arXiv:2303.06444v1 [math.DG] 11 Mar 2023

通过二次李代数完整描述左莱布尼茨代数上的不变结合伪欧几里得度量

Fatima-Ezzahrae Abid[a]，Mohamed Boucetta[b]

[a]卡迪·阿亚德大学理工学院，邮政信箱549，马拉喀什，摩洛哥，电子邮箱：abid.fatimaezzahrae@gmail.com[b]卡迪·阿亚德大学理工学院，邮政信箱549，马拉喀什，摩洛哥，电子邮箱：m.boucetta@uca.ac.ma

摘要

伪欧几里得非结合代数 $(\mathfrak{g}, \bullet)$ 是有限维实代数，具有度量，即一个双线性、对称且非退化的形式 $\langle\ ,\ \rangle$。若所有左乘（分别为右乘）都是斜对称的，则称该度量为 L-不变（分别为 R-不变）。若对所有 $u、v、w \in \mathfrak{g}$，满足 $\langle u \bullet v, w\rangle = \langle u, v \bullet w\rangle$，则称该度量为结合的。当 $\mathfrak{g}$ 为李代数时，这三个概念彼此等价；此时，赋予度量的 $\mathfrak{g}$ 称为二次李代数。

本文完整描述了左莱布尼茨代数上的 L-不变、R-不变或结合的伪欧几里得度量。文中表明，具有结合度量的左莱布尼茨代数也是右Leibniz代数，并且可以由其底层李代数（即二次李代数）轻易构造。此外，文中还表明，在赋有 L-不变或 R-不变度量的左莱布尼茨代数的核中，存在两个李代数，其中一个是二次李代数，而左莱布尼茨代数可以由这两个李代数构造得到。我们从这些完整描述中推导出许多重要结果。最后，本文列出了维数不超过 6 的具有结合度量的左莱布尼茨代数，以及维数不超过 4 的具有 L-不变度量的左莱布尼茨代数和维数不超过 5 的具有 R-不变度量的左莱布尼茨代数。

关键词：莱布尼茨代数、不变度量、结合度量、双扩张、T^*-扩张。

1. 引言

具有双不变伪黎曼度量的李群是一大类群，其中包含所有半单李群。数年前，这类李群因在某些物理问题的表述中发挥作用而受到关注，例如著名的 Adler-Kostant-Symes 方案。近年来，它们也出现在共形场论中 [20]。具有双不变伪黎曼度量的李群，其李代数称为二次李代数。它是一个实李代数 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$，赋有一个双线性非退化形式 $\langle\ ,\ \rangle$，使得对任意 $u \in \mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}_u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ v \mapsto [u,\ v]$ 关于 $\langle\ ,\ \rangle$ 是反对称的。这类伪欧几里得李代数

一直是众多作者深入研究的焦点（参见 [28] 及其中的参考文献）。

将李代数上的双不变伪欧几里得度量这一概念推广，有三种方式。设 $(g, \bullet)$ 为非结合代数，$\langle\,,\,\rangle$ 为 g 上的伪欧几里得度量。对于任意 $u \in g$，分别记 $L_u, R_u : g \longrightarrow g$ 为 u 的左乘和右乘，即 $L_u v = R_v u = u \bullet v$。若对于任意 $u \in g$，L_u（分别为 R_u）是反对称的，则称该度量为 L-不变（分别为 R-不变）。若对于任意 $u \in g$，$R_u^* = L_u$，即 $\langle u \bullet v, w\rangle = \langle u, v \bullet w\rangle$，则称其为结合的。在第一种情形（分别为第二种情形）下，称 $(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 为 L-二次（分别为 R-二次）；在最后一种情形下，称 $(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 为度量化的。当乘积 $\bullet$ 为反交换时，所有这些概念均一致。过去十年间，人们研究了若干带有结合伪欧几里得度量的非结合代数，例如一般非结合代数（[17]）、二次李代数（参见 [28]，其中有大量参考文献）、二次超李代数（[2, 15]）或二次马尔采夫超代数（[3]）、莱布尼茨代数（[25, 12]）。然而，L-二次或 R-二次非结合代数鲜少受到关注。关于 L-二次或 R-二次莱布尼茨代数的一些结果见 [14, 25]。

莱布尼茨代数是李代数的一种非交换推广，最早由 Bloh [18, 16] 在论文中以 D-代数之名引入并加以研究。随后，Loday [26] 重新发现了它们，并称之为莱布尼茨代数。左莱布尼茨代数（分别地，右 Leibniz 代数）是域 $\mathbb{K}$ 上的代数 $(g, \bullet)$，满足对任意 $u \in g$，L_u（分别地，R_u）都是 $(g, \bullet)$ 的导子。同时满足左、右 Leibniz 条件的代数称为对称 Leibniz 代数。李代数显然是对称 Leibniz 代数。李代数理论中的许多结果都可以推广到左莱布尼茨代数（参见 [6, 7, 8]）。此外，实左莱布尼茨代数是李架的无穷小版本。2004 年，Kinyon [22] 证明，若 (X, e) 是带基点李架，则 T_eX 具有左莱布尼茨代数结构。

本文对 L-二次、R-二次或度量化的左莱布尼茨代数进行了全面研究。由于左、右莱布尼茨代数之间存在对应关系，我们的结果也可以转化为关于右 Leibniz 代数的结果。

下面说明本文的两个核心思想。首先，已知度量左Leibniz代数也是右 Leibniz 代数，因此是李可容许的。我们证明，其底层李代数是一个二次李代数，可据此直接构造度量左Leibniz代数。

其次，设 $(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个 L-二次或 R-二次左莱布尼茨代数。向量空间 $\mathrm{Leib}(g) = \mathrm{span}\{u \bullet v + v \bullet u\}$ 是一个理想，称为 Leibniz 理想。记 $\mathrm{Leib}(g)^\perp$ 为其正交补。当 $\mathrm{Leib}(g) \cap \mathrm{Leib}(g)^\perp = \{0\}$ 时，若度量是 R-不变的，则 g 是一个李代数；若度量是 L-不变的，则 $g = \mathrm{Leib}(g) \oplus \mathrm{Leib}(g)^\perp$，且 $\mathrm{Leib}(g)^\perp$ 是一个二次李代数。

当我 $= \mathrm{Leib}(g) \cap \mathrm{Leib}(g)^\perp, \{0\}$ 时，我们证明 $h = g/I^\perp$ 具有李代数结构，而 $A = I^\perp/I \cap I^\perp$ 在度量为 L-不变时具有带非退化莱布尼茨理想的 L-二次左 Leibniz 代数结构，在度量为 R-不变时则具有二次李代数结构。我们将赋予相应结构的 A 和 h 称为 $(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 的核。我们的主要结果是，$(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 可以从其核重构，重构方式结合了双扩张过程与 T^*-扩张。双扩张是一种著名的过程，最早于 [27] 在二次李代数的研究中出现，而 T^*-扩张则于 [17] 在度量非结合代数的研究中被提出。

下面我们列出主要结果，并介绍本文的组织结构。

1. 在第 2 节中，我们研究左莱布尼茨代数上 L-不变、R-不变或结合双线性形式（不一定非退化）的性质。本节的主要结果是

引入左莱布尼茨代数上 Killing 型的精确定义。由此可以将适用于李代数的 Cartan 判别准则推广到左莱布尼茨代数（见命题 2.2 和 2.3）。

2. 在第3节中，我们研究度量化的左莱布尼茨代数。 [12], 指出，如果左莱布尼茨代数具有结合度量，那么它也是右Leibniz代数。基于这一点以及 [11], 给出的对称 Leibniz 代数的刻画，我们证明度量化的左莱布尼茨代数可以通过一种简便的方式从二次李代数得到（见定理 3.1、3.2 和 3.3）。由于维数不超过6的二次李代数已为人所知，我们几乎无需计算就得到了维数不超过6的所有度量化的左莱布尼茨代数（见表1）

3. 在第4、5和6节中，我们完整描述了 L-二次和 R-二次左 Leibniz 代数。第5节和第6节的主要结果是定理 5.1 和 6.1，它们表明，L-二次和 R-二次左 Leibniz 代数均可由其核 A 和 h 通过结合双扩张过程与 T^*-扩张得到。这两个定理有许多有趣的推论。当 A 是中心平凡的李代数且 $H^2(A) = 0$ 时，原代数可以很容易地描述（见定理 5.2 和 6.2）。我们完整描述了 L-二次单左 Leibniz 代数。我们证明，半单、度量为正定或为 Lorentz型的 R-二次左 Leibniz 代数必定是李代数。我们还完整描述了 L-二次对称 Leibniz 代数（见定理 6.3），并由此推得，任何 Lorentz型的 L-二次对称 Leibniz 代数实际上都是李代数。

4. 第7节为附录，我们在其中给出定理5.1和6.1证明所需计算的详细过程。5. 最后，我们列出维数不超过6且带有结合度量的左莱布尼茨代数，以及维数不超过4且带有 L-不变度量的左莱布尼茨代数，还有维数不超过5且带有R-不变度量的左莱布尼茨代数（见表1-3）。

记号。对于一个非结合代数 $(\mathfrak{g}, \bullet)$，我们分别用 L_u 和 R_u 表示由 u 给出的左乘和右乘，即 $L_u(v) = u \bullet v$ 和 $R_u(v) = v \bullet u$。若 F、G 是 g 的两个向量子空间，我们用 $F \bullet G$ 表示由任意 $u \bullet G$ 和 $v \in G$ 所生成的子空间。向量子空间 I 称为左理想（分别地，右理想），如果 $\mathfrak{g} \bullet I \subset I$（分别地，$I \bullet \mathfrak{g} \subset I$）；若 I 既是左理想又是右理想，则称其为理想。最后，我们记

$$Z^{\ell}(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{g}, L_u = 0\},\ Z^{r}(\mathfrak{g}) = \{u \in \mathfrak{g}, R_u = 0\} \quad \text{and} \quad Z(\mathfrak{g}) = Z^{\ell}(\mathfrak{g}) \cap Z^{r}(\mathfrak{g}).$$

g 上的度量是一个非退化对称双线性形式 $\langle , \rangle$。对于任意端同态 $F : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 和向量子空间 I，我们用 F^* 表示关于 $\langle , \rangle$ 的伴随，用 $I^{\perp}$ 表示关于 $\langle , \rangle$的正交补。若向量子空间 I 满足 $I \cap I^{\perp} = \{0\}$，则称其为非退化；若满足 $I \subset I^{\perp}$，则称其为全各向同性。若度量为正定，则称其为欧几里得度量；若其符号差为 $(n - 1, 1)$，则称其为 Lorentz型度量。

2. 左莱布尼茨代数的不变对称双线性型与 Killing 型

文献中，非结合代数上的不变对称双线性形式有三种定义。我们回顾这些定义并介绍它们的一些性质。李代数的 Killing 型是一种不变双线性形式，发挥着重要作用，可用于给出

判定李代数是否为半单或可解的准则。左莱布尼茨代数是李代数的推广，但正如我们将在本节中所展示的，它缺乏良好的 Killing 型概念。我们在任意莱布尼茨代数 g 上引入一种对称双线性型，并说明它正是 g 的恰当 Killing 型概念，因为它尤其能够给出适用于半单和可解莱布尼茨代数的 Cartan 判别准则的类比。

设 $(A, \bullet)$ 是一个非结合代数，S 是 A 上的对称双线性型。称 S 为

1. L-不变的，如果对任意 $u、v、w \in A$，有 $S(u \bullet v, w) + S(v, u \bullet w) = 0$;
2. R-不变的，如果对任意 $u、v、w \in A$，有 $S(u \bullet v, w) + S(u, w \bullet v) = 0$;
3. 结合的，如果对任意 $u、v、w \in A$，有 $S(u \bullet v, w) = S(u, v \bullet w)$。

显然，当 $\bullet$ 为反交换时，这三个概念彼此等价。然而，当 $\bullet$ 为交换的且 S 是 L-不变或 R-不变时，对任意 $u、v \in A$，均有 $S(u \bullet v, w) = 0$。

命题 2.1. 设 $(A, \bullet)$ 是一个非结合代数，S 是 A 上的对称双线性型。若 S 满足上述性质中的任意两项，则它也满足第三项；并且对任意 $u、v \in A$，$u \bullet v + v \bullet u \in \ker S$。在这种情况下，称 S 为双不变的。

证明。举例来说，假设 S 是 L-不变且 R-不变的。那么，对于任意 $u,v,w \in A$,

$$S(u \bullet v, w) = -S(v, u \bullet w) = S(v \bullet w, u)$$

因此 S 是结合的。此外,

$$S(u \bullet v, w) = -S(v, u \bullet w) = S(v \bullet w, u) = -S(w, v \bullet u)$$

这表明 $u \bullet v + v \bullet u \in \ker S$。其他情形也可以用类似的方法处理。 □

回顾一下，若对于任意 $u, v, w \in g$，$(g, \bullet)$ 是左莱布尼茨代数,

$$u \bullet (v \bullet w) = (u \bullet v) \bullet w + v \bullet (u \bullet w) \quad \text{or} \quad L_{u \bullet v} = [L_u, L_v]. \tag{1}$$

若对于任意 $u, v, w \in g$，$(g, \bullet)$ 是右 Leibniz 代数,

$$(v \bullet w) \bullet u = (v \bullet u) \bullet w + v \bullet (w \bullet u) \quad \text{or} \quad R_{w \bullet u} = -[R_w, R_u]. \tag{2}$$

显然，若 $(g, \bullet)$ 是左莱布尼茨代数，那么当 $u \circ v = u \bullet v$ 时，$(g, \circ)$ 是右 Leibniz 代数。

$(g, \bullet)$ 称为对称 Leibniz 代数，当且仅当它既是左 Leibniz 代数也是右 Leibniz 代数。

设 $(g, \bullet)$ 是一个左莱布尼茨代数。我们将 $Leib(g) = \text{span}\{u \bullet v + v \bullet u, u, v \in g\}$ 记作 Leib(g)。众所周知 [9]，对于任意 $u \in Leib(g)$，$L_u = 0$，$Lie(g) = g/Leib(g)$ 都是 g 的一个理想，且 g 是李代数当且仅当 $Leib(g) = \{0\}$。我们称 Leib(g) 为 g 的 Leibniz 理想。

我们考虑 g 上由下式给出的两个对称双线性型 B 和 K:

$$B(u, v) = \text{tr}(L_u \circ L_v) \quad \text{and} \quad K(u, v) = -\frac{1}{2}\left(\text{tr}(L_u \circ R_v) + \text{tr}(L_v \circ R_u)\right).$$

下面的命题是我们的第一个主要结果。

命题 2.2. 设 (g, •) 是一个左莱布尼茨代数。那么，2-形式 B 和 K 是双不变的，因此 ker B 和 ker K 都包含 Leib(g)。此外，对于任意 u, v ∈ g,

$$K(u,v) = \widehat{K}(\pi(u),\pi(v)) \tag{3}$$

b，其中 $\pi : g \longrightarrow g/Leib(g)$，且 K 是李代数 g/Leib(g) 的 Killing 型。此外，kerK 是 g 的可解理想，因此它包含在 g 的根中（即 g 中最大的可解理想）。

证明。由 (1) 可立即得出 B 是双不变的。要证明 K 是双不变的，只需证明 (3)。取 Leib(g) 的一个补空间 V，即 $g = Leib(g) \oplus V$，并对任意 u, v ∈ g，定义

$$u \bullet v = [u,v]_V + \omega(u,v)$$

其中 $[u, v]_V \in V$，且 $\omega(u, v) \in Leib(g)$。由于对任意 u, v ∈ g，$u \bullet v + v \bullet u \in Leib(g)$，因此 $[\,,\,]_V$ 是反对称的；利用 Leibniz 恒等式，可以容易验证 $(V, [\,,\,]_V)$ 是一个李代数。对于任意 u ∈ V，记 $ad_u^V : V \longrightarrow V$ 为伴随。对于任意 u ∈ Leib(g) 且 v ∈ V,

$$L_u = 0,\ R_u = \begin{pmatrix} 0 & \omega(.,u) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ L_v = \begin{pmatrix} D_v & \omega(v,.) \\ 0 & ad_v^V \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad R_v = \begin{pmatrix} 0 & \omega(.,v) \\ 0 & -ad_v^V \end{pmatrix}.$$

So

$$K(u,v) = \begin{cases} 0 \quad \text{if} \quad u \in \text{Leib}(\mathfrak{g}) \text{ or } v \in \text{Leib}(\mathfrak{g}), \\ \text{tr}_V(ad_u^V \circ ad_v^V) = K_V(u,v) \quad \text{if} \quad u, v \in V, \end{cases}$$

其中，K_V 是 $(V, [\,,\,]_V)$ 的 Killing 型。由此公式可推得，$\pi : V \longrightarrow g/Leib(g)$ 是一个李代数同构，它将 K_V 映射到 K 的商。

由于 K 是双不变的，因此 ker K 显然是一个理想。我们知道 Leib(g) 是可解的，并且根据 (3)，ker K/Leib(g) = ker K。众所周知，李代数的 Killing 型的核是可解的，因此 ker K 是可解的。□

许多作者将 2-形式 B 称为莱布尼茨代数的 Killing 型（参见 e[9, 5]）。然而，这种称法存在一个严重的问题，即 B 在 g/Leib(g) 上的商 B 通常并非 g/Leib(g) 的 Killing 型，如下例所示。

