球形。例如，在推论 1.4 中取 $M = \mathbb{CP}^1$，并令 (L, h_0) 为典范线丛，可得 $S(E)$ 是 $k \geq 2$的一个紧致、障碍平坦且非球形的 CR 超曲面。（更多障碍平坦 CR 超曲面的例子见 §5。）

注 1.7。定理 1.3 和推论 1.4 中完备凯勒–爱因斯坦度量存在的条件是最优的，也就是说，如果某个里奇特征值大于或等于 1，则结论不成立。事实上，以下陈述可由 van Coevering 在 [13,定理 1.1 和推论 1.3] 中的工作推出。设 M 是一个维数为 n 的紧复流形，且 (E, h) 是其上的一个秩为 k 的厄米全纯向量丛。假设 (E, h) 是 Griffiths 负的。令 g 为 M 上由 $-\mathrm{Ric}(E, h)$ 诱导的凯勒度量。假设 (M, g) 具有常数里奇特征值。那么，球丛 $B(E)$ 存在唯一的完备凯勒–爱因斯坦度量 $\tilde{g}$，其里奇曲率等于 $-(n+k+1)$，当且仅当这些里奇特征值都严格小于 1。不过我们指出，van Coevering 的工作 [13] 中的条件是以陈类的负性来表述的：$-c_1(M) - c_1(E) > 0$。在常数里奇特征值的背景下，可以证明该条件等价于所有里奇特征值均为 < 1，如定理 1.3 和推论 1.4 所示。为说明这一等价性，可以验证当 $-c_1(M) - c_1(E) > 0$ 时，我们有

$$\int_M S_k(1-\lambda_1, \ldots, 1-\lambda_n)\,\omega^n > 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

其中 S_k 表示次数为 k 的对称多项式，而 λ_j 表示 Ricci 特征值。当 Ricci 特征值为常数时，条件（1.5）显然蕴含 $\lambda_j < 1$ 对 $1 \leq j \leq k$成立。反向蕴含显然成立。定理 1.3的主要新意在于 M 不必是紧的，此外还给出了凯勒–爱因斯坦度量的显式公式（1.4）。

一个特别值得关注的情形是底流形为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域。回顾一下，对于一个边界光滑的强拟凸区域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$，程-丘解$u \in C^\infty(\Omega)$ 是方程 (1.1) 的唯一解，而 $-\log u$ 是具有负 Ricci 曲率的完备凯勒–爱因斯坦度量的势。更一般地，当 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界伪凸域时，根据 Mok–Yau [12] 的工作，Ω 存在唯一的完备凯勒–爱因斯坦度量，其 Ricci 曲率等于 $-(n+1)$。若记 $g = \sum_{i,j=1}^n g_{i\bar{j}} dz_i \otimes d\overline{z_j}$，并令 $u = (\det g_{i\bar{j}})^{-\frac{1}{n+1}}$，则 u 满足方程 (1.1)。我们称 u 为 Ω 上的程–丘–莫解。下面给出定理 1.3 的推论。

推论 1.8。设 $n \geq 1$, $k \geq 1$ 和 $m = n + k$。设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域，且 h 是定义在 D 上的正实解析函数，使得 $\omega := \sqrt{-1}\, k\, \partial\overline{\partial} \log h$ 是 D上的完备凯勒度量 $g = \sum_{i,j=1}^n g_{i\bar{j}} dz_i \otimes d\overline{z_j}$ 的凯勒形式。假设 (D, g) 具有常数里奇特征值，且所有特征值都严格小于 1。考虑区域

$$\Omega := \{w = (z, \xi) \in D \times \mathbb{C}^k : |\xi|^2 h(z, \bar{z}) < 1\}, \tag{1.6}$$

以及实超曲面（它是Ω边界的开稠密子集）

$$\Sigma := \{w = (z, \xi) \in D \times \mathbb{C}^k : |\xi|^2 h(z, \bar{z}) = 1\}. \tag{1.7}$$

那么Ω 的程–丘–莫解 u由下式给出

$$u(w) = k^{\frac{n}{m+1}} (GH)^{-\frac{1}{m+1}} \phi(|\xi| h^{\frac{1}{2}}), \tag{1.8}$$

其中 $H = h^k$, $G = \det(g_{i\bar{j}})$ 且 ϕ 如定理 1.3. 此外， u 可实解析地延拓穿过边界片段 Σ。

推论 *1.9.* 设 $n \geq 1$, $k \geq 1$ 和 $m = n + k$。设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域，且 h 是在 D 上的一个正实解析函数，使得 $\omega := \sqrt{-1}\, k\, \partial\overline{\partial} \log h$ 是完备凯勒度量 $g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}} dz_i \otimes \overline{dz_j}$ 在 D上的凯勒形式。假设 (D, g) 是一个齐性凯勒流形（即，全纯等距变换群在 D上传递作用）。考虑由 *(1.6)* 和 *(1.7)* 定义的域 Ω 和实超曲面 Σ。那么 Ω 的程–丘–莫解 u为

$$u(w) = k^{\frac{n}{m+1}} (GH)^{-\frac{1}{m+1}} \phi(|\xi| h^{\frac{1}{2}}),$$

其中 $H = h^k$, $G = \det(g_{i\bar{j}})$ 以及 ϕ 与定理 *1.3*中的定义相同。此外， u 可实解析地延拓至边界片 Σ。

最后，通过研究 Cheng–Yau–Mok 解的有理性，我们根据 Bergman–Einstein 条件，刻画了一类蛋形域中的单位球。Yau 提出的一个著名猜想 [15] 断言：若有界伪凸域的伯格曼度量是凯勒-爱因斯坦度量，则该域必为齐性域。下面的结果对一类蛋形域给出了肯定的回答。

命题 1.10. 给定 $p \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ 和 $k \in \mathbb{Z}^+$，令

$$E_p := \{(z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k : |z|^2 + |\xi|^{2p} < 1\}.$$

E_p 的伯格曼度量是凯勒–爱因斯坦度量，当且仅当 $p = 1$。

注 1.11. 当 $n = 1$ 和 $k = 1$时，上述命题由 Cho 证明[3] （Fu–Wong 早先也已在 p 为整数时证明了该命题[7] ）。当 $k = 1$ 和 $n \geq 1$时，该命题由作者在 [5]中证明。

尽管我们已经在[5], 中确立了线丛情形下的定理 1.2 和 1.3 的相应结论，但我们要强调，本文将其推广到向量丛情形绝非简单而显然。为说明这两种情形之间的一个基本差异，我们给出如下观察：设 (L, h) 是凯勒流形 (M, g) 上的厄米线丛，其中g 由 $-\mathrm{Ric}(L, h)$ 诱导。那么，在一些较弱的假设下（例如 M 的单连通性），(M, g) 的每个全纯自等距变换都可自然延拓为 (L, h) 的一个双全纯映射，并保持纤维范数。然而，当将 (L, h) 换成一个秩更高的向量丛 (E, h) 时，这一结论便完全不成立。虽然我们借鉴了[5] 中的思路，在定理 1.2 和 1.3 的证明中构造所需的度量，但主要困难在于验证所构造的度量确实满足凯勒–爱因斯坦条件（即复 Monge–Ampère 方程）。特别是在向量丛情形下，一般而言，计算我们所构造度量的里奇曲率似乎非常困难。一个关键观察是，曲率分裂假设似乎恰好能使计算变得可行。然而，即使在这一假设下，向量丛情形的计算也远比线丛情形复杂（参见引理 3.6 和引理 3.7）。

本文的组织结构如下。 §2 介绍厄米向量丛的一些预备知识，包括 Griffiths 负性和曲率分裂条件。在§3 和 §4中，我们将分别证明定理1.2 和定理1.3。在 §5中，我们将证明推论1.8、推论1.9 和命题 1.10 ，并构造一些障碍 CR 超曲面的例子。

致谢。第三位作者谨向郝一宏教授和张立友教授致谢，感谢他们向其介绍论文 [13] ，并进行了有益的讨论。

2. 厄米向量丛

设 (E,h) 是复流形 M 上的厄米（全纯）向量丛，其维数为 n。记 $\pi: E\to M$ 为典范投影，$E_z=\pi^{-1}(z)$ 为 z 处的纤维。如前所述，$\Theta=\Theta_{E,h}$ 是 (E,h) 的 Chern 联络的曲率形式。令 $k=$ 的秩为 E，并令 $\{e_\alpha(z)\}_{\alpha=1}^k$ 为 E_z 的一组基。若 $\{e_\alpha(z)\}_{\alpha=1}^k$ 是标准正交的，则 E 在 z 处的里奇曲率由 $T^{1,0}_zM$ 上的厄米形式给出：

$$\mathrm{Ric}(E)(v,v)=\sum_{\alpha=1}^k\Theta_z(e_\alpha(z)\otimes v,e_\alpha(z)\otimes v).$$

注意，定义 1.3 中的条件 1.1 意味着 $\mathrm{Ric}(E)(v,v)=kH_z(v,v)$。因此，曲率$\Theta$ 分裂当且仅当

$$\Theta=\frac{1}{k}h\cdot\mathrm{Ric}(E). \tag{2.1}$$

用局部坐标表示曲率分裂条件会很有帮助。设 (D,z) with$z=(z_1,\cdots,z_n)$ 是 M的一个局部坐标图，且 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^k$是 D上的 E的一个局部标架。那么我们有

$$\pi^{-1}(D)=\Big\{\sum_{\alpha=1}^k\xi_\alpha e_\alpha(z):z\in D\text{ and }\xi_\alpha\in\mathbb{C}\text{ for any }1\le\alpha\le k\Big\},$$

并且 $(z,\xi)=(z,\xi_1,\cdots,\xi_k)$ 构成 $\pi^{-1}(D)$ 上的一个局部坐标系。相对于局部坐标 z 和 D上的局部标架 $\{e_\alpha\}$，我们可以将曲率张量 Θ 写成

$$\Theta:=\sum_{\alpha,\beta=1}^k\sum_{i,j=1}^n\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j}\,e_\alpha^*\otimes\overline{e_\beta^*}\otimes dz_i\otimes d\overline{z_j}.$$

此外，若记 $h_{\alpha\bar\beta}:=h(e_\alpha,e_\beta)$ 和 $R_{i\bar j}:=\mathrm{Ric}(E)\big(\frac{\partial}{\partial z_i},\frac{\partial}{\partial z_j}\big)$，则众所周知

$$\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j}=-\frac{\partial^2h_{\alpha\bar\beta}}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}+h^{\gamma\bar\delta}\frac{\partial h_{\alpha\bar\delta}}{\partial z_i}\frac{\partial h_{\gamma\bar\beta}}{\partial\overline{z_j}}, \tag{2.2}$$

且曲率分裂条件（1.3）变为

$$\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j}=\frac{1}{k}h_{\alpha\bar\beta}R_{i\bar j}. \tag{2.3}$$

在本文余下部分中，我们用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma\cdots$表示取值范围为 1 到 k 的指标，它们对应于 E的纤维坐标；用罗马字母 i,j 表示取值范围为 1 到 n 的指标，它们对应于 M的局部坐标；并用罗马字母 s,t 表示取值范围为 1 到 $m=n+k$ 的指标，它们对应于全空间 E的局部坐标。

曲率分裂条件对任意厄米线丛都显然成立。但对于高秩厄米向量丛，这确实是一个很强的条件。尽管如此，我们仍可通过考虑厄米线丛的直和来构造大量此类例子。

命题 2.1. 设 $(L_1,h_1)\cdots、(L_k,h_k)$ 是复流形 M 上的厄米线丛。令 $(E,h)=(L_1,h_1)\oplus\cdots\oplus(L_k,h_k)$。那么，*$(E,h)$ 是曲率分裂的，当且仅当 $\mathrm{Ric}(L_1,h_1)=\cdots=\mathrm{Ric}(L_k,h_k)$。特别是，如果 $(L_1,h_1)=\cdots=(L_k,h_k)$，那么 (E,h) 是曲率分裂。*

注记 2.2. 设 (L_1,h_1) 和 (L_2,h_2) 是复流形M上的两个厄米线丛。则 $\mathrm{Ric}(L_1,h_1)=\mathrm{Ric}(L_2,h_2)$ 意味着 L_1 和 L_2 光滑等价，但一般而言，它们不一定双全纯等价。

