arXiv:2303.06446v1 [math.AP] 11 Mar 2023

关于振荡核卷积算子的精确估计

ISROIL A. IKROMOV 和 DILDORA I. IKROMOVA

Abstract. 本文研究具有振荡核的卷积算子 M_k，这类算子与严格双曲方程柯西问题的解有关。该算子 M_k 与双曲方程的特征超曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$及光滑振幅函数相关；当自变量取较大值时，振幅函数关于自变量是 $-k$ 阶齐次的。我们研究满足以下条件的卷积算子：相应的振幅函数包含在给定点 $v \in \Sigma$ 的一个充分小的锥形邻域内，且曲面 Σ 在该点恰有一个主曲率不为零。按照阿诺德分类，这类曲面具有 A 型奇点。记 k_p 为满足以下条件的最小数：对于 $k > k_p$， M_k 是 $L^p \mapsto L^{p'}$-有界的。我们证明，数值 k_p 取决于曲面 Σ的某些离散特征。

1. Introduction

众所周知，严格双曲方程的柯西问题的解（相差一个光滑函数）可以写成以下类型的卷积算子之和：

$$\mathcal{M}_k = F^{-1}[e^{it\varphi(\xi)}a_k]F,$$

其中， F 是傅里叶变换算子， $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus \{0\})$是一次齐次函数， $a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu_\xi)$是当 ξ较大时的 $-k$ 阶齐次函数。

对时间 $t > 0$ 进行伸缩变换后，算子 $\mathcal{M}_k$ 化为以下卷积算子：

$$M_k = F^{-1}[e^{i\varphi(\xi)}a_k]F. \tag{1.1}$$

设 $1 \le p \le 2$ 为一个固定数：我们考虑如下问题：求最小的数$k(p)$，使得对于任意 $k > k(p)$，M_k： $L^p(\mathbb{R}^\nu) \to L^{p'}(\mathbb{R}^\nu)$有界。

注意，若对于较大的 ξ， $a_k(\xi) = |\xi|^{-k}$，且满足 $0 < k < \nu$ 和 $\varphi \equiv 0$，则可利用经典的哈代–利特尔伍德–索博列夫不等式解决该问题。更确切地说，根据经典的哈代–利特尔伍德–索博列夫不等式，若 $k \ge 2n(1/p-1/2)$，则算子 (1.1) 是从 $L^p(\mathbb{R}^\nu)$ 到 $L^{p'}(\mathbb{R}^\nu)$ 的有界算子。此外，若 a_k 是伪微分算子的经典符号，且 $\varphi \equiv 0$，则我们处理了伪微分算子的 $L^p(\mathbb{R}^\nu) \mapsto L^{p'}(\mathbb{R}^\nu)$ 有界性问题（见 [10]）。众所周知，若 a_k 是零阶伪微分算子的经典符号，则相应的伪微分算子在 $L^p(\mathbb{R}^\nu)$ 上有界，其中 $1 < p \le 2$。

2010年数学主题分类：42B10、42B20、42B37。关键词与短语：卷积算子、超曲面、振荡积分、奇点。

此外，我们假设函数 φ 保持符号不变，例如，假设对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^\nu \setminus \{0\}.$ ，都有 $\varphi(\xi) \neq 0$ 。注意，由于振荡因子的作用，当符号 a_k 的阶 k 取值范围更广时，我们可以得到算子 (1.1) 的 $L^p(\mathbb{R}^\nu) \mapsto L^{p'}(\mathbb{R}^\nu)$ 有界性。

接下来，不失一般性，我们可以并且将假设，对于任意 $\xi \neq 0$， $\varphi(\xi) > 0$ 。由于 φ 是一阶光滑齐次函数，根据欧拉齐次关系，我们有：

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi_j} = \varphi(\xi),$$

因此，由下式定义的集合 Σ

$$\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^\nu : \varphi(\xi) = 1\}$$

若 φ 是光滑函数或实解析函数，则它分别是光滑超曲面或解析超曲面。

此外，我们采用如下记号：

$$k_p := k_p(\Sigma) := \inf_{k>0}\{k > 0 : M_k \,\text{is}\, L^p(\mathbb{R}^\nu) \to L^{p'}(\mathbb{R}^\nu) \,\text{bounded for any}\, a_k\}. \tag{1.2}$$

事实证明，数值 $k_p(\Sigma)$ 取决于超曲面 $\Sigma.$ 的几何性质。更确切地说，该数值取决于支集位于 Σ 上的测度的傅里叶变换的性质。专著 [9] 收录了许多关于曲面承载测度的傅里叶变换的现代结果。

M. Sugimoto [11] 考虑了 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 在每一点都至少有一个非零主曲率的解析曲面的情形，并得到了数 $k_p(\Sigma)$的一个上界。更具体地说，M. Sugimoto 在 $\mathbb{R}^3$ 中引入了三类至少有一个非零主曲率的超曲面。对于每一类，他都得到了数 $k_p(\Sigma)$的一个上界。此外，他为每一类给出了示例，说明这些示例中的上界是尖锐的。

自然的问题是：M. Sugimoto 给出的数 $k_p(\Sigma)$的上界，对于相应类别中的每个超曲面而言，是否都是紧界?

我们得到了 $k_p(\Sigma)$的精确值，改进了 M. Sugimoto 关于任意具有至少一个非零主曲率的解析超曲面，以及满足 [8]中引入的所谓 R–条件的光滑超曲面的研究结果。

由于 Σ 是紧超曲面，因此按照 M. Sugimoto 的做法，只需考虑该问题的局部版本。更确切地说，我们可以假设振幅函数 $a_k(\xi)$集中在固定点 $v \in S^2$ 的一个充分小的锥形邻域 Γ内（其中 S^2 是空间$\mathbb{R}^3$中以原点为中心的单位球面），并且 $\varphi(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$。固定这样一个点 $v \in \mathbb{R}^3$，定义与该点相关的局部指数 $k_p(v)$如下：

$$k_p(v) := \text{无穷大}_{k>0}\{k\colon\ \exists\Gamma,\, M_k\colon\ L^p(\mathbb{R}^3) \mapsto L^{p'}(\mathbb{R}^3)\text{有界，当 } supp(a_k) \subset \Gamma\}. \tag{1.3}$$

此外，假设 F 是一个足够光滑的函数，我们采用以下标准记号：

$$\partial^{\gamma}F(x):=\partial_1^{\gamma_1}\dots\partial_\nu^{\gamma_\nu}F(x):=\frac{\partial^{|\gamma|}F(x)}{\partial x_1^{\gamma_1}\dots\partial x_\nu^{\gamma_\nu}},$$

其中 $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_\nu)\in\mathbb{Z}_+^\nu$ 是一个多重指标，满足 $\mathbb{Z}_+:=\{0\}\cup\mathbb{N}$，且 $|\gamma|:=\gamma_1+\cdots+\gamma_\nu$.

