arXiv:2303.06450v3 [math.GR] 9 Oct 2023

在$\mathbb{Z}^{n+1} \rtimes_{\rho_n} GL_2(\mathbb{Z})$中的极大 Haagerup 子群

Alain VALETTE

2023年10月10日

摘要

对于 $n \geq 1$，令 ρ_n 表示 $GL_2(\mathbb{Z})$ 在空间$P_n(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n+1}$ 上的标准作用，其中该空间由两个变量的 n 次齐次多项式构成，且多项式系数为整数。对于 G，若 $GL_2(\mathbb{Z})$ 是一个非 amenable 子群，我们将刻画半直积 $\mathbb{Z}^{n+1} \rtimes_{\rho_n} G$ 的极大 Haagerup 子群，从而扩展 Jiang-Skalski [JS21] 对 $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 中极大 Haagerup 子群的分类。我们证明，当 n 为奇数时，群 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 存在无穷多个两两不共轭的极大 Haagerup 子群，它们都是自由群；当 n 为偶数时，群 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes GL_2(\mathbb{Z})$ 存在无穷多个两两不共轭的极大 Haagerup 子群，它们同构于 $SL_2(\mathbb{Z})$。

1 引言

对于离散可数群，Haagerup 性质是 amenability 的一种弱形式，在解析群论的许多问题中都被证明很有用，涉及 K 理论到动力系统等领域（见 [CCJJV]）。不难看出，在可数群中，每个 Haagerup 子群都包含于某个极大子群中（见 [JS21] 中的命题 1.3 或下文的引理 2.1）。这引出了一个问题：给定一个群 G，如何描述 G 的极大 Haagerup 子群。

Y. Jiang 和 A. Skalski [JS21], 开创了对极大 Haagerup 子群的研究，我们推荐读者参阅这篇论文，其中包含许多有趣且引人入胜的例子。这里提及 [JS21], 中的定理 2.12，作者在那里对半直积 $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 的极大 Haagerup 子群进行了分类。鉴于 Burger 的一个结果，这个例子尤其有趣（ [Bur91] 中命题 7 后的例 2）：若 G 是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的非 amenable 子群，则 $(\mathbb{Z}^2 \rtimes G, \mathbb{Z}^2)$ 具有相对性质 (T)；特别地， $\mathbb{Z}^2 \rtimes G$ 不是 Haagerup 群，尽管 $\mathbb{Z}^2$ 和 G 都是 Haagerup 群。

定理 1.1（ [JS21] 中的定理 2.12）。设 H 是 $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 的极大 Haagerup 子群。那么存在以下二分：

1. 要么 $H = \mathbb{Z}^2 \rtimes C$，其中 C 是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的极大可合[1] 子群；

2. 或 $H \cap \mathbb{Z}^2$ 是平凡的；那么 H 不是可 amenable 的。若 K 表示 H在商映射 $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z})$ 下的像（因此 K 与 H同构），则 $H = \{(b(g)\ g) : g \in K\}$，其中 $b : K \to \mathbb{Z}^2$ 是一个无法延拓到 $SL_2(\mathbb{Z})$的更大子群上的 1-余循环。

注释 1.2。用 $L(G)$ 表示群G的群冯·诺依曼代数。在 *[JS21],* Jiang 和 Skalski 的定理 3.1 中，他们证明了一个更强的结果：若 C 是 $SL_2(\mathbb{Z})$的极大可 amenable 子群，且 $\mathbb{Z}^2 \rtimes C$ 具有无限共轭类，那么 $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes C)$ 是 $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}))$中的极大 Haagerup 冯·诺依曼子代数，其中有限冯·诺伊曼代数的 Haagerup 性质定义见 *[Jo02]*。随后，Y. Jiang（*[Ji21]*中的推论 4.3）证明了 $L(SL_2(\mathbb{Z}))$ 是 $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}))$中的极大 Haagerup 子代数。A. Skalski 指出，目前尚无已知例子表明存在群 G中的极大 Haagerup 子群 H，使得 $L(H)$不是 $L(G)$中的极大 Haagerup 子代数。

现在我们转向本文。固定 $n \geq 1$，并对 $A = \mathbb{Z}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$，用 $P_n(A)$ 表示变量 X、Y 的多项式集合，其系数取自 A，且为 n 次齐次多项式，因此 $P_n(A) \simeq A^{n+1}$。经典结果表明，$GL_2(\mathbb{R})$ 存在一个作用在 $P_n(\mathbb{R})$ 上的不可约表示 ρ_n，定义如下：对 $P \in P_n(\mathbb{R})$ 和 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$，令：

$$(\rho_n(A)(P))(X, Y) = P((X, Y) \cdot A) = P(a_{11}X + a_{21}Y, a_{12}X + a_{22}Y).$$