例 1. 考虑一个 2 维莱布尼茨代数 $g = \mathbb{R}^2$，其括号定义为

$$[e_2, e_1] = e_1 \quad and \quad [e_2, e_2] = e_1.$$

于是 $B(e_1,e_1) = B(e_1,e_2) = 0$ 且 $B(e_2,e_2) = 1$。商 $g/Leib(g) = \mathbb{R}e_2$ 是阿贝尔的，但 B 的商满足 $B(e_2,e_2) = 1$。然而，$K = 0$。

注 1. 从上一个命题的证明可以看出，对于任意 u,v ∈ V,

$$B(u,v) = \text{tr}_{\text{Leib}(\mathfrak{g})}(D_u \circ D_v) + \text{tr}_V(ad_u^V \circ ad_v^V)$$

这说明了 B 与 K 之间的区别。

众所周知，左莱布尼茨代数是半单的（分别地，可解的），当且仅当 g/Leib(g) 是半单的（分别地，可解的）。因此，我们可以推导出以下结果，它推广了 Cartan 判别准则，并表明 K 是 Killing 型的恰当概念。

命题 2.3。1. 左莱布尼茨代数 g 是半单的，当且仅当 kerK = Leib(g)。2. 左莱布尼茨代数 g 是可解的，当且仅当 $g \bullet g \subset \ker K$。

3. 度量化的左莱布尼茨代数

文献 [12, 14] 研究了左莱布尼茨代数上的结合度量。研究表明，若左莱布尼茨代数具有结合度量，则它也是右Leibniz代数。本节通过简明而完整地描述具有结合度量的对称 Leibniz 代数，补充了 [12, 14] 中得到的结果。我们将这类伪欧几里得对称 Leibniz 代数称为度量化的。

设 $(\mathfrak{g}, \bullet)$ 是一个非结合代数。分别用 $[\,,\,]$ 和 $\circ$ 表示 $\bullet$ 的反对称部分和对称部分。即

$$[u, v] = \frac{1}{2}(u \bullet v - v \bullet u),\ u \circ v = \frac{1}{2}(u \bullet v + v \bullet u), \quad \text{and} \quad u \bullet v = [u, v] + u \circ v.\ \forall u, v \in \mathfrak{g}. \quad (4)$$

令 $\mathrm{ad}_u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ \mathrm{v} \mapsto [\mathrm{u},\ \mathrm{v}]$，并令 $\mathrm{sd} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ \mathrm{v} \mapsto \mathrm{u} \circ \mathrm{v}$，其中任意 $\mathrm{u} \in \mathfrak{g}$。因此，

$$\mathrm{L}_u = \mathrm{ad}_u + \mathrm{sd}_u \quad \text{and} \quad \mathrm{R}_u = -\mathrm{ad}_u + \mathrm{sd}_u.$$

以下结果虽然容易证明，却会产生重要的推论；据我们所知，文献中尚未出现过。

命题 3.1. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个赋有度量 $\langle\,,\,\rangle$ 的代数。那么 $\langle\,,\,\rangle$ 是结合的，当且仅当 $\langle\,,\,\rangle$ 在 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ 上是双不变的，且在 $(\mathfrak{g}, \circ)$ 上是结合的。

证明。度量是结合的，当且仅当对任意 $\mathrm{u} \in \mathfrak{g}$，$\mathrm{L}_u = \mathrm{R}_u^*$。也就是说，对任意 $\mathrm{u} \in \mathfrak{g}$，

$$\mathrm{ad}_u + \mathrm{sd}_u = -\mathrm{ad}_u^* + \mathrm{sd}_u^*.$$

因此，$\mathrm{ad}_u + \mathrm{ad}_u^* = \mathrm{sd}_u^* - \mathrm{sd}_u$。由于 $\mathrm{ad}_u + \mathrm{ad}_u^*$ 是对称的，且 $\mathrm{sd}_u^* - \mathrm{sd}_u$ 是反对称的，因此对任意 $\mathrm{u} \in \mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}_u + \mathrm{ad}_u^* = \mathrm{sd}_u^* - \mathrm{sd}_u = 0$，证明完毕。 □

设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个赋有结合度量的左莱布尼茨代数。则对任意 $\mathrm{u} \in \mathfrak{g}$，$\mathrm{L}_u^* = \mathrm{R}_u$，并利用 (1) 和 (2)，我们可推得 $(\mathfrak{g}, \bullet)$ 也是右 Leibniz 代数。这个观察见 [12, 定理 2.4]。由此可知，若一个左莱布尼茨代数具有结合度量，则它是一个对称 Leibniz 代数。

另一方面，根据 [11, 命题 2.11],，任意对称 Leibniz 代数 $(\mathfrak{g}, \bullet)$ 可表示为

$$u \bullet b = [a, b] + \omega(u, v),$$

其中，$[\,,\,]$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的李括号，ω 是一个双线性对称映射 $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$（$\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ 是 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ 的中心），$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto \omega(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x} \circ \mathrm{y}$，并且对任意 $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathfrak{g}$，

$$\omega([x, y], z) = \omega(\omega(x, y), z) = 0. \quad (5)$$

我们称 $(\mathfrak{g}, [\,,\,] + \omega)$ 为通过 ω 从李代数 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ 得到的对称 Leibniz 代数。

利用对称 Leibniz 代数的这一刻画以及命题 3.1，我们得到了对赋有结合度量的对称 Leibniz 代数的一种新的完整描述。不过在此之前，我们可以完整描述底层李代数为阿贝尔代数的度量对称 Leibniz 代数。

定理 3.1. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个带度量的交换对称 Leibniz 代数。那么存在一个伪欧几里得向量空间 $(A, \langle\,,\,\rangle_A)$、一个向量空间 $\mathfrak{h}$ 以及一个对称三线性形式 $T : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{R}$ 使得 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 与 $(\mathfrak{h} \oplus A \oplus \mathfrak{h}^*, \circ, \langle\,,\,\rangle_0)$ 同构，其中 $\mathfrak{h} \circ \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^*$，且对任意 $X、Y、Z \in \mathfrak{h}$，$a \in A$，$\alpha \in \mathfrak{h}^*$，

$$\langle X + a + \alpha, X + a + \alpha\rangle_0 = 2 \prec \alpha, X \succ + \langle a, a\rangle_A,\ \mathrm{L}_a = \mathrm{L}_\alpha = 0 \quad and \quad \prec X \circ Y, Z \succ = T(X, Y, Z),$$

证明。根据上述内容，交换对称 Leibniz 代数是一个交换代数 $(\mathfrak{g}, \bullet)$，满足对任意 $u, v \in \mathfrak{g}$，$\mathrm{L}_u \circ \mathrm{L}_v = 0$。假设 $\langle\,,\,\rangle$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的结合度量。那么，对任意 $u \in \mathfrak{g}$，L_u 关于 $\langle\,,\,\rangle$ 是对称的；并且，如果 $I = P_{u\in\mathfrak{g}} \mathrm{Im}\mathrm{L}_u$，则 $I^\perp = T_{u\in\mathfrak{g}} \ker \mathrm{L}_u$ 且 $I \subset I^\perp$。将 $I^\perp = I \oplus A$ 记作补空间 A。度量在 A 上的限制 $\langle\,,\,\rangle_A$ 是非退化的，并且存在一个全各向同性空间 $\mathfrak{h}$，使得 $A^\perp = I \oplus \mathfrak{h}$ 且 $\mathfrak{g} = I \oplus A \oplus \mathfrak{h}$。度量将 I 与对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 相认同，因此我们可以将 $(\mathfrak{g}, \langle\,,\,\rangle)$ 认同为 $(\mathfrak{h}^* \oplus A \oplus \mathfrak{h}, \langle\,,\,\rangle_0)$。

基于这一识别，括号 $\bullet$ 满足 $\mathfrak{h}^* \oplus A \subset Z(\mathfrak{h}^* \oplus A \oplus \mathfrak{h})$，且 $\mathfrak{h} \bullet \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^*$；由下式给出的三线性形式

$$T(X, Y, Z) := \prec X \bullet Y, Z \succ = \prec Y, X \bullet Z\rangle,$$

对于任意 $X、Y、Z, \in \mathfrak{h}$ 是对称的，并定义 $\bullet$。 □

现在陈述一个重要结果。

定理 3.2. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是由 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ 通过 ω 得到的伪欧几里得对称 Leibniz 代数。记 $Z(\mathfrak{g})$ 为 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ 的中心。那么，$\langle\,,\,\rangle$ 是结合的，当且仅当 $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \langle\,,\,\rangle)$ 是二次李代数，并且存在一个三线性对称形式 $T : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ 以及一个全各向同性向量子空间 $I \subset Z(\mathfrak{g})$，使得 $T(I^\perp, .,.) = 0$ 且

$$\langle\omega(x, y), z\rangle = T(x, y, z), \quad x, y, z \in \mathfrak{g}. \tag{6}$$

证明。根据命题 3.1 以及上文对对称 Leibniz 代数的描述，如果 $\langle\,,\,\rangle$ 是结合的，那么 $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \langle\,,\,\rangle)$ 是一个二次李代数，并且 ω 满足 $I = \mathrm{span}\{\omega(x,y), x,y \in \mathfrak{g}\} \subset Z(\mathfrak{g})$,

$$\omega([x, y], z) = \omega(\omega(x, y), z) = 0 \quad \text{and} \quad \langle\omega(x, y), z\rangle = \langle\omega(x, z), y\rangle, \quad x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

对于任意 $x, y, z, t \in \mathfrak{g}$,

$$0 = \langle\omega(\omega(x, y), z), t\rangle = \langle\omega(z, t), \omega(x, y)\rangle = 0$$

因此 I 是全各向同性的。令 $T(x, y, z) = \langle\omega(x, y), z\rangle$。那么 T 是对称的，并且对于任意 $z \in I^\perp$ 和 $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$T(x, y, z) = \langle\omega(x, y), z\rangle = 0.$$

反之，设 $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \langle\,,\,\rangle)$ 是一个二次李代数，$I \subset Z(\mathfrak{g})$ 是一个全各向同性向量子空间，且 $T : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个三线性对称形式，满足 $T(I^\perp, .,.) = 0$。定义对称双线性型 $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 如下:

$$T(x, y, z) = \langle\omega(x, y), z\rangle = 0,\ x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

显然，ω 的取值属于 I；对于任意的 $x、y、z、t, \in \mathfrak{g}$,

$\langle\omega(\omega(x, y), z), t\rangle = T(\omega(x, y), z, t) = 0$ and $\langle\omega([x, y], z), t\rangle = \langle\omega(z, t), [x, y]\rangle = -\langle[x, \omega(z, t)], y\rangle = 0$.

因此，$(\mathfrak{g}, [\,,\,] + \omega, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个度量对称 Leibniz 代数。 □

注 2. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是通过 ω 从 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ 得到的度量对称 Leibniz 代数。若 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$，则 $Z(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp} = \{0\}$。因此 $\omega = 0$，从而 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个二次李代数。

在定理 3.2 中，确定 I 和 T 是一项简单的工作，因此，度量化非李对称莱布尼茨代数的确定归结为确定具有非平凡中心的二次李代数。若中心是非退化的，我们将看到这类代数很容易描述。此外，具有非平凡退化中心的二次李代数可由双扩张过程确定（见 [28, 19]）。下面回顾双扩张过程（更多详情见 [28]）。

设 $(\mathfrak{h}, [\,,\,]_{\mathfrak{h}}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{h}})$ 是一个二次李代数。通过 $A \in so(\mathfrak{h}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{h}})$ 对 $\mathfrak{h}$ 作双扩张，所得李代数为 $(\delta_A(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}\bar{e}, [\,,\,])$，其非零李括号和度量如下，其中任意 $u,v \in \mathfrak{h}$，

$$[\bar{e}, u] = Au,\ [u, v] = \langle Au, v\rangle_{\mathfrak{h}} e + [u, v]_{\mathfrak{h}},\ \langle xe + u + \bar{x}\bar{e}, xe + u + \bar{x}\bar{e}\rangle = 2x\bar{x} + \langle u, u\rangle_{\mathfrak{h}}.$$

$(\delta_A(\mathfrak{h}), [\,,\,], \langle\,,\,\rangle)$ 是一个二次李代数。

定理 3.3. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个度量化的对称 Leibniz 代数，由 $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ 通过 ω 得到，且满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$。则以下断言成立。

1. 若 $Z(\mathfrak{g})$ 非退化，则 $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$，并且存在一个全各向同性子空间 $I \in Z(\mathfrak{g})$ 和一个三线性形式 $T : Z(\mathfrak{g}) \times Z(\mathfrak{g}) \times Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{R}$，使得 $T(I^{\perp} \cap Z(\mathfrak{g}), ., .) = 0$，并且

$$x \bullet y = \begin{cases} [x, y] & if \quad x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\ or\ y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \\ \omega(x, y) & if \quad x, y \in Z(\mathfrak{g}). \end{cases}$$

其中，ω 在 $Z(\mathfrak{g})$ 上的限制由 (6) 给出。

2. 若 $Z(\mathfrak{g})$ 退化，则 $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \langle\,,\,\rangle) = \delta_A(\mathfrak{h})$；当 A 可逆，或 $(\mathfrak{h}, [\,,\,]_{\mathfrak{h}}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{h}})$ 为欧几里得时，ω 满足 $\omega(\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}e, .) = 0$ 且 $\omega(\bar{e}, \bar{e}) = \mu e$，其中 $\mu \in \mathbb{R}$。

证明。第一个断言直接由定理 3.2 以及 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp} = Z(\mathfrak{g})$ 这一事实得到。

如果 $Z(\mathfrak{g})$ 是退化的，那么 $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \langle\,,\,\rangle)$ 由双扩张过程得到，因此 $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \langle\,,\,\rangle) = \delta_A(\mathfrak{h})$。在这种情况下，$Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}e \oplus Z(\mathfrak{h}) \cap \ker A$。如果 A 可逆，则 $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}e$，由定理 3.2 可得结论。如果 $\mathfrak{h}$ 上的度量是正定的，那么 $\mathbb{R}e$ 是 $Z(\mathfrak{g})$ 中唯一的非平凡全各向同性子空间，结论随即成立。 □

推论 3.1。设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个度量对称 Leibniz 代数，且 $\langle\,,\,\rangle$ 在 $Z(\mathfrak{g})$ 上的限制是正定的。那么 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个二次李代数。

维数为 ≤ 6 的不可分解二次李代数的列表（模自同构）见 [28] 和 [13]。根据这些列表，我们可以找到所有维数为 ≤ 6 的二次李代数（模自同构）。利用定理 3.1–3.3 和推论 3.1，我们几乎无需任何计算即可得到以下结果。

定理 3.4。1. 在维数 2 的情况下，度量化非李对称莱布尼茨代数在同构意义下只有一个，即 $\mathbb{R}^2$ 配备如下括号和度量

$$e_1 \bullet e_1 = \pm e_2 \quad and \quad m = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

2. 在 3维 的情况下，度量化非李对称莱布尼茨代数在同构意义下只有一个，即 $\mathbb{R}^3$ 配备如下括号和度量

$$e_1 \bullet e_1 = \pm e_3 \quad and \quad m = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

3. 在4、5和6维的情形下，所有具有结合度量且由不可分解二次李代数得到的对称 Leibniz 代数，在同构意义下，均已在1中给出。

4. L-二次和 R-二次左 Leibniz 代数

本节给出 L-二次和 R-二次左莱布尼茨代数的一些直接性质，描述具有非退化 Leibniz 理想的 L-二次左莱布尼茨代数，并定义 L-二次和 R-二次左莱布尼茨代数的核。

4.1. L-二次和 R-二次左莱布尼茨代数的一般性质

L-二次（分别地，R-二次）左莱布尼茨代数是一个伪欧几里得左 Leibniz 代数 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle , \rangle)$，其度量是 L-不变（分别地，R-不变）的。这意味着对于任意 $u \in \mathfrak{g}, L_u^* = -L_u$ （分别地，$R_u^* = -R_u$）。

根据命题 2.1，如果一个伪欧几里得左莱布尼茨代数同时是 L-二次和 R-二次的，那么它就是一个李代数。

下面的例子表明，L-二次或 R-二次左莱布尼茨代数的类别十分广泛。

例2. 1. 设 $(\mathfrak{g}, [,])$ 是一个李代数。我们用 $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$ 表示其余伴随表示，即 $\prec \mathrm{ad}_u^* \alpha, v \succ = - \prec \alpha, [u, v] \succ$. 我们在 $T^*\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ 上定义如下括号

$$(u + \alpha) \bullet (v + \beta) = [u, v] + \mathrm{ad}_u^* \beta, \quad u, v \in \mathfrak{g}, \alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$$

以及由下式给出的典范中性度量

$$\langle u + \alpha, v + \beta \rangle = \prec \alpha, v \succ + \prec \beta, u \succ .$$

那么 $(T^*\mathfrak{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个 L-二次左莱布尼茨代数。

2. 设 $(\mathfrak{g}, [,])$ 是一个二步幂零李代数。我们在 $T^*\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ 上定义如下括号

$$(u + \alpha) \bullet (v + \beta) = \mathrm{ad}_u^* \beta, \quad u, v \in \mathfrak{g}, \alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$$

及其典范中性度量 $\langle , \rangle$。那么 $(T^*\mathfrak{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个 R-二次左 Leibniz 代数。

以下命题可以很容易地得到证明。

命题 4.1. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个伪欧几里得左 Leibniz 代数，I 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想。那么以下断言成立。