此外，为了明确起见，我们假设 $v=(0,0,1)$ 和 $\varphi(0,0,1)=1$。那么，经过空间 $\mathbb{R}^3_\xi$ 中可能的一个线性变换（该变换保持点 v 不变）后，我们可以假设 $\partial_1\varphi(0,0,1)=0$，并且 $\partial_2\varphi(0,0,1)=0$。因此，在点 v 的一个邻域内，超曲面 Σ 表示为一个光滑函数的图像：

$$\Sigma\cap\Gamma=\{\xi\in\Gamma:\varphi(\xi)=1\}=\{(\xi_1,\xi_2,1+\phi(\xi_1,\xi_2))\in\mathbb{R}^3:(\xi_1,\xi_2)\in U\},$$

其中 $U\subset\mathbb{R}^2$ 是原点的一个充分小邻域，且 $\phi\in C^\infty(U)$ 是满足以下条件的光滑函数：$\phi(0,0)=0$，$\nabla\phi(0,0)=0$ （与[11]比较）。

显然，类似地，可以将 Σ 定义为点 $v=(0,\dots,0,1)\in\mathbb{R}^\nu$ 附近的一个光滑函数 ϕ 的图形，其中该函数定义在 $\mathbb{R}^{\nu-1}$ 原点的一个充分小的邻域 U 内。

此外，我们假设函数 ϕ 在原点具有 $A_n(1\le n\le\infty)$ 型奇点（ [3] 中给出了 A 型奇点的定义）。最后一个条件意味着，在 $\nu=3$的情况下，只要 $n\ge2$，超曲面 Σ 在点 v恰有一个非零主曲率。

我们使用以下命题 [8]:

命题 1.1。设 ϕ 是定义在 $\mathbb{R}^2$原点邻域内的光滑函数，满足以下条件：$\partial_2^2\phi(0,0)\neq0$，且对任意满足 $\gamma\neq(0,2)$ 的 $|\gamma|\le2$，还有 $\partial^\gamma\phi(0,0)=0$。

那么，在原点的一个足够小的邻域内，ϕ 可写成如下形式：

$$\phi(x_1,x_2)=b(x_1,x_2)(x_2-\psi(x_1))^2+b_0(x_1),\tag{1.2.2}$$

其中，b、b_0和 ψ是光滑函数，且 $b(0,0)\neq0$。函数 $\psi(b_0)$可写为 $\psi(x_1)=x_1^m\omega(x_1)$，其中 $\omega(0)\neq0$、$m\ge2$，且$(b_0(x_1)=x_1^n\beta(x_1)$，其中$\beta(0)\neq0$、$n\ge2)$，除非 $\psi(b_0)$是平坦函数。

注 1.2. 容易证明，对于具有 A 型奇点的任意光滑函数 ϕ，数 m、n 是良定义的（见 [11]，另见 [8]）。此外，根据命题 1.1，对于曲面上至少有一个非零主曲率的每一点 $v\in\Sigma$，都可以赋予一对$(m(v)\ n(v))$。

1.1. 超曲面类。遵循 M. Sugimoto [11]，我们可以引入以下超曲面类：如果 Σ 满足 $b_0(x_1)=x_1^n\beta(x_1)$，其中 β 是满足 $\beta(0)\neq0$ 的光滑函数，则称 Σ 为阶为 n 的 I 型；如果 b_0 是在原点处的平坦函数，且 $\psi(x_1)=x_1^m\omega(x_1)$，其中 ω 是满足 $\omega(0)\neq0$ 的光滑函数，则称 Σ 为阶为 m 的 II 型；最后，如果函数 ψ、b_0 都是在原点处的平坦函数，则称 Σ 为 III 型。

此外，我们假设，如果 Σ 是 II 型 C^∞ 超曲面，那么 $b_0 \equiv 0$。这一条件与专著 [8]中引入的所谓“ $R-$条件”一致。

事实上，M. Sugimoto 给出了数值 $k_p(v)$ 的一个上界，并为每一类提供了示例，证明该上界在这些示例中是尖锐的。

1.2. 主要结果。本文将证明以下命题，这是我们的主要结果。

定理 1.3. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是一个光滑曲面，在点 (0, 0, 1) 处至少有一个非零主曲率，且 $1 \le p \le 2$ 是一个固定数，并且 (m, n) 是命题 1.1 所定义的一对数。则存在点 v 的一个锥形邻域 Γ，使得对于任意满足 $supp(a_k) \subset \Gamma$ 的 a_k，以下结论成立：

(i) 若 $2m \ge n$，则 $k_p(v) = (5 - \frac{n}{2})(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$；

(ii) 若 Σ 是满足 $R-$条件且 $m \ge 3$，同时还满足$2m < n \le \infty$ 的光滑超曲面，则

$$k_p(v) = \max\left\{\left(5 - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right), \left(6 - \frac{2(m+1)}{n}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{m}{n}\right\}. \tag{1.4}$$

注1.4。请注意，在情形(i)中，形式上有可能出现 $m = \infty$，例如 ψ 可以是平坦函数。M. Sugimoto [11] 提出了如下例子：

$$\phi_I(y) = 1 - (y_2^2 - y_1^n), \tag{1.5}$$

这对应于情形(i)，其中 $\psi(y_1) \equiv 0$。由我们的结果可知，Sugimoto 的结果在该情形下是紧的。此外，对于阶为 n的 I 类曲面，Sugimoto 的结果是紧的，当且仅当 $2m \ge n$。

请注意，第一种情形(i)与专著 [8] 中引入的所谓线性适配条件一致（另见 [7]）。还请注意，在满足线性适配条件的情形下，测度的傅里叶变换的紧一致估计给出了 $L^p \mapsto L^2$ 傅里叶限制估计中指数 p 的紧界。如 [8] 所示，这正是唯一的情形。

例如，如果 b_0 在原点处是平坦函数，那么在条件$2m \ge n$下，ψ也如此。因此，Sugimoto 的结果在这种情况下也是尖锐的；换言之，他的结果对于任意 III类光滑曲面都是尖锐的。

另一方面，如果 $2m < n < \infty$，那么 Sugimoto 的结果 [11] 对于 I类超曲面 Σ 并不尖锐。我们的结果表明，对于 I类曲面，不能忽略数目 m 的影响。

对于 $n = \infty$ 的情形，例如 II 类超曲面，M. Sugimoto 为 II 类解析曲面的一个子类得到了紧界。事实证明，对于任意 II 类解析超曲面，以及满足 $R-$ 条件的任意 II 类光滑曲面，类似结果同样成立。更准确地说，由我们的结果可知，M. Sugimoto 在论文 [11] （第 396 页）中证明的定理 2 的结论，对于任意具有 II 型的解析超曲面，以及满足 R 条件的类似光滑超曲面，实际上都成立。

本文结构如下：在第 2 节中，我们给出振荡积分衰减率与数量 $k_p(v)$ 上界估计之间关系的预备结果。随后，在第 3 节中，我们针对每一类曲面，得到数量 $k_p(v)$ 的一个上界。最后，在第 4 节中，我们给出数量 $k_p(v)$ 的下界，该下界与上界相符。最后一节的结果完成了主要定理 1.3 的证明。

约定：本文中我们将使用变量常数记号，即论证过程中出现的许多常数通常记为$c, C, \varepsilon, \delta$；但它们在不同位置往往取不同的值。此外，为避免写出常数，我们将使用诸如 $\sim$、.；或 $<<$ 这样的符号，具体说明见[8] (第 1 章)。我们用 χ_0 表示定义在 $\mathbb{R}^\nu$上的非负光滑截断函数，其紧支集通常很小，并且在原点的某个小邻域内恒等于 1；此外， $\chi_1(x) := \chi_0(x) - \chi_0(2x)$。