由于 $\rho_n(GL_2(\mathbb{Z}))$ 保持 $P_n(\mathbb{Z})$ 不变，我们可以构造半直积

$$G_n =: P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} GL_2(\mathbb{Z})$$

（注意 $G_1 = \mathbb{Z}^2 \rtimes GL_2(\mathbb{Z})$，它包含 $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 作为指数为 2 的子群）。设 G 是 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的一个非 amenable 子群：我们的目标是分类 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} G \subset G_n$ 的极大 Haagerup 子群。下面给出我们的第一个主要结果，它推广了定理 1.1：

定理 1.3. 固定 $n \geq 1$，并设 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的一个非 amenable 子群为 G。设 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} G$ 的一个极大 Haagerup 子群为 H。那么存在二分。

1. 要么 H 是可 amenable 的，此时 $H = P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} C$，且 C 在 G 中是极大可合的；

2. 或者 H 不是可 amenable 的，并且存在一个同构于 H 的子群 $K \subset G$，以及一个 1-余循环 $b \in Z^1(K, P_n(\mathbb{Z}))$，使得

$$H = \{(b(k), k) : k \in K\}$$

[1]我们在命题 2.6 中对这些子群进行分类。

且 b 不能扩展为 G 的更大子群。（特别地，如果 b 是一个 1-余边界，那么 $K = G$。）

反过来， $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} G$ 中上述两种形式的任意一个子群，都定义了 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} G$中的一个极大 Haagerup 子群。

尽管结论看起来与定理 1.1 非常相似，但我们强调，为了证明交集$H \cap P_n(\mathbb{Z})$要么是 $P_n(\mathbb{Z})$，要么是平凡的，我们不得不提出一种完全不同的论证。

定理 1.1 和定理 1.3 在群上同调中引出了一个有趣且多少有些反常的问题：要描述非 amenable 的极大 Haagerup 子群，我们需要描述那些无法延拓到更大子群上的 1-余循环。对于 ρ_1，这个问题已在 [JS21] 的第 2 节中得到深入研究（从引理 2.14 到命题 2.18）。我们的切入点是注意到，对于 K $SL_2(\mathbb{Z})$ 或 $GL_2(\mathbb{Z})$中的一个子群，如果余循环 b 定义在 K上，那么它无法延拓到更大的子群，当且仅当对于 K的任意上群 L， b的 1-上同调类都不属于限制映射$H^1(L, P_n(\mathbb{Z})) \to H^1(K, P_n(\mathbb{Z}))$的像。这提示我们去寻找在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 或 $GL_2(\mathbb{Z})$ 中极大或接近极大的子群 K。利用这一方法，我们证明了以下结果，即使对于 $n = 1$，这个结果似乎也是新的：

定理 1.4. 假设 $n \geq 1$ 是奇数。那么存在一个自由子群 K，属于 $SL_2(\mathbb{Z})$，使得 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 包含无穷多个形如 $H = \{(b(k)\ k) : k \in K\}$ 的极大 Haagerup 子群，其中 $b \in Z^1(K, P_n(\mathbb{Z}))$，且它们在 $P_n(\mathbb{Z})$ 下两两不共轭。此外，子群 K 可以选为具有无限指数，或具有任意大的有限指数。

在偶数情形下，我们得到：

定理 1.5. 假设 $n \geq 2$ 是偶数。那么半直积 G_n 包含无穷多个形如 $H = \{(b(g)\ g) : g \in SL_2(\mathbb{Z})\}$ 的极大 Haagerup 子群 H，其中 $b \in Z^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$，且它们在 $P_n(\mathbb{Z})$ 下两两不共轭。

事实证明， n 为奇数和偶数的情形大不相同：原因在于，当 n 为偶数时，$GL_2(\mathbb{Z})$ 对 $P_n(\mathbb{Z})$ 的作用可经由 $PGL_2(\mathbb{Z})$ 分解，而当 n 为奇数时则不能。