1. 若 $\langle , \rangle$ 是 L-不变（分别为 R-不变），则 $Z^r(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g} \bullet \mathfrak{g})^\perp$ （分别为 $Z^l(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g} \bullet \mathfrak{g})^\perp$）。

2. 若 $\langle , \rangle$ 是 L-不变，则 $I^{\perp}$ 是 g 的左理想，且 $I \bullet I^{\perp} = 0$。此外，$I^{\perp}$ 是 g 的理想，当且仅当 $I^{\perp} \bullet I = 0$。3. 若 $\langle , \rangle$ 是 R-不变，则 $I^{\perp}$ 是 g 的右理想，且 $I^{\perp} \bullet I = 0$。此外，$I^{\perp}$ 是 g 的理想，当且仅当 $I \bullet I^{\perp} = 0$。

以下命题将在后文中用到。

命题 4.2. 设 $(g, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个伪欧几里得左 Leibniz 代数。则以下断言成立。

1. 若 $\langle , \rangle$ 是 L-不变的，则 $Leib(g)^{\perp} = \{u \in g, R_u + R_u^* = 0\}$。此外，$Leib(g)^{\perp}$ 是一个左理想，$I = Leib(g) + Leib(g)^{\perp}$ 是一个理想，且 $I \bullet I^{\perp} = 02$。若 $\langle , \rangle$ 是 R-不变的，则 $Leib(g)^{\perp} = \{u \in g, L_u + L_u^* = 0\}$。此外，$Leib(g) \subset g \bullet g \subset Leib(g)^{\perp}$。因此，Leib(g) 是 g 的全各向同性理想，$Leib(g)^{\perp}$ 是一个理想，且 $Leib(g)^{\perp} \bullet Leib(g) = 0$。

证明。1. 设 $u \in Leib(g)^{\perp}$。对于任意 $v, w \in g$，我们有，

$$0 = \langle u, v \bullet w + w \bullet v \rangle = -\langle v \bullet u, w \rangle - \langle w \bullet u, v \rangle = -\langle R_u v, w \rangle - \langle R_u w, v \rangle$$

因此 $R_u^* = -R_u$。根据命题 4.1，$Leib(g)^{\perp}$ 是一个左理想。令 $I = Leib(g) + Leib(g)^{\perp}$。那么 I 是一个左理想，$I^{\perp} = Leib(g) \cap Leib(g)^{\perp}$，并且对于任意 $u \in g$、$v \in I$ 和 $w \in I^{\perp}$，

$$\langle v \bullet u, w \rangle = -\langle u, v \bullet w \rangle = \langle u \bullet w, v \rangle = 0$$

由于 $I^{\perp}$ 是一个左理想且 $R_w^* = -R_w$。因此，根据命题 4.1，I 是一个理想，且 $I \bullet I^{\perp} = 0$。

2. 第二个断言的第一部分可以类似地得到。由于 Leib(g) 是一个理想，根据命题 4.1，$Leib(g)^{\perp} \bullet Leib(g) = 0$。

另一方面，回想一下，对于任意 $u \in Leib(g)$，$L_u = 0$。那么对于 $v, w \in g$ 和 $u \in Leib(g)$,

$$\langle u, v \bullet w \rangle = -\langle u \bullet w, v \rangle = 0$$

因此 $Leib(g) \subset (g \bullet g)^{\perp}$，这就完成了证明，因为显然 $Leib(g) \subset g \bullet g$。 □

以下结果可由命题 4.2 直接推出。

命题4.3. R-二次欧几里得左莱布尼茨代数必然是李代数。

4.2. 具有非退化Leibniz 理想的 L-二次左 Leibniz 代数

具有非退化Leibniz 理想的 L-二次左 Leibniz 代数很容易描述。我们称它们为非退化 L-二次左 Leibniz 代数。

设 $(g, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个 L-二次左 Leibniz 代数，且 Leib(g) 是非退化的。根据命题 4.2，$g = Leib(g) \oplus Leib(g)^{\perp}$，其中 $(Leib(g)^{\perp}, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个二次李代数，并且存在一个表示 $\rho : Leib(g)^{\perp} \longrightarrow so(Leib(g), \langle , \rangle)$，由 $\rho(u)(v) = u \bullet v$ 给出。

反之，设 $(h, \langle , \rangle_{\mathfrak{h}})$ 是一个二次李代数，$(N, \langle , \rangle_N)$ 是一个伪欧几里得向量空间，且 $\rho : h \longrightarrow so(N, \langle , \rangle_N)$ 是 h 的一个表示。我们在 $g = h \oplus N$ 上定义乘积

$$u \bullet v = \begin{cases} 0, \text{ if } u \in N, \\ [u, v]_{\mathfrak{h}} \text{ if } u, v \in \mathfrak{h}, \\ \rho_u(v) \text{ if } u \in \mathfrak{h}, v \in N, \end{cases}$$

以及度量 $\langle , \rangle = \langle , \rangle_{\mathfrak{h}} \oplus \langle , \rangle_N$。那么 $(g, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个 L-二次左 Leibniz 代数。

4.3. L-二次和 R-二次左莱布尼茨代数的核

在本小节中，我们为任意 L-二次（分别为 R-二次）左 Leibniz 代数构造两个相关代数：一个李代数和一个非退化 L-二次左 Leibniz 代数（分别为一个二次李代数）。我们将这些代数称为该 L-二次（分别为 R-二次）左 Leibniz 代数的核，并将在第5节和第6节中用它们重构原代数。

命题 4.4. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个 L-二次（分别为 R-二次）左莱布尼茨代数，并记 $\mathfrak{I} = \mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^{\perp}$（分别为 $\mathfrak{I} = \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$），$\mathfrak{A} = \mathfrak{I}^{\perp}/\mathfrak{I}$ 且 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\mathfrak{I}^{\perp}$。令 $\pi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{I}^{\perp} \longrightarrow \mathfrak{A}$ 和 $\pi_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 为典范投影。则以下断言成立。

1. 若度量是 L-二次的，则 $\mathfrak{A}$ 具有由下式给出的 L-二次左 Leibniz 代数结构

$$\pi_{\mathfrak{A}}(u) \bullet_{\mathfrak{A}} \pi_{\mathfrak{A}}(v) = \pi_{\mathfrak{A}}(u \bullet v) \quad and \quad \langle \pi_{\mathfrak{A}}(u), \pi_{\mathfrak{A}}(v) \rangle_{\mathfrak{A}} = \langle u, v \rangle$$

且 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{A}) = \pi_{\mathfrak{A}}(\mathrm{Leib}(\mathfrak{g}))$ 是非退化的，并且

$$\mathfrak{A} = \mathrm{Leib}(\mathfrak{A}) \overset{\perp}{\oplus} \pi_{\mathfrak{A}}(\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^{\perp})$$

其中 $\pi_{\mathfrak{A}}(\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^{\perp})$ 是一个二次李代数。

2. 若度量是 R-二次的，则 $\mathfrak{A}$ 具有由下式给出的二次李代数结构

$$[\pi_{\mathfrak{A}}(u), \pi_{\mathfrak{A}}(v)]_{\mathfrak{A}} = \pi_{\mathfrak{A}}(u \bullet v) \quad and \quad \langle \pi_{\mathfrak{A}}(u), \pi_{\mathfrak{A}}(v) \rangle_{\mathfrak{A}} = \langle u, v \rangle.$$

3. 若度量是 L-不变的，则 $\mathfrak{I}^{\perp}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，且 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\mathfrak{I}^{\perp}$ 具有李代数的结构 $[\,,\,]_{\mathfrak{h}}$。

4. 若度量是 R-不变的，则 $\mathfrak{h}$ 上由下式给出的括号 $[\,,\,]_{\mathfrak{h}}$

$$[\pi_{\mathfrak{h}}(u), \pi_{\mathfrak{h}}(v)]_{\mathfrak{h}} = -\pi_{\mathfrak{h}}(\mathrm{L}_v^* u) \tag{7}$$

是良定义的，并且是一个李括号；对于任意 $X、Y、Z \in \mathfrak{h}$,

$$[[X, [Y, Z]_{\mathfrak{h}}]]_{\mathfrak{h}} = 0.$$

证明。1. 根据命题 4.2，$\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$ 是一个理想，且 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^{\perp}$ 是一个左理想，因此 $\mathfrak{I}^{\perp}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数，并且 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathfrak{I}^{\perp}$中的一个理想。这说明 $\mathfrak{A}$ 具有左莱布尼茨代数的结构，其余结论可立即推出。

2. 根据命题 4.2，$\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$ 和 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^{\perp}$ 都是理想，且 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^{\perp}$，这说明 $\mathfrak{A}$ 具有左莱布尼茨代数的结构。此外，对于任意 $u \in \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^{\perp}$，$u \bullet u \in \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$，因此 $\pi_{\mathfrak{A}}(u \bullet u) = 0$，这说明 $\mathfrak{A}$ 实际上是一个李代数。

3. 我们已在命题 4.2 中看到，$\mathfrak{I}^{\perp}$ 是一个理想，因此 $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}^{\perp}$ 具有左莱布尼茨代数的结构。此外，对于任意 $u \in \mathfrak{g}$，$u \bullet u \in \mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{I}^{\perp}$，因此 $\pi_{\mathfrak{h}}(u \bullet u) = 0$，所以该商实际上是一个李代数。

4. 我们已在命题 4.2 中看到，$\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^{\perp}$ 是一个包含 $\mathfrak{g} \bullet \mathfrak{g}$ 的理想，因此商 $\mathfrak{g}/\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^{\perp}$ 是平凡的。然而，我们将证明，括号 $[\,,\,]_{\mathfrak{h}}$ 是一个李括号，但通常并不是商括号。

首先注意，对于任意 $u、v、w \in \mathfrak{g}$,

$$\langle \mathrm{L}_u^* v, w \rangle = \langle v, u \bullet w \rangle = -\langle v \bullet w, u \rangle = -\langle \mathrm{L}_v^* u, w \rangle$$

因此 $L_u^* v = -L_v^* u$。此外，对于任意 $u \in I^\perp$、$v \in g$ 和 $w \in I$,

$$\langle L_u^* v, w\rangle = \langle v, u \bullet w\rangle = -\langle v \bullet w, u\rangle = 0$$

因为 $I = \mathrm{Leib}(g)$ 是一个理想。因此我们证明了 $[\,,\,]_\mathfrak{h}$ 定义良好且具有斜对称性。

令 $X = \pi_\mathfrak{h}(u)$、$Y = \pi_\mathfrak{h}(v)$、$Z = \pi_\mathfrak{h}(w)$。我们有

$$[X, [Y, Z]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} = \pi_\mathfrak{h}(L_u^* \circ L_v^* w).$$

由 (1) 可得,

$$L_u^* \circ L_v^* w = L_v^* \circ L_u^* w - L_{v\bullet u}^* w.$$

但是对于任意 $t \in I = \mathrm{Leib}(g)$，我们有

$$\langle L_{v\bullet u}^* w, t\rangle = \langle w, (v \bullet u) \bullet t\rangle = -\langle w \bullet t, v \bullet u\rangle = 0$$

因为我们已在命题 4.2 中看到，I 是一个理想，且 $I \subset (g \bullet g)^\perp$。因此，对于任意 X、Y、$Z \in h$，我们得到

$$[X, [Y, Z]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} = [Y, [X, Z]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h}.$$

这一关系结合 $[\,,\,]_\mathfrak{h}$ 的斜对称性表明 $[X、[Y、Z]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} = 0$。事实上,

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} &= [Y, [X, Z]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} \\
&= -[Y, [Z, X]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} \\
&= -[Z, [Y, X]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} \\
&= [Z, [X, Y]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} \\
&= [X, [Z, Y]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h} \\
&= -[X, [Y, Z]_\mathfrak{h}]_\mathfrak{h}
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

定义 4.1. 设 $(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个 L-二次（分别地，R-二次）左莱布尼茨代数。我们称命题 4.4 中定义的 L-二次左 Leibniz 代数 $(A, \bullet_A, \langle\,,\,\rangle_A)$ 和李代数 $(h, [\,,\,]_\mathfrak{h})$（分别地，二次李代数 $(A, [\,,\,]_A, \langle\,,\,\rangle_A)$ 和李代数 $(h, [\,,\,]_\mathfrak{h})$）为 $(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 的核。

实际上，我们还可以更进一步，给出关于 L-二次或 R-二次左莱布尼茨代数的核的更多信息。

命题 4.5. 设 $(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个伪欧几里得左 Leibniz 代数。记 $\mathrm{Lie}(g) = g/\mathrm{Leib}(g)$ 为商李代数，并记 $\pi : g \longrightarrow \mathrm{Lie}(g)$ 为典范投影。

1. 若 $(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是 L-二次的，则映射 $\kappa : A \longrightarrow \mathrm{Lie}(g)$ 是定义良好的左代数态射，且 $\ker\kappa = \pi_A(\mathrm{Leib}(g))$，并且 $\pi_A(\mathrm{Leib}(g)^\perp)$ 是 Lie(g) 的一个理想，李代数商 $\mathrm{Lie}(g)/\pi_A(\mathrm{Leib}(g)^\perp)$ 同构于 $(h, [\,,\,]_\mathfrak{h})$ 2. 若 $(g, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是 R-二次的，则映射 $\kappa : A \longrightarrow \mathrm{Lie}(g)$ 是定义良好的李代数同态，且 $\kappa(A)$ 是 Lie(g) 的一个理想，其中包含 $[\mathrm{Lie}(g), \mathrm{Lie}(g)]$。

证明。1. 命题的第一部分显而易见，第二部分则是以下事实的推论：映射 $\mathrm{m} : \mathrm{Lie(g)} \longrightarrow \mathrm{h}$, $\pi(\mathrm{u}) \mapsto \pi_{\mathfrak{h}}(\mathrm{u})$ 是满射李代数同态，且 $\mathrm{kerm} = \pi_A(\mathrm{Leib(g)}^{\perp})$。2. 只要想到命题 4.2 中确立的事实 $\mathrm{Leib(g)} \subset \mathrm{g} \bullet \mathrm{g} \subset \mathrm{Leib(g)}^{\perp}$，这一点便显而易见。

□

回顾一下，根据定义，左莱布尼茨代数 g 称为单的，如果 g 的理想只有{0}、Leib(g) 和 g，且 g •g，Leib(g)。若其根等于 Leib(g)，则称其为半单的，这等价于 Leib(g) 是半单的。详情见 [5] 。

由上述内容可得以下重要结果。

命题 4.6. 设 $(\mathrm{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个伪欧几里得左 Leibniz 代数。则以下断言成立。

1. 若 $(\mathrm{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 是 L-二次且单的，则要么 $\mathrm{Leib(g)} = \mathrm{Leib(g)}^{\perp}$、$\mathrm{A} = \{0\}$ 且 $\mathrm{h} = \mathrm{Lie(g)}$，要么 Leib(g) 非退化，$\mathrm{Leib(g)}^{\perp}$ 是一个单二次李代数，且 $\mathrm{g} = \mathrm{Leib(g)} \oplus \mathrm{Leib(g)}^{\perp}$。2. 若 $(\mathrm{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 是 R-二次且半单的，则 $(\mathrm{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个二次李代数。

证明。1. 根据命题 4.2，$\mathrm{Leib(g)} + \mathrm{Leib(g)}^{\perp}$ 是一个理想，因此 $\mathrm{Leib(g)} + \mathrm{Leib(g)}^{\perp} = \mathrm{Leib(g)}$ 或 $\mathrm{Leib(g)} + \mathrm{Leib(g)}^{\perp} = \mathrm{g}$。在第一种情况下，$\mathrm{Leib(g)}^{\perp} \subset \mathrm{Leib(g)}$，且 $\mathrm{Leib(g)}^{\perp}$ 成为一个理想，$\mathrm{Leib(g)}^{\perp} = \mathrm{Leib(g)}$。因此 $\mathrm{A} = \{0\}$ 且 $\mathrm{h} = \mathrm{Lie(g)}$。在第二种情况下，Leib(g) 是非退化的，$\mathrm{g} = \mathrm{Leib(g)} \oplus \mathrm{Leib(g)}^{\perp}$，且 $\mathrm{Leib(g)}^{\perp}$ 是一个单二次李代数。2. 若 g 是半单的，则 $\mathrm{g} \bullet \mathrm{g} = \mathrm{g}$；但根据命题 4.2，$\mathrm{g} \bullet \mathrm{g} \subset \mathrm{Leib(g)}^{\perp}$，因此 $\mathrm{Leib(g)} = \{0\}$，证毕。 □

5. Leibniz 理想退化的 L-二次左 Leibniz 代数的描述

本节将利用定义 4.1 中定义的 L-二次左 Leibniz 代数的核，通过一种类似于双扩张与 T^*-扩张相结合的过程，重构原代数。这种重构方法使我们能够推导出若干重要结果。双扩张是一种广为人知的过程，最早出现于 [27] 对二次李代数的研究中；而 T^*-扩张则是在 [17] 对度量化的非结合代数的研究中提出的。