2. 预备知识

注意，卷积算子的有界性问题与下列卷积核的行为有关:

$$K_k := F^{-1}(e^{i\varphi(\xi)}a_k(\xi)).$$

我们将傅里叶算子及其逆算子定义如下 [12]:

$$F(u)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^\nu}} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{i\xi\cdot x} u(x)dx,$$

and

$$u(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^\nu}} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{-i\xi\cdot x} F(u)(\xi)d\xi$$

分别适用于施瓦茨函数 u，其中 $\xi \cdot x$ 是向量 ξ 和 x的通常内积。随后，通过标准论证将其定义到分布上。

众所周知（见 [11]），对 K_k 的主要贡献来自点 x，这些点属于集合 $-\nabla\varphi(supp(a_k) \setminus \{0\})$ 的一个足够小的邻域。

文献 [11] 中已证明，卷积算子 M_k 的有界性与下列振荡积分的行为有关:

$$I(\lambda, z) = \int_{\mathbb{R}^{\nu-1}} e^{i\lambda(z\cdot x+\phi(x))} g(x)dx, (\lambda > 0,\, z \in \mathbb{R}^{\nu-1}),$$

w这里 $g \in C_0^\infty(U)$，且 U 是原点的一个足够小的邻域。

更准确地说，文献 [11] 中证明了以下结论:

命题 2.1. 设 $q \geq 2$ 和 $\alpha \geq 0$。假设对于所有 $g \in C_0^\infty(U)$ 和 $\lambda > 1$,

$$\|I(\lambda, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}_z^{\nu-1})} \leq C_g\lambda^{-\alpha}, \tag{2.6}$$

其中 C_g 与 λ无关。那么，当 $k > \nu - \alpha - \frac{1}{q}$时， $K_k(\cdot) := F^{-1}[e^{i\varphi(\xi)}a_k(\xi)](\cdot) \in L^q(\mathbb{R}^\nu)$ 和 $M_k : L^p(\mathbb{R}^\nu) \to L^{p'}(\mathbb{R}^\nu)$ 有界，且 $p = \frac{2q}{2q-1}$。

此外，M. Sugimoto 在 $q=\infty$ 情形下证明了命题 2.1 的另一种形式。可以定义

$$K_{k,j}(x)=F^{-1}[e^{i\varphi(\xi)}a_k(\xi)\Phi_j(\xi)](x).$$

这里 $\{\Phi_j(\xi)\}_{j=1}^{\infty}$ 是一个 Littlewood-Paley 单位分解，用于定义

$$\|v\|_{B^s_{p,q}}:=\left(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{js}\|F^{-1}(\Phi_j(\xi)F(v)\|_{L^p})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Besov 空间 $B^s_{p,\ q}$ 的范数（见 [4]）。

命题 2.2. 设 $\alpha\geq 0$。假设对所有 $g\in C_0^{\infty}(U)$ 和 $\lambda>1$,

$$\|I(\lambda;\cdot)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu-1}_z)}\leq C_g\lambda^{-\alpha}, \tag{2.7}$$

其中 C_g 与 λ无关。则若 $k=\nu-\alpha$， $\{K_{k,j}(x)]\}_j^{\infty}$在 $L^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu})$ 中有界。因此，若 $k>(2\nu-2\alpha)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})$，则 M_k有 $L^p\mapsto L^{p'}$界。若 $p\neq 1$，此不等式可替换为等式。

3. An upper bound for the number $k_p(v)$

注意，我们处理了二维振荡积分 $I(\lambda,z)$，例如 $\nu=3$。若 ϕ 在原点处具有 A_{n-1} 型奇点，且 $2\leq n\leq\infty$，并且 $|z|>\delta$ （其中 δ 是一个固定的正数），那么只要 U 是原点的一个足够小的邻域，且 $g\in C_0^{\infty}(U)$，相位函数 $\phi(x_1,x_2)+x\cdot z$ 就没有临界点。因此，我们可以使用分部积分论证并得到:

$$|I(\lambda,z)|\lesssim\frac{1}{|z\lambda|^2},$$

这比所需的结果更好。

此外，我们假设 $|z|<<1$，且 U 是原点的一个足够小的邻域。然后，我们可以对变量 x_2 使用驻相法并得到:

$$I(\lambda,z)=\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}}e^{i\lambda(\phi_1(x_1,z_2)+z_2x_1^m\omega(x_1)+z_1x_1))}g(x_2^c(x_1,z_2),x_1)dx_1+R(\lambda,z),$$

其中， R 是余项，满足估计 $|R(\lambda,z)|\lesssim\lambda^{-\frac{3}{2}}$；而 $x_2^c(x_1,z_2)$ 是相位函数关于 x_2 的唯一临界点。此外，相位函数 $\phi_1(x_1,z_2)$ 可以写成:

$$\phi_1(x_1,z_2)=z_2^2B(z_2)+z_2^2x_1q(x_1,z_2),$$

其中， B、q 是光滑函数，满足 $B(0)\neq 0$ （见 [5]）。

然后，利用范德科普特型引理 [2] （关于更一般相位函数的估计，另见 [6] ），我们可以看出，估计 (2.7) 在 $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$ 下成立。

在这种情况下，我们可以使用命题 2.2，得到 $k_p(v)$ 的如下上界：

$$k_p(v) \leq \left(5 - \frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right). \tag{3.8}$$

此情形还包括 III 型曲面类，例如情形 $n = \infty$。注意，上界 (3.8) 不依赖于数值 m。事实证明，在条件 $2m \geq n$ 下，它是 $k_p(v)$ 的紧界。

现在，我们考虑更微妙的情形 $2m < n$。在此情形下，我们使用以下引理（与 [11]的定理 2 比较）：

引理 3.1。设 ϕ 是满足 R–条件的光滑函数，其中 $2m < n \leq \infty$ 且 $m \geq 3$，并且 $\varepsilon > 0$ 是一个固定的正数。那么以下估计

$$\|I(\lambda, \cdot)\|_{L^{m+1}(\mathbb{R}^2)} \leq C\lambda^{-(\frac{1}{2}+\frac{2}{m+1})+\varepsilon}.$$

成立。

证明。正如前面所指出的，我们可以假设 $|z| << 1$。因此，为了证明引理 3.1，我们将证明以下估计成立：

$$\|I(\lambda, \cdot)\|_{L^{m+1}(V)} \leq C|\lambda|^{-(\frac{1}{2}+\frac{2}{m+1})+\varepsilon},$$

其中 V 是原点的一个充分小邻域。

此外，由于驻相法论证，只需估计积分

$$I_1(\lambda, z) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(\Phi_1(x_1,z)} g(x_1, x_2^c(z_2, x_1))dx_1 =: \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(\Phi_1(x_1,z)} a(x_1, z_2)dx_1,$$

这里我们使用以下记号：

$$a(x_1, z_2) := g(x_1, x_2^c(z_2, x_1)),\ \Phi_1(x_1, z) := x_1^n\beta(x_1) + z_2x_1^m\omega(x_1) + z_2^2x_1q(x_1, z_2) + z_1x_1.$$