命题 2.1 的证明。 设 $(D,\ z)$ 是一个局部坐标图，且 e_α 是 L_α 在$1 \le k \le \alpha$ 上的局部标架 D。则 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^k$ 构成 E的一个局部标架，在此标架下，度量 h 变为对角矩阵

$$(h_{\alpha\bar\beta}) = \begin{pmatrix} h_1(e_1,e_1) & & \\ & \ddots & \\ & & h_k(e_k,e_k) \end{pmatrix}.$$

由（2.2），当 $\alpha \neq \beta$ 时，可得 $\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j} = 0$；当 $\alpha = \beta$ 时，有

$$\Theta_{\alpha\bar\alpha i\bar j} = -\frac{\partial^2 h_{\alpha\bar\alpha}}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} + h^{\alpha\bar\alpha}\frac{\partial h_{\alpha\bar\alpha}}{\partial z_i}\frac{\partial h_{\alpha\bar\alpha}}{\partial \overline{z_j}} = -h_{\alpha\bar\alpha}\frac{\partial^2 \log\left(h_{\alpha\bar\alpha}\right)}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} = h_{\alpha\bar\alpha}\left(\mathrm{Ric}(L_\alpha, h_\alpha)\right)_{i\bar j}.$$

因此,

$$\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j} = h_{\alpha\bar\beta}\left(\mathrm{Ric}(L_\alpha, h_\alpha)\right)_{i\bar j}.$$

另一方面，曲率分裂条件（2.3）可写为

$$\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j} = \frac{1}{k}h_{\alpha\bar\beta}\left(\mathrm{Ric}(E,h)\right)_{i\bar j} = \frac{1}{k}h_{\alpha\bar\beta}\sum_{\gamma=1}^{k}\left(\mathrm{Ric}(L_\gamma, h_\gamma)\right)_{i\bar j}.$$

因此，比较上述两个方程即可得出结论。 □

接下来，我们回顾厄米向量丛的 Griffiths 负性（及正性）的概念和一些简单事实。

定义 2.3。设 $(E,\ h)$ 是复流形上的一个厄米向量丛。若对任意 $z \in M$，$e \in E_z$ 及 $v \in T^{1,\ 0}M$，均有 $(E,\ h)$ 是 ***Griffiths*** 负（分别为正），则称之为

$$\Theta_z(e\otimes v, e\otimes v) \le 0 \quad (resp.\ \ge 0),$$

且等号成立当且仅当 $e = 0$ 或 $v = 0$（即 $e\otimes v = 0$）。在局部坐标中，这意味着对任意 $v = (v_1,\ \cdots,\ v_n) \in \mathbb{C}^n$ 和 $\xi = (\xi_1,\ \cdots,\ \xi_k) \in \mathbb{C}^k$，有 $\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j}\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}v_i\overline{v_j} \le 0$（分别为 ≥ 0），且等号成立当且仅当 $v = 0$ 或 $\xi = 0$。

引理 2.4。 设 $(E,\ h)$ 是复流形上的厄米向量丛。考虑以下性质：

（1）厄米向量丛 $(E,\ h)$ 是 ***Griffiths*** 负（分别为正）的。（2）行列式线丛 $L = \det E$ 配备行列式度量 $\det\ h$ 后是负的（分别为正的）。

一般而言，（1）蕴含（2）。若曲率 Θ 可分解，则（1）与（2）等价。

证明。 由 (1) 推出 (2) 这一事实直接由恒等式得出

$$\left(\mathrm{Ric}(L)\right)_{i\bar j} = \left(\mathrm{Ric}(E)\right)_{i\bar j} = h^{\alpha\bar\beta}\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j}.$$

当 Θ分裂时，由 (2.3) 可得 $\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j} = \frac{1}{k}h_{\alpha\bar\beta}\left(\mathrm{Ric}(L)\right)_{i\bar j}$. 此时，显然 (2) 也推出 (1)。 □

注 2.5. 设 (L_1, h_1) $\cdots$、(L_k, h_k) 是复流形 M 上的线丛，并考虑向量丛 $(E,h) := (L_1,h_1) \oplus \cdots \oplus (L_k, h_k)$。那么可得 $\mathrm{Ric}(\det E, \det\ h)$ $=\mathrm{Ric}(E,h)$ $= \sum_{j=1}^k \mathrm{Ric}(L_j, h_j)$。利用命题 2.1 和引理 2.4，我们立即得到：若 (E,h) 是曲率分裂的，则 (E,h) 是 Griffiths 负，当且仅当每个 (L_j,h_j) for $1 \le j \le k$ 都是负的。

注 2.6. 考虑 M 是黎曼曲面（即 $n=1$）这一特殊情形。设 (E,h)是 M 上的 Griffiths负向量丛，并设 g 是由 $-\mathrm{Ric}(E,h)$诱导的度量。根据（2.3），向量丛 (E,h) 是曲率分裂的，当且仅当 (E,h) 是 Hermitian–Einstein。

对于厄米全纯向量丛 (E,h)，回忆一下，$S(E):=\{e\in E:\ |e|_h=1\}$ 表示 (E,h)的球面丛。本节最后指出以下基本事实；参见[11,引理 1.22] 和 [13, 命题 53]。

命题 2.7。 若(E,h) 是 *Griffiths* 负的，则 $S(E)$ 是强伪凸的。

3. 定理 1.2 的证明

本节证明定理 1.2。由于障碍平坦性是一个局部性质（参见 [8]），我们需要证明，对于任意点 $p\in S(E)$，都存在 U 的一个邻域，使得$S(E)\cap U$ 是障碍平坦的。根据 Graham [8] 的工作，同样只需构造一个函数$u\in C^\infty(U)$，使其在 $S(E)\cap U$上满足 $u=0$，并且在 $S(E)\cap U$的拟凸侧满足 $J(u)=1$。为此，我们将建立一系列命题和引理。

命题 3.1. 设 $P(y)$ 是 $y\in\mathbb{R}$ 中的一个次数为 $m-1\geq 1$ 的首一多项式，且 $Q(y)$ 是满足 $\frac{dQ}{dy}=(m+1)yP(y)$ 的多项式（因此 Q 是一个次数为 $m+1$ 的首一多项式，并且$\hat{}$ $\hat{}$在相差一个常数的意义下唯一）。设 P 和 Q 是由下式定义的多项式

$$\hat{P}(x)=x^{m-1}P(x^{-1}),\quad \hat{Q}(x)=x^{m+1}Q(x^{-1}).$$

设 $I\subset(0,\infty)$ 是包含 $r=1$ 的一个开区间，且 $Z(r)$ 是 I 上的实解析函数，满足以下条件：

$$rZ'\hat{P}(Z)+\hat{Q}(Z)=0\ \text{ on } I,\quad Z(1)=0. \tag{3.1}$$

$$Z'(r)<0\ \text{ and }\ \hat{P}(Z)>0\ \text{ on } I,\ Z(r)>0\ \text{ on } I_0:=I\cap(0,1),\ \text{ and } Z'(1)=-1. \tag{3.2}$$

设 $k\in\mathbb{Z}^+$满足 $k\leq m-1$，并令 $\phi(r)=2\Big(\frac{r^{2k-1}\hat{}(Z)}{-Z'P}\Big)^{\frac{1}{m+1}}Z$在 I上。则 ϕ在 I上实解析，$\phi(1)=0$且 $\phi>0$在 I_0上。此外，ϕ满足 $(m+1)rZ\phi'+(m+1-2kZ)\phi=0$在 I上，且$\phi'(1)=-2$。

$\hat{}\hat{}$ $\hat{}$**注记 3.2**。 由于 P和 Q 是首一多项式，因此多项式 P和 Q 满足 $P(0)=1\hat{}$且 $Q(0)=1$. 根据初等常微分方程理论，式（3.1）有一个实解析解 Z，它在某个包含 I 1的开区间内满足式（3.2）。

证明。 显然，ϕ 在 I上是实解析的，$\phi(1)=0$，且 $\phi>0$ 在 I_0 上也是实解析的，这是由 ϕ的定义及 Z的假设可知。我们只需证明命题 3.1中的最后一个断言。证明与 [5]中的命题 2.1 类似。我们仅强调以下两个引理，结论便显而易见。

引理 3.3。 设 Z 如命题 *3.1*中所述，则有

$$r(Z'Z^{-(m+1)}\hat{P}(Z))'=(m+1)Z'Z^{-(m+2)}\hat{P}(Z)-Z'Z^{-(m+1)}\hat{P}(Z)\ \text{ on } I_0.$$

等价地，

$$r\frac{(Z'Z^{-(m+1)}\hat{P}(Z))'}{Z'Z^{-(m+1)}\hat{P}(Z)}=-1+(m+1)Z^{-1}\ \text{ on } I_0.$$

引理 3.4。 设 ϕ 和 Z 如命题 *3.1*中所述。则有

$$r\frac{(Z'Z^{-(m+1)}\hat{P}(Z))'}{Z'Z^{-(m+1)}\hat{P}(Z)} = (2k-1) - (m+1)r\frac{\phi'}{\phi} \text{ on } I_0.$$

引理 3.3 与 [5] 中的引理 2.3 相同；引理 3.4 可由与 [5] 中引理 2.4 类似的论证推出。因此，我们省略它们的证明。最后，我们比较引理 3.3 和引理 3.4（第二个方程），得到 $(m+1)rZ\phi' + (m+1-2kZ)\phi = 0$ 在 I_0 上成立。由解析性可知，它实际上在 I. 上成立。回想 $Z(1) = 0$、$\hat{P}(0) = 1$ 以及 $Z'(1) = -1$。由 ϕ 的定义可得$\phi'(1) = -2$. 至此，命题 3.1 得证。□

设 (M, g) 和 (E, h) 如定理 1.2 中所述。记 n 为 M 的复维数， k为 E 的秩。选取 M 的一个坐标图 (D, z)，并取 E 在 D 上的一个局部标架 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^k$。令 $\pi : E \to M$ 为典范投影。于是有

$$\pi^{-1}(D) = \Big\{\sum_{\alpha=1}^{k} \xi_\alpha e_\alpha(z) : (z, \xi) \in D \times \mathbb{C}^k\Big\}.$$

在此平凡化下， $S(E)$在 D 上的球面丛可写为

$$\Sigma := S(E) \cap \pi^{-1}(D) = \Big\{(z, \xi) \in D \times \mathbb{C}^k : \sum_{\alpha,\beta=1}^{k} h_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z})\xi_\alpha\overline{\xi_\beta} = 1\Big\},$$

其中，对于 $1 \le \alpha, \beta \le k$， $h_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z}) = h(e_\alpha(z), e_\beta(z))$。在局部坐标 $z = (z_1, \cdots, z_n)$中，我们在 D 上记$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}} dz_i \otimes d\overline{z_j}$。由于 g由 $-\mathrm{Ric}(E, h)$诱导，我们有 $g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \log H}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}$，其中$H = \det(h_{\alpha\bar{\beta}})$。令 $G = \det(g_{i\bar{j}})$于 D上。

设 $m = n + k$，并用 I_n表示 $n \times n$单位矩阵。给定 $p \in M$，令 $T(y, p)$为线性算子 $\frac{2k}{m+1}\mathrm{Ric} \cdot g^{-1} : T^{1,0}_p M \to T^{1,0}_p M$. 的特征多项式。也就是说，

$$T(y, p) = \det(yI_n - \frac{2k}{m+1}\mathrm{Ric} \cdot g^{-1}). \tag{3.3}$$

在局部坐标 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 中，将里奇张量写作 $\mathrm{Ric} = (R_{i\bar{k}})_{1\le i,\, k\le n} = -(\frac{\partial^2 \log G}{\partial z_i \partial \overline{z_k}})_{1\le i,\, k\le n}$，我们看到 $T(y, p)$ 是 $n \times n$矩阵 $(y\delta_{ij} - \frac{2k}{m+1}R_{i\bar{k}} \cdot g^{j\bar{k}}(p))$ 的行列式。