对于一个代数 $(\mathrm{A}, \bullet)$，Der(A) 是 A 的导子构成的李代数；若 A 带有伪欧几里得度量 $\langle , \rangle_A$，则 so(A) 是 A 的斜对称自同态构成的李代数。对于任意向量空间 h，我们将 h 上的自然度量 $\langle , \rangle_n$ 称为 $\oplus \mathrm{A} \oplus \mathrm{h}^*$，其定义为

$$\langle X + a + \alpha, X + a + \alpha \rangle_n = 2 \prec \alpha, X \rangle + \langle a, a \rangle_A, \quad X \in \mathfrak{h}, a \in A, \alpha \in \mathfrak{h}^*. \tag{8}$$

对于李代数 $(\mathrm{g}, [\ ,\ ])$，$\mathrm{ad} : \mathrm{g} \longrightarrow \mathrm{End(g)}$ 是伴随表示，$\mathrm{ad}^* : \mathrm{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{g}^*)$ 是由 $\prec \mathrm{ad}_X^* \alpha, \mathrm{Y} \succ = - \prec \alpha, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \succ$ 给出的余伴随表示。余伴随表示通过以下公式扩展到 $\wedge^2 \mathrm{g}^*$：

$$\mathrm{ad}_X^* \omega(Y, Z) = -\omega([X, Y], Z) - \omega(Y, [X, Z]), \quad \omega \in \wedge^2 \mathfrak{g}^*, X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

对于 $\Omega : \mathrm{g} \longrightarrow \wedge^2 \mathrm{g}^*$，$\Omega$ 的微分是斜对称双线性映射 $\Delta\Omega : \mathrm{g} \times \mathrm{g} \longrightarrow \wedge^2 \mathrm{g}^*$，其定义为

$$\Delta(\Omega)(X, Y) = \mathrm{ad}_X^* \Omega(Y) - \mathrm{ad}_Y^* \Omega(X) - \Omega([X, Y]) \tag{9}$$

最后，对于任意 $\omega \in \wedge^2\mathfrak{g}^*$，我们用 $\omega^\flat : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ 表示由 $\prec \omega^\flat(X), Y \succ = \omega(X, Y)$ 定义的线性映射。

我们陈述一个主要结果。

定理 5.1。设 $(\mathfrak{g}, \bullet_\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle_\mathfrak{g})$ 是一个 L-二次左 Leibniz 代数，且 Leib(g) 退化，并设 $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_\mathfrak{h})$ 和 $(A, \bullet_A, \langle\ ,\ \rangle_A)$ 是其核。那么 $(\mathfrak{g}, \bullet_\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle_\mathfrak{g})$ 同构于 $(\mathfrak{h} \oplus A \oplus \mathfrak{h}^*, \bullet, \langle\ ,\ \rangle_n)$，其中，对于任意 $X, Y \in \mathfrak{h}$、$a, b \in A$ 以及 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$，非零的莱布尼茨乘积如下：

$$\begin{cases} X \bullet Y = [X, Y]_\mathfrak{h} + \theta(X, Y) + \Omega(X)^\flat(Y),\ a \bullet b = a \bullet_A b + \mu(a, b),, \\ X \bullet a = F(X)a + \nu(X, a),\ X \bullet \alpha = (\mathrm{ad}^\flat)^*_X\alpha,\ a \bullet X = G(X)a + \rho(a, X), \end{cases} \tag{10}$$

并且 $F : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{so}(A) \cap \mathrm{Der}(A)$、$G : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{End}(A)$、$\Omega : \mathfrak{h} \longrightarrow \wedge^2\mathfrak{h}^*$ 是线性映射，$\theta, \omega : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow A$ 是双线性映射，且 ω 是反对称的，μ、ρ, ν 由以下关系定义：

$$\prec \rho(a, X), Y \succ = -\langle \omega(X, Y), a\rangle_A,\ \prec \mu(a, b), X \succ = -\langle G(X)a, b\rangle_A,\ \prec \nu(X, a), Y \succ = -\langle \theta(X, Y), a\rangle_A. \tag{11}$$

此外，对于任意 X、Y、Z、T $\in \mathfrak{h}$ 以及 a $\in A$，(F, G, ω, θ, Ω) 满足以下方程，

$$\begin{cases} [\mathrm{L}^A_a, F(X)] = \mathrm{L}^A_{G(X)a},\ [\mathrm{L}^A_a, G(X)] = \mathrm{R}^A_{G(X)a} \\ \mathrm{L}^A_{\omega(X,Y)} = G^*(X)G(Y) - G^*(Y)G(X), \\ \mathrm{R}_{\theta(X,Y)} = [F(X), G(Y)] - G([X, Y]_\mathfrak{h}) = F(X)G(Y) + G(Y)G(X) - G([X, Y]_\mathfrak{h}), \\ \mathrm{L}^A_{\theta(X,Y)} = [F(X), F(Y)] - F([X, Y]_\mathfrak{h}), \\ \theta(X, [Y, Z]_\mathfrak{h}) - \theta([X, Y]_\mathfrak{h}, Z) - \theta(Y, [X, Z]_\mathfrak{h}) + F(X)\theta(Y, Z) - F(Y)\theta(X, Z) - G(Z)\theta(X, Y) = 0, \\ G(Z)^*\theta(X, Y) - G(Y)^*\theta(X, Z) - F(X)\omega(Y, Z) + \omega(Y, [X, Z]_\mathfrak{h}) + \omega([X, Y]_\mathfrak{h}, Z) = 0, \\ (G(X)^* + F(X))\omega(Y, Z) = 0, \\ \Delta(\Omega)(X, Y)(Z, T) = \langle \theta(X, T), \theta(Y, Z)\rangle_A - \langle \theta(Y, T), \theta(X, Z)\rangle_A - \langle \omega(Z, T), \theta(X, Y)\rangle_A, \end{cases} \tag{12}$$

其中 Δ 由 (9) 给出。

反之，若 $(A, \bullet_A, \langle\ ,\ \rangle_A)$ 是一个 L-二次左 Leibniz 代数，$(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_\mathfrak{h})$ 是一个李代数，并且 (F, G, ω, θ, Ω) 是如上所述满足 (11) 和 (12) 的列表，则 $(\mathfrak{h} \oplus A \oplus \mathfrak{h}^*, \bullet, \langle\ ,\ \rangle_n)$（其中 $\bullet$由 (10) 给出）是一个 L-二次左 Leibniz 代数。我们称其为通过 (F, G, ω, θ, Ω) 从 $(A, \bullet_A, \langle\ ,\ \rangle_A)$ 和 $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_\mathfrak{h})$ 得到的 L-二次左代数。

证明。我们分两步证明该定理。

第一步。在这一步中，我们构造定理中给出的所有数据。

设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\ ,\ \rangle)$ 是一个退化的 L-不变莱布尼茨代数。设 $(\mathfrak{h}, [\ ,\ ]_\mathfrak{h})$ 和 $(A, \bullet_A, \langle\ ,\ \rangle_A)$ 是其在定义 4.1 中定义的核。记 $\mathrm{I} = \mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp$。选取一个向量子空间 B，使得 $\mathrm{I}^\perp = \mathrm{B} \oplus \mathrm{I}$。$\mathrm{B}^\perp$ 包含 I，且 $\dim \mathrm{B}^\perp = 2 \dim \mathrm{I}$。因此，存在一个全各向同性向量子空间 $\mathfrak{h}_0$，使得 $\mathrm{B}^\perp = \mathrm{I} \oplus \mathfrak{h}_0$。现在，$\mathrm{B}^\perp$ 上的度量允许将 I 与 $\mathfrak{h}_0^*$ 等同，因此 $(\mathrm{B}^\perp, \langle\ ,\ \rangle)$ 与赋有典范中性度量的 $\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_0^*$ 等距。由此可得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathrm{B} \oplus \mathfrak{h}_0^*$，且度量为 $\langle\ ,\ \rangle_n$。

现在，I 是一个全各向同性理想，满足对于任意 $\mathrm{u} \in \mathrm{I}$，$\mathrm{L}_u = 0$，$\mathrm{I}^\perp = \mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) + \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp$；并且根据命题 4.2，$\mathrm{I}^\perp$ 是一个理想，且 $\mathrm{I}^\perp \bullet \mathrm{I} = 0$。因此，对于任意 X,Y $\in \mathfrak{h}$，a,b $\in \mathrm{B}$，莱布尼茨乘积可写为 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$，

$$\begin{cases} X \bullet Y = [X, Y]_{\mathfrak{h}_0} + \theta(X, Y) + \theta_2(X, Y),\ a \bullet b = a \bullet_B b + \mu(a, b),\ \alpha \bullet X = \alpha \bullet a = 0, \\ X \bullet a = F(X)a + \nu(X, a),\ X \bullet \alpha = H(X)\alpha,\ a \bullet X = G(X)a + \rho(a, X),\ a \bullet \alpha = 0, \end{cases}$$

其中 $\theta(X, Y) \in B$，$\theta_2(X, Y) \in \mathfrak{h}_0^*$，$a \bullet_B b \in B$，$\mu(X, a)$，$\nu(X, a)$，$\rho(a, X) \in \mathfrak{h}_0^*$，$F(X)$，$G(X) \in End(A)$，且 $H(X) \in End(\mathfrak{h}_0^*)$。

令 $\pi_\flat : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h} = \mathfrak{g}/I^\perp$ 且 $\pi_A : I^\perp \longrightarrow A = I^\perp/I$。显然，$\pi_\flat$ 将 $(\mathfrak{h}0, [\,,\,]_{\flat_0})$ 与 $(\mathfrak{h}, [\,,\,]_\flat)$ 等同起来，而 π_A 将 $(B, \bullet_B, \langle\,,\,\rangle_B)$ 与 $(A, \bullet_A, \langle\,,\,\rangle_A)$ 等同起来。这表明 $[\,,\,]_{\flat_0}$ 是李括号，且 $\bullet_B$ 是左 Leibniz 括号。我们将 $\mathfrak{h}_0$ 与 $\mathfrak{h}$ 等同，并将 B 与 A 等同。此外，关系$\langle X \bullet \alpha, Y\rangle = -\langle \alpha, X \bullet Y\rangle_{\mathfrak{g}}$ = 表明 $H(X) = (ad^\flat x)^*$。对于任意 X、Y、$Z \in \mathfrak{h}$

$$\langle X \bullet Y, Z\rangle_n = \prec \theta_2(X, Y), Z \succ = -\langle X \bullet Z, Y\rangle_n = - \prec \theta_2(X, Z), Y \succ .$$

通过关系 $\Omega : \mathfrak{h} \longrightarrow \wedge^2\mathfrak{h}^*$ 定义 $\Omega(X)(Y,Z) = \prec \theta_2(X,Y),Z\rangle$，因此 $\theta_2(X,Y) = \Omega(X)^\flat(Y)$。我们通过关系 $\prec \rho(a, X),Y \succ = -\langle\omega(X,Y),a\rangle_A$ 引入 $\omega \in \wedge^2\mathfrak{h}^*$，而 (11) 中的另一个关系是度量为 L-二次这一事实的直接推论。

第二步。在这一步中，我们证明由 (10) 给出的乘积是左 Leibniz 的，且度量是 L-二次的，当且仅当 (12) 成立，并且 F 的取值属于 $Der(A) \cap so(A)$。这是一个冗长且繁琐的计算，我们将其留待附录处理。□

推论 5.1。设 $(\mathfrak{g}, \bullet_{\mathfrak{g}}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{g}})$ 是一个 L-二次左 Leibniz 代数，$(\mathfrak{h}, [\,,\,]_\flat)$ 和 $(A, \bullet_A, \langle\,,\,\rangle_A)$ 是其核。若 $Leib(\mathfrak{g})^\perp = Leib(\mathfrak{g})$，则 $A = \{0\}$，$\mathfrak{h} = Lie(\mathfrak{g})$，且 $(\mathfrak{g}, \bullet_{\mathfrak{g}}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{g}})$ 与 $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*, \bullet, \langle\,,\,\rangle_n)$ 同构，其中，对于任意 $X, Y \in \mathfrak{h}$，$\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$

$$(X + \alpha) \bullet (Y + \beta) = [X, Y]_\flat + (ad^\flat)^*_X\beta + \Omega(X)^\flat(Y), \tag{13}$$

并且 $\Omega : \mathfrak{h} \longrightarrow \wedge^2\mathfrak{h}^*$ 是一个 1-余循环，即 $\Delta(\Omega) = 0$。此外，与两个 1-余循环 Ω_1 和 Ω_2 相关联的 $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ 上的两个此类 L-二次左 Leibniz 代数结构同构，当且仅当 Ω_1 和 Ω_2 在 $H^2(\mathfrak{h}, \wedge^2\mathfrak{h}^*)$ 中定义相同的上同调类。

证明。第一部分是定理 5.1 的推论。设 $(\mathfrak{h}, [\,,\,])$ 是一个李代数，Ω_1和 Ω_2 是 $\mathfrak{h}$ 上取值于 $\wedge^2\mathfrak{h}^*$ 的两个 1-余循环。记 $\bullet_i$ 为由 Ω_i 关联并由 (13) 给出的 $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ 上的左 Leibniz 乘积。如果 Ω_1 和 Ω_2 在 $H^2(\mathfrak{h}, \wedge^2\mathfrak{h}^*)$ 中定义相同的上同调类，那么存在 $\omega \in \wedge^2\mathfrak{h}^*$，使得对任意 $X \in \mathfrak{h}$，$\Omega_2(X) = \Omega_1(X) + ad^*_X\omega$。容易验证，同构 $\phi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$，$X + \alpha \mapsto X + \alpha - \omega^\flat(X)$，是 L-二次左 Leibniz 代数 $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*, \bullet_1, \langle\,,\,\rangle_n)$ 与 $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*, \bullet_2, \langle\,,\,\rangle_n)$ 之间的同构。□

因此，我们可以完整描述 L-二次单左 Leibniz 代数。

推论 5.2. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet_{\mathfrak{g}}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{g}})$ 是一个 L-二次单左 Leibniz 代数。那么 $(\mathfrak{g}, \bullet_{\mathfrak{g}}, \langle\,,\,\rangle_{\mathfrak{g}})$ 与 $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*, \bullet, \langle\,,\,\rangle_n)$ 同构，其中 $\mathfrak{h} = Lie(\mathfrak{g})$，且对于任意 $X, Y \in \mathfrak{h}$，$\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$

$$(X + \alpha) \bullet (Y + \beta) = [X, Y]_\flat + (ad^\flat_X)^*\beta.$$

证明. 根据命题 4.6，$A = 0$ and $\mathfrak{h} = Leib(\mathfrak{g})$，而 $Leib(\mathfrak{g})$ 是一个单李代数。我们可以应用推论 5.1。此外，由于 $\mathfrak{h}$ 是单的，Ω 是一个余边界，由此证明完成。□

我们先回顾二次李代数的一个性质，该性质将在下述定理中用到。

设 $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \langle\,,\,\rangle)$ 是一个二次李代数，且 $\omega \in \wedge^2\mathfrak{g}^*$。那么存在一个斜对称端同态 $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$，使得对于任意 $x,y \in \mathfrak{g}$,

$$\omega(x, y) = \langle Dx, y\rangle.$$

众所周知，容易证明：ω 是 $\mathfrak{g}$ 的 2-余循环，当且仅当 D 是导子。因此，$H^2(\mathfrak{g}) = (so(\mathfrak{g}) \cap Der(\mathfrak{g}))/Inner(\mathfrak{g})$，其中 $Inner(\mathfrak{g}) = \{ad_u, u \in \mathfrak{g}\}$。

定理 5.2. 设 $(\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*, \bullet, \langle\,,\,\rangle_n)$ 是通过 $(F,G,\omega,\theta,\Omega)$，由 $(A, \bullet_A, \langle\,,\,\rangle_A)$ 和 $(\mathfrak{h}, [\,,\,]_{\mathfrak{h}})$ 得到的 L-二次左代数。

若 A 是李代数，$Z(A) = 0$ 且 $H^2(A) = 0$，则存在一个取值于 $\wedge^2\mathfrak{h}^*$ 的 $\mathfrak{h}$ 上的 1-余循环 Ω_0，以及一个端同态 $U:\mathfrak{h}\longrightarrow A$，使得 $(\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*, \bullet, \langle\,,\,\rangle_n)$ 与 $(\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*, \circ, \langle\,,\,\rangle)$ 同构，其中，对于任意 $X, Y\in\mathfrak{h}$、$a, b\in A$、$\alpha,\beta\in\mathfrak{h}^*$，非零的莱布尼茨乘积和度量由下式给出

$$
\begin{aligned}
&X\circ Y = [X,Y]_{\mathfrak{h}} + \Omega_0(X)^\flat(Y),\ a\circ b = [a,b]_A + U^*([a,b]_A),\ X\circ\alpha = (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*\alpha,\\
&\langle X+a+\alpha, Y+b+\beta\rangle = \langle X+a+\alpha, Y+b+\beta\rangle_n + \langle U(X), U(Y)\rangle_A - \langle a, U(Y)\rangle_A - \langle b, U(X)\rangle_A,\\
&\prec U^*(a), X\succ = \langle a, U(X)\rangle_A.
\end{aligned}
$$