首先，我们假设 $\{|z_2| < \delta|z_1|^{\frac{n-m}{n-1}}\}$，其中 δ 是一个充分小的固定数，稍后将给出其定义。

若 $\{\lambda|z_1|^{\frac{n}{n-1}} \leq 1\}$，则利用范德科普特引理 [2]，可得：

$$|I_1| \lesssim \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{n}}(\lambda|z_1|^{\frac{n}{n-1}})^{\frac{2}{m+1}-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{|\lambda|^{\frac{2}{m+1}}|z_1|^{\frac{2n-m-1}{(n-1)(m+1)}}}. \tag{3.9}$$

我们证明，对于 $\lambda|z_1|^{\frac{n}{n-1}} > 1$，只要 δ 是充分小的正数，估计式 (3.9) 实际上成立。

事实上，我们在积分 I_1 中使用变量替换 $x_1 = |z_1|^{\frac{1}{n-1}}y_1$，并再次将 y_1记作 x_1，得到：

$$I_1 = |z_1|^{\frac{1}{n-1}} \int e^{i\lambda|z_1|^{\frac{n}{n-1}}\Phi_2(x_1,z)} a(|z_1|^{\frac{1}{n-1}}x_1, z_2)dx_1,$$

其中

$$\Phi_2(x_1, z) = \beta(|z_1|^{\frac{1}{n-1}}x_1)x_1^n + \frac{z_2}{|z_1|^{\frac{n-m}{n-1}}}x_1^m\omega(|z_1|^{\frac{1}{n-1}}x_1) + \frac{z_2^2}{|z_1|}x_1q(|z_1|^{\frac{1}{n-1}}x_1, z_2) + sgn(z_1)x_1.$$

注意

$$\frac{|z_2|}{|z_1|^{\frac{n-m}{n-1}}} \le \delta << 1 \quad \text{and also} \quad \frac{z_2^2}{|z_1|} \le \delta^2 |z_1|^{\frac{n-2m+1}{n-1}} << 1.$$

存在一个数 N，使得相位函数 Φ_2 在集合 $\{|x_1| \ge N\}$ 上没有临界点。取一个光滑非负函数 χ_0，使得

$$\chi_0(x) = \begin{cases} 1, \text{ for } & |x| \le 1 \\ 0, \text{ for } & |x| > 2. \end{cases}$$

利用函数 χ_0，我们将积分 I_1 写成两个积分之和：

$$I_1 = |z_1|^{\frac{1}{n-1}} \int e^{i\lambda |z_1|^{\frac{n}{n-1}} \Phi_2(x_1,z)} a(|z_1|^{\frac{1}{n-1}} x_1, z_2) \chi_0\left(\frac{x_1}{N}\right) dx_1 +$$

$$|z_1|^{\frac{1}{n-1}} \int e^{i\lambda |z_1|^{\frac{n}{n-1}} \Phi_2(x_1,z)} a(|z_1|^{\frac{1}{n-1}} x_1, z_2) \left(1 - \chi_0\left(\frac{x}{N}\right)\right) dx_1 =: I_{11} + I_{12}.$$

我们可以对积分 I_{12} 使用分部积分公式，得到：

$$|I_{12}| \le \frac{c|z_1|^{\frac{1}{n-1}}}{|\lambda|z_1|^{\frac{n-1}{n}}|} \le \frac{c|z_1|^{\frac{1}{n-1}}}{|\lambda|z_1|^{\frac{n}{n-1}}|^{\frac{2}{m+1}}} = \frac{c}{|\lambda|^{\frac{2}{m+1}} |z_1|^{\frac{2n-m-1}{(n-1)(m+1)}}}.$$

这正是我们所需要的。当然，它与估计 (3.9) 一致。

现在，我们考虑积分 I_{11} 的估计。该积分的相位函数可视为函数 $\beta(0)x_1^n + sgn(z_1)x_1$ 的小扰动。因此，存在一个正数 $\delta > 0$，使得只要参数 z 满足条件：$|z_2| < \delta |z_1|^{\frac{n-m}{n-1}}$，函数 $\Phi_2(x_1, z)$ 就只有非退化临界点。因此，我们可以使用范德科尔普特型估计，得到：

$$|I_{11}| \le \frac{c|z_1|^{\frac{1}{n-1}}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}} |z_1|^{\frac{n}{2(n-1)}}} \le \frac{c}{|\lambda|^{\frac{2}{m+1}} |z_1|^{\frac{2n-m-1}{(n-1)(m+1)}}}.$$

至此，完成了所考虑情形下估计 (3.9) 的证明。

现在，假设 $\{|z_1|^{\frac{n-m}{n-1}} \le \frac{1}{\delta}|z_2|\}$.

如果 $|z_2|^{\frac{n}{n-m}}|\lambda| \le 1$，则再次利用范德科尔普特型估计可得：

$$|I_1| \le \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{n}}} \le \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{n}} (|z_2|^{\frac{n}{n-m}}|\lambda|)^{\frac{2}{m+1} - \frac{1}{n}}} = \frac{c}{|\lambda|^{\frac{2}{m+1}} |z_2|^{\frac{2n-m-1}{(n-m)(m+1)}}}.$$

最后，我们考虑情形 $|z_2|^{\frac{n}{n-m}}|\lambda| > 1$，这里我们主要使用归纳论证。在这种情形下，自然要在积分 I_1 中进行变量替换 $x_1 \mapsto |z_2|^{\frac{1}{n-1}} x_1$，从而得到：

$$I_1 = |z_2|^{\frac{1}{n-1}} \int e^{i\lambda |z_2|^{\frac{n}{n-m}} \Phi_2(x_1,z)} a(|z_2|^{\frac{1}{n-m}} x_1, z_2) dx_1,$$

其中

$$\Phi_2(x_1,z) := x_1^n\beta(|z_2|^{\frac{1}{n-m}}x_1) + sgn(z_2)x_1^m\omega(|z_2|^{\frac{1}{n-m}}x_1) + |z_2|^{2-\frac{n-1}{n-m}}sgn(z_2)x_1q(|z_2|^{\frac{1}{n-m}}x_1,z_2) + \frac{z_1}{|z_2|^{\frac{n-1}{n-m}}}x_1.$$

存在一个正数 N，使得相位函数 Φ_2 在集合 $\{|x_1| \geq N\}$上没有临界点。与之前一样，我们将积分 I_1 写成两个积分 I_{11}、 I_{12} 之和，它们由以下公式给出:

$$I_{11} = |z_2|^{\frac{1}{n-m}} \int e^{i\lambda|z_2|^{\frac{n}{n-m}}\Phi_2(x_1,z)} a(|z_2|^{\frac{1}{n-m}}x_1)\chi_0\left(\frac{x}{N}\right)dx,$$

$$|I_{12}| = |z_2|^{\frac{1}{n-m}} \int e^{i\lambda|z_2|^{\frac{n}{n-m}}\Phi_2(x_1,z)} a(|z_2|^{\frac{1}{n-m}}x_1)\left(1-\chi_0\left(\frac{x}{N}\right)\right)dx.$$