现在我们定义

$$P(y, p) := (y - \frac{2k}{m+1})^{k-1} T(y, p). \tag{3.4}$$

根据里奇特征值为常数的假设， $P(y, p)$ 与 p 无关。因此，我们将其简记为 $P(y)$。显然， $P(y)$ 是关于 y 的 $m-1$ 次首一多项式。我们将命题 3.1 应用于这个多项式 $P(y)$（其中 k 等于 E 的秩），从而得到多项式 $\hat{Q}(y)$ $P(x)$ $Q(x)$，以及某个包含 $r = 1$ 的区间 I 上的实解析函数 $Z(r)$ 和 $\phi(r)$。对于 $r \in I_0$，我们令 $y(r) = z^{-1}(r)$。根据命题 3.1，在 I 上，$(m+1)rZ\phi' + (m+1-2kZ)\phi = 0$。由此可得

$$y(r) = \frac{2k\phi(r) - (m+1)r\phi'(r)}{(m+1)\phi(r)} = \frac{2k}{m+1} - r\frac{\phi'}{\phi} \quad \text{on } I_0. \tag{3.5}$$

定理 1.2 将由下一个命题推出。

命题 3.5. 设

$$U = \Big\{w := (z,\xi) \in D \times \mathbb{C}^k : |w|_h \in I\Big\}, \qquad U_0 = \Big\{w := (z,\xi) \in D \times \mathbb{C}^k : |w|_h \in I_0\Big\},$$

其中 $|w|_h^2 = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{k} h_{\alpha\bar{\beta}}(z,\ \bar{z})\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}$。令

$$u(w) = k^{\frac{n}{m+1}}(GH)^{-\frac{1}{m+1}}\phi\big(|w|_h\big) \ \textit{for}\ w \in U. \tag{3.6}$$

这里，$G(w)$ 表示 $G(z)$，其中 $w = (z,\ \xi)$。H也同理。于是，u 在 U 中光滑，并满足

$$J(u) = 1 \ \textit{on}\ U_0, \quad u = 0 \ \textit{on}\ \Sigma.$$

因此，Σ 是障碍平坦的。

证明。u 的光滑性可由 ϕ的光滑性，以及 G、H 和 h的光滑性轻易推出。因此，我们只需证明其余断言。为此，我们先证明以下引理。令$X = X(w) = |w|_h$，其中 $w \in U$，并

$$Y = Y(w) = \frac{2k}{m+1} - X\frac{\phi'(X)}{\phi(X)} \quad \text{for } w \in U_0. \tag{3.7}$$

于是由 (3.5)，可得 $Y = y(r)\big|_{r=X} = z^{1}{}_{(r)}\big|_{\underline{r=X}}$。注意，$X$和 Y不依赖于局部坐标和局部标架的选取。

下文中，我们也将 $D\times\mathbb{C}^k$ 的坐标 w记作 $(w_1,\cdots,w_{m-1},w_m)$。也就是说，对于 $1 \le i \le n$，我们将 w_i 与 z_i 视为相同；对于 $1 \le \alpha \le k$，则将 $w_{n+\alpha}$ 与 ξ_α 视为相同。对于定义在 $D \times \mathbb{C}^k$ 的开子集上的充分可微函数 Φ，我们记，对于 $1 \le s,t \le m$, $\Phi_s = \frac{\partial\Phi}{\partial w_s}, \Phi_{\overline{t}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\overline{w_t}}$，以及$\Phi_{s\overline{t}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial w_s\partial\overline{w_t}}$。为简化后续计算，我们引入以下引理。

引理 *3.6.* 设 $\pi : (E,h) \to (M,g)$ 是秩为 k 的厄米向量丛，其底空间为 n 维厄米流形 (M,g)。记 $m = n + k$。设 Ω 是 E 上光滑的 (m,m)-形式（将其视为 m 维复流形）（或开子集 $V \subset E$）上的光滑形式。于是，我们可以按如下方式在 E（或 V）上定义光滑函数 Φ：任取 M 的局部坐标图 (D,z)，以及 D上 E 的任意局部标架 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^k$。这在 $\pi^{-1}(D)$ 上诱导出 E 的一个自然坐标系 $w = (z,\xi)$，其中

$$\pi^{-1}(D) = \Big\{\sum_{\alpha=1}^{k}\xi_\alpha e_\alpha(z) : (z,\xi) \in D \times \mathbb{C}^k\Big\}.$$

在上述坐标中，我们记 $g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}}dz_i \otimes d\overline{z_j}$, $h_{\alpha\bar{\beta}} = h(e_\alpha, e_\beta)$和 $\Omega = \sigma(z,\xi)dz \wedge d\xi \wedge d\overline{z} \wedge d\overline{\xi}$，其中 $dz = dz_1 \wedge \cdots dz_n$且 $d\xi = d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_k$。我们定义函数 Φ：$\pi^{-1}(D) \to \mathbb{C}$如下：

$$\Phi(z,\xi) = \frac{\sigma(z,\xi)}{\det\big(g_{i\bar{j}}(z)\big)\cdot\det\big(h_{\alpha\bar{\beta}}(z)\big)}.$$

那么 Φ 与局部坐标和局部标架的选取无关。因此，Φ 是定义在 E（分别是 V）上的良定义函数。

~证明。为了说明 Φ定义良好，我们取 M的两个局部坐标图 (D,z) 和 $(D,\widetilde{z})$，以及 E的两个局部标架：一个在 D 上，另一个在 $\widetilde{D}$上。于是得到两个诱导坐标系：$w = (z,\xi)$，定义在 $\pi^{-1}(D)$ 上；以及 $\widetilde{w} = (\widetilde{z},\widetilde{\xi})$，定义在 $\pi^{-1}(\widetilde{D})$ 上。在 $D \cap \widetilde{D}$ 上，我们可以将 $\widetilde{z} = \varphi(z)$ 写成某个双全纯映射 φ对应的形式，将 $\xi = \xi \cdot A(z)$ 写成某个全纯映射 A：$D \cap D \to \mathrm{Gl}(k,\mathbb{C})$对应的形式。根据关系 $g = \sum_{i,j=1} g_{i\bar{j}}(z)dz_i \otimes d\overline{z_j} = \sum_{i,j=1}^{n}\widetilde{g}_{i\bar{j}}(\widetilde{z})d\widetilde{z}_i \otimes d\overline{\widetilde{z}_j}$，我们有

$$\det\big(g_{i\bar{j}}(z)\big) = \det\big(\widetilde{g}_{i\bar{j}}(\widetilde{z})\big)\cdot\big|J\varphi(z)\big|^2,$$

wh其中 $J(\varphi)$ 是 φ的雅可比矩阵的行列式。同样，我们还有 e

$$\det\big(h_{\alpha\bar{\beta}}(z)\big) = \det\big(\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}}(\widetilde{z})\big) \cdot \big|\det A(z)\big|^2.$$

另一方面，将 $\Omega = \sigma(z,\xi)dz \wedge d\xi \wedge d\overline{z} \wedge d\overline{\xi} = \widetilde{\sigma}(\widetilde{z},\widetilde{\xi})d\widetilde{z} \wedge d\widetilde{\xi} \wedge d\overline{\widetilde{z}} \wedge d\overline{\widetilde{\xi}}$写为 $\pi^{-1}(D) \cap \pi^{-1}(\widetilde{D})$，我们得到

$$\sigma(z,\xi) = \widetilde{\sigma}(\widetilde{z},\widetilde{\xi}) \cdot \big|J\varphi(z)\big|^2 \cdot \big|\det A(z)\big|^2.$$

由此可得

$$\frac{\sigma(z,\xi)}{\det\big(g_{i\bar{j}}(z)\big) \cdot \det\big(h_{\alpha\bar{\beta}}(z)\big)} = \frac{\widetilde{\sigma}(\widetilde{z},\widetilde{\xi})}{\det\big(\widetilde{g}_{i\bar{j}}(\widetilde{z})\big) \cdot \det\big(\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}}(\widetilde{z})\big)} \quad \text{on } \pi^{-1}(D) \cap \pi^{-1}(\widetilde{D}).$$

至此，证明完成。 □

接下来我们将证明以下关于计算 $\det\big((-\log u)_{s\bar{t}}\big)$ 的引理。

引理 3.7. 令 $u(w)$ 为命题 3.5 中所定义的函数。记 $Y' = \frac{dY}{dX}$，即 $Y' = y'(r)|_{r=X}$。那么，以下是定义在 U_0 上良定义的函数：

$$\Phi(w) = \frac{\det\big((-\log u)_{s\bar{t}}(w)\big)}{\det\big(g_{i\bar{j}}(z)\big) \cdot \det\big(h_{\alpha\bar{\beta}}(z)\big)}.$$

也就是说，Φ 与 M 的局部坐标及 E 的局部标架的选取无关。此外，

$$\Phi = \frac{P(Y)Y'}{2^{m+1}k^n X^{2k-1}} \quad on\ U_0.$$

证明。考虑 $U_0 \subset E$ 上的厄米 (1,1)-形式 $\widetilde{\omega} = -\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log u$。在上述局部坐标 $w = (z,\xi)$ 中，我们可以写成 $\widetilde{\omega} = \sqrt{-1}\sum_{s,t=1}^{m}(-\log u)_{s\bar{t}}dw_s \wedge d\overline{w_t}$。于是 $\frac{\widetilde{\omega}^m}{m!}$ 是 U_0 上的光滑 (m,m)-形式，并且

$$\frac{\widetilde{\omega}^m}{m!} = (\sqrt{-1})^m \det\big((-\log u)_{s\bar{t}}\big)dw_1 \wedge d\overline{w_1} \wedge \cdots \wedge dw_m \wedge d\overline{w_m}.$$

由引理 3.6, Φ 在 U_0 上定义良好。

为证明第二个断言，我们固定一点 $p \in E$，并写作 $q = \pi(p)$。为计算 Φ 在 p 处的值，根据引理的第一部分，我们可以使用 M 的任意局部坐标以及 E 的任意局部标架。特别地，我们可以在 q 处选取 M 的一组局部坐标和 E 的一个局部标架，使得 E 在 p 附近诱导的坐标（仍记为 $w = (z,\xi)$）满足 $z(q) = 0$、$h_{\alpha\bar{\beta}}(q) = \delta_{\alpha\beta}$ 以及 $dh_{\alpha\bar{\beta}}(q) = 0$，其中 $\delta_{\alpha\beta}$ 是克罗内克 δ。在上述坐标下，点 q 处的曲率 (2.2) 简化为

$$\Theta_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}(0) = -\frac{\partial^2 h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(0).$$

我们对 u （其定义见（3.6））取对数，得到

$$-\log u = -\frac{n}{m+1}\log k + \frac{1}{m+1}\log G + \frac{1}{m+1}\log H - \log\phi(X),$$

其中 $X = |w|_h = \big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{k} h_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z})\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}\big)^{1/2}$。直接计算可得

$$(-\log u)_{s\bar{t}} = \frac{1}{m+1}\big(\log G\big)_{s\bar{t}} + \frac{1}{m+1}\big(\log H\big)_{s\bar{t}} - \Big(\frac{\phi'}{\phi}X_{s\bar{t}} + \big(\frac{\phi'}{\phi}\big)'X_sX_{\bar{t}}\Big) \quad \text{for any } 1 \le s,t \le m.$$

由于 $X_{s\bar{t}} = X(\log X)_{s\bar{t}} + \frac{1}{X}X_sX_{\bar{t}}$，上式可写为

$$(-\log u)_{s\bar{t}} = \frac{1}{m+1}\big(\log G\big)_{s\bar{t}} + \frac{1}{m+1}\big(\log H\big)_{s\bar{t}} - X\big(\frac{\phi'}{\phi}\big)\big(\log X\big)_{s\bar{t}} - \Big(\frac{1}{X}\big(\frac{\phi'}{\phi}\big) + \big(\frac{\phi'}{\phi}\big)'\Big)X_sX_{\bar{t}}.$$

为了继续 co 计算这个海森矩阵时，我们将其分为以下三种情况 .