证明。$\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*$ 的 L-二次左 Leibniz 代数结构由定理 5.1 给出，其条件由 $(F, G, \omega,\theta, \Omega)$ 满足。假设 A 是李代数，$Z(A) = 0$ 且 $H^2(A) = 0$。那么 $[A, A]_A = Z(A)^\perp = A$，且任意斜对称导子都是内导子。由式 (12) 中的第一个方程、F 是导子的事实以及 $Z(A) = 0$，我们推得 $G = -F$。因此存在唯一的端同态 $U:\mathfrak{h}\longrightarrow A$，使得 $F(X) = -G(X) = \mathrm{ad}_{U(X)}$，并且由式 (12) 中的第三个方程，我们必有

$$\theta(X,Y) = [U(X), U(Y)]_A - U([X,Y]_{\mathfrak{h}}).$$

现在考虑同构 $\phi:\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*\longrightarrow\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*$，由 $\phi(X+a+\alpha) = X+a-U(X)+\alpha$ 给出。在此同构下，$(\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*, \bullet, \langle\,,\,\rangle_n)$ 与 $(\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*, \circ, \langle\,,\,\rangle)$ 同构，其中对任意 $u,v\in\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*$，

$$u\circ v = \phi^{-1}(\phi(u)\bullet\phi(v)) \quad\text{and}\quad \langle u, v\rangle = \langle\phi(u),\phi(v)\rangle_n.$$

So

$$\langle X+a+\alpha, Y+b+\beta\rangle = \langle X+a+\alpha, X+b+\alpha\rangle_n + \langle U(X), U(Y)\rangle_A - \langle a, U(Y)\rangle_A - \langle b, U(X)\rangle_A.$$

对任意 $X, Y\in\mathfrak{h}$,

$$
\begin{aligned}
\phi(X\circ Y) &= (X-U(X))\bullet(Y-U(Y))\\
&= [X,Y]_{\mathfrak{h}} + \theta(X,Y) + \Omega(X)^\flat(Y) - [U(X),U(Y)]_A - \nu(X,U(Y)) + [U(Y),U(X)]_A\\
&\quad - \rho(U(X),Y) + [U(X),U(Y)]_A + \mu(U(X),U(Y))\\
&= [X,Y]_{\mathfrak{h}} - U([X,Y]_{\mathfrak{h}}) + \Omega(X)^\flat(Y) - \rho(U(X),Y) + \mu(U(X),U(Y)).
\end{aligned}
$$

因此，存在 θ_2 使得

$$X\circ Y = [X,Y]_{\mathfrak{h}} + \theta_2(X,Y).$$

根据关系式

$$\langle X\circ Y, Z\rangle = \prec\theta_2(X,Y), Z\succ = -\langle X\circ Z, Y\rangle = -\prec\theta_2(X,Z), Y\succ$$

我们可以通过关系式定义 $\Omega_0:\mathfrak{h}\longrightarrow\wedge^2\mathfrak{h}^*$：$\Omega_0(X)(Y, Z) = \prec\theta_2(X, Y), Z\succ$，并写作

$$X\circ Y = [X,Y]_{\mathfrak{h}} + \Omega_0(X)^\flat(Y).$$

同理，我们可以证明存在 ν^0、ρ^0，使得对于任意的 $X\in\mathfrak{h}$、a、$b\in A$，$\alpha\in\mathfrak{h}^*$,

$$a\circ b = [a,b]_a + \mu(a,b),\ X\circ a = \nu^0(X,a),\ X\circ\alpha = (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*\alpha \quad\text{and}\quad a\circ X = \rho^0(a,X).$$

由这些关系可得

$$\langle a \circ b, X\rangle = -\langle b, a \circ X\rangle \quad \text{and} \quad \langle X \circ a, Y\rangle = -\langle a, X \circ Y\rangle$$

我们得到

$$\nu^0 = 0 \quad \text{and} \quad \prec \mu(a,b), X \succ = \langle [a,b]_A, U(X)\rangle_A.$$

括号 $\circ$ 与 (10) 中的形式相同，其中 $F = G = 0, \theta = 0$ 和 $\nu = 0$，而 (12) 是该括号满足左 Leibniz 条件的条件。因此，由 (12) 中的方程 (2) 可得 $\omega_0 = 0$，而 (12) 中的最后一个方程表明 Ω_0 是一个 1-余循环。证明完毕。 □

备注 3. 满足 $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$ 且 $H^2(\mathfrak{g}) = \{0\}$ 的二次李代数 $\mathfrak{g}$ 类别很广。它包含半单李代数这一类，也包含单李代数的余切代数。事实上，若 $(\mathfrak{g}, [\,,\,]_{\mathfrak{g}})$ 是一个李代数，则其余切代数 $T^*\mathfrak{g}$ 是李代数 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$，其括号为

$$[X+\alpha, Y+\beta] = [X,Y]_{\mathfrak{g}} + \mathrm{ad}^*_X\alpha - \mathrm{ad}^*_Y\beta, \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*.$$

$T^*\mathfrak{g}$ 上的自然度量是二次的。此外，若 $\mathfrak{g}$ 是单李代数，则 $Z(T^*\mathfrak{g}) = \{0\}$ 且 $H^2(T^*\mathfrak{g}) = \{0\}$（见 *[1,* 定理 2.2*]*）。

推论 5.3. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是一个非李代数的 L-二次左 Leibniz 代数。那么 $\dim \mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \geq 2$。

证明. 假设 $\dim \mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) = 1$。若 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$ 非退化，则 $\mathfrak{g} = \mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp$，且 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp$ 对 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$ 的作用由斜对称自同态给出，因此该作用平凡，从而 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数。

假设 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$ 退化，则 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp$，因此 $\dim \mathfrak{h} = 1$。所以 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 与定理 5.1 中描述的、带有数据 $(F, G, \omega, \theta, \Omega)$ 的 L-二次左 Leibniz 代数 $(\mathfrak{h} \oplus A \oplus \mathfrak{h}^*, \bullet, \langle\,,\,\rangle_m)$ 同构。由于 $\dim \mathfrak{h} = 1$，我们有 $\Omega = 0$ 且 $\omega = 0$。此外，$\mathfrak{h}^* = \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$，因此对任意 $X, Y \in \mathfrak{h}$ 及 $a \in A$,

$$X \bullet Y + Y \bullet X = \theta(X,Y) + \theta(Y,X) \in \mathfrak{h}^* \quad \text{and} \quad X \bullet a + a \bullet X = F(X)a + G(X)a + \nu(X,a) \in \mathfrak{h}^*$$

这意味着 $F = -G$、$\theta = 0$ 和 $\nu = 0$。乘积 $\bullet$ 变为反对称，因此 $\mathfrak{g}$ 是李代数，这与假设矛盾。 □

我们在本节最后给出满足 $\dim(\mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp) = 1$ 的 L-二次左 Leibniz 代数的完整描述。这一类包含 Leibniz 理想退化的洛伦兹 L-二次左 Leibniz 代数。不过，设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是 Leibniz 理想非退化的洛伦兹 L- 二次 Leibniz 代数。那么 $\mathfrak{g} = \mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp$，其中 $\mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp$ 或为二次欧几里得李代数，或为二次洛伦兹李代数（见第 4 节）。

定理5.3. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 是满足 $\dim(\mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp) = 1$ 的 L-二次左 Leibniz 代数。那么 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle\,,\,\rangle)$ 同构于 $(\mathbb{R}e \oplus A \oplus \mathbb{R}^*e, \bullet, \langle\,,\,\rangle_m)$，其中 $(A, \bullet_A, \langle\,,\,\rangle_A)$ 是一个 L-二次左 Leibniz 代数，且非零的莱布尼茨乘积如下：

$$\bar{e} \bullet \bar{e} = \delta, \; a \bullet b = a \bullet_A b - \langle Ga, b\rangle_A e, \; \bar{e} \bullet a = Fa - \langle \delta, a\rangle e, \; a \bullet \bar{e} = Ga,$$

其中 $a, b \in A$, $\delta \in A$, $F \in \mathrm{Der}(A) \cap \mathrm{so}(A)$, $G \in \mathrm{End}(A)$ 满足

$$G(\delta) = 0, \; \mathrm{L}^A_\delta = 0, \; \mathrm{Im}(F+G) \in Z^l(A), \; [\mathrm{L}^A_a, G] = \mathrm{R}^A_{Ga} \quad \textit{and} \quad [G,F] = G^2 + GF = \mathrm{R}_\delta.$$

证明。根据定理 5.1，$(\mathfrak{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 与 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus A \oplus \mathfrak{h}^*$ 同构，其中 $(A, \bullet_A, \langle , \rangle_A)$ 是一个 L-二次欧几里得左 Leibniz 代数，$\mathfrak{h} = \mathbb{R}\bar{e}, \mathfrak{h}^* = \mathbb{R}e$，且莱布尼茨乘积由 (10) 给出。由于 $\dim \mathfrak{h} = 1$，我们有 $\Omega = 0$ and $\omega = 0$。令

$$F = F(\bar{e}),\ G = G(e),\ \theta(\bar{e}, \bar{e}) = \delta \in A,\ \mu(a, b) = -\langle Ga, b\rangle_A e.$$

于是 $\nu(\bar{e}, a) = -\langle \delta,\ a\rangle e$，从而得到所需的莱布尼茨乘积表达式。容易验证，(12) 可化为定理陈述中给出的方程。 □

6. R-二次左莱布尼茨代数的描述

本节采用与上一节类似的方法，对 R-二次左莱布尼茨代数进行完整描述，并推导一些重要结果。我们使用与上一节相同的记号。

下述定理与定理 5.1 有许多相似之处。

定理 6.1. 设 $(\mathfrak{g}, \bullet_{\mathfrak{g}}, \langle , \rangle_{\mathfrak{g}})$ 为一个 R-二次左莱布尼茨代数，$(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}})$ 和 $(A, [,]_A, \langle , \rangle_A)$ 为其核。那么 $(\mathfrak{g}, \bullet_{\mathfrak{g}}, \langle , \rangle_{\mathfrak{g}})$ 同构于 $(\mathfrak{h} \oplus A \oplus \mathfrak{h}^*, [,], \langle , \rangle_n)$，其中对于 $X, Y \in \mathfrak{h}, a, b \in A, \alpha \in \mathfrak{h}^*$，非零乘积如下：

$$\begin{cases} X \bullet Y = \theta(X, Y) + \Omega(Y)^{\flat}(X),\ a \bullet b = [a, b]_A + \mu(a, b), \\ X \bullet a = F(X)a + \nu(X, a),\ X \bullet \alpha = (\mathrm{ad}^{\flat})^*_X \alpha,\ a \bullet X = -F(X)a + \rho(a, X), \end{cases} \tag{14}$$

且 $F : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{so}(A) \cap \mathrm{Der}(A)$、$\Omega : \mathfrak{h} \longrightarrow \wedge^2 \mathfrak{h}^*$ 是线性映射，$\theta, \omega : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow A$ 是双线性反对称映射，而 μ, ρ, ν 由以下关系定义

$$\prec \nu(X, a), Y \succ = \langle \omega(X, Y), a\rangle_A,\ \prec \mu(a, b), X \succ = \langle F(X)a, b\rangle_A, \quad \text{and} \quad \prec \rho(a, X), Y \succ = \langle \theta(X, Y), a\rangle_A. \tag{15}$$

此外，对于任意 $X, Y, Z, T \in \mathfrak{h}$，$(F, \omega, \theta, \Omega)$ 满足以下方程：

$$\begin{cases} \mathrm{ad}^A_{\omega(X,Y)} = F([X, Y]_{\mathfrak{h}}) - [F(X), F(Y)], \\ \mathrm{ad}^A_{\theta(X,Y)} = [F(X), F(Y)], \\ F(X)\theta(Y, Z) + F(Y)\theta(Z, X) + F(Z)\theta(X, Y) = 0, \\ F(X)\omega(Y, Z) + F(Y)\omega(Z, X) - F(Z)\theta(X, Y) + \omega(X, [Y, Z]_{\mathfrak{h}}) - \omega(Y, [X, Z]_{\mathfrak{h}}) = 0, \\ F(X)\theta(Y, Z) - F(Y)\omega(Z, X) + F(Z)\theta(X, Y) - \theta(Y, [X, Z]_{\mathfrak{h}}) = 0, \\ (\mathrm{ad}^{\flat}_T)^* \Omega(Z)(X, Y) = \langle \omega(Y, T), \theta(X, Z)\rangle_A + \langle \omega(X, T), \theta(Z, Y)\rangle_A + \langle \theta(Z, T), \theta(X, Y)\rangle_A. \end{cases} \tag{16}$$

反之，若 $(A, [,]_A, \langle , \rangle_A)$ 是二次李代数，$(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}})$ 是李代数，且 $(F, \omega, \theta, \Omega)$ 是如上所述满足 (15) 和 (16) 的一组数据，则 $(\mathfrak{h} \oplus A \oplus \mathfrak{h}^*, [,], \langle , \rangle_n)$ 是一个 R-二次左 Leibniz 代数。我们称其为通过 $(F, \omega, \theta, \Omega)$ 由 $(A, [,]_A, \langle , \rangle_A)$ 和 $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}})$ 构造得到的 R-二次左代数。

证明。我们采用与定理 5.1 证明中相同的步骤。

设 $(\mathfrak{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 是一个退化的 R-不变莱布尼茨代数。设 $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}})$ 和 $(A, [,]_A, \langle , \rangle_A)$ 是其在定义 4.1 中定义的核。

我们记 $I = \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})$。选取一个向量子空间 B，使得 $I^{\perp} = B \oplus I$，并且如定理 5.1 的证明所示，我们有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \oplus B \oplus \mathfrak{h}_0^*$，且度量为 $\langle , \rangle_n$。

现在，I 是一个全各向同性理想，使得对于任意 $u \in I$，$L_u = 0$，并且根据命题 4.2，$I^\perp$ 是一个理想，$I^\perp \bullet I = 0$ 且 $g \bullet g \subset I^\perp$。因此，对于任意 $X,Y \in h$、$a,b \in B$，莱布尼茨乘积可写为 $\alpha \in h^*$，

$$\begin{cases} X \bullet Y = \theta(X,Y) + \theta_2(X,Y), \ a \bullet b = a \bullet_B b + \mu(a,b), \ \alpha \bullet X = \alpha \bullet a = 0, \\ X \bullet a = F(X)a + \nu(X,a), \ X \bullet \alpha = H(X)\alpha, \ a \bullet X = G(X)a + \rho(a,X), \ a \bullet \alpha = 0, \end{cases}$$

其中 $\theta(X, Y) \in B$，$\theta_2(X, Y) \in h_0^*$，$a \bullet_B b \in B$，$\mu(X, a)$，$\nu(X, a)$，$\rho(a, X) \in h_0^*$，$F(X)$，$G(X) \in End(A)$，$H(X) \in End(h_0^*)$。我们有 $X \bullet a + a \bullet X \in I$，因此 $G(X) = -F(X)$。此外，我们还有 $X \bullet Y + Y \bullet X \in I$，因此 θ 是反对称的。

令 $\pi_\mathfrak{h} : g \longrightarrow h = g/I^\perp$ 且 $\pi_A : I^\perp \longrightarrow A = I^\perp/I$。显然，$\pi_\mathfrak{h}$ 将 h_0 对应到 h，而 π_A将 $(B, \bullet_B, \langle , \rangle_B)$ 对应到 $(A, [,]_A, \langle , \rangle_A)$。这表明 $\bullet_B$ 是一个李括号。我们将 h_0对应到 h，并将 B 对应到 A。此外，关系

$$\prec X \bullet \alpha, Y \succ = \prec \alpha, L_X^* Y \succ \overset{(7)}{=} - \prec \alpha, [X, Y]_\mathfrak{h} \succ$$

可得 $H(X) = (ad^\mathfrak{h} x)^*$。对于任意 X、Y、$Z \in h$

$$\langle X \bullet Y, Z \rangle_n = \prec \theta_2(X,Y), Z \succ = -\langle Z \bullet Y, X \rangle_n = - \prec \theta_2(Z,Y), X \succ .$$

定义 $\Omega : h \longrightarrow \wedge^2 h^*$，满足关系 $\Omega(Y)(X,Z) = \prec \theta_2(X,Y), Z \rangle$，因此 $\theta_2(X,Y) = \Omega(Y)^\flat(X)$。我们通过关系 $\prec \nu(X,a), Y \succ = \langle \omega(X,Y), a \rangle_A$ 引入 $\omega \in \wedge^2 h^*$，而 (15) 中的其他关系可直接由度量是 R-二次的事实得出。

证明的第二步与定理 5.1 证明的第二步类似，因此我们也将其留到附录中。 □

推论 6.1。设 $(g, \bullet_\mathfrak{g}, \langle , \rangle_\mathfrak{g})$ 是一个 R-二次左 Leibniz 代数，$(h, [,]_\mathfrak{h})$ 和 $(A, [,]_A, \langle , \rangle_A)$ 是其核。若 $Leib(g)^\perp = Leib(g)$，则 $A = \{0\}$，且 $(g, \bullet_\mathfrak{g}, \langle , \rangle_\mathfrak{g})$ 与 $(h \oplus h^*, \bullet, \langle , \rangle_n)$ 同构，其中对于任意 X、$Y \in h$，$\alpha, \beta \in h^*$

$$(X + \alpha) \bullet (Y + \beta) = (ad_X^\mathfrak{h})^* \beta + \Omega(Y)^\flat(X),$$

并且 $\Omega : h \longrightarrow \wedge^2 h^*$ satisfies $\Omega(X)^\flat([h, h]_\mathfrak{h}) = 0$ 对于任意 $X \in h$。

定理 6.2。设 $(h \oplus A \oplus h^*, [,], \langle , \rangle_n)$ 是通过 $(F, \omega, \theta, \Omega)$ 从 $(A, [,]_A, \langle , \rangle_A)$ 和 $(h, [,]_\mathfrak{h})$ 得到的 R-二次左代数。