对于积分 I_{12}，我们得到:

$$|I_{12}| \leq \frac{c|z_2|^{\frac{1}{n-m}}}{|\lambda|z_2|^{\frac{n}{n-m}}|} \leq \frac{c|z_2|^{\frac{1}{n-m}}}{|\lambda|z_2|^{\frac{n}{n-m}}|^{\frac{2}{m+1}}} = \frac{c}{|\lambda|^{\frac{2}{m+1}}|z_2|^{\frac{2n-m-1}{(n-m)(m+1)}}},$$

因为在积分 I_{12} 的振幅函数的支集上，函数$\Phi_2(x_1, z)$没有临界点。

最后，我们考虑积分 I_{11}的估计。注意到 $\xi_1 = \frac{z_1}{|z_2|^{\frac{n-1}{n-m}}} \in [-\frac{1}{\delta},\frac{1}{\delta}]$。由于区间 $[-\frac{1}{\delta},\frac{1}{\delta}]$是紧集，因此所需的估计可由局部估计得出。设 $\xi_1 = \xi_1^0$为区间 $[-\frac{1}{\delta},\frac{1}{\delta}]$中的一个固定点。此外，假设参数 ξ_1 在点 ξ_1^0的一个足够小的邻域内变化。那么，相位函数 ϕ_2 可视为函数

$$x_1^n\beta(0) + sgn(z_2)x_1^m\omega(0) + \xi_1^0x_1.$$

若 $\xi_1^0 \neq 0$，则相位函数只有 A_k 型奇点，且满足 $(k \leq 2)$。若 $\xi_1^0 = 0$，则相位函数在原点处有 A_{m-1} 型奇点。特别地，若 $2 \leq m \leq 3$，则相位函数只有 A_k 型奇点，且满足 $k \leq 2$。因此，根据论文 [1] 中的定理 1，存在函数 $\psi(\xi_1, z_2) \in L^{\frac{2(m-1)}{m-2}-0} := \cap_{p<\frac{2(m-1}{m-2}} L^p)$，使得下列估计成立:

$$|I_{11}| \leq \frac{|z_2|^{\frac{1}{n-m}}\psi\left(\frac{z_1}{|z_2|^{\frac{n-1}{n-m}}},z_2\right)}{\lambda^{\frac{1}{2}}|z_2|^{\frac{n}{2(n-m)}}} = \frac{\psi\left(\frac{z_1}{|z_2|^{\frac{n-1}{n-m}}},z_2\right)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}|z_2|^{\frac{n-1}{2(n-m)}}} \tag{3.10}$$

对积分 I_{11}，只要满足 $m \geq 3$，上述结论便成立。若 $m = 2$，则存在函数$\psi(\xi_1, z_2) \in L^{4-0}$，使得估计 (3.10) 对函数 ψ 成立。

另一方面，范德科普特引理给出:

$$|I_{11}| \leq \frac{c|z_2|^{\frac{1}{n-m}}}{|\lambda z_2^{\frac{n}{n-m}}|^{\frac{1}{m}}}.$$

通过对这两个界进行插值，我们得到：

$$|I_{11}| \le \frac{c\psi\left(\frac{z_1}{|z_2|^{\frac{n-1}{n-m}}}, z_2\right)^{\frac{2(m-1)}{(m-2)(m+1)}}}{\lambda^{\frac{2}{m+1}}|z_2|^{\frac{2n-m-1}{n-m}}}.$$

因此，对于积分 I_1 ，我们有如下估计：

$$|I_1| \le \frac{c\chi_{|z_2|<\delta|z_1|^{\frac{n-m}{n-1}}}(z_2)}{|\lambda|^{\frac{2}{m+1}}|z_1|^{\frac{2n-m-1}{(n-1)(m+1)}}} + \frac{c\chi_{\delta|z_1|^{\frac{n-m}{n-1}}<|z_2|}(z_1)\psi\left(\frac{z_1}{|z_2|^{\frac{n-1}{n-m}}}, z_2\right)^{\frac{2(m-1)}{(m-2)(m+1)}}}{|\lambda|^{\frac{2}{m+1}}|z_2|^{\frac{2n-m-1}{(n-m)(m+1)}}} =: \frac{\widetilde{\psi}(z_1,z_2)}{|\lambda|^{\frac{2}{m+1}}}.$$

~现在，我们证明 $\psi \in L^{m+1-0}(V)$。事实上，令 $1 < p < m+1$ 为一个固定数。于是

$$2\int_{|z_1|<1} \frac{dz_1}{|z_1|^{\frac{2n-m-1}{(n-1)(m+1)}p}} \int_0^{\delta|z_1|^{\frac{n-m}{n-1}}} dz_2 = 4\delta \int_0^1 \frac{dz_1}{z_1^{\frac{2n-m-1}{(n-1)(m+1)}p-\frac{n-m}{n-1}}}.$$

显然，最后一个积分在 $p < m+1$ 时收敛。此外，对于 $1 < p < m+1$

$$\int_V \frac{\psi(\frac{z_1}{|z_2|^{\frac{n-1}{n-m}}}, z_2)^{\frac{2(m-1)p}{(m-2)(m+1)}}\chi_{c|z_1|^{\frac{n-m}{n-1}}<|z_2|}(z_1)}{|z_2|^{\frac{2n-m-1}{(n-m)(m+1)}p}} dz_1 dz_2 =$$

$$= \int_0^1 dz_2 \frac{1}{|z_2|^{\frac{2n-m-1}{(n-m)(m+1)}p-\frac{n-1}{n-m}}} \int_0^{\delta^{\frac{n-1}{m-n}}} \psi^{\frac{2(m-1)}{(m-2)(m+1)}p}(\xi_1, z_2) d\xi_1 \le$$

$$c\int_0^1 \frac{dz_2}{z_2^{\frac{2n-m-1}{(n-m)(m+1)}p-\frac{n-1}{n-m}}} < +\infty$$

当 $p < m+1$ 时。

将所得估计求和后，我们便完成了引理 3.1 的证明。

事实上，对于积分 I_1 ，我们有如下的一致估计：

$$|I_1| \lesssim \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{n}}}.$$

若 $\varepsilon \ge \frac{2}{m} - \frac{1}{n}$ ，则最后一个估计足以完成引理 3.1 的证明。假设 $0 < \varepsilon < \frac{2}{m} - \frac{1}{n}$。接着我们使用估计

$$|I_1| \lesssim \frac{\tilde{\psi}_1(z)}{|\lambda|^{\frac{2}{m}}},$$

其中 $\tilde{\psi}_1 \in L^{m+1-0}$（$V$）。

然后对最后两个不等式进行插值，得到：

$$|I_1| \lesssim \frac{\tilde{\psi}_1^{1-\theta}}{|\lambda|^{\frac{\theta}{n}+\frac{2(1-\theta)}{m}}},$$

where $0 < \theta < 1$。我们可以选取数值 θ，使得满足以下关系 n

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2(1-\theta)}{m} = \frac{2}{m} - \varepsilon \quad \text{or} \quad \varepsilon = \theta\left(\frac{2}{m} - \frac{1}{n}\right) > 0.$$