本文安排如下。第 2 节介绍预备知识，但命题 2.6 除外；该命题将精确描述 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的极大可合子群。在第 3 节中，我们证明 Burger 上述结果的类比，即对于 $n \geq 1$，数对 $(G_n, P_n(\mathbb{Z}))$ 具有相对性质 (T)。定理 1.3 在第 4 节证明，而上同调问题则在第 5 节（n 奇数）和第 6 节（n 偶数）中讨论；具体而言，定理 1.4 在第 5 节证明，定理 1.5 在第 6 节证明。事实上，定理 1.5 是通过建立

$H^1(SL_2(\mathbb{Z}),\ P_n(\mathbb{Z}))$ 和 $H^1(GL_2(\mathbb{Z}),\ P_n(\mathbb{Z}))$ 的秩 [2] 的显式公式得以证明的；这些公式本身或许也值得关注。本文最后给出这些方法的一个组合应用。

致谢：感谢 Y. Benoist、Y. Cornulier、L. Hayez、P. Jolissaint、A. Skalski、Y. Stalder 和 A. Zumbrunnen 在项目的不同阶段进行的有益讨论。

2 一般性结果

2.1 Haagerup 性质

以下关于可数群的结果将不时使用：

- 群 $GL_2(\mathbb{Z})$ 具有 Haagerup 性质（参见 [CCJJV] 第 1.2.2 或 1.2.3 节）。
- Haagerup 群被可 amenable 群扩张后仍具有 Haagerup 性质；特别地，每个可 amenable 群都具有 Haagerup 性质（参见[CCJJV] 中的命题 6.1.5）。

引理 2.1. 设 G是一个可数群。 G 的任意 Haagerup 子群都包含在某个极大 Haagerup 子群中。

证明：（参见 [JS21] 中的命题 1.3）为应用佐恩引理，我们必须证明 Haagerup 性质在子群的任意递增并下保持不变。这是因为对于可数群，Haagerup 性质是一种局部性质，即一个可数群具有 Haagerup 性质，当且仅当它的每个有限生成子群都具有 Haagerup 性质（参见 [CCJJV] 中的命题 6.1.1）。 ■

2.2 群的 1-上同调

我们回顾群上同调中的以下事实。对于群 G 和A 一个 G-模，定义 1-上循环群：

$$Z^1(G,A)=\{b:G\to A:b(gh)=gb(h)+b(g)\ \text{for all}\ g,h\in G\};$$

1-上余边界群：

$B^1(G,A)=\{b\in Z^1(G,A)$: 存在 $a\in A$ 使得 $b(g)=ga-a$ 对所有 $g\in G\}$;

以及第一上同调群：

$$H^1(G,A)=Z^1(G,A)/B^1(G,A).$$

例如，以下内容已在 [Br82]的命题 2.3中得到证明。

[2] 有限生成阿贝尔群的秩，指的是其无挠秩。

命题 2.2. 设 G 为一个群， A 为一个 G-模。分裂扩张的分裂

$$0 \to A \to A \rtimes G \to G \to 1$$

由 $i_b\colon G \to A \rtimes G\colon g \mapsto (b(g)\ g)$ 给出，其中 $b \in Z^1(G, A)$，并且按 A-共轭分类，由第一上同调群 $H^1(G, A)$ 参数化。■

下面引理的第一部分是对 [Gu80] 第 39 页推论 7.2 的一种变体。

引理 2.3. 设 G 是一个群， A 是一个具有 2-消去性（即 $2x = 0 \Rightarrow x = 0$）的 G-模。

1. 假设 G 含有一个中心元素 z，它在 A 上的作用为 -1。那么 $H^1(G, A)$ 是含 2 个元素的域上的向量空间。此外，若 $b(z)$ 属于 $2A$，则 $b \in B^1(G, A)$。

2. 假设 G 含有一个阶为 2 的中心元素 c，且模作用通过 $G/\langle c\rangle$ 分解。则映射 $H^1(G/\langle c\rangle, A) \to H^1(G, A)$（由商映射 $G \to G/\langle c\rangle$ 诱导）是一个同构。

证明：

1. 我们必须证明，对于每个 $b \in Z^1(G, A)$，都有 $2b \in B^1(G, A)$。但对于 $g \in G$，利用第三个等式中的 $zg = gz$，我们有：

$$b(z) - b(g) = b(z) + zb(g) = b(zg) = b(gz) = gb(z) + b(g).$$

重新整理得：

$$2b(g) = (1 - g)b(z).$$

因此 $2b \in B^1(G, A)$。若可将 $b(z) = 2a$ 写成某个 $a \in A$，则将两边的 2 约去，得到 $b(g) = (1 - g)a$，故 $b \in B^1(G, A)$。