若 $Z(A) = 0$ 且 $H^2(A) = 0$，则存在一个端同态 $U : h \longrightarrow A$, $\Omega_0 : h \longrightarrow \wedge^2 h^*$以及 $\omega_0 \in \wedge^2 h^*$，使得 $(h \oplus A \oplus h^*, [,], \langle , \rangle_n)$ 与 $(h \oplus A \oplus h^*, \bullet, \langle , \rangle)$ 同构，其中对于任意 $X, Y \in h$、$a, b \in A$、$\alpha, \beta \in h^*$，非零的莱布尼茨乘积为

$$X \bullet Y = \Omega(Y)^\flat(X), \ a \bullet b = [a,b]_A + U^*([a,b]_A), \ X \bullet \alpha = (ad^\mathfrak{h} X)^* \alpha,$$

$$\langle X + a + \alpha, Y + b + \beta \rangle_0 = \langle X + a + \alpha, Y + b + \beta \rangle_n + \langle U(X), U(Y) \rangle_A - \langle a, U(Y) \rangle_A - \langle b, U(X) \rangle_A,$$

其中 $\Omega_0(X)^\flat([h, h]_\mathfrak{h}) = 0$ 对于任意 $X \in h$。

证明。采用与定理 5.2 证明中相同的论证，我们可以证明 $(h \oplus A \oplus h^*, [,], \langle , \rangle_n)$ 与 $(h \oplus A \oplus h^*, [,], \langle , \rangle)$ 同构，其中对于任意 $X,Y \in h$, $a,b \in A$,$\alpha \in h^*$,

$X \bullet Y_0 = \theta_2(X,Y)$，$a \bullet b = [a,b]_a + \mu(a, b)$，$X \bullet a = \nu(X,a)$，$X \bullet \alpha = (ad^\mathfrak{h} X)^* \alpha$ 和 $a \bullet X = \rho(a, X)$。

度量 $\langle\,,\rangle$ 定义为

$$\langle X+a+\alpha, X+a+\alpha\rangle = 2<\alpha, X> +\langle a,a\rangle + \langle U(X),U(X)\rangle_A - 2\langle a, U(X)\rangle_A.$$

由这些关系

$$\langle a\bullet b, X\rangle = -\langle a, X\bullet b\rangle \quad \text{and} \quad \langle a\bullet X, Y\rangle = -\langle a, Y\bullet X\rangle$$

我们得到

$$\rho = 0 \quad \text{and} \quad <\mu(a,b), X>=\langle [a,b]_A, U(X)\rangle_A.$$

现在由 (16) 中的第一个方程，我们得到 $\nu = 0$，而最后一个方程给出了对 Ω_0 的条件。 □

推论 6.2. 设 $(g,[\,,\,],\langle\,,\,\rangle)$ 是一个非李代数的 R-二次左 Leibniz 代数。则 $\dim\mathrm{Leib}(g) \geq 2$。

特别地，度量为 Lorentz型的 R-二次左莱布尼茨代数是李代数。

证明. 假设 $\dim \mathrm{Leib}(g) = 1$。则 $\dim \mathfrak{h} = 1$，并利用定理 6.1，我们得到 g 同构于 $\mathfrak{h} \oplus A \oplus \mathfrak{h}^*$，其中 $\theta = \omega = \Omega = 0$，且莱布尼茨乘积 (14) 变为李括号，这与假设矛盾。

若 g 是带有 Lorentz型度量的 R-二次左 Leibniz 代数，那么由于度量是 Lorentz型且 $\mathrm{Leib}(g) \subset \mathrm{Leib}(g)^{\perp}$，因此 $\dim\mathrm{Leib}(g) \leq 1$，从而 $\dim\mathrm{Leib}(g) = 0$。 □

利用定理 5.1 和定理 6.1，我们现在给出 L-二次对称 Leibniz 代数的完整描述。

定理 6.3. 设 $(g,\bullet_g,\langle\,,\,\rangle_g)$ 是一个 L-二次对称 Leibniz 代数，具有 $(\mathfrak{h},[\,,\,]_{\mathfrak{h}})$，且 $(A,\bullet_A,\langle\,,\,\rangle_A)$ 是其核。那么 $\mathrm{Leib}(g) \subset \mathrm{Leib}(g)^{\perp}$，$(A,\bullet_A,\langle\,,\,\rangle_A)$ 是一个二次李代数，$(\mathfrak{h},[\,,\,]_{\mathfrak{h}})$ 是阿贝尔的，并且 $(g,\bullet_g,\langle\,,\,\rangle_g)$ 同构于 $(\mathfrak{h}\oplus A\oplus\mathfrak{h}^*,\bullet,\langle\,,\,\rangle_n)$，其中对任意 $X,Y\in\mathfrak{h}$、$a,b\in A$、$\alpha\in\mathfrak{h}^*$，非零的莱布尼茨乘积如下给出

$$\begin{cases} X\bullet Y = \theta(X,Y) + \Omega(X)^{\flat}(Y),\ a\bullet b = [a,b]_A + \mu(a,b), \\ X\bullet a = F(X)a + \nu(X,a),\ \ a\bullet X = -F(X)a + \rho(a,X), \end{cases} \tag{17}$$

且 $F:\mathfrak{h}\longrightarrow \mathfrak{so}(A)\cap \mathrm{Der}(A)$，$\Omega:\mathfrak{h}\longrightarrow \wedge^2\mathfrak{h}^*$ 为线性映射，$\theta,\omega:\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}\longrightarrow A$ 为双线性反对称映射，而 μ、ρ,ν 由以下关系定义：

$<\rho(a,X),Y>=-\langle\omega(X,Y),a\rangle_A$，$<\mu(a,b),X>=\langle F(X)a,b\rangle_A$ 和 $<\nu(X,a),Y>=-\langle\theta(X,Y),a\rangle_A$.

此外，(F,ω,θ,Ω) 满足以下方程：

$$\begin{cases} \mathrm{ad}^A_{\theta(X,Y)} = -\mathrm{ad}^A_{\omega(X,Y)} = [F(X),F(Y)], \\ F(X)\theta(Y,Z) + F(Y)\theta(Z,X) + F(Z)\theta(X,Y) = 0, \\ F(X)\left[\theta(Y,Z)+\omega(Y,Z)\right] = 0, \\ \langle\theta(Y,T),\theta(Z,X)\rangle_A + \langle\theta(X,T),\theta(Y,Z)\rangle_A + \langle\theta(Z,T),\theta(X,Y)\rangle_A = 0, \\ \langle\theta(X,T)+\omega(X,T),\theta(Y,Z)\rangle_A = 0, \end{cases} \tag{18}$$

对于任意 $X、Y、Z、T\in\mathfrak{h}$。

证明. 根据定理 5.1，$(\mathfrak{g}, \bullet, \langle , \rangle)$ 与 $(\mathfrak{h}\oplus A\oplus \mathfrak{h}^*)$ 同构，其非零莱布尼茨乘积如下：对于任意 $X,Y \in \mathfrak{h}$，$a,b \in A$，$\alpha \in \mathfrak{h}^*$，有

$$\begin{cases} X \bullet Y = [X,Y]_{\mathfrak{h}} + \theta(X,Y) + \Omega(X)^\flat(Y), \ a \bullet b = a \bullet_A b + \mu(a,b), \\ X \bullet a = F(X)a + \nu(X,a), \ X \bullet \alpha = (\mathrm{ad}^{\mathfrak{h}})^*_X \alpha, \ a \bullet X = G(X)a + \rho(a,X), \end{cases}$$

且 $(F, G, \omega, \theta, \Omega)$ 满足 (11) 和 (12)。

$\mathfrak{g}$ 也是一个右 Leibniz 代数，因此由 $X \circ Y = Y \bullet X$ 给出的乘积 $\circ$ 是左 Leibniz 乘积，且 $(\mathfrak{g}, \circ, \langle , \rangle)$ 是 R-二次的。因此，$\mathrm{Leib}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Leib}(\mathfrak{g})^\perp$，从而 $(\mathfrak{g}, \circ, \langle , \rangle)$ 的核是 $(A, -\bullet_A, \langle , \rangle_A)$ 和 $(\mathfrak{h}, [,]_\circ)$。于是可知 $\bullet_A$ 是李括号，记作 $[,]_A$。然后，根据定理 6.1，$(\mathfrak{g}, \circ, \langle , \rangle)$ 同构于 $(\mathfrak{h} \oplus A \oplus \mathfrak{h}^*)$，其非零乘积为

$$\begin{cases} X \circ Y = \theta^\circ(X,Y) + \Omega^\circ(Y)^\flat(X), \ a \circ b = -[a,b]_A + \mu^\circ(a,b), \\ X \circ a = F^\circ(X)a + \nu^\circ(X,a), \ X \circ \alpha = (\mathrm{ad}^\circ)^*_X \alpha, \ a \circ X = -F^\circ(X)a + \rho^\circ(a,X), \end{cases}$$

且 $(F^\circ, \omega^\circ, \theta^\circ, \Omega^\circ)$ 满足 (16) 和 (15)。此外，ω° 和 θ° 是反对称的。

我们推导出 $[,]_{\mathfrak{h}} = [,]_\circ = 0$ 并且

$$\theta^\circ = -\theta, \ \Omega^\circ = \Omega, F^\circ = -F = G \quad \text{and} \quad \omega^0 = -\omega.$$

如果将其代入 (5.1) 和 (6.1)，我们得到两个方程组

$$\begin{cases} \mathrm{ad}^A_{\omega(X,Y)} = -[F(X), F(Y)], \\ \mathrm{ad}^A_{\theta(X,Y)} = [F(X), F(Y)], \\ F(X)\theta(Y,Z) + F(Y)\theta(Z,X) + F(Z)\theta(X,Y) = 0, \\ F(Z)\theta(X,Y) + F(Y)\theta(Z,X) - F(X)\omega(Y,Z) = 0, \\ \langle \theta(X,T), \theta(Y,Z)\rangle_A - \langle \theta(Y,\star), \theta(X,Z)\rangle_A - \langle \omega(Z,T), \theta(X,Y)\rangle_A = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{ad}^A_{\omega(X,Y)} = -[F(X), F(Y)], \\ \mathrm{ad}^A_{\theta(X,Y)} = [F(X), F(Y)], \\ F(X)\theta(Y,Z) + F(Y)\theta(Z,X) + F(Z)\theta(X,Y) = 0, \\ F(X)\omega(Y,Z) + F(Y)\omega(Z,X) - F(Z)\theta(X,Y) = 0, \\ F(X)\theta(Y,Z) - F(Y)\omega(Z,X) + F(Z)\theta(X,Y) = 0, \\ \langle \omega(Y,T), \theta(X,Z)\rangle_A - \langle \omega(X,T), \theta(Y,Z)\rangle_A + \langle \theta_1(Z,T), \theta(X,Y)\rangle_A = 0. \end{cases}$$

这两个系统等价于

$$\begin{cases} \mathrm{ad}^A_{\omega(X,Y)} = -[F(X), F(Y)], \\ \mathrm{ad}^A_{\theta(X,Y)} = [F(X), F(Y)], \\ F(X)\theta(Y,Z) + F(Y)\theta(Z,X) + F(Z)\theta(X,Y) = 0, \\ F(X)\omega(Y,Z) + F(Y)\omega(Z,X) - F(Z)\theta(X,Y) = 0, \\ F(X)\theta(Y,Z) - F(Y)\omega(Z,X) + F(Z)\theta(X,Y) = 0, \\ \langle \omega(Y,T), \theta(X,Z)\rangle_A - \langle \omega(X,T), \theta(Y,Z)\rangle_A + \langle \theta(Z,T), \theta(X,Y)\rangle_A = 0, \\ \langle \omega(Y,T), \theta(X,Z)\rangle_A - \langle \omega(X,T), \theta(Y,Z)\rangle_A + \langle \theta(Z,T), \theta(X,Y)\rangle_A = 0. \end{cases}$$

上述系统中的方程 (3)、(4) 和 (5) 等价于

$$F(X)\theta(Y,Z)+F(Y)\theta(Z,X)+F(Z)\theta(X,Y)=0 \quad \text{and} \quad F(X)\left[\theta(Y,Z)+\omega(Y,Z)\right]=0,$$

这就完成了证明。 □

推论 6.3. 任意洛伦兹 L-二次对称 Leibniz 代数都是二次李代数。

注 4. 在定理 6.3 中，如果取 $\theta = \omega = 0$，我们就能轻松构造出许多 L-二次对称 Leibniz 代数的例子。例如，设 h 是一个基为 $(e_1,\ldots,e_r)$ 的向量空间，$(A,\langle,\rangle_A)$ 是一个基为 (f_1,f_2) 的二维阿贝尔欧几里得李代数。对于 $i = 1,\ldots,r$，取 $F(e_i) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_i \\ -\lambda_i & 0 \end{pmatrix}$。我们取 $\omega = \theta = 0$，并令 $\Omega(e_i) = \left(a^i{}_{kl}\right)_{kl}$ 为一个斜对称矩阵。因此，在 $h \oplus A \oplus h^*$ 上，我们得到一个对称 Leibniz 代数结构 $\bullet$ 以及一个 L-二次度量 $\langle,\rangle_n$，其定义为

$$e_i \bullet e_j = \sum_{k=1}^{r} a^i_{jk} e^*_k,\ e_i \bullet f_1 = -\lambda_i f_2,\ e_i \bullet f_2 = \lambda_i f_1, f_1 \bullet f_2 = -f_2 \bullet f_1 = -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e^*_i.$$

7. 附录

在本附录中，为补全这些定理的证明，我们给出相应条件，使定理 5.1 和定理 6.1 中分别出现的伪欧几里得左莱布尼茨代数 $(h \oplus A \oplus h^*, \bullet, \langle,\rangle_n)$ 成为 L-二次（分别为 R-二次）左莱布尼茨代数。

莱布尼茨乘积 (10) 和 (14) 可写为

$$\begin{cases} X \bullet Y = \epsilon[X,Y]_\flat + \theta(X,Y) + \theta_2(X,Y),\ a \bullet b = a \bullet_A b + \mu(a,b), \\ X \bullet a = F(X)a + \nu(X,a),\ X \bullet \alpha = (\mathrm{ad}^\flat)^*_X \alpha,\ a \bullet X = G(X)a + \rho(a,X), \quad \epsilon \in \{0,1\}, \end{cases}$$

其中

1. $\varrho = 1$, F(X) 反对称，$\theta_2(X,Y) = \Omega(X)^\flat(Y)$，$\omega$ 反对称，且

$$\prec \rho(a,X), Y \succ = -\langle \omega(X,Y), a\rangle_A,\ \prec \mu(a,b), X \succ = -\langle G(X)a, b\rangle_A,\ \prec \nu(X,a), Y \succ = -\langle \theta(X,Y), a\rangle_A$$

当度量为 L-二次时，

2. $\varrho = 0$，$G = -F$，F(X) 反对称，θ 和 ω 反对称，$\theta_2(X,Y) = \Omega(Y)^\flat(X)$ 和

$$\prec \nu(X,a), Y \succ = \langle \omega(X,Y), a\rangle_A,\ \prec \mu(a,b), X \succ = \langle F(X)a, b\rangle_A,\ \prec \rho(a,X), Y \succ = \langle \theta(X,Y), a\rangle_A$$

当度量是 R-二次时，

当且仅当对任意 u、v、w $\in$ g，该乘积定义了一个左 Leibniz 结构，

$$Q(u,v,w) := u \bullet (v \bullet w) - (u \bullet v) \bullet w - v \bullet (u \bullet w) = 0.$$

由于对任意 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$，$L_\alpha = 0$ 和 $\mathfrak{h}^*$ 都是左理想，因此我们有 $Q(\alpha, ., .) = Q(., \alpha, .) = 0$。所以，Q 的消失等价于这等价于

$$\begin{cases} Q(X,Y,Z) = Q(X,Y,\alpha) = Q(X,Y,a) = Q(X,a,Y) = Q(X,a,\alpha) = Q(X,a,b) = 0, \\ Q(a,b,c) = Q(a,b,X) = Q(a,X,b) = Q(a,b,\alpha) = Q(a,X,Y) = Q(a,X,\alpha) = 0, \end{cases}$$

对于任意 X、Y、Z $\in \mathfrak{h}$、a、b、c $\in A$，以及 $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$。

另一方面，当度量是 L-二次时，对于任意 r、u、v、w $\in \mathfrak{g}$，我们有，

$$\langle Q(u,v,w), r\rangle_n = -\langle Q(u,v,r), w\rangle_n.$$

我们将利用这一关系来避免冗余方程。

1. 我们有

$$\begin{aligned} X \bullet (Y \bullet Z) &= X \bullet (\epsilon[Y,Z]_{\mathfrak{h}} + \theta(Y,Z) + \theta_2(Y,Z)) \\ &= \epsilon[X,[Y,Z]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} + \epsilon\theta(X,[Y,Z]_{\mathfrak{h}}) + \epsilon\theta_2(X,[Y,Z]_{\mathfrak{h}}) + F(X)\theta(Y,Z) + \nu(X,\theta(Y,Z)) + (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*\theta_2(Y,Z) \\ (X \bullet Y) \bullet Z &= (\epsilon[X,Y]_{\mathfrak{h}} + \theta(X,Y) + \theta_2(X,Y)) \bullet Z \\ &= \epsilon[[X,Y]_{\mathfrak{h}},Z]_{\mathfrak{h}} + \epsilon\theta([X,Y]_{\mathfrak{h}},Z) + \epsilon\theta_2([X,Y]_{\mathfrak{h}},Z) + G(Z)\theta(X,Y) + \rho(\theta(X,Y),Z) \\ Y \bullet (X \bullet Z) &= \epsilon[Y,[X,Z]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} + \epsilon\theta(Y,[X,Z]_{\mathfrak{h}}) + \epsilon\theta_2(Y,[X,Z]_{\mathfrak{h}}) + F(Y)\theta(X,Z) + \nu(Y,\theta(X,Z)) + (\mathrm{ad}_Y^{\mathfrak{h}})^*\theta_2(X,Z). \end{aligned}$$