成立。因此，包含关系 $\tilde{\psi}_1^{1-\theta} \in L^{m+1}(V)$ 显然成立。

对于情形 $n = \infty$，类似结果也成立。

事实上，假设 $n = \infty$，那么 b_0 在原点处是一个平坦函数。根据 $R-$ 条件，我们有 $b_0 \equiv 0$。因此，我们得到

$$\phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^2.$$

在这种情况下，相位函数 Φ_2 具有如下形式：

$$\Phi_1(x_1, z) = z_2 x_1^m \omega(x_1) + z_2^2 x_1 q(x_1, z_2) + z_1 x_1.$$

那么，如果 $|z_1| \geq |z_2|$，相位函数在 x_1 中没有临界点。因此，我们可以使用分部积分公式，得到

$$|I_1| \lesssim \frac{1}{1 + |\lambda z_1|}.$$

最后一个估计给出

$$|I_1| \lesssim \frac{1}{\sqrt[4]{|z_1 z_2|}\sqrt{|\lambda|}}.$$

现在，假设 $|z_1| \leq |z_2|$。那么我们可以提出 z_2，并得到以下估计

$$|I_1| \leq \frac{\psi\left(\frac{z_1}{z_2}, z_2\right)}{|z_2\lambda|^{\frac{1}{2}}} =: \frac{\tilde{\psi}(z)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}},$$

其中 $\tilde{\psi} \in L^{\frac{2(m-1)}{m-2}-0}(V)$（见 [1]），在 $m \geq 3$ 的情形下；若 $m = 2$，则 $\tilde{\psi} \in L^{4-0}(V)$。于是，与之前一样，我们得到引理 3.1 的结论。

至此，引理 3.1 的证明完成。

Q.E.D.

由引理 3.1 可知，在 $2m < n$ 的情形下，数目 $k_p(v)$ 满足所需的上界。事实上，首先，我们使用命题 2.1，得到卷积算子 M_k 对于 $p_0 = \frac{2m+2}{2m+1}$ 的 $L^{p_0} \mapsto L^{p_0'}$ 有界性，其中 $k > \frac{5}{2} - \frac{3}{m+1}$。此外，我们还得到该卷积算子对于 $p_1 = 1$ 的 $L^{p_1} \mapsto L^{p_1'}$ 有界性，其中 $k > \frac{5}{2} - \frac{1}{n}$；以及该卷积算子对于 $p_2 = 2$ 的 $L^{p_2} \mapsto L^{p_2'}$ 有界性，其中 $k = 0$。然后，通过对所得估计进行解析插值，我们得到数目 $k_p(v)$ 所需的上界。

此外，我们考虑数值 $k_p(v)$ 的下界。

4. On the sharpness of results (a lower bound for the number $k_p(v)$)

定理 4.1. 若 $2m \geq n$，则存在一个振幅函数 a_k，使得相应的算子 M_k 在 $k < (5-\frac{2}{n})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})$ 时并非 $L^p(\mathbb{R}^3) \mapsto L^{p'}(\mathbb{R}^3)$ 有界。

证明。实际上，我们证明，M. Sugimoto 在论文 [11] 中提出的函数序列可用于证明情形 (i) 下 $k_p(v)$ 上界的尖锐性。取一个 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数，使得当 ξ 足够大时，$a_k(\xi) = |\xi|^{-k}$。仿照 M. Sugimoto，我们引入函数：$G(y) = 1 + \phi(y_1, y_2) - y\nabla\phi(y)$。定义非负函数 $f(0) = g(0) = 1$，使其集中在原点的一个充分小邻域内；再定义一个满足 $\psi(1) = 1$ 的光滑函数，其支集位于点 1 的一个充分小邻域内。

我们设

$$u_j(x) = 2^{j\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{p'}\right)} F^{-1}(v_j(2^{-j}\xi))(x),$$

其中

$$v_j(\xi) = \frac{f\left(2^{\frac{j}{2}}\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right) g\left(2^{\frac{j}{n}}\frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right) \psi(\varphi(\xi))|\xi|^k}{\varphi(\xi)^2 G\left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}, \frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

序列 $\{F^{-1}(v_j(2^{-\frac{j}{2}}\xi_1, 2^{-\frac{j}{n}}\xi_2, \xi_3))\}_{j=1}^\infty$ 在 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 中有界。事实上，经典的豪斯多夫-杨不等式给出：

$$\|F^{-1}(v_j(2^{-j/2}\cdot, 2^{-j/n}\cdot, \cdot))\|_{L^p} \lesssim \|v_j(2^{-j/2}\cdot, 2^{-j/n}\cdot, \cdot)\|_{L^{p'}}.$$

另一方面

$$\|v_j(2^{-j/2}\cdot, 2^{-j/n}\cdot, \cdot)\|_{L^{p'}}^{p'} = \int f^{p'}\left(\frac{\xi_1}{\varphi(2^{-j/2}\xi_1, 2^{-j/n}\xi_2, \xi_3)}\right) g^{p'}\left(\frac{\xi_2}{\varphi(2^{-j/2}\xi_1, 2^{-j/n}\xi_2, \xi_3)}\right)$$
$$\frac{\psi^{p'}(\varphi(2^{-j/2}\xi_1, 2^{-j/n}\xi_2, \xi_3))((2^{-j/2}\xi_1)^2 + (2^{-j/n}\xi_2)^2 + \xi_3^2)^{k/2}}{\varphi(2^{-j/2}\xi_1, 2^{-j/n}\xi_2, \xi_3)^{2p'} G^{p'}(\xi_1/\varphi(2^{-j/2}\xi_1, 2^{-j/n}\xi_2, \xi_3), \xi_2/\varphi(2^{-j/2}\xi_1, 2^{-j/n}\xi_2, \xi_3))} d\xi.$$

由于 ψ 的支集包含在 1 的一个充分小的邻域内，因此有：$\frac{1}{2} \leq \varphi(2^{-j/2}\xi_1, 2^{-j/n}\xi_2, \xi_3) \leq 2$。另一方面，函数 f 和 g 的支集集中在原点的一个充分小的邻域内。因此，$|\xi_1| < 1$ 和 $|\xi_2| < 1$，并且 $|\xi_3| \sim 1$，因为 $\varphi(0, 0, 1) = 1$。由此可得：

$$\|v_j(2^{-j/2}\cdot, 2^{-j/n}\cdot, \cdot)\|_{L^{p'}} \lesssim 1.$$

因此，

$$\|F^{-1}(v_j(2^{-j}\cdot))\|_{L^p} \lesssim 2^{j(\frac{1}{2}+\frac{n-1}{n}+1)\frac{1}{p'}} = 2^{j(\frac{5}{2}-\frac{1}{n})\frac{1}{p'}}.$$

因此，序列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 在空间 $L^p(\mathbb{R}^3)$ 中有界。

另一方面，我们有如下关系：

$$M_k u_j(x) = 2^{j(\frac{5}{2}-\frac{1}{n})(-\frac{1}{p'})-kj+2j} F^{-1}\left(e^{i\varphi(\xi)} \frac{f\left(2^{\frac{j}{2}}\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right) g\left(2^{\frac{j}{n}}\frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right) \psi(2^{-j}\varphi(\xi))}{\varphi(\xi)^2 G\left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}, \frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right)}\right).$$

We 执行由缩放 $2^{-j}\xi \mapsto \xi$ 给出的变量替换，并得到 :

$$M_k u_j(x) = \frac{2^{j((\frac{5}{2}-\frac{1}{n})(-\frac{1}{p'})-k+3)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{2^j i(\varphi(\xi)-x\xi)} \frac{f\left(2^{\frac{j}{2}}\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right) g\left(2^{\frac{j}{n}}\frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right)\psi(\varphi(\xi))}{\varphi^2(\xi) G\left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}, \frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right)} d\xi.$$