情形 1。 $1 \le s,\ t \le n$。

对于这种情形，我们有 $w_s = z_s$ 和 $w_t = z_t$。为简便起见，记 $i = s$ 和 $j = t$。在 $w = (0, \xi)$ 处，由事实 $h_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\bar\beta}$ 和 $dh_{\alpha\bar\beta} = 0$ 可得 $X = |\xi|$ 和 $X_i = X_{\bar j} = 0$。此外，我们还有

$$\begin{aligned}\big(\log X\big)_{i\bar j}\big|_{w=(0,\xi)} = \frac{1}{2}\big(\log X^2\big)_{i\bar j}\big|_{w=(0,\xi)} = \frac{1}{2}\frac{(X^2)_{i\bar j}}{X^2}\Big|_{w=(0,\xi)} &= \frac{1}{2|\xi|^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{k}\frac{\partial h_{\alpha\bar\beta}}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(0)\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}\\ &= \frac{1}{2|\xi|^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{k}\big(-\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j}(0)\big)\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}.\end{aligned}$$

由于曲率 Θ 分解，且凯勒度量由 $-\mathrm{Ric}(E,h)$ 根据定理 1.2的假设诱导，因此可得

$$\Theta_{\alpha\bar\beta i\bar j}(0) = \frac{1}{k}h_{\alpha\bar\beta}(0)\cdot\big(\mathrm{Ric}(E,h)\big)_{i\bar j}(0) = -\frac{1}{k}\delta_{\alpha\beta}\cdot g_{i\bar j}(0).$$

因此，

$$(\log X)_{i\bar j}\big|_{w=(0,\xi)} = \frac{1}{2k}g_{i\bar j}(0).$$

记里奇形式 $\mathrm{Ric}(g) = \sqrt{-1}R_{i\bar j}dz_i\wedge d\overline{z_j}$。则 $(\log G)_{i\bar j} = -R_{i\bar j}$，$(\log H)_{i\bar j} = g_{i\bar j}$，由 (3.7) 可得

$$(-\log u)_{s\bar t}\big|_{w=(0,\xi)} = -\frac{1}{m+1}R_{i\bar j}(0) + \frac{1}{m+1}g_{i\bar j}(0) - \frac{X}{2k}\frac{\phi'}{\phi}g_{i\bar j}(0) = -\frac{1}{m+1}R_{i\bar j}(0) + \frac{Y}{2k}g_{i\bar j}(0).$$

情形 2. $1 \le s \le n,\ n+1 \le t \le n+k$ 或 $n+1 \le s \le n+k,\ 1 \le t \le n$。

对于这种情况，类似的计算可得 $(\log G)_{s\bar t}$ 和 $(\log H)_{s\bar t}$ 恒等于零，且 $(\log X)_{s\bar t}|_{w=(0,\xi)} = X_s X_{\bar t}|_{w=(0,\xi)} = 0$。因此，$(-\log u)_{s\bar t}|_{w=(0,\xi)} = 0$。

情形 3. $n+1 \le s,\ t \le n+k$。

对于这种情况，我们有 $w_s = \xi_{s-n}$ 和 $w_t = \xi_{t-n}$。为简便起见，记 $\alpha = s-n$ 和 $\beta = t-n$。直接计算可得，在任意 $w = (0,\xi) \in U_0$ 处，我们有 $X = |\xi|$、$X_s = \frac{1}{2}|\xi|^{-1}\overline{\xi_\alpha}$、$\overline{X_t} = \frac{1}{2}|\xi|^{-1}\xi_\beta$ 以及

$$\big(\log X\big)_{s\bar t} = \frac{1}{2X^2}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2X^4}\overline{\xi_\alpha}\xi_\beta.$$

由于在这种情况下 $(\log G)_{s\bar t}$ 和 $(\log H)_{s\bar t}$ 恒等于零，因此在 $w = (0,\xi$ $)$

$$(-\log u)_{s\bar t} = -X\big(\frac{\phi'}{\phi}\big)\Big(\frac{1}{2X^2}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2X^4}\overline{\xi_\alpha}\xi_\beta\Big) - \Big(\frac{1}{X}\big(\frac{\phi'}{\phi}\big) + \big(\frac{\phi'}{\phi}\big)'\Big)\frac{\overline{\xi_\alpha}\xi_\beta}{4X^2}.$$

由（3.7），我们进一步将其写成

$$\begin{aligned}(-\log u)_{s\bar t}\big|_{w=(0,\xi)} &= \big(Y - \frac{2k}{m+1}\big)\Big(\frac{1}{2X^2}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2X^4}\overline{\xi_\alpha}\xi_\beta\Big) + \frac{Y'}{X}\frac{\overline{\xi_\alpha}\xi_\beta}{4X^2}\\ &= \frac{1}{2X^2}\big(Y - \frac{2k}{m+1}\big)\delta_{\alpha\beta} + \big(\frac{XY'}{4} - \frac{Y}{2} + \frac{k}{m+1}\big)\frac{\overline{\xi_\alpha}\xi_\beta}{X^4}.\end{aligned}$$

综合上述三种情形，我们可知， $w=(0,\xi)$处的复 Hessian 矩阵 $\big((-\log\ u)_{s\bar{t}}\big)$ 是分块对角的。此外，

$$\det\big((-\log u)_{s\bar{t}}\big)_{1\le s,t\le m}=\det\big((-\log u)_{s\bar{t}}\big)_{1\le s,t\le n}\cdot\det\big((-\log u)_{s\bar{t}}\big)_{n+1\le s,t\le m}. \tag{3.8}$$

现在我们需要计算上述等式右侧出现的行列式。根据情形 1 中的上述计算，在 $w=(0,\xi)$ 处

$$\begin{aligned}\det\big((-\log u)_{i\bar{j}}\big)_{1\le i,j\le n}=&\det\Big(-\frac{1}{m+1}R_{i\bar{j}}(0)+\frac{Y}{2k}g_{i\bar{j}}(0)\Big)\\=&\big(\frac{1}{2k}\big)^n\det\Big(Y\delta_{ij}-\frac{2k}{m+1}R_{i\bar{k}}(0)\,g^{j\bar{k}}(0)\Big)\cdot\det\big(g_{i\bar{j}}(0)\big)\\=&\big(\frac{1}{2k}\big)^n T(Y)\,G,\end{aligned}$$

其中最后一个等号由（3.3）得出。对于（3.8）右侧的第二个行列式，根据情形 3 中的计算，在 $w=(0,\xi)$ 处，

$$\det\big((-\log u)_{s\bar{t}}\big)_{n+1\le s,t\le m}=\det\Big(\frac{1}{2X^2}\big(Y-\frac{2k}{m+1}\big)\delta_{\alpha\beta}+\big(\frac{XY'}{4}-\frac{Y}{2}+\frac{k}{m+1}\big)\frac{\overline{\xi_\alpha}\xi_\beta}{X^4}\Big)_{1\le\alpha,\beta\le k}.$$

由于 $X=|\xi|$ 在 $w=(0,\xi)$ 处，根据矩阵行列式引理，我们得到

$$\begin{aligned}&\det\big((-\log u)_{s\bar{t}}\big)_{n+1\le s,t\le m}\\=&\Big(\frac{1}{2X^2}\big(Y-\frac{2k}{m+1}\big)\Big)^{k-1}\Big(\frac{1}{2X^2}\big(Y-\frac{2k}{m+1}\big)+\big(\frac{XY'}{4}-\frac{Y}{2}+\frac{k}{m+1}\big)\frac{1}{X^2}\Big)\\=&\frac{Y'}{2^{k+1}X^{2k-1}}\big(Y-\frac{2k}{m+1}\big)^{k-1}.\end{aligned}$$

现在将这些结果代回（3.8），并进一步利用（3.4），得到在 $w=(0,\xi)$

$$\det\big((-\log u)_{s\bar{t}}\big)_{1\le s,t\le m}=\frac{Y'}{2^{m+1}k^nX^{2k-1}}P(Y)\,G.$$

注意，在 $w=(0,\xi)$ 处有 $H=1$。因此，

$$\frac{\det\big((-\log u)_{s\bar{t}}\big)_{1\le s,t\le m}}{GH}=\frac{P(Y)Y'}{2^{m+1}k^nX^{2k-1}}.$$

这就证明了引理 3.7。 □

现在我们继续证明命题 3.5。根据命题 ϕ 中的定义 3.1，对于任意$r\in I_0$，我们有

$$-Z'\hat{P}(Z)Z^{-(m+1)}=2^{m+1}r^{2k-1}\phi^{-(m+1)}(r)$$

回忆一下，$y(r)=\frac{1}{Z=r(\cdot)}$。因此得到

$$y'\hat{P}(y^{-1})y^{m-1}=2^{m+1}r^{2k-1}\phi^{-(m+1)}(r).$$

根据命题 $\hat{}P$ 中的定义 3.1，我们有 $P(y)=y^{m-1}\,\hat{}P(y^{-1})$。因此，

$$y'P(y)=2^{m+1}r^{2k-1}\phi^{-(m+1)}(r).$$

现在我们取 $r=X=|w|_h$，令 $w=(z,\xi)\in U_0$。那么

$$Y'P(Y)=2^{m+1}X^{2k-1}\phi^{-(m+1)}(X)=2^{m+1}k^nX^{2k-1}(GH)^{-1}u^{-(m+1)}(X),$$

其中第二个等式由 u 的定义得出。因此，

$$\frac{Y'P(Y)}{2^{m+1}k^nX^{2k-1}}=(GH)^{-1}u^{-(m+1)}(X).$$

由引理 3.7 可得 $\det\big((-\log u)^{s\bar{t}}\big)_{1\le s,\ t\le m} = u^{-(m+1)}$ 在 U_0上。因此， $J(u) = 1$ 在 U_0上。由于 $\phi(1) = 0$ 正如命题 3.1中所证明的，我们得到边界条件： $u = 0$ 在 Σ上。命题 3.5 的后半部分由前半部分和 Graham 的工作推出（参见本节第一段）。□

4. 定理 1.3的证明

在继续证明定理 1.3之前，我们先确立以下命题。

命题 4.1。 设 $n \ge 1$、 $k \ge 1$ 和 $m = n + k$。给定实数 $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n < 1$，*se* t

$$P(y) = \big(y - \frac{2k}{m+1}\big)^{k-1} \prod_{i=1}^{n} \big(y - \frac{2k\lambda_i}{m+1}\big).$$

令 $Q(y)$ 为满足 $\frac{dQ}{dy} = (m+1)yP(y)$ 且 $Q(\frac{2k}{m+1}) = 0$ 的多项式（因此 Q 是一个首一ˆ ˆ的 $m+1$ 次多项式，且唯一确定）。设 P 和 Q 是由下式定义的多项式

$$\hat{P}(x) = x^{m-1}P(x^{-1}), \quad \hat{Q}(x) = x^{m+1}Q(x^{-1}).$$

则以下结论成立：

(1) 存在唯一的实解析函数 $Z = Z(r)$ 定义在 $[-1,1]$ 上（即它可实解析地延拓到包含 $[-1,1]$ 的某个开区间上），并满足以下条件：

$$r Z' \hat{P}(Z) + \hat{Q}(Z) = 0, \quad Z(1) = 0. \tag{4.1}$$

此外， Z 是一个偶函数，满足 $Z(0) = \frac{m+1}{2k}$， $Z'(0) = 0$， $Z' < 0$ 在 $(0,1]$ 和 $Z'(1) = -1$， $Z''(0) < 0$. 上。因此， $Z \in (0, \frac{m+1}{2k})$ 在 $(-1,0) \cup (0,1)$.

(2) 令 $\phi(r) = 2(\frac{r^{2k-1}}{-Z'P}\hat{(}Z))^{\frac{1}{m+1}} Z$。则 ϕ 在 $[-1,1]$ 上实解析。此外， ϕ 是一个偶函数，在 $(-1,1)$ 上满足 $\phi > 0$，且 $\phi(1) = 0$.。此外， ϕ 满足 $(m+1)rZ\phi' + (m+1-2kZ)\phi = 0$，且 $\phi'(1) = -2$.