2. 映射 $H^1(G/\langle c\rangle, A) \to H^1(G, A)$ 显然是单射。为证明满射，固定 $b \in Z^1(G, A)$，并考察 $b(c^2) = b(1) = 0$：利用余循环关系

$$0 = (1 + c)b(c) = 2b(c),$$

因此 $b(c) = 0$，且 b 可经由 $G/\langle c\rangle$ 分解。 ■

2.3 关于 $SL_2(\mathbb{Z})$和 $GL_2(\mathbb{Z})$

我们用 C_n 表示阶为 n 的循环群，用 D_n 表示阶为 $2n$的二面体群。令

$$s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

众所周知（参见 [Se77]中的例 1.5.3）， $SL_2(\mathbb{Z})$ 可分解为一个 amalgamated 积:

$$SL_2(\mathbb{Z}) \simeq C_4 *_{C_2} C_6.$$

其中 $C_4 = \langle s \rangle$、 $C_6 = \langle t \rangle$ 和 $C_2 = \{1, \varepsilon\}$。它可扩展为 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的 amalgamated 积分解（参见 [BT16] 中的第 6 节）：

$$GL_2(\mathbb{Z}) \simeq D_4 *_{D_2} D_6, \tag{1}$$

其中 $D_4 = \langle s、\ w \rangle$、 $D_6 = \langle t、\ w \rangle$ 和 $D_2 = \langle \varepsilon、\ w \rangle$。

引理 2.4。 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的可 amenable 根是子群 C_2。

证明：这是 Cornulier 的一个结果的非常特殊情形（[Co09] 中的命题 7）：设 $G = A *_C B$ 是一个 amalgamated 积，满足 $[A : C] \geq 2$ 且 $[B : C] \geq 3$。那么， G 的可 amenable 根是 C 中最大的正规子群，该子群是可 amenable 的，且同时被 A 和 B 规范化。 ■

我们的目标现在是描述 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 的极大可 amenable 子群。回顾一下，元素 $A \in SL_2(\mathbb{R})$ $A \neq \pm Id$ 若 $|Tr(A)| < 2$，则称为椭圆型；若 $|Tr(A)| = 2$，则称为抛物型；若 $|Tr(A)| > 2$，则称为双曲型。这些概念显然可下沉到 $PSL_2(\mathbb{R})$。对于 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$，我们用 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 表示 A 在 $PSL_2(\mathbb{R})$ 中的像。

引理 2.5. 1. $PSL_2(\mathbb{Z})$ 的极大可 amenable 子群同构于 C_3、 $\mathbb{Z}$ 或 D_∞ （无限二面体群）。

2. 若 $A \in PSL_2(\mathbb{Z})$ 是抛物型的，则 A 包含于唯一一个极大可 amenable 子群中，该子群同构于 $\mathbb{Z}$。

3. 若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$ 是双曲型的，则 A 包含于唯一一个极大可 amenable 子群中，该子群同构于 $\mathbb{Z}$ 或 D_∞。当 A 共轭于一个对称矩阵时，会出现第二种情况。若出现第二种情况，则整数二元二次型

$$Q_A(x, y) =: bx^2 + (d - a)xy - cy^2$$

在 $\mathbb{Z}$ 上表示 $-b$ 。

证明:

1. 由于 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 是自由积 $C_2 * C_3$，根据 Kurosh 定理， $PSL_2(\mathbb{Z})$ 的任意子群都是一个自由群与自由因子的共轭的自由积。因此，一个子群不包含自由群，当且仅当

它同构于以下群之一： C_2、C_3、$\mathbb{Z}$、$C_2 * C_2 = D_\infty$；注意，这四个群都是可 amenable 的。剩下要证明的是，C_2 的任意一个副本都包含在至少一个 D_∞ 的副本中；但 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中任何阶为 2 的元素都共轭于 s 的像，而 s 和 tst^{-1} 的像共同生成一个 D_∞ 的副本。

2. 若 A 为抛物型，则在 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中经过共轭后，我们可以假设 $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$。令 H 为 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中包含 A 的极大可 amenable 子群；根据前一点，H 同构于 $\mathbb{Z}$ 或 D_∞。在这两种情形下，H 都正规化子群 $\langle A \rangle$。但通过直接计算可得，$\langle A \rangle$ 的正规化子为 $\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle$，因此它是唯一包含 A 的极大可 amenable 子群。