接下来，我们沿用 M. Sugimoto 的做法，进行变量替换 $\xi = (\lambda y, \lambda(1+\phi(y)))$，得到:

$$M_k u_j(x) = \frac{2^{j((\frac{5}{2}-\frac{1}{n})(-\frac{1}{p'})-k+3)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int e^{i2^j\lambda(1-(x_1y_1+x_2y_2+x_3(1+\phi(y))))} f(2^{\frac{j}{2}}y_1) g(2^{\frac{1}{n}}y_2)\psi(\lambda) d\lambda dy.$$

最后，我们进行变量替换 $2^{\frac{j}{2}}y_1 \mapsto y_1$, $2^{j/n}y_2 \mapsto y_2$，得到:

$$M_k u_j(x) = 2^{j((\frac{5}{2}-\frac{1}{n})(-\frac{1}{p'})-k-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+3)} \int_{\mathbb{R}^3} e^{2^j i\lambda((x_3-1)-2^{-\frac{j}{2}}y_1x_1-2^{-\frac{j}{n}}y_2x_2-x_3\phi(2^{-\frac{j}{2}}y_1, 2^{-\frac{j}{n}}y_2))} f(y_1)g(y_2)\psi(\lambda) d\lambda dy.$$

若 $|x_3-1| \ll 2^{-j}$, $|x_1| \ll 2^{-j/2}$, $|x_2| \ll 2^{\frac{-j(n-1)}{n}}$，则相位是非振荡函数，因为 $\phi(2^{-j/2}y_1, 2^{-j/n}y_2) = o(2^{-j})$，前提是 f, g 的支集足够小。

因此，我们得到以下下界:

$$\|M_k u_j\|_{L^{p'}} \gtrsim 2^{j((\frac{5}{2}-\frac{1}{n})(-\frac{1}{p'})-k+\frac{5}{2}-\frac{1}{n}-(\frac{5}{2}-\frac{1}{n})(\frac{1}{p'}))} = 2^{j((5-\frac{2}{n})(-\frac{1}{p'})+\frac{5}{2}-\frac{1}{n}-k)} = 2^{j((5-\frac{2}{n})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-k)}.$$

因此，若 $k < k_p(\Sigma) := (5-\frac{2}{n})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})$，则 $\|M_k u_j\|_{L^{p'}} \to \infty$（因为 $j \to +\infty$）。于是，算子 $M_k: L^p(\mathbb{R}^3) \to L^{p'}(\mathbb{R}^3)$ 无界。

Q.E.D.

定理 4.1 完成了主定理 1.3 的 (i) 部分的证明。此外，我们考虑 $2m < n$ 的情形。

注 4.2。定理 4.1 的证明表明，若 $2m < n$ 和 $k < (5-\frac{1}{m})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})$，则 $\|M_k u_j\|_{L^{p'}} \to \infty$(如 $j \to +\infty$)。因此，只要 $k < (5-\frac{1}{m})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})$，算子 $M_k: L^p(\mathbb{R}^3) \to L^{p'}(\mathbb{R}^3)$ 就是一个无界算子。事实上，我们可以重复定理 4 中的所有论证，将函数

$$u_j(x) = 2^{j(\frac{5}{2}-\frac{1}{2m})(-\frac{1}{p'})} F^{-1}(v_j(2^{-j}\xi))(x),$$

with

$$v_j(\xi) = \frac{f\left(2^{\frac{j}{2}}\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right) g\left(2^{\frac{j}{2m}}\frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right)\psi(\varphi(\xi))|\xi|^k}{\varphi(\xi)^2 G\left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}, \frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

对于情形 $2m < n$，并得到如下下界:

$$k_p(v) \geq (5-\frac{1}{m})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}). \tag{4.11}$$

对于数值 $k_p(v)$，只要 $2m < n$。

现在，我们证明该定理。

定理 4.3. 若 $2m < n$，且 $m \geq 3$，则

$$k_p(v) = \max\left\{(5-\frac{1}{m})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}), (6-\frac{2(m+1)}{n})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right\}. \tag{4.12}$$

证明。由于我们已经得到了 $k_p(v)$ 的上界，因此只需证明该数的下界。

若 $k < (5-\frac{1}{m})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})$，则算子 M_k 不是 $L^p(\mathbb{R}^3) \mapsto L^p(\mathbb{R}^3)$ 有界的（见注 4.2）。

假设 $k < (6-\frac{2}{(m+1)n})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}+\frac{m}{n}$。我们证明 M_k 不是 $L^p(\mathbb{R}^3) \mapsto L^p(\mathbb{R}^3)$ 有界的。

我们对 M. Sugimoto 序列稍作修改，并考虑序列

$$u_j = 2^{-\frac{3j}{p'}+\frac{j(m+1)}{n}} F^{-1}(v_j(2^{-j}\cdot))(x),$$

其中

$$v_j(\xi) = f\left(2^{\frac{jm}{n}}\left(\frac{\xi_2}{\varphi(\xi)} - \left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right)^m \omega\left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right)\right)\right) \frac{g\left(2^{\frac{j}{n}}\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right)\psi(\varphi(\xi))|\xi|^k}{\varphi^2(\xi)G\left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}, \frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right)},$$

其中 $f, g, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 是满足以下条件的非负光滑函数：$f(0) = g(0) = 1$，且 f, g 的支集均位于 $\mathbb{R}$ 原点的一个充分小的邻域内。设 $0 < c << 1$ 是一个固定的正数（例如 $c = 0.0001$），且 ψ 是一个非负光滑函数，其支集集中在点 c 的一个充分小的邻域内，在原点的一个邻域内恒为零，并且 $\psi(c) = 1$（参见 [11]）。显然，$v_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 且 $\|v_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \sim 2^{-j\frac{m+1}{p'n}}$，其中符号“$\sim$”表示存在非零常数 $c_1, c_2 > 0$，使得

$$c_1 2^{-j\frac{m+1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |v_j(\xi)|^{p'} d\xi \leq c_2 2^{-j\frac{m+1}{n}}.$$

事实上，我们在积分 $\int_{\mathbb{R}^3} |v_j(\xi)|^{p'} d\xi$ 中使用变量替换 $\xi = \lambda(y_1, y_2, 1+\phi(y_1, y_2))$。注意，只要 j 足够大，在 v_j 的支集上变量替换便有意义。于是得到：

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_j(\xi)|^{p'} d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} f^{p'}(2^{j\frac{m}{n}}(y_2 - y_1^m\omega(y_1)))g^{p'}(2^{\frac{j}{n}}y_1)\psi^{p'}(\lambda)$$
$$\lambda^{(k-2)p'+2}(y_1^2+y_2^2+(1+\phi(y_1,y_2))^2)^{\frac{kp'}{2}} G^{2-p'}(y_1,y_2)dy_1dy_2d\lambda \sim 2^{-j\frac{m+1}{n}}.$$