ˆ ˆ注 4.2. 注意，命题 4.1 中定义的多项式 P、 Q、 P 和 Q 满足 ˆ$P(0) =$ ˆ$Q(0) = 1$， $P > 0$ 在 $(\frac{2k}{m+1}, +\infty)$ 上， ˆ $P > 0$ 在 $(0, \frac{m+1}{2k})$ 上，且 $\frac{dQ}{dy} > 0$ 在 $(\frac{2k}{m+1}, \infty)$ 上， $Q > 0$ 在 $(\frac{2k}{m+1}, \infty)$ 上， ˆ $Q > 0$ 在 $(0, \frac{m+1}{2k})$ 上，并且 ˆ $Q(\frac{m+1}{2k}) = 0$。

证明。 该命题已在 [5, 命题 2。7] 中针对 $k = 1$证明。我们将推广 [5]中的思路，以证明情形 $k \ge 2$。写作

$$\lambda = \frac{m+1}{2k}, \tag{4.2}$$

ˆ我们可以将 P 表示如下

$$\hat{P}(x) = \big(1 - \frac{x}{\lambda}\big)^{k-1} \prod_{i=1}^{n} \big(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}x\big) := (x-\lambda)^{k-1}h(x).$$

这里 $h(x) = (-1)^{k-1}\lambda^{-(k-1)} \prod_{i=1}^{n}\big(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}x\big)$，且它是满足 $h(\lambda) \ne 0$ 的多项式。注意，多项式 ˆ Q 在 $x = \lambda$ 处有 k 阶零点。因此，对于某个满足 $g(\lambda) \ne 0$ 的多项式 g，我们可以写成 ˆ $Q(x) = (x-\lambda)^k g(x)$。

我们给出关于多项式 h和 g的以下引理。对于两个函数 f_1 和 f_2，若 $\lim_{x\to\lambda} {}^{f_1(x)\ f_2(x)} = 1$，则记作 $f_1 \sim f_2$ 为 $x \to \lambda$ 。

引理 4.3。 </style}成立：(λ) $= -2h(\lambda)$ 且 $(-1)^{k-1}h(\lambda) > 0$。特别地，$\hat{}\ Q_{(x)}\ \hat{}P(x) \sim -2(x-\lambda)$ 如 $x \to \lambda$。

证明。 注意到 $(-1)^{k-1}h(\lambda) = \lambda^{-(k-1)}\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i)$，由于所有 λ_i 都严格小于 1，因此显然为正。接下来证明第一个恒等式。为此，我们注意到

$$h(\lambda) = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}\hat{P}(x)}{dx^{k-1}}\Big|_{x=\lambda} \quad \text{and} \quad g(\lambda) = \frac{1}{k!}\frac{d^{k}\hat{Q}(x)}{dx^{k}}\Big|_{x=\lambda}.$$

由于 $\hat{}\ Q(x) = x^{m+1}Q(\frac{1}{x})$，根据多项式 Q 的定义，我们有

$$\frac{d\hat{Q}(x)}{dx} = (m+1)x^{m}Q\big(\frac{1}{x}\big) - x^{m-1}Q'\big(\frac{1}{x}\big) = \frac{(m+1)}{x}\hat{Q}(x) - \frac{(m+1)}{x}\hat{P}(x).$$

$\hat{}\hat{}$由于 P 和 Q 分别在 $x=\lambda$ 处有 $k-1$ 阶零点和 k 阶零点，若再对上式求 $k-1$ 次导数并在 $x=\lambda$ 处取值，则

$$\frac{d^{k}\hat{Q}(x)}{dx^{k}}\Big|_{x=\lambda} = -\frac{(m+1)}{\lambda}\frac{d^{k-1}\hat{P}(x)}{dx^{k-1}}\Big|_{x=\lambda} = -2k!\,h(\lambda).$$

由此可得 $g(\lambda) = -2h(\lambda)$。因此，我们得到

$$\frac{\hat{Q}(x)}{\hat{P}(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}(x-\lambda) \sim -2(x-\lambda) \quad \text{as } x \to \lambda.$$

至此，证明完成。 □

现在我们准备证明命题 4.1 的第 (1) 部分。由假设和初等常微分方程理论可知，方程 (4.1) 有一个实解析解 Z，定义在包含 I 的某个开区间内 1。由于 $\hat{}P(0) = 1$ 且 $\hat{}\ Q(0) = 1$，我们看到方程 (4.1) 蕴含 $Z'(1) = -1$。令

$$t_0 = \text{下确界}\{t \in [0,1)\text{：在 }(t,\ 1]\text{ 存在一个实解析解 }Z\text{ 满足 (4.1)，且满足 }Z' < 0\}. \tag{4.3}$$

根据定义， $0 \le t_0 < 1$ 并且在 $(t_0,\ 1]$ 存在一个实解析解 Z 满足 (4.1)，且 $Z' < 0$。

引理 4.4。式 (4.3) 中定义的数满足 $t_0 = 0$. 因此，在 $(0,1]$ 存在一个（唯一的）实解析解 Z 满足 (4.1)，并且它满足 $Z' < 0$.

证明。为导出矛盾，假设 $t_0 > 0$. 由于 Z 在 $(t_0, 1)$ 上递减，我们得出： $\mu := \lim_{r \to t_0^+} Z(r) > 0$ 存在（先验地允许 $\mu = +\infty$ 作为该极限）。注意到 $\mu \le \lambda$，其中 λ 是式 (4.2) 中引入的数。事实上，若非如此，则由于 $Z(1) = 0$，存在某个 $t^* \in (t_0, 1)$，使得 $Z(t^*) = \lambda$。根据引理 4.3，在 $r = t^*$ 处，常微分方程 (4.1) 给出 $Z'(t^*) = 0$，这与 $Z'(t^*) < 0$ 这一事实矛盾。因此，我们接下来考察以下两种情况。

情形 I. 假设 $\mu = \lambda$。在这种情况下，由引理 4.3 常微分方程 (4.1) 得到

$$-Z'(r) = \frac{\hat{Q}(Z)}{r\hat{P}(Z)} \sim -2\frac{Z-\lambda}{r} \quad \text{as } r \to t_0^+.$$

因此，存在一些常数 $\delta > 0$ 和 $C > 0$，使得对于任意 $r \in (t_0, t_0+\delta)$，都有 $-Z'(r) \le C(\lambda - Z)$。也就是说，$(\log(\lambda - Z))' \le C$。通过积分，我们得到

$$\log\big(\lambda - Z(r)\big)\Big|_{r=t_0}^{t} \le C(t-t_0) \quad \text{for any } t \in (t_0, t_0+\delta).$$

但这是不可能的这是可能的，因为左边是 $+\infty$，而右边是一个有限数值 r.

情形 II. 假设 $\mu < \lambda$。在这种情况下，$\hat{P}(\mu) > 0$，因此 $\frac{Q_{(Z)+r}\hat{P}(Z)}{}$ 在 $(r, Z) = \tilde{}(t_0, \mu)$ 处是一个光滑函数。因此，以下初值问题在某个包含 t_0 的开区间 J 上有一个实解析解 Z：

$$rZ'\hat{P}(Z) + \hat{Q}(Z) = 0, \quad Z(t_0) = \mu.$$

$\tilde{}$若有必要缩小 J，我们可以假设 $Z' < 0$ 在 J。根据常微分方程$\tilde{}$理论中的解的唯一性，我们可以将前一个解与 Z 拼接，从而得到方程（4.1）的一个实解析解，仍记为 Z，其定义在包含 $[t_0, 1]$的某个开区间上，且仍满足 $Z' < 0$. 这与 t_0的定义矛盾。

由于每种情形都会导致矛盾，因此必有 $t_0 = 0$，这就证明了引理4.4。 □

由引理 4.4， Z 在 $(0, 1)$ 上递减，因此 $\mu = \lim_{r\to 0^+} Z(r) > 0$ 存在。按照引理 4.4证明中的同样推理，必有$\mu \le \lambda = \frac{m+1}{2k}$。事实上，有 $\mu = \lambda$。假设 $\mu < \lambda$. 注意 $\hat{P}$, $\hat{Q} > 0$在 $[0, \mu]$ 上。由于 $-Z' = \frac{Q}{rP}$，对于某个正数常量 c，我们有 $-Z' \ge \frac{c}{r}$在 $(0, 1)$ 上。这与 Z 在 $(0, 1)$ 上有界这一事实矛盾。因此必有$\mu = \lambda$，即 $\lim_{r\to 0^+} Z(r) = \lambda$. 因此， Z 在 $[0, 1]$ 上从 λ 递减至 0。

我们用 $Z(r)$ 表示定义在 $0, 1]$ 上的某个实解析函数 $= \lambda + rG(r)$ G。显然， $G < 0$ 在 $0, 1]$ 上成立，因为 Z在 $[0, 1]$上从 λ递减至 0。关于 G，我们有如下引理。

引理 4.5。 有 $\lim_{r\to 0^+} G(r) = 0$.

证明。 注意

$$\hat{P}(Z) = (Z - \lambda)^{k-1} h(Z) = r^{k-1} G^{k-1} h(Z),$$
$$\hat{Q}(Z) = (Z - \lambda)^k g(Z) = r^k G^k g(Z).$$

将这些恒等式以及 $Z(r) = \lambda + rG(r)$ 代入 (4.1) 中的常微分方程，得到

$$(rG)' h(Z) + Gg(Z) = 0 \quad \text{on } (0, 1).$$

我们可以将其改写为

$$\frac{G'}{G} = -\frac{h(Z) + g(Z)}{rh(Z)} \quad \text{on } (0, 1).$$

由引理 4.3， $-\frac{h(Z)+g(Z)}{h\ Z}() \to 1$，其中 $r \to 0^+$。因此，存在某个常数 $\delta > 0$，使得

$$\frac{G'}{G} > \frac{1}{2r} \quad \text{for any } r \in (0, \delta).$$

因此，$\frac{-G}{\sqrt{r}}$ 在 $(0, \delta)$ 上递增，这尤其意味着 $\frac{-G}{\sqrt{r}}$ 在 $(0, \delta)$ 上有上界。因此，$\lim_{r\to 0^+} G(r) = 0$。 □

现在我们可以进一步将 Z写成 $Z(r) = \lambda + r^2 W(r)$，其中 W是定义在 $(0, 1]$上的某个实解析函数。显然， $W = rG < 0$在 $(0, 1]$, 上成立，且 $W(1) = -\lambda$。此外，我们有如下结论。

引理 4.6。 极限 $\lim_{r\to 0^+} W(r)$ 存在，且为负数。

证明。 我们首先注意到

$$\hat{P}(Z) = (Z - \lambda)^{k-1} h(Z) = r^{2k-2} W^{k-1} h(Z),$$
$$\hat{Q}(Z) = (Z - \lambda)^k g(Z) = r^{2k} W^k g(Z).$$

将其与 $Z = \lambda + r^2 W$ 以及（4.1）中的常微分方程结合起来，可得

$$r(r^2W)'h(Z) + (r^2W)g(Z) = 0 \quad \text{for } r \in (0,1).$$

由于 h 在 $[0,\lambda]$上不为零，我们可以将上述方程简化为

$$W' = -\frac{2h(Z) + g(Z)}{r\,h(Z)}W \quad \text{for } r \in (0,1). \tag{4.4}$$

回顾 $Z = \lambda + rG$，我们有 $2h(Z) + g(Z) = 2h(\lambda + rG) + g(\lambda + rG)$。由于 h 和 g 都是多项式， $2h(\lambda + rG) + g(\lambda + rG)$是关于 rG的多项式。此外，根据引理 4.3，常数项等于$2h(\lambda) + g(\lambda) = 0$。由引理 4.5，我们推得

$$f(r) := \frac{2h(\lambda + rG) + g(\lambda + rG)}{rh(\lambda + rG)}$$

可延拓为定义在 $[0,1]$. 然后利用（4.4），我们得到

$$\ln(-W(r)) = \ln(-W(1)) + \int_r^1 f(t)dt = \ln\lambda + \int_r^1 f(t)dt \quad \text{for any } r \in (0,1)$$

因此，$\lim_{r\to 0^+} W(r) = -\lambda \exp\left(\int_0^1 f(t)dt\right)$，这是一个负实数。 □

现在， W自然延拓为定义在 $[0,1]$上的连续函数。设 $a = W(0) = \lim_{r\to 0^+} W(r)$。我们有以下引理。

引理 4.7. 存在唯一的实解析函数 $T_0(r)$ 在 $r = 0$ 处满足以下初值问题：

$$T' = -\frac{2h(\lambda + r^2T) + g(\lambda + r^2T)}{r\,h(\lambda + r^2T)}T, \quad T(0) = a. \tag{4.5}$$

此外，当 $\epsilon > 0$充分小时，该函数在$(-\epsilon,\epsilon)$ 上是偶函数。

注 4.8. 注意 $2h(\lambda + r^2T) + g(\lambda + r^2T)$ 是关于 r^2T的多项式，其常数项等于$2h(\lambda) + g(\lambda) = 0$，由引理 4.3可知。因此 $(2h(\lambda + r^2T) + g(\lambda + r^2T))/r$ 是关于 r 和T的多项式。

引理4.7 的证明。 由注 4.8可知，常微分方程 (4.5) 右端在 $(r,T) = (0,a)$的邻域内是实解析的。因此，解的存在唯一性以及其实解析性均可由初等常微分方程理论推出。注意，如果 是初值问题 (4.5) 的一个解，那么 $T_0(-r)$也是一个解。由解的唯一性可知， T_0 是偶函数。 □

令 $T_0 : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$ 如引理 4.7 中所述，并回顾引理 W 之前定义的函数 。注意T_0和 W都是定义在 $C^\omega(0,\epsilon) \cap C[0,\epsilon)$ 上的函数，满足以下常微分方程：

$$T' = -\frac{2h(\lambda + r^2T) + g(\lambda + r^2T)}{rh(\lambda + r^2T)}T \text{ on } (0,\epsilon), \quad T(0) = a. \tag{4.6}$$

根据基本常 微分方程理论（参见 [5]中引理 2.13 的证明），可知 $W = T_0$ 在 $[0,\epsilon$).