3. 令 H 为 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中包含 A 的极大可 amenable 子群。同样，H 正规化 $\langle A \rangle$。但 A 在 $PSL_2(\mathbb{R})$ 中共轭于 $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$（其中 $\lambda > 1$），其在 $PSL_2(\mathbb{R})$ 中的正规化子为

$$\mathbb{R} \rtimes C_2 = \{ \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \} \rtimes \langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

因此，H 是 $PSL_2(\mathbb{Z})$与给定的 $\mathbb{R} \rtimes C_2$的一个共轭的交集，这证明了 H 的唯一性（并再次证明 H 同构于 $\mathbb{Z}$ 或 D_∞）。

对于第二个结论，我们可以假设 A 是对称的。于是，由于 A 的特征子空间在 $\mathbb{R}^2$中彼此正交，我们无需计算便可看出，$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 将 A 共轭到 A^{-1}，因此 A 和 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 共同生成一个 D_∞ 的副本（随后包含在一个极大副本中）。

对于最后一个结论，注意到包含 A 的极大可 amenable 子群与 D_∞ 同构，当且仅当存在一个对合 $B \in PSL_2(\mathbb{Z})$，将 A 共轭到 A^{-1}。假设这样的 B 存在。那么，记 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 为 A、B 在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的提升，我们便有 $\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}^{-1} = \pm\overline{A}^{-1}$。对等式两边取迹可知，负号会导致 $Tr(\overline{A}) = 0$，这与 $|Tr(\overline{A})| > 2$ 矛盾。因此，$\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}^{-1} = \overline{A}^{-1}$ 或 $\overline{B}\,\overline{A} = \overline{A}^{-1}\,\overline{B}$。现在，$\overline{B}$ 在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的阶为 4，因此 $Tr(\overline{B}) = 0$。所以我们可以写成 $\overline{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$，得到

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}.$$

比较等式两边的 (1,1) 项可得:

$$ax + cy = dx - bz \Longleftrightarrow z = \frac{(d-a)x - cy}{b}.$$

考虑条件 $\det(\overline{B}) = 1$，即 $-1 = x^2 + yz$，并代入 z 的前一个值:

$$-1 = x^2 + y(\frac{(d-a)x - cy}{b}) \Longleftrightarrow Q_A(x,y) = -b,$$

由此便完成了证明。注意，如果 A 是对称的，即 $b = c$，那么 $Q_A(0,1) = -b$。 ■

例 1. 我们断言，包含 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 的极大可 amenable 子群是无限循环群。为此，我们验证二次型 $Q_A(x,y) = x^2 - 2xy - 2y^2$ 不表示 -1。但方程 $x^2 - 2xy - 2y^2 = -1$ 等价于 $(x-y)^2 - 3y^2 = -1$，由此得到佩尔方程 $X^2 - 3Y^2 = -1$；由于 $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ 中的基本单位 $2 + \sqrt{3}$ 的范数为 1，该方程无解。

现在，我们将引理 2.5 的结果提升到 $SL_2(\mathbb{Z})$。由于 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的极大可 amenable 子群显然必须包含中心，因此我们看到，$SL_2(\mathbb{Z})$ 的极大可 amenable 子群恰好是通过商映射 $SL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{Z})$ 拉回的 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 的极大可 amenable 子群。注意，$PSL_2(\mathbb{Z})$ 中一个对合的原像在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的阶为 4；因此，$SL_2(\mathbb{Z})$ 中 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 内一个 D_∞ 的副本的原像将同构于半直积 $\mathbb{Z} \rtimes C_4$，其中 C_4 的一个生成元通过 $n \mapsto -n$ 作用于 $\mathbb{Z}$。由此立即得到以下结论，它改进了 [JS21] 中的命题 2.13:

命题 2.6. 1. $SL_2(\mathbb{Z})$ 的极大可 amenable 子群同构于 C_6、$\mathbb{Z} \times C_2$ 或 $\mathbb{Z} \rtimes C_4$。

2. 对于 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的抛物型（分别地，双曲型）矩阵，引理 2.5 的第 (2) 项（分别地，第 (3) 项）经显然的调整后适用。■

3 相对性质 (T)

命题 3.1. 设 G 是 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的一个非 amenable 子群。