• 如果度量是 L-二次的，那么 Q(X, Y, Z) = 0 等价于 $(\mathfrak{h}, [\,,\,]_{\mathfrak{h}})$ 是一个李代数，并且

$$\begin{cases} \theta(X,[Y,Z]_{\mathfrak{h}}) + F(X)\theta(Y,Z) - \theta([X,Y]_{\mathfrak{h}},Z) - G(Z)\theta(X,Y) - \theta(Y,[X,Z]_{\mathfrak{h}}) - F(Y)\theta(X,Z) = 0, \\ K := \theta_2(X,[Y,Z]_{\mathfrak{h}}) + \nu(X,\theta(Y,Z)) + (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*\theta_2(Y,Z) - \theta_2([X,Y]_{\mathfrak{h}},Z) - \rho(\theta(X,Y),Z) - \theta_2(Y,[X,Z]_{\mathfrak{h}}) \\ -\nu(Y,\theta(X,Z)) - (\mathrm{ad}_Y^{\mathfrak{h}})^*\theta_2(X,Z) = 0. \end{cases}$$

我们得到（12）中的方程（5）。我们有

$$\begin{aligned} \prec K,T \succ &= \Omega(X)([Y,Z]_{\mathfrak{h}},T) - \langle\theta(X,T),\theta(Y,Z)\rangle_A - \Omega(Y)(Z,[X,T]_{\mathfrak{h}}) - \Omega([X,Y]_{\mathfrak{h}})(Z,T) \\ &\quad + \langle\omega(Z,T),\theta(X,Y)\rangle_A - \Omega(Y)([X,Z]_{\mathfrak{h}},T) + \langle\theta(Y,T),\theta(X,Z)\rangle_A + \Omega(X)(Z,[Y,T]_{\mathfrak{h}}) \\ &= \Delta(\Omega)(X,Y)(Z,T) - \langle\theta(X,T),\theta(Y,Z)\rangle_A + \langle\omega(Z,T),\theta(X,Y)\rangle_A + \langle\theta(Y,T),\theta(X,Z)\rangle_A. \end{aligned}$$

因此，K = 0 当且仅当（12）中的最后一个方程成立。

• 若该度量是 R-二次的，则 Q(X, Y, Z) = 0 等价于

$$\begin{cases} F(X)\theta(Y,Z) + F(Y)\theta(Z,X) + F(Z)\theta(X,Y) = 0, \\ K := \nu(X,\theta(Y,Z)) + (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*\theta_2(Y,Z) - \rho(\theta(X,Y),Z) - \nu(Y,\theta(X,Z)) - (\mathrm{ad}_Y^{\mathfrak{h}})^*\theta_2(X,Z) = 0. \end{cases}$$

我们得到（16）中的方程（3）。有

$$\begin{aligned} \prec K,T \succ &= \langle\omega(X,T),\theta(Y,Z)\rangle_A - \Omega(Z)(Y,[X,T]_{\mathfrak{h}}) - \langle\theta(Z,T),\theta(X,Y)\rangle_A - \langle\omega(Y,T),\theta(X,Z)\rangle_A + \Omega(Z)(X,[Y,T]_{\mathfrak{h}}) \\ &= (\mathrm{ad}_T^{\mathfrak{h}})^*\Omega(Z)(X,Y) + \langle\omega(X,T),\theta(Y,Z)\rangle_A - \langle\theta(Z,T),\theta(X,Y)\rangle_A - \langle\omega(Y,T),\theta(X,Z)\rangle_A. \end{aligned}$$

因此，K = 0 当且仅当（16）中的最后一个方程成立。

2. 我们有

$$\begin{aligned}
X \bullet (Y \bullet \alpha) &= X \bullet (\mathrm{ad}_Y^{\mathfrak{h}})^* \alpha \\
&= (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^* (\mathrm{ad}_Y^{\mathfrak{h}})^* \alpha \\
(X \bullet Y) \bullet \alpha &= (\epsilon[X,Y]_{\mathfrak{h}} + \theta(X,Y) + \theta_2(X,Y)) \bullet \alpha \\
&= (\mathrm{ad}_{\epsilon[X,Y]}^{\mathfrak{h}})^* \alpha \\
Y \bullet (X \bullet \alpha) &= (\mathrm{ad}_Y^{\mathfrak{h}})^* (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^* \alpha).
\end{aligned}$$

• 如果度量是 L-二次的，那么 $Q(X, Y, \alpha) = 0$ 当且仅当 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ 是李代数。

• 如果度量是 R-二次的，那么 $Q(X, Y, \alpha) = 0$ 当且仅当 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ 是李代数，并且对于任意 X、Y、$Z \in \mathfrak{h}$，$[X, [Y, Z]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} = 0$。

3. 我们有

$$\begin{aligned}
X \bullet (Y \bullet a) &= X \bullet (F(Y)a + \nu(Y,a)) \\
&= F(X)F(Y)a + \nu(X, F(Y)a) + (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^* \nu(Y,a) \\
(X \bullet Y) \bullet a &= (\epsilon[X,Y]_{\mathfrak{h}} + \theta(X,Y) + \theta_2(X,Y)) \bullet a \\
&= F(\epsilon[X,Y]_{\mathfrak{h}})a + \nu(\epsilon[X,Y]_{\mathfrak{h}}, a) + \theta(X,Y) \bullet_A a + \mu(\theta(X,Y), a) \\
Y \bullet (X \bullet a) &= Y \bullet (F(X)a + \nu(X,a)) \\
&= F(Y)F(X)a + \nu(Y, F(X)a) + (\mathrm{ad}_Y)^* \nu(X,a).
\end{aligned}$$

• 如果度量是 L-二次的，那么 $Q(X, Y, a) = 0$ 当且仅当 $\langle Q(X, Y, a), Z\rangle_n = -\langle Q(X, Y, Z), a\rangle_n = 0$，且

$$\mathrm{L}_{\theta(X,Y)} = [F(X), F(Y))] - F([X,Y]_{\mathfrak{h}}).$$

第一个条件在前一种情况下成立，第二个条件等价于方程（3）在 (12) 中的一部分。

• 如果度量是 R-二次的，那么 $Q(X, Y, a) = 0$ 当且仅当

$$\begin{cases}
\mathrm{ad}^A_{\theta(X,Y)} = [F(X), F(Y)], \\
K := \nu(X, F(Y)a) + (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^* \nu(Y,a) - \mu(\theta(X,Y), a) - \nu(Y, F(X)a) - (\mathrm{ad}_Y)^* \nu(X,a) = 0.
\end{cases}$$

第一个关系等价于（16）中的方程（2）。我们有

$$\prec K, Z \succ = \langle \omega(X,Z), F(Y)a\rangle_A - \langle \omega(Y, [X,Z]_{\mathfrak{h}}), a\rangle_A - \langle F(Z)\theta(X,Y), a\rangle_A - \langle \omega(Y,Z), F(X)a\rangle_A + \langle \omega(X, [Y,Z]_{\mathfrak{h}}), a\rangle_A.$$

因此，$K = 0$ 当且仅当

$$F(Y)\omega(X,Z) + \omega(Y, [X,Z]_{\mathfrak{h}}) + F(Z)\theta(X,Y) - F(X)\omega(Y,Z) - \omega(X, [Y,Z]_{\mathfrak{h}}) = 0.$$

这等价于（16）中的方程（4）。

4. 我们有

$$\begin{aligned}
X \bullet (a \bullet Y) &= X \bullet (G(Y)a + \rho(a,Y)) \\
&= F(X)G(Y)a + \nu(X, G(Y)a) + (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^* (\rho(a,Y)), \\
(X \bullet a) \bullet Y &= (F(X)a + \nu(X,a)) \bullet Y \\
&= G(Y)F(X)a + \rho(F(X)a, Y), \\
a \bullet (X \bullet Y) &= \epsilon G([X,Y]_{\mathfrak{h}})a + \rho(a, \epsilon[X,Y]_{\mathfrak{h}}) + a \bullet_A \theta(X,Y) + \mu(a, \theta(X,Y)).
\end{aligned}$$

• 如果度量是 L-二次的，那么 Q(X, a, Y) = 0 当且仅当

$$\begin{cases} R_{\theta(X,Y)} = [F(X),G(Y)] - G([X, Y]_{\mathfrak{h}}) \\ K := \nu(X,G(Y)a) + (\mathrm{ad}^{\mathfrak{h}} x)^*(\rho(a, Y)) - \rho(F(X)a, Y) - \rho(a, [X, Y]_{\mathfrak{h}}) - \mu(a, \theta(X, Y)) = 0. \end{cases}$$

我们有

$$\prec K, Z \succ = -\langle \theta(X, Z), G(Y)a\rangle_A + \langle \omega(Y, [X, Z]_{\mathfrak{h}}), a\rangle_A + \langle \omega(Y, Z), F(X)a\rangle_A + \omega([X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z), a\rangle_A + \langle G(Z)a, \theta(X, Y)\rangle_A.$$

因此，Q(X, a, Y) = 0 当且仅当（12）中的方程（3）和方程（6）成立。

• 若度量是 R-不变的，则 Q(X, a, Y) = 0 当且仅当

$$\begin{cases} \mathrm{ad}^A_{\theta(X,Y)} = [F(X), F(Y)] \\ K := -\nu(X, F(Y)a) + (\mathrm{ad}^{\mathfrak{h}}_X)^*(\rho(a, Y)) - \rho(F(X)a, Y) - \mu(a, \theta(X, Y)) = 0. \end{cases}$$

我们有

$$\langle K, Z \succ = -\langle \omega(X, Z), F(Y)a\rangle_A - \langle \theta(Y, [X, Z]_{\mathfrak{h}}), a\rangle_A - \langle \omega(Y, Z), F(X)a\rangle_A - \langle F(Z)a, \theta(X, Y)\rangle.$$

因此，K = 0 当且仅当

$$F(Y)\omega(X, Z) - \theta(Y, [X, Z]_{\mathfrak{h}}) + F(X)\theta(Y, Z) + F(Z)\theta(X, Y) = 0.$$

因此，Q(X, a, Y) = 0 成立，当且仅当（16）中的方程（2）和（5）成立。

5. 我们有

$$\begin{aligned} X \bullet (a \bullet b) &= X \bullet (a \bullet_A b + \mu(a, b)) \\ &= F(X)(a \bullet_A b) + \nu(X, a \bullet_A b) + (\mathrm{ad}^{\mathfrak{h}}_X)^*(\mu(a, b)) \\ (X \bullet a) \bullet b &= (F(X)a + \nu(X, a)) \bullet b \\ &= F(X)a \bullet_A b + \mu(F(X)a, b) \\ a \bullet (X \bullet b) &= a \bullet (F(X)b + \nu(X, b)) \\ &= a \bullet_A F(X)b + \mu(a, F(X)b). \end{aligned}$$

• 若度量是 L-二次的，则 Q(X, a, b) = 0 成立，当且仅当 $\langle$Q(X, a, b), Y$\rangle_n$ = −$\langle$Q(X, a, Y), b$\rangle_n$ =0，且对于任意 X，F(X) 都是一个导子。我们已经得到 $\langle$Q(X, a, Y), b$\rangle_n$ =0 的条件。

• 若度量是 R-二次的，则 Q(X, a, b) = 0 成立，当且仅当对于任意 X，F(X) 都是一个导子，并且

$$K := \nu(X, a \bullet_A b) + (\mathrm{ad}^{\mathfrak{h}}_X)^*(\mu(a, b)) - \mu(F(X)a, b) - \mu(a, F(X)b) = 0.$$

我们有

$$\prec K, Y \succ = \langle \omega(X, Y), [a, b]_A\rangle_A - \langle F([X, Y]_{\mathfrak{h}})a, b\rangle - \langle F(Y)F(X)a, b\rangle - \langle {}_A F(Y)a, F(X)b\rangle_A.$$

因此，K = 0 等价于 $\mathrm{ad}^A_{\omega(X,Y)}$ = [F(X), F(y)] − F([X, Y]$_{\mathfrak{h}}$)，这又等价于（16）中的方程（1）。

6. 我们有

$$\begin{aligned} a \bullet (b \bullet X) &= a \bullet (G(X)b + \rho(b, X)) \\ &= a \bullet_A G(X)b + \mu(a, G(X)b)) \\ (a \bullet b) \bullet X &= (a \bullet_A b + \mu(a, b)) \bullet X \\ &= G(X)(a \bullet_A b) + \rho(a \bullet_A b, X) \\ b \bullet (a \bullet X) &= b \bullet (G(X)a + \rho(a, X)) \\ &= b \bullet_A G(X)a + \mu(b, G(X)a). \end{aligned}$$

• 如果度量是 L-二次的，那么 Q(a, b, X) = 0 当且仅当

$$\begin{cases} G(X)(a \bullet_A b) = a \bullet_A G(X)b - b \bullet_A G(X)a, \\ K := \mu(a, G(X)b)) - \rho(a \bullet_A b, X) - \mu(b, G(X)a) = 0. \end{cases}$$

我们有

$$< K, Y > = -\langle G(Y)a, G(X)b\rangle_A + \langle \omega(X, Y), a \bullet_A b\rangle_A + \langle G(Y)b, G(X)a\rangle_A.$$

因此，K = 0 等价于

$$\mathrm{L}^A_{\omega(X,Y)} = G(X)^* G(Y) - G(Y)^* G(X).$$

因此，Q(a,b, X) = 0 当且仅当第一组方程的第二部分和 (12) 中的第二个方程成立。

• 如果度量是 R-二次的，则 Q(a, b, X) = 0 当且仅当 F 是一个导子且 K = 0其中

$$K = -\mu(a, F(X)b)) - \rho([a, b]_A, X) + \mu(b, F(X)a) = 0$$

$$< K, Y > = -\langle F(Y)a, F(X)b\rangle_A - \langle \theta(X, Y), [a, b]_A\rangle_A + \langle F(Y)b, F(X)a\rangle_A.$$

因此，K = 0 当且仅当 (16) 中的第二个方程成立 成立。

7. 我们有

$$\begin{aligned} a \bullet (b \bullet c) &= a \bullet (b \bullet_A c + \mu(b, c)) \\ &= a \bullet_A (b \bullet_A c) + \mu(a, b \bullet_A c) \\ (a \bullet b) \bullet c &= (a \bullet_A b + \mu(a, b)) \bullet c \\ &= (a \bullet_A b) \bullet_A c + \mu(a \bullet_A b, c) \\ b \bullet (a \bullet c) &= b \bullet (a \bullet_A c + \mu(a, c)) \\ &= b \bullet_A (a \bullet_A c) + \mu(b, a \bullet_A c). \end{aligned}$$

• 如果度量是 L-二次的，那么 Q(a, b, c) = 0 等价于 ⟨Q(a, b, c), X⟩$_n$ = −⟨Q(a, b, X), c⟩$_n$ =并且 (A, •$_A$) 0是一个左莱布尼茨代数。

• 如果度量是 R-二次的，那么 Q(a, b, c) = 0 等价于 (A,[，]$_A$) 是一个李代数，并且

$$K = \mu(a, [b, c]_A) - \mu([a, b]_A, c) - \mu(b, [ac]_A) = 0.$$

我们有

$$< K, X > = \langle F(X)a, [b, c]_A\rangle_A - \langle F(X)[a, b]_A, c\rangle_A - \langle F(X)b, [a, c]_A\rangle_A$$

这等价于 F(X) 是一个导子。

8. 我们有

$$\begin{aligned} a \bullet (X \bullet Y) &= a \bullet (\epsilon[X,Y]_{\mathfrak{h}} + \theta(X,Y) + \theta_2(X,Y)) \\ &= G(\epsilon[X,Y]_{\mathfrak{h}})a + \rho(a, \epsilon[X,Y]_{\mathfrak{h}}) + a \bullet_A \theta(X,Y) + \mu(a,\theta(X,Y)) \\ (a \bullet X) \bullet Y &= (G(X)a + \rho(a,X)) \bullet Y \\ &= G(Y)G(X)a + \rho(G(X)a, Y), \\ X \bullet (a \bullet Y) &= X \bullet (G(Y)a + \rho(a,Y)) \\ &= F(X)G(Y)a + \nu(X, G(Y)a) + (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*(\rho(a,Y)). \end{aligned}$$

• 若该度量是 L-二次的，则 $\mathrm{Q}(a,X,Y) = 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} \mathrm{R}^A_{\theta(X,Y)} = F(X)G(Y) + G(Y)G(X) - G([X,Y]_{\mathfrak{h}}), \\ K := \rho(a,[X,Y]_{\mathfrak{h}}) + \mu(a,\theta(X,Y)) - \rho(G(X)a,Y) - \nu(X,G(Y)a) - (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*(\rho(a,Y)) = 0. \end{cases}$$