现在继续证明命题 4.1。设 λ, T_0 如上，并令 $\Psi = \lambda + r^2T_0$。则Ψ 是在（$-\epsilon,\epsilon$）上的实解析偶函数。此外， $\Psi = Z$在 $[0,\epsilon)$ 上。因此，我们可以将 Z与 Ψ拼接起来，然后进行偶延拓，得到定义在 $[-1,1]$上的实解析函数，仍记为 Z。显然，这个新函数 Z 仍满足（4.1）中的常微分方程。此外，$Z''(0) = 2W(0) = 2a < 0$。这就证明了命题 4.1 的第（1）部分。

接下来证明命题 4.1的第（2）部分。回忆一下 $Z(r)=\lambda+r^2W(r)$ 以及 $\hat{P}(Z)=(Z-\lambda)^{k-1}h(Z)=r^{2k-2}W^{k-1}h(Z)$。由此可得

$$\frac{r^{2k-1}}{-Z'\hat{P}(Z)}=\frac{r^{2k-1}}{-(2rW+r^2W')r^{2k-2}W^{k-1}h(Z)}=\frac{1}{-(2W+rW')W^{k-1}h(Z)}.$$

在 $r=0$, $-(2W+rW')W^{k-1}h(Z)=-2W^k(0)\ h(\lambda)>0$，依据引理 4.6 可得 $W(0)<0$，依据引理 4.3 可得 $(-1)^{k-1}h(\lambda)>0$。因此，$\frac{r^{2k-1}}{-Z'P}\hat{}(z)$ 在 $r=0$ 处实解析。根据 ϕ 的定义以及第 (1) 部分中 Z 的性质， ϕ 在 $[-1,1]$ 上实解析且为偶函数。此外，显然在 $(-1,1)$ 上有 $\phi>0$，且 $\phi(1)=0$。第 (2) 部分的后一断言可仿照命题 3.1 的证明得出。命题 4.1 证毕。□

现在我们准备好证明定理 1.3。

定理 1的证明。3。选择 的一个坐标图 (D,z)，以及 M 上的一个局部标架 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^k$，它定义在 E 上。D记 $\pi:\ E\to M$ 为典范纤维投影，则有

$$\pi^{-1}(D)=\Big\{\sum_{\alpha=1}^k\xi_\alpha e_\alpha(z):(z,\xi)\in D\times\mathbb{C}^k\Big\}.$$

在此平凡化下， $B(E)$上的球丛和球面丛 $S(E)$可以表示如下:

$$B(E)\cap\pi^{-1}(D)=\Big\{w=(z,\xi)\in D\times\mathbb{C}^k:\sum_{\alpha,\beta=1}^k h_{\alpha\bar\beta}(z,\overline{z})\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}<1\Big\},$$

$$S(E)\cap\pi^{-1}(D)=\Big\{w=(z,\xi)\in D\times\mathbb{C}^k:\sum_{\alpha,\beta=1}^k h_{\alpha\bar\beta}(z,\overline{z})\xi_\alpha\overline{\xi_\beta}=1\Big\}.$$

这里， $h_{\alpha\bar\beta}(z)=h_{\alpha\bar\beta}(z,\overline{z})=h(e_\alpha,e_\beta)$。在局部坐标中，记作$g=\sum_{i,j=1}^n g_{i\bar j}dz_i\otimes d\overline{z_j}$。由于 g由 $-\mathrm{Ric}(E,h)$诱导，因此有 $g_{i\bar j}=\frac{\partial^2\log H}{\partial z_i\partial\overline{z_j}}$，其中 $H=\det(h_{\alpha\bar\beta})$。令 $G(z)=G(z,\overline{z})=\det(g_{i\bar j})>0$。设 $\lambda_1\le\cdots\le\lambda_n<1$ 为(M,g)的里奇特征值， ϕ为由命题 4.1 得到的函数。在局部坐标中，定理 1.3 中的凯勒形式 $\widetilde{\omega}$ 表示为 $\widetilde{\omega}=-i\partial\overline{\partial}\log u$，其中 $u(w)=k^{\frac{n}{m+1}}(GH)^{-\frac{1}{m+1}}\phi(|w|_h)$。由于 ϕ在$[-1,1]$上是实解析且为偶函数， u在 $B(E)\cap\pi^{-1}(D)$的邻域内光滑。因此， $\widetilde{\omega}$是 $B(E)\cap\pi^{-1}(D)$上的光滑凯勒形式。重复命题 3.5 的证明（以及 u的光滑性），可得 $u=0$ 在 $S(E)\cap\pi^{-1}(D)$上，且 $J(u)=1$ 在 $B(E)\cap\pi^{-1}(D)$上。

由于 $J(u)=1$，或者等价地，$\det\big((-\log u)_{s\bar t}\big)_{1\le s,\ t\le m}=u^{-(m+1)}$ 在 $B(E)\cap\pi^{-1}(D)$ 中成立，且 u是边界某个强拟凸边界片的局部定义函数，因此我们得出 $\widetilde{\omega}$ 在 $B(E)\cap\pi^{-1}(D)$ 中正定。此外， $J(u)=1$ 意味着由 $\widetilde{\omega}$诱导的度量 $\widetilde{g}$ 具有常数里奇曲率 $-(m+1)$。由于坐标图 D 是任意选取的， $\widetilde{g}$ 是 $B(E)$ 中的凯勒–爱因斯坦度量。

还需证明度量 $\widetilde{g}$ 在 $B(E)$ 上完备。根据霍普夫–里诺定理，只需证明 $(B(E)\ \widetilde{g})$ 是测地完备的。设 $\gamma:\ [0,a)\to B(E)$ 是 $B(E)$ 中一条相对于 $\widetilde{g}$具有单位速度且不可延拓的测地线。我们只需证明 $a=+\infty$，也就是说， γ 具有无限长度。为此，我们先证明以下引理。

引理4.9。 度量 $\widetilde{g}$ 满足

$$\widetilde{g}\ge-\frac{1}{m+1}\pi^*(\mathrm{Ric})+\frac{1}{m+1}\pi^*(g).\tag{4.7}$$

因此， $\widetilde{g} \geq \frac{1-\lambda_n}{m+1}\pi^*(g)$ 在 $B(E)$中。

证明。由于 (4.7) 是否成立与 $B(E)$ 的局部坐标图的选取无关，因此只需在任意坐标图中证明 (4.7)。给定 $p \in B(E)$，回顾引理 3.7 的证明，我们已证明存在一些局部坐标 $w = (z, \xi)$，在这些坐标中$z(\pi(p)) = 0$，且度量 $\widetilde{g}_{s\bar{t}}$ 在 $w = (0, \xi)$ 处（其中 $0 < |w|_h < 1$）可表示为

$$\widetilde{g}_{s\bar{t}} = \begin{cases} -\frac{1}{m+1}R_{i\bar{j}}(0) + \frac{Y}{2k}g_{i\bar{j}}(0) & \text{for } 1 \leq s,t \leq n, \\ \frac{1}{2|\xi|^2}\big(Y - \frac{2k}{m+1}\big)\delta_{\alpha\beta} + \big(\frac{XY'}{4} - \frac{Y}{2} + \frac{k}{m+1}\big)\frac{\overline{\xi_\alpha}\xi_\beta}{|\xi|^4} & \text{for } n+1 \leq s,t \leq n+k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{4.8}$$

当 $1 \leq s$ 时， $i = s, j = t$；当 $n+1 \leq s$ 时， $\alpha = s-n, \beta = t-n$。回顾$X = X(w) = (\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\bar{\beta}}\xi_\alpha\overline{\xi_\beta})^{1/2}$， $Y = Y(w) = \frac{2k}{m+1} - X\frac{\phi'}{\phi}(X)$ (X)，且 ϕ 在~~命题~~ 4.1 中定义。与 §3 中一样，由 (3.5) 可得 $Y = y(r)|_{r=X} = \frac{1}{Z}|_{r=X}$。此外，由命题 4.1 可知，对于任意 $w \in B(E)$， $Y(w) \geq \frac{2k}{m+1}$。注意，$(\widetilde{g}_{s\bar{t}})_{1\leq s,t\leq n+k}$ 是一个分块对角矩阵。由于它是正定的，其对角块 $(\widetilde{g}_{s\bar{t}})_{1\leq s,t\leq n}$ 和 $(\widetilde{g}_{st})_{n+1\leq s,t\leq n+k}$ 也分别正定。因此，

$$\widetilde{g} \geq \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{g}_{i\bar{j}}dz_i \otimes d\overline{z_j} \geq -\frac{1}{m+1}\pi^*(\mathrm{Ric}) + \frac{1}{m+1}\pi^*(g) \quad \text{at any } w = (0,\xi) \text{ with } 0 < |w|_h < 1.$$

由连续性可知，上述结论实际上对任意 $w = (0, \xi)$ 且满足 $|w|_h < 1$的情形都成立，因此（4.7）得证。最后，由里奇特征值的假设可得 $R_{i\bar{j}} \leq \lambda_n g_{i\bar{j}}$ 且满足 $\lambda_n < 1$。引理的后一部分易得。□

结合引理 4.9，证明的其余部分与 [5]中定理 1.4 的证明相同。细节从略。□

5. 推论的证明

本节考虑底流形 M 是 D 中的一个区域 $\mathbb{C}^n$的情形，并证明推论 1.8 和 1.9，以及命题 1.10。我们还将给出一些具体例子作为应用。

我们先证明推论 1.8。

推论 1.8 的证明。令 $L = D \times \mathbb{C}$ 为 D上的平凡线丛。根据关于h的假设，厄米线丛（L， h）是负的。取厄米向量丛（E， h_E）为（L， h）$\oplus \cdots \oplus$（L， h），即（L， h）的 k重直和。于是，（E， h_E）的球丛 B（E）和球面丛 S（E）分别为

$$B(E) = \big\{w = (z,\xi) \in D \times \mathbb{C}^k : |\xi|^2 h(z,\bar{z}) - 1 < 0\big\},$$
$$S(E) = \big\{w = (z,\xi) \in D \times \mathbb{C}^k : |\xi|^2 h(z,\bar{z}) - 1 = 0\big\}.$$

注意， $B(E)$ 与式 (1.6) 中定义的域 $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ （回忆 $m = n + k$）一致，而 $S(E)$ 与式 (1.7) 定义的 $\mathbb{C}^m$ 中的超曲面 Σ 一致。此外，厄米向量丛 (E, h_E) 根据命题 2.1 具有曲率分裂，并且根据注 2.5 是 Griffiths 负的。此外，由于 $\mathrm{Ric}(E, h_E) = k\mathrm{Ric}(L, h)$，由 $-\mathrm{Ric}(E, h_E)$ 诱导的凯勒度量就是假设中给出的度量 g。根据定理 1.3，唯一的完备凯勒–爱因斯坦度量 $\widetilde{g}$ 满足

里奇曲率 $-(m+1)$ 由式 (1.4) 给出。程–丘–莫解 u（定义为$(\det(\widetilde{g}_{s\bar{t}}))^{-\frac{1}{m+1}}$）的显式公式可见定理 1.3的证明。由于函数 ϕ 根据命题 $[-1,1]$ 4.1在 G上实解析，且 H 根据假设在 D 上也实解析，因此程–丘–莫解 u 可以实解析地延拓穿过 Σ。□

接下来我们证明推论 1.9。

推论 1的证明。9。 我们先注意到 g 是完备的，因为 (D,g) 是齐性的。（关于这一事实的证明，例如参见 [10]。）此外，(D,g) 的齐性也意味着 g具有常数里奇特征值。由推论 1.8 以及以下结论可直接得到所需结果：