因此，当 j 较大时，我们有

$$\|u_j\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \sim 1.$$

现在，我们考虑 $\|M_k u_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)}$ 的下估计

我们有:

$$M_k u_j = F^{-1} e^{i\varphi(\xi)} a_k(\xi) F u_j = 2^{-\frac{3j}{p'} + j\frac{m+1}{np'}} F^{-1}(e^{i\varphi(\xi)} a_k(\xi) v_j(2^{-j}\xi))(x).$$

我们进行如下缩放变量替换: $2^j\xi \to \xi$ 并得到:

$$M_k u_j(x) = \frac{2^{\frac{3j}{p} + \frac{j(m+1)}{np'} - kj}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i2^j(\varphi(\xi) - \xi x)}$$

$$f\left(2^{\frac{jm}{n}}\left(\frac{\xi_2}{\varphi(\xi)} - \left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right)^m \omega\left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right)\right)\right) \frac{g\left(2^{\frac{j}{n}}\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}\right)\psi(\varphi(\xi))}{\varphi^2(\xi) G\left(\frac{\xi_1}{\varphi(\xi)}, \frac{\xi_2}{\varphi(\xi)}\right)} d\xi.$$

最后，我们进行变量替换 $\xi \to \lambda(y_1, y_2, 1 + \phi(y_1, y_2))$。于是得到:

$$M_k u_j(x) = \frac{2^{\frac{3j}{p} + \frac{j(m+1)}{p'} - kj}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i2^j\lambda(1 - x_3 - (y_1x_1 + y_2x_2 + x_3\phi(y_1,y_2)))} \times$$
$$\times f(2^{\frac{jm}{n}}(y_2 - y_1^m\omega(y_1))) g(2^{\frac{j}{n}}y_1)\psi(\lambda) d\lambda dy_1 dy_2.$$

现在，我们进行变量替换

$$y_1 = 2^{-\frac{j}{n}} z_1,\ y_2 = y_1^m \omega(y_1) + 2^{-j\frac{m}{n}} z_2.$$

于是得到

$$M_k u_j(x) = 2^{\frac{3j}{p} + \frac{m+1}{np'}j - \frac{m+1}{n}j - kj} \int e^{i2^j\lambda\Phi_3(z,x,j)} f(z_2) g(z_1) \psi(\lambda) d\lambda dz_1 dz_2,$$

其中

$$\Phi_3(z, x, j) := 1 - x_3 - (2^{-\frac{j}{n}} x_1 z_1 + x_2 2^{-\frac{jm}{n}} z_1^m \omega(2^{-\frac{j}{n}} z_1) + z_2 2^{-\frac{jm}{n}} x_2 +$$
$$x_3 2^{-\frac{2jm}{n}} z_2^2 b(2^{-\frac{j}{n}} z_1, 2^{-\frac{jm}{n}}(z_1^m \omega(2^{-\frac{j}{n}} z_1) + z_2)) + 2^{-j} z_1^n \beta(2^{-\frac{j}{n}} z_1)).$$

我们在 z_2假设，$|1 - x_3| << 2^{-j}$, $|x_1| << 2^{-\frac{n-1}{n}j}$, $|x_2| << 2^{-\frac{j(n-m)}{n}}$ 的情况下使用驻相法，并得到:

$$M_k u_j(x) = 2^{j(\frac{3}{p} + \frac{m+1}{np'} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - k)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{i2^j\lambda\Phi_4} f(z_2^c(z_1, x_2)) g(z_1) \psi(\lambda) d\lambda dz_1 + O(2^{j(\frac{2m}{n} - 1))} \right),$$

其中

$$\Phi_4 := \Phi_4(z_1, x, j) := 1 - x_3 - x_1 z_1 2^{-\frac{j}{n}} + x_2 2^{-\frac{jm}{n}} z_1^m \omega(2^{-\frac{j}{n}} z_1) +$$
$$2^{-j} z_1^n \beta(2^{-\frac{j}{n}} z_1) + x_2^2 2^{-\frac{2jm}{n}} B(z_1, x_2).$$

由此我们得到下界:

$$\|M_k u_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \geq 2^{j(\frac{3}{p} + \frac{m+1}{np'} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{p'}(3 - \frac{m+1}{n}) - k)} c,$$

其中 $c > 0$ 是一个不依赖于 j的常数。因此，如果 $k < (6 - {}^{2}_{(m+1)\,n})(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} + \frac{m}{n}$，那么算子 M_k 不是 $L^p(\mathbb{R}^3) \mapsto L^p(\mathbb{R}^3)$有界的。

对于情形 $n = \infty$，类似结果同样成立。

因此，如果 $k < k_p(v)$，那么 M_k 不是 $L^p - L^{p'}$ 有界算子。由此完成定理 4.3 的证明。

证毕。

定理 4.3 完成了对主要定理 1.3 的第 (ii) 部分的证明。

致谢：作者感谢 Sh. A. Alimov 教授就研究结果进行了宝贵的讨论。

Bibliography

[1] Akramova D. I. 和 Ikromov I. A.，《Randol 极大函数与测度的傅里叶变换的可积性》，《数学札记》，2021 年，第 109 卷，第 5 期，第 661–678 页。[2] Arhipov, G. I., Karacuba, A. A., ˇCubarikov, V. N.，《三角积分》，《苏联科学院数学系列学报》，43 (1979)，971–1003，1197（俄文）；英文译本见《苏联数学学报》，15 (1980)，211–239。[3] V. I. Arnol'd、S. M. Gusein-zade 和 A. N. Varchenko，《可微映射的奇点》，载于《焦散与波前临界点的分类》，1985 年，第 1 卷，1985 年，Birkh¨auser，波士顿、巴塞尔、斯图加特。[4] J. Bergh 和 J. L¨ostr¨om，《插值空间》，施普林格出版社，柏林/海德堡/纽约，1976 年。[5] 与超曲面相关的极大函数估计 $h < 2$：第二部分：几何猜想及其对一般二维曲面的证明。http://arxiv.org/abs/2209.07352[6] Duistermaat, I. I.，《振荡积分、拉格朗日浸入与奇点的展开》，《纯粹与应用数学通讯》，27 (1974)，207–281。[7] Ikromov, I. A., M¨uller, D.，$\mathbb{R}^3$ 中曲面承载测度的傅里叶变换的一致估计及其在傅里叶限制中的应用。I.《傅里叶分析与应用》，17 (2011)，第 6 期，1292–1332。[8] Ikromov, I. A., M¨uller，《三维超曲面的傅里叶限制与牛顿多面体》；《数学年刊研究》第 194 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿和牛津，2016 年；260 页。[9] Iosevich A., Leflyand E.，《傅里叶变换的衰减：解析与几何方面》，Birkh¨aser，2014 年。[10] M. Sugimoto，满足 Besov 估计的伪微分算子的 L^p-有界性 I，《日本数学会杂志》第 40 卷，第 1 期，1988 年。[11] M. Sugimoto，《空间维数为 3 的双曲方程估计》，《功能分析杂志》，160，382–407 (1998)。[12] Stein, E. M.，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿数学丛书 43。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NI，1993 年。

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, University Boulevard 15, 140104, Samarkand, Uzbekistan电子邮箱：i.ikromov@mathinst.uz

Samarkand State University, University Boulevard 15, 140104, Samarkand, Uzbek-istan电子邮箱：ikromova 89@mail.ru