我们有

$$\prec \mathrm{K}, \mathrm{Z} \succ = -\langle \omega([\mathrm{X},\mathrm{Y}]_{\mathfrak{h}}, \mathrm{Z}), \mathrm{a}\rangle_A - \langle \mathrm{G(Z)a},\ \theta(\mathrm{X},\mathrm{Y})\rangle_A + \langle \omega(\mathrm{Y},\mathrm{Z}), \mathrm{G(X)a}\rangle_A + \langle \theta(\mathrm{X},\mathrm{Z}), \mathrm{G(Y)a}\rangle_A - \langle \omega(\mathrm{Y},\ [\mathrm{X},\mathrm{Z}]_{\mathfrak{h}}), \mathrm{a}\rangle_A.$$

因此，$\mathrm{K} = 0$ 当且仅当

$$G(Z)^*\theta(X,Y) - G(Y)^*\theta(X,Z) - G(X)^*\omega(Y,Z) + \omega([X,Y]_{\mathfrak{h}},Z) + \omega(Y,[X,Z]_{\mathfrak{h}}) = 0.$$

该方程与方程（6）相似，作差后得到 $\mathrm{Q}(a,X,Y) =$
当且仅当方程（3）的第二部分以及（12）中的方程（7）成立时，0。
• 如果度量是 R-二次的，那么 $\mathrm{Q}(a,X,Y) = 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} \mathrm{ad}^A_{\theta(X,Y)} = [F(X), F(Y)], \\ K := \mu(a,\theta(X,Y)) + \rho(F(X)a,Y) + \nu(X,F(Y)a) - (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*(\rho(a,Y)) = 0. \end{cases}$$

我们有

$$\prec K,Z \succ = \langle F(Z)a, \theta(X,Y)\rangle_A + \langle \theta(Y,Z), F(X)a\rangle_A + \langle \omega(X,Z), F(Y)a\rangle_A + \langle \theta(Y,[X,Z]_{\mathfrak{h}}), a\rangle_A.$$

所以 $\mathrm{K} = 0$ 当且仅当

$$F(Z)\theta(X,Y) + F(X)\theta(Y,Z) - F(Y)\omega(Z,X) - \theta(Y,[X,Z]_{\mathfrak{h}}) = 0.$$

最后，$\mathrm{Q}(a,X,Y) = 0$ 当且仅当（16）中的方程（2）和（5）成立。9. 我们有

$$\begin{aligned} a \bullet (X \bullet b) &= a \bullet (F(X)b + \nu(X,a)) \\ &= a \bullet_A F(X)b + \mu(a, F(X)b) \\ (a \bullet X) \bullet b &= (G(X)a + \rho(a,X)) \bullet b \\ &= G(X)a \bullet_A b + \mu(G(X)a, b) \\ X \bullet (a \bullet b) &= X \bullet (a \bullet_A b + \mu(a,b)) \\ &= F(X)(a \bullet_A b) + \nu(X, a \bullet_A b) + (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*(\mu(a,b)). \end{aligned}$$

• 若度量是 L-二次的，则 Q(a, X, b) = 0 当且仅当 $\langle Q(a, X, b), Y\rangle_n = -\langle Q(a, X, Y), b\rangle_n = 0$ 且

$$F(X)(a \bullet_A b) = a \bullet_A F(X)b - G(X)a \bullet_A b$$

这等价于式 (12) 中的第一个方程。

• 若度量是 R-二次的，则 Q(a, X, b) = 0 当且仅当 F(X) 是一个导子，并且

$$K := \mu(a, F(X)b) + \mu(F(X)a, b) - \nu(X, [a, b]_A) - (\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}})^*(\mu(a, b)) = 0.$$

我们有

$$\prec K, Y \succ = \langle F(Y)a, F(X)b\rangle_A + \langle F(Y)F(X)a, b\rangle_A - \langle \omega(X, Y), [a, b]_A + \langle F([X, Y]_{\mathfrak{h}})a, b\rangle_A.$$

因此，K = 0 等价于

$$-F(X)F(Y) + F(Y)F(X) - \mathrm{ad}^A_{\omega(X,Y)} + F([X, Y]_{\mathfrak{h}}) = 0$$

这等价于式 (16) 中的第一个方程。

10. Q(X, a, α) = Q(a, X, α) = Q(a, b, α) = 0 均成立。

8. 低维度量化、L-二次或 R-二次左莱布尼茨代数

我们通过列出由不可分解非阿贝尔二次李代数得到的4、5和6维度量对称 Leibniz 代数、 ≤ 4 维 L-二次非李左 Leibniz 代数以及 ≤ 5维 R-二次非李 Leibniz 代数，展示了我们的所有结果。

代数	非零括号	度量
os(4, λ)	$[e_2, e_3] = e_1, [e_4, e_2] = \lambda e_3, [e_4, e_3] = -\lambda e_2, e_4 \circ e_4 = \mu e_1$	$\{(2, 2) = (3, 3) = \frac{1}{\lambda}, (1, 4) = 1\}$
$\mathfrak{g}_{1,4}$	$[e_4, e_2] = e_2,\ [e_4, e_3] = -e_3,\ [e_2, e_3] = e_1, e_4 \circ e_4 = \mu e_1$	$\{(1, 4) = (2, 3) = 1\}$
$\mathfrak{g}_{1,5}$	$[e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_4] = -e_1, [e_5, e_2] = e_3,$ $[e_5, e_3] = e_2 - e_4, [e_5, e_4] = e_3, e_5 \circ e_5 = \mu e_1$	$\{(1, 5) = -(2, 2) = (3, 3) = (4, 4) = 1\}$
osc(6, (λ_1, λ_2))	$[e_2, e_4] = [e_3, e_5] = e_1, [e_6, e_2] = \lambda_1 e_4$ $[e_6, e_4] = -\lambda_1 e_2, [e_6, e_3] = \lambda_2 e_5, [e_6, e_5] = -\lambda_2 e_3, e_6 \circ e_6 = \mu e_1$	$\{(2, 2) = (3, 3) = (4, 4) = (5, 5) = \frac{1}{\lambda}$ $(1, 6) = 1\}$
$n_1(2, 2)$	$[e_6, e_3] = e_2, [e_6, e_5] = e_4, [e_3, e_5] = e_1$。	$\{(1, 6) = (2, 5) = -(3, 4) = 1\}$
$n_2(2, 2)$	$[e_6, e_2] = e_2 + te_3, [e_6, e_3] = -te_2 + e_3, [e_6, e_4] = -e_4 + te_5$ $[e_6, e_5] = -te_4 - e_3, [e_2, e_4] = -te_1, [e_2, e_5] = e_1,$ $[e_3, e_4] = -e_1, [e_3, e_5] = -te_1, e_6 \circ e_6 = \mu e_1 \quad t > 0$	$\{(1, 6) = (2, 5) = -(3, 4) = 1\}$
$n_3(2, 2)$	$[e_6, e_2] = e_3, [e_6, e_3] = -e_2, [e_6, e_4] = \varrho e_2 + e_5, \varrho^2 = 1, e_6 \circ e_6 = \mu e_1$ $[e_6, e_5] = \varrho e_3 - e_4, [e_2, e_4] = -e_1, [e_3, e_5] = -e_1, [e_4, e_5] = \varrho e_1.$	$\{(1, 6) = (2, 5) = -(3, 4) = 1\}$
$n_4(2, 2)$	$[e_6, e_2] = e_3, [e_6, e_3] = -e_2, [e_6, e_4] = te_5, e_6 \circ e_6 = \mu e_1$ $[e_6, e_5] = -te_4, [e_2, e_3] = -e_1, [e_4, e_5] = te_1$。 $(t > 0)$	$\{-(2, 2) = -(3, 3) = (4, 4) = (5, 5) = 1$ $(1, 6) = 1\}$
$n_5(2, 2)$	$[e_6, e_2] = e_2, [e_6, e_3] = e_2 + e_3, [e_6, e_4] = -e_4, [e_6, e_5] = e_4 - e_5,$ $[e_2, e_5] = e_1, [e_3, e_4] = -e_1, [e_3, e_5] = e_1, e_6 \circ e_6 = \mu e_1$。	$\{(1, 6) = (2, 5) = -(3, 4) = 1\}$
$n_6(2, 2)$	$[e_6, e_2] = e_2, [e_6, e_3] = -e_3, [e_6, e_4] = te_4, e_6 \circ e_6 = \mu e_1$ $[e_6, e_5] = -te_5, [e_2, e_3] = e_1, [e_4, e_5] = te_1, t \geq 1$	$\{(1, 6) = (2, 3) = (4, 5) = 1\}$

表1：由不可分解非阿贝尔二次李代数（μ，0）得到的4、5和6维度量对称 Leibniz 代数。

代数	非零括号	度量
$\mathfrak{g}_{3,1}$	$e_3 \bullet e_1 = \lambda e_2, e_3 \bullet e_2 = -\lambda e_1, \lambda \neq 0$	$\{(1,1) = (2,2) = 1, (3,3) = \pm 1\}$
$\mathfrak{g}_{3,2}$	$e_3 \bullet e_1 = \lambda e_2, e_3 \bullet e_2 = \lambda e_1, \lambda \neq 0$	$\{(1,1) = -1, (2,2) = (3,3) = 1\}$
$\mathfrak{g}_{3,3}$	$e_2 \bullet e_2 = -\mu e_3, e_2 \bullet e_3 = \mu e_1, \mu \neq 0$	$\{(1,2) = (2,1) = (3,3) = 1\}$
$\mathfrak{g}_{4,1}$	$e_1 \bullet e_3 = e_4, e_1 \bullet e_4 = -e_3, e_2 \bullet e_3 = e_4,$ $e_2 \bullet e_4 = -e_3$	$\{(1,1) = b, (2,2) = (3,3) = 1, (4,4) = a\},$ $a^2 = b^2 = 1$
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$e_1 \bullet e_1 = ae_4, e_1 \bullet e_2 = -ae_3, e_2 \bullet e_1 = be_4, e_2 \bullet e_2 = -be_3$	$\{(1,3) = (3,1) = (2,4) = (4,2) = 1\}$
$\mathfrak{g}_{4,3}$	$e_1 \bullet e_2 = e_1, e_2 \bullet e_1 = -e_1 + ae_4, e_2 \bullet e_2 = -ae_3,$ $e_1 \bullet e_3 = -e_4, e_2 \bullet e_3 = e_3$	$\{(1,3) = (3,1) = (2,4) = (4,2) = 1\}$
$\mathfrak{g}_{4,4}$	$e_4 \bullet e_4 = -\alpha e_2, e_4 \bullet e_2 = \lambda e_3 + \alpha e_1, e_4 \bullet e_3 = -\lambda e_2$	$\{(1,6) = (2,5) = -(3,4) = 1\}$
$\mathfrak{g}_{4,5}$	$e_2 \bullet e_3 = \lambda e_1, e_3 \bullet e_2 = -\lambda e_1, e_4 \bullet e_2 = \lambda e_3, e_4 \bullet e_3 = -\lambda e_2,$ $e_2 \bullet e_4 = -\lambda e_3, e_3 \bullet e_4 = \lambda e_2$	$\{(1,6) = (2,5) = -(3,4) = 1\}$
$\mathfrak{g}_{4,6}$	$e_4 \bullet e_4 = -\alpha e_2 - \beta e_3, e_3 \bullet e_2 = \gamma e_1, e_4 \bullet e_2 = \alpha e_1,$ $e_4 \bullet e_3 = \beta e_1, e_3 \bullet e_4 = -\gamma e_2, \quad \beta\gamma = 0$	$\{(1,6) = (2,5) = -(3,4) = 1\}$

表2：维数为 ≤ 4的 L-二次非李左 Leibniz 代数。

代数	非零乘积	度量
$L_{1,4}$	$e_1 \bullet e_1 = -\lambda_1 e_4, e_1 \bullet e_2 = -\lambda_2 e_4, e_2 \bullet e_1 = \lambda_1 e_3, e_2 \bullet e_1 = \lambda_2 e_3$	$\{(1,3) = (2,4) = 1\}$
$L_{1,5}$	$e_1 \bullet e_1 = -\lambda_1 e_5, e_1 \bullet e_2 = -\lambda_2 e_5 + \rho e_3, e_2 \bullet e_1 = \lambda_1 e_4 - \rho e_3$ $e_2 \bullet e_2 = \lambda_2 e_4, e_1 \bullet e_3 = \mu e_5, e_2 \bullet e_3 = -\mu e_4, e_3 \bullet e_1 = \rho e_5, e_3 \bullet e_2 = -\rho e_4$	$\{(1,4) = (2,5) = (3,3) = 1\}$ $\rho = 0$ 或 $\rho = -\mu$

表 3：维数为 ≤ 5 的 R-二次非李布尼兹代数。

参考文献

[1] I. Ait Brik, M. Boucetta, 《李群上具有双不变伪黎曼度量的左不变 k-辛结构的存在性与性质》, arXiv:2302.09660, 2023。[2] Albuquerque, H., Barreiro, E., Benayadi, S.（2009）。具有约化偶部的二次李超代数。《纯粹与应用代数杂志》321(2):582?608。[3] Albuquerque, H., Benayadi, S.（2004）。二次 Malcev 超代数。《纯粹与应用代数杂志》187:19?45。[4] Sh. A. Ayupov, B. A. Omirov, I. Rhakimov, and K. Zaho, 《半单李布尼兹代数、其导子与自同构》, 《线性与多重线性代数》（2019）。[5] Sh. A. Ayupov, B. A. Omirov, I. Rhakimov, 《莱布尼茨代数：结构与分类》, CRC Press Taylor & Francis group（2020）。[6] 4 S. Albeverio, Sh. A. Ayupov, B. A. Omirov, 《幂零单李布尼兹代数》, 代数通讯, 33 (1)（2005）, 第159-172页。

[7] Sh. A. Ayupov、B.A. Omirov, 《论莱布尼茨代数》, 载于《代数与算子理论》（塔什干，1997）, Kluwer Acad. Publ., 多德雷赫特, （1998）, 第1–12页。[8] Sh. A. Ayupov、B. A. Omirov, 《关于若干类幂零李布尼兹代数》, 《西伯利亚数学杂志》, 42（2001）, 第15–24页。[9] S. Ayupov、B. Omirov、I. Rakhimov, 《莱布尼茨代数：结构与分类》, CSR Press、Taylor and Francis Group（2020）。[10] Sh. A. Ayupov 等, 《半单李布尼兹代数及其导子与自同构》, 《线性与多重线性代数》, （ 2019 10 1080 03081087 2019 1567674 ）DOI：./. . E. Barreiro 和 S. Benayadi, 《莱布尼茨双代数的新方法》, 《代数与表示论》（2016）19：71-101。[11] [12] Sa¨ıd Benayadi、Samiha Hidri, 《二次莱布尼茨代数》, 《李理论杂志》24（2014）, 第3期, 737-759。[13] H. Baum、I. Kath, 《双扩张李群：曲率、整体单值性和平行旋量》, Differ. Geom. Appl. 19（3）（2003）, 253-280。[14] Sa¨ıd Benayadi、Samiha Hidri, 《具有不变双线性形式的莱布尼茨代数及相关李代数》, 《代数通讯》（2016）, 44：8, 3538-3556。[15] Benamor, H., Benayadi, S.（1999）。《二次李超代数的双扩张》。《代数通讯》27（1）：67?88。[16] A. M. Bloh, 《广义李代数类的Cartan-Eilenberg同调理论》, Dokl. Akad. Nauk SSSR 175（1967）, 824–826。[17] M. Bordemann, 《非结合代数上的非退化不变双线性形式》, Acta Math. Univ. Comenianae 151 Vol. LXVI, 2（1997）, 第151-201页。[18] A. M. Bloh, 《李代数概念的一种推广》, Dokl. Akad. Nauk SSSR 165（1965）, 471–473。[19] G.Favre、L.Santharoubane, 《李代数上的对称、不变、非退化双线性形式》, 《代数杂志》105（1987）, 451?464。[20] J. Figueroa-Ofarrill、S. Stancu, 《对称自对偶李代数的结构》, J.Math. Phys. 37（8）（1996）, 4121-4134。[21] S. Helgason, 《微分几何、李群与对称空间》, Academic press Inc（1978）。[22] M. Kinyon, 《莱布尼茨代数、李架与双群》, 《李理论杂志》第17卷（2007）99-114。[23] Knapp Anthony W., 《李群：超越入门》, 《数学进展》140（1996）。[24] Knapp, A.：《李群：超越入门》。《数学进展》, 第140卷。Springer, 美国（1996）。[25] J. Lin、Z. Chen, 《具有伪黎曼双线性型的莱布尼茨代数》, 《中国数学》2010, 5（1）：103?115。[26] J. L. Loday, 《李代数的非交换版本》, L'Ens. Math 39（1993）269-293。[27] A. Medina、P. Revoy, 《李代数与不变标量积》（法语） [李代数与不变标量积], Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 18 3（1985）, 553-561。[28] G. P. Ovando, 《具有ad不变度量的李代数：综述指南》, Rendiconti Seminario Matematico Univ. Pol. Torino Workshop for Sergio Console Vol. 74, 1（2016）, 243 - 268。[29] N. Mansuroglo, 《可解莱布尼茨代数的一些基本性质》, 《亚欧数学杂志》第12卷第6期（2019）2040007（5页）