断言。 g 的里奇特征值全为负（因此特别是严格小于 1）。

断言的证明。设 g_B 是 D的伯格曼度量。我们用 Vol(g) 和 Vol(g_B) 分别表示 g和 g_B的体积形式，它们是 D上的 (n,n) 形式。令 $\Phi := \text{Vol}(g)/\text{Vol}(g_B)$，这是 D上的良定义函数。令 Iso(g) 为 (Ω g) 的全纯等距变换群。由于每个双全纯映射也保持 g_B不变，群 Iso(g) 实际上同时保持 g 和 g_B不变。因此，Φ 在 Iso(g) 的作用下不变。由于 Iso(g) 在 Ω 上传递作用， Φ在 Ω 上为常数，也就是说，Vol(g) 和 Vol(g_B) 相差一个（正的）常数因子。因此， g和 g_B 具有相同的里奇形式。根据 Ric(g_B) $= -g_B$ （例如见 [1] ），我们得到 $\text{Ric}(g)\cdot g^{-1} = \text{Ric}(g_B)\cdot g^{-1} = -g_B\cdot g^{-1}$。所以 g的所有里奇特征值均为负，证明完成。□

□

现在我们给出一些例子，作为上述推论的应用。

例 5.1. 设 D 是 $\mathbb{C}^n$中的一个有界齐性域。记 $K_D(z,z)$为其伯格曼核， g_B为伯格曼度量。由于 g_B是双全纯不变量，流形 (Ω g_B) 是齐性凯勒的。给定 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 和 $k \in \mathbb{Z}^+$，我们定义 $h = (K_D)^{\lambda}$，并考虑域 $\Omega \subset D\times\mathbb{C}^k$ 和超曲面 $\Sigma \subset D\times\mathbb{C}^k$，其定义见 (1.6) 和 (1.7)。根据推论 1.9，Ω 的程–丘–莫解如下，其中 $m = n+k$:

$$u(w) = k^{\frac{n}{m+1}}(GH)^{-\frac{1}{m+1}}\phi(|\xi|h^{\frac{1}{2}}),$$

其中 $H = (K_D)^{k\lambda}$， $G = k^n\lambda^n G_B$，且 G_B 是 g_B的体积密度。此外，边界超曲面 Σ 是障碍平坦的，并且 u可实解析地延拓穿过 Σ。

例 5.2. 设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界全纯域。假设 $g_0 = \big((g_0)_{i\bar{j}}\big)$ 是具有负 Ricci 曲率 λ_0 的完备凯勒–爱因斯坦度量。（Mok–Yau [12] 的工作保证了这种度量的存在性和唯一性。）设 h 是定义在 D 上的实解析函数，满足 $(g_0)_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \log h}{\partial z_i \partial \bar{z_j}}$。（这种 h 的一个特定选择是 $\big(\det((g_0)_{i\bar{j}})\big)^{-1/\lambda_0}$，因为 g_0 是凯勒-爱因斯坦的。）给定 $k \in \mathbb{Z}^+$，考虑按 (1.6) 和 (1.7) 定义的域 $\Omega \subset D\times\mathbb{C}^k$ 和超曲面$\Sigma \subset D\times\mathbb{C}^k$。由推论 1.8，$\Omega$ 的程–丘–莫解由下式给出，其中 $m = n+k$:

$$u = k^{\frac{n}{m+1}}(GH)^{-\frac{1}{m+1}}\phi(|\xi|h^{\frac{1}{2}}).$$

其中 $H = h^k$ 且 $G = k^n \det\big((g_0)_{i\bar{j}}\big)$。此外，边界超曲面 Σ 是障碍平坦的，并且 u可实解析地延拓穿过 Σ。

特别地，若我们选择 $h = 1/u_0$，其中 u_0 是区域 D的程–丘–莫解，则 $g_0 = \left((\log\ h)_{i\bar{j}}\right)$ 是里奇曲率为 $\lambda_0 = -(n+1)$的完备凯勒度量。通过常规计算可得 Ω 的程–丘–莫解如下：

$$u = u_0\,\phi(|\xi|h^{\frac{1}{2}}).$$

例 5.3。给定 $l \geq 1$，对于每个 $1 \leq i \leq l$，令 D_i 为 $\mathbb{C}^{n_i}$ 中的一个区域，$g^i = \sum_{p,\ q=1}^{n_i} g^i_{p\bar{q}} dz^i_p \wedge d\overline{z^i_q}$ 是 D_i 上的一个完备凯勒–爱因斯坦度量，且 h^i 是 D_i 上的一个实解析函数，使得 g^i 由 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\ h^i$ 诱导。令 $D = D_1 \times \cdots \times D_l \subset \mathbb{C}^n$ 满足 $n = n_1 + \cdots + n_l$，并对每个 $z^i \in D_i$，记 $z = (z^1, \cdots, z^l)$。设 $h(z, \bar{z}) = \Pi_{i=1}^l h^i(z^i, \overline{z^i})$。对于固定的 $k \in \mathbb{Z}^+$，考虑由 (1.6) 和 (1.7) 定义的区域 $\Omega \subset D \times \mathbb{C}^k$ 及超曲面 $\Sigma \subset D \times \mathbb{C}^k$。那么，Ω 的程–丘–莫解由下式给出，其中 $m = n + k$:

$$u(w) = k^{\frac{n}{m+1}}(GH)^{-\frac{1}{m+1}}\phi(|\xi|h^{\frac{1}{2}}),$$

其中 $H = h^k$ 和 $G = k^n \Pi_{i=1}^l \det(g^i_{pq})_{1\leq p,\ q\leq n_i}$。此外，边界超曲面 Σ 是障碍平坦的，并且 u可实解析地延拓穿过 Σ。

为结束本文，我们将证明命题 1.10。在开始证明之前，我们先考虑有界全纯域 D上的球丛情形。如例 5.2 所述，对于给定的负实数 λ_0，存在唯一的完备凯勒–爱因斯坦度量，使得 $\mathrm{Ric}(g_0) = \lambda_0 g_0$。与之前一样，$L$ 是 D 上的平凡线丛，h 是 L 的厄米度量，使得 g_0 由 $-c_1(L,h)$诱导。厄米向量丛 (E, h_E) 是 (L,h) 的 k 份直和。由例 5.2，按 (1.6) 定义的 $\Omega = B(E)$ 的程–丘–莫解为

$$u = k^{\frac{n}{m+1}}(GH)^{-\frac{1}{m+1}}\phi(|\xi|h^{\frac{1}{2}}), \quad \text{with } m = n + k. \tag{5.1}$$

其中 $H = h^k, G = k^n \det((g_0)_{i\bar{j}})$，函数 ϕ 由命题 4.1 给出，其中的 λ_i按如下方式选取。首先，显然 $-c_1(E, h_E)$ 是 $-kc_1(L,h)$，它也诱导出一个具有负常数里奇曲率 $\lambda = \lambda_0/k < 0$ 的凯勒–爱因斯坦度量 $g = kg_0$。记 $\mu = \frac{2k\lambda}{m+1}$ 和 $\nu = \frac{2k}{m+1}$，并令命题 4.1 中所有的 λ_i 均为 λ。于是，多项式 $P(y)$ 和 $P(x)$ 可表示为

$$P(y) = (y-\nu)^{k-1}(y-\mu)^n, \qquad \hat{P}(x) = (1-\nu x)^{k-1}(1-\mu x)^n. \tag{5.2}$$

多项式 $Q(y)$满足命题 4.1 中的以下性质：

引理 5.4。以下结论成立：

> *(1)* 多项式 Q 可被 $(y-\nu)^k$ 整除。此外，存在一个多项式 $T(y)$，使得$Q(y) = (y-\mu)^{n+1}T(y) + c$，其中 c 是满足 $c = -(\nu-\mu)^{n+1}T(\nu) = Q(\mu)$ 的实数。*(2)* 数 $c = 0$ 当且仅当 $\lambda = -\frac{n+1}{k}$ 时成立（即 $\lambda_0 = -(n+1)$）。此时，$Q = (y-\mu)^{n+1}(y-\nu)^k$。

证明。我们首先证明第(1)部分。根据命题4.1中的定义，Q 满足

$$\frac{dQ}{dy} = (m+1)yP(y) \quad \text{and} \quad Q(\nu) = 0.$$

由此立即可得

$$Q(y) = \int_\nu^y (m+1)tP(t)dt.$$

注意，我们可以将被积函数写成

$$(m+1)yP(y) = (y-\nu)^{k-1}\sum_{j=0}^{n+1} a_j(y-\nu)^j \quad \text{for some } a_j\text{'s in } \mathbb{R}.$$

我们逐项积分，得到

$$Q(y)=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{a_j}{k+j}(y-\nu)^{k+j}.$$

因此， Q 可被 $(y-\nu)^k$ 整除。

为了证明第 (1) 部分中的后一项断言，注意到我们也可以写成

$$(m+1)yP(y)=(y-\mu)^n\sum_{j=0}^{k}b_j(y-\mu)^j \quad \text{for some } b_j\text{'s in } \mathbb{R}.$$

由于 $Q(y)=\int_\mu^y(m+1)tP(t)dt+Q(\mu)$，我们再次逐项进行积分，得到

$$Q(y)=\sum_{j=0}^{k}\frac{b_j}{n+j+1}(y-\mu)^{n+j+1}+Q(\mu).$$

令

$$T(y)=\sum_{j=0}^{k}\frac{b_j}{n+j+1}(y-\mu)^j \quad \text{and} \quad c=Q(\mu),$$

我们有 $Q(y)=(y-\mu)^{n+1}T(y)+c$。由于 $Q(\nu)=0$，因此可得 $c=-(\nu-\mu)^{n+1}T(\nu)$。

现在我们证明（2）。显然， $c=0$ 当且仅当 $Q(\mu)=0$。由于假设中 $Q(\nu)=0$，前者也等价于

$$\int_\mu^\nu\frac{dQ}{dy}dy=0, \quad \text{i.e.,} \quad \int_\mu^\nu yP(y)dy=0. \tag{5.3}$$

将 $y=\frac{\mu}{\mu-\nu}(y-\nu)-\frac{\nu}{\mu-\nu}(y-\mu)$ 写出后，我们有

$$yP(y)=y(y-\nu)^{k-1}(y-\mu)^n=\frac{\mu}{\mu-\nu}(y-\nu)^k(y-\mu)^n-\frac{\nu}{\mu-\nu}(y-\nu)^{k-1}(y-\mu)^{n+1}.$$

因此，（5.3）等价于

$$\frac{\mu}{\mu-\nu}\int_\mu^\nu(y-\nu)^k(y-\mu)^ndy=\frac{\nu}{\mu-\nu}\int_\mu^\nu(y-\nu)^{k-1}(y-\mu)^{n+1}dy.$$

令 $t=\frac{y-\mu}{\nu-\mu}$，则可化为

$$\mu\int_0^1(1-t)^kt^ndt=-\nu\int_0^1(1-t)^{k-1}t^{n+1}dt. \tag{5.4}$$

回顾一下，贝塔函数定义为

$$B(p,q)=\int_0^1t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

且 $B(p,q)=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$。因此，(5.4) 可写为

$$\mu\frac{k!n!}{(n+k+1)!}=-\nu\frac{(k-1)!(n+1)!}{(n+k+1)!}.$$

由 $\mu=\lambda\nu$，我们最终得到 $c=0$ 等价于 $\lambda=-\frac{n+1}{k}$。

在这种情况下，由 (1) 可知，$(y-\nu)^k$ 和 $(y-\mu)^{n+1}$ 都整除 Q。由于 Q 是次数为 $n+k+1$ 的首一多项式，因此可得 $Q(y)=(y-\nu)^k(y-\mu)^{n+1}$。□

在 P 由 (5.2) 给出的特殊情况下，我们将研究函数 Z 的有理性，该函数定义见命题 4.1。

命题 5.5。 设 P 和 P 由 (5.2) 给出（相应地，Q 和 Q 也都按照命题 4.1确定）。设 Z 和 ϕ 如命题 4.1中所述。则以下条件等价。

(1) Z 是有理的。
(2) ϕ^{m+1} 是有理的。
(3) $\lambda = -\frac{n+1}{k}$。

注 5.6。 此外，当命题 5.5 中的 (1)-(3) 成立时，我们可以从证明中看出$\mu = -\frac{2(n+1)}{m+1}$和 $Z = \frac{1-r^2}{2+\mu-\mu r^2}$. 因此， $\phi(r) = 1 - r^2$。