1. 表示 ρ_n 在 G上的限制是不可约的。

2. 这对 $(P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} G, P_n(\mathbb{Z}))$ 具有相对性质 (T)。特别地，$P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} G$ 不是 Haagerup 群。

证明：

1. 由于 $G \cap SL_2(\mathbb{Z})$ 在 G 中的指数至多为 2，将 G 替换为 $G \cap SL_2(\mathbb{Z})$ 后，我们可以假设 $G \subset SL_2(\mathbb{Z})$。令 L 为 G 在 $SL_2(\mathbb{R})$ 中的扎里斯基闭包，因此 L 是 $SL_2(\mathbb{R})$ 的李子群，故其维数为 0 、 1 、 2 或 3。维数为 0 、 1 、 2 的李子群几乎可解，因而是可 amenable 的，所以 L 的维数为 3，即 G 在 $SL_2(\mathbb{R})$ 中扎里斯基稠密。由于表示 ρ_n 是代数的，经过转到扎里斯基稠密子群后，不可约性仍得以保持。[3]

2. 设 $V_n = P_n(\mathbb{R})$。根据 [Bur91] 中的命题 7（特别参见 [Bur91] 第 62 页的例 (2)），如果 G 不固定射影空间 $P(V_n^*)$ 上的任何概率测度，那么数对 $(P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} G, P_n(\mathbb{Z}))$ 具有相对性质 (T)。由于 $SL_2(\mathbb{R})$ 的表示 ρ_n 等价于其对偶表示 ρ_n^*，只需验证射影空间 $P(V_n)$ 上不存在 G-不变概率测度。反设存在这样的概率测度 μ。那么，根据 [Zim], 中的推论 3.2.2，恰有以下两种情况：

   - 测度 μ 并非支撑在有限个真射影子空间的有限并上。于是稳定子 $PGL(V_n)^\mu$ 是紧的，这与 G 在 $PGL(V_n)$ 中的像是无限离散的这一事实矛盾。

   - 存在一个真线性子空间 W，位于 V_n 中，使得 $\mu([W]) > 0$（其中 $[W]$ 表示 W在 $P(V_n)$中的像），此外， $[W]$ 在稳定子 $PGL(V_n)^\mu$ 作用下的轨道是有限的。特别地， $PGL(V_n)^\mu$ 存在一个有限指数子群，使其保持 $[W]$ 不变。因此， G存在一个有限指数子群 G_0，使其保持线性子空间 W不变，这与命题的第一部分矛盾。 ■

4 极大 Haagerup 子群

在 [JS21] 中提出的一个有趣问题是，每个可数群是否都存在 Haagerup 根基，即具有 Haagerup 性质的唯一极大正规子群。我们首先证明 G_n 存在这样的 Haagerup 根基。

命题 4.1. 对每个 $n \geq 1$， G_n 的 Haagerup 根基为 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} C_2$。

证明：令 $U =: P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} C_2$。设 $N \triangleleft G_n$ 是一个正规 Haagerup 子群，我们要证明 N 包含于 U。我们按照命题

[3]我们回顾一下这个论证：若 W 是一个 $\rho_n(G)$-不变子空间，且 $(f_i)_{i\in I}$ 是一组线性形式，使得 $W = \cap_{i\in I}$ Ker(f_i)，那么 $\rho_n(G)$-不变性等价于：对于每个 $g \in G$、$w \in W$、$i \in I$， $f_i(\rho_n(g)w) = 0$。将其视为关于 g 的矩阵系数的多项式方程组：该方程组在 G 上为零，因此根据扎里斯基稠密性，在 $SL_2(\mathbb{R})$ 上也为零。

2.10 在 [JS21] 中的证明进行：子群 UN是正规的，并且由于 $UN/N \simeq U/(U \cap N)$ 是可 amenable 的， UN是 Haagerup 群的可 amenable 扩张，因此 UN是 Haagerup。由于 UN包含 U，我们特别有 $P_n(\mathbb{Z}) \subset UN$，所以 $UN = \mathbb{Z}^{n+1} \rtimes_{\rho_n} K$，其中 $K \triangleleft GL_2(\mathbb{Z})$ 是某个正规子群。根据命题 3.1(2)，子群 K 必定是可 amenable 的，即由引理 2.4 可知 $K \subset C_2$ 。因此 $UN \subset U$ ，进而 $N \subset U$。 ■

由于 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} C_2$ 实际上是可 amenable 的，我们立即得到：

推论 4.2. G_n 的可 amenable 根是 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} C_2$. ■

现