命题的证明 题 5.5。 我们先证明 (1) 等价于 (2)。由命题 4.1，可得

$$\frac{1}{Z} = \frac{2k}{m+1} - r\frac{\phi'}{\phi} = \frac{2k}{m+1} - \frac{r}{m+1}\frac{(\phi^{m+1})'}{\phi^{m+1}}.$$

因此 (2) 推出 (1)。反过来，回顾命题 4.1 中函数 ϕ 由$\phi = 2\Big(\begin{smallmatrix} r^{2k-1} \\ -Z'P \end{smallmatrix}\Big)^{\frac{1}{m+1}} Z$定义。由于 P是一个多项式，Z的有理性蕴含 ϕ^{m+1}的有理性。

现在只需证明 (1) 与 (3) 等价。我们先证明 (3) 蕴含 (1)。设 $\lambda = -\frac{n+1}{k}$。由引理 5.4 可得 $Q(y) = (y-\mu)^{n+1}(y-\nu)^k$。因此， $Q(x) = (1-\mu x)^{n+1}(1-\nu x)^k$。回顾 (5.2) 中给出的 $P = (1-\mu x)^n(1-\nu x)^{k-1}$。由于 Z 满足 $rZ'P(Z) + Q(Z) = 0$ （对$r \in [-1,1]$），可知

$$\frac{Z'}{(1-\mu Z)(1-\nu Z)} = -\frac{1}{r} \quad \text{for } r \in (0,1].$$

由于 $Z(1) = 0$，将 $\frac{1}{(1-\mu Z)(1-\nu Z)} = \frac{1}{\mu-\nu}\big(\frac{\mu}{1-\mu Z} - \frac{\nu}{1-\nu Z}\big)$ 代入并对上述方程积分，可得

$$\frac{1}{\mu-\nu}\Big(-\ln(1-\mu Z) + \ln(1-\nu Z)\Big) = -\ln r \quad \text{for } r \in (0,1].$$

由于 $\mu - \nu = \frac{2k\lambda - 2k}{m+1} = -2$，我们得到 $\ln \frac{1-\nu Z}{1-\mu Z} = \ln(r^2)$，进一步化简可得

$$Z = \frac{1-r^2}{\nu - \mu r^2} = \frac{1-r^2}{2+\mu-\mu r^2}.$$

显然， Z 是一个有理函数。

最后我们验证 (1) 推出 (3)。假设 Z是有理函数。回顾 $P(x) = (1-\mu x)^n(1-\nu x)^{k-1}$。由引理 5.4，我们有 $Q(y) = (y-\mu)^{n+1}T(y) + c$，其中 T是某个次数为 k 的多项式， c是某个实数。令 $T(y) = \sum_{j=0}^{k} a_j(y-\mu)^j$，其中 $a_j \in \mathbb{R}$为某个量，则有

$$Q(y) = \sum_{j=0}^{k} a_j(y-\mu)^{n+1+j} + c \quad \text{and} \quad \hat{Q}(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j(1-\mu x)^{n+1+j}x^{k-j} + cx^{m+1}.$$

回顾 $rZ'P(Z) + Q(Z) = 0$ 对于 $r \in [-1,1]$。我们将方程两边除以 $(1-\mu Z)^{m+1}$，得到

$$r\frac{Z'(1-\nu Z)^{k-1}}{(1-\mu Z)^{k+1}} + \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{Z^{k-j}}{(1-\mu Z)^{k-j}} + c\frac{Z^{m+1}}{(1-\mu Z)^{m+1}} = 0 \quad \text{for } r \in [-1,1].$$

令 $\eta(r) = \frac{Z(r)}{1-\mu Z(r)}$ 对于 $r \in [-1,1]$。那么 $\eta' = \frac{Z'}{(1-\mu Z)^2}$ 且 $\frac{1-\nu Z}{1-\mu Z} = 1 + (\mu-\nu)\eta$。因此，我们可以将上面的方程改写为

$$r\eta'\big(1+(\mu-\nu)\eta\big)^{k-1} + \sum_{j=0}^{k} a_j \eta^{k-j} + c\eta^{m+1} = 0. \tag{5.5}$$

由于 Z 是有理函数，因此 η也是有理函数。我们可以将 $\eta = \frac{p}{q}$ 写成互素多项式 p 和 q的形式。将其代入（5.5），并将等式两边乘以 q^{m+1}，得到

$$r(p'q - pq')\big(q+(\mu-\nu)p\big)^{k-1}q^n + \sum_{j=0}^{k} a_j p^{k-j} q^{n+1+j} + cp^{m+1} = 0$$

假设 $c \neq 0$。那么 p^{m+1} 可被 q整除。由于 p 和 q 互素， q 是常数。不失一般性，我们可以假设 $q = 1$，因此 η 就是多项式 p。现在，（5.5）中的所有项都是多项式，我们可以比较它们的次数。注意， $c\eta^{m+1}$ 的次数为 $(m+1)\deg p$，而（5.5）左侧的其他所有项的次数都小于或等于 $k \deg p$。因此，$\deg p = 0$，也就是说， p 是常数。函数 η 和 Z也都是常数。这与命题 4.1 矛盾，因为 Z 不是常数。因此必有 $c = 0$。由引理 5.4，（3）成立。证明至此完成。□

现在我们可以证明命题 1.10。

命题 1.10 的证明。令 D 为复 n维单位球 $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$。我们引入函数 $h = (\frac{1}{1-|z|^2})^{1/p}$和度量 $g_0 = (g_0)_{i\bar{j}} = (\log h)_{i\bar{j}}$。注意， g_0恰好是 $\frac{1}{p^2(n+1)}$ 倍的 D 的伯格曼度量。因此，g_0 是 D 上的完备凯勒–爱因斯坦度量，其里奇曲率等于 $\lambda_0 = -p(n+1)$。若取 $g = kg_0$，则 g 是 D 上的完备凯勒–爱因斯坦度量，其里奇曲率等于 $\lambda = \lambda_0/k$。回顾式 (1.6) 中定义的域 Ω，此时它变为

$$\Omega = \big\{(z,\xi) \in D \times \mathbb{C}^k : \big(\frac{1}{1-|z|^2}\big)^{1/p}|\xi|^2 < 1\big\}.$$

显然，我们有 $\Omega = E_p$。对于 $m = n+k$，由例 5.2，域Ω 的程–丘–莫解为

$$u = k^{\frac{n}{m+1}}(GH)^{-\frac{1}{m+1}}\phi(|\xi|h^{\frac{1}{2}}),$$

其中 $G = \det(g_{i\bar{j}})$ 以及 $H = h^k$。经过直接计算可得 $G = \frac{1}{p^n(1-|z|^2)^{n+1}}$，因此

$$u = p^{\frac{n}{m+1}}(1-|z|^2)^{(n+1+\frac{k}{p})/(m+1)}\phi\big(|\xi|(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2p}}\big). \tag{5.6}$$

另一方面， E_p 的伯格曼核 K 由 D'Angelo [4]计算得出

$$K\big((z,\xi),(z,\xi)\big) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \frac{(1-|z|^2)^{-(n+1)+\frac{i}{p}}}{\big((1-|z|^2)^{\frac{1}{p}} - |\xi|^2\big)^{k+i}}, \tag{5.7}$$

其中 c_i 是依赖于 i、n、k和 p的常数。

为证明命题 1.10，我们假设 g_{B} 的伯格曼度量是凯勒-爱因斯坦度量，并首先沿用 Fu–Wong [7] 的工作，计算 g_{B}的体积形式。注意， E_p 的泛型边界点是光滑且严格伪凸的（事实上是球形的）。取任意一个严格伪凸边界点 (z_0,ξ_0)。利用 (z_0,ξ_0) 附近伯格曼核的 Fefferman 展开以及 Cheng–Yau（[2], 第 510 页）中的论证，我们推得， g_{B} 在 (z,ξ) 处的里奇曲率 $\in E_p$ 在 (z,ξ) 趋近于 (z_0,ξ_0) 时趋于 -1。因此，凯勒-爱因斯坦假设意味着

其里奇曲率为 g_{B} 。 -1然后由 [7], 命题 1.2 可知，g_{B} 的行列式等于伯格曼核乘以一个正数常量。另一方面，负 Ricci 曲率的两个完备凯勒–爱因斯坦度量$\det\big((-\log\ u)_{s\bar{t}}\big)$ 和 g_{B}的行列式，在 E_p 上的体积形式至多相差一个正数常量。因此，我们有$u^{-(m+1)} = cK$ 其中常量 $c > 0$。结合（5.6）和（5.7），得到

$$p^{-n}(1-|z|^2)^{-(n+1+\frac{k}{p})}\phi^{-(m+1)}\big(|\xi|(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2p}}\big) = c\sum_{i=0}^{m} c_i \frac{(1-|z|^2)^{-(n+1)+\frac{i}{p}}}{\big((1-|z|^2)^{\frac{1}{p}}-|\xi|^2\big)^{k+i}}.$$

化简后，得到

$$\phi^{-(m+1)}\big(|\xi|(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2p}}\big) = c\,p^n\sum_{i=0}^{m} c_i \frac{1}{\big(1-|\xi|^2(1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}\big)^{k+i}}.$$

令 $r = |\xi|(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2p}}$，我们观察到 $\phi^{-(m+1)}(r)$ 等于 $c\,p^n\sum_{i=0}^{m} c_i\big(1-r^2\big)^{-(k+i)}$。因此，$\phi^{m+1}$ 是有理数。由命题5.5，可得$\lambda = -\frac{n+1}{k}$ 。回忆 $\lambda = \frac{\lambda_0}{k} = -\frac{p(n+1)}{k}$ 。由此可知 $p = 1$ ，证明完成。□

参考文献

[1] Stefan Bergman. 核函数与共形映射. 数学调查丛书，第 V 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，修订版，1970。[2] Shiu Yuen Cheng 和 Shing Tung Yau. 关于非紧复流形上完备凯勒度量的存在性及费弗曼方程的正则性。纯粹与应用数学通讯，33(4):507–544，1980。[3] Gunhee Cho. 复椭球上的不变度量。几何分析杂志，31(2):2088–2104，2021。[4] John P. D'Angelo. 伯格曼核函数的显式计算。几何分析杂志，4(1):23–34，1994。[5] Peter Ebenfelt、Ming Xiao 和 Hang Xu. 圆丛的凯勒-爱因斯坦度量与障碍平坦性，2022，arXiv:2208.13367。[6] Charles Fefferman. 蒙日-安培方程、伯格曼核与伪凸域的几何。数学年刊（第二辑），103(2):395–416，1976。[7] Siqi Fu 和 Bun Wong. 关于具有凯勒-爱因斯坦伯格曼度量的严格伪凸域。数学研究快报，4(5):697–703，1997。[8] C. Robin Graham. 复 Monge–Ampère 方程的高阶渐近展开。组合数学，64(2):133–155，1987。[9] John M. Lee 和 Richard Melrose. 复 Monge–Ampère 方程的边界行为。数学学报，148:159–192，1982。[10] Qi-Keng Lu. 关于常曲率凯勒流形。中国数学（学报），8:283–298，1966。[11] Ngaiming Mok 和 Sui Chung Ng. 从有界对称域到其笛卡尔积的保测全纯映射的芽。纯粹与应用数学杂志，669:47–73，2012。[12] Ngaiming Mok 和 Shing-Tung Yau. 有界域上凯勒-爱因斯坦度量的完备性，以及通过曲率条件刻画全纯域。载于亨利·庞加莱的数学遗产，第 *1* 部分（印第安纳州布卢明顿，*1980*），第 39 卷纯粹数学研讨会论文集，第 41–59 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1983。[13] Craig van Coevering. 严格伪凸域上的凯勒-爱因斯坦度量。全球分析与几何年刊，42(3):287–315，2012。[14] S. M. Webster. 关于切恩-莫泽张量的一点说明。第 28 卷，第 433–435 页。2002。S. S. Chern 专刊。[15] Shing Tung Yau. 问题部分。载于微分几何研讨会，第 102 卷数学年刊研究丛书，第 669–706 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1982。

加利福尼亚大学圣迭戈分校数学系，拉霍亚，加利福尼亚州 92093，美国电子邮箱地址：pebenfelt@ucsd.edu

加利福尼亚大学圣迭戈分校数学系，拉霍亚，加利福尼亚州 92093，美国电子邮箱地址：m3xiao@ucsd.edu

中山大学数学学院（珠海），中国广东省珠海市 519082电子邮箱地址：xuhang9@mail.sysu.edu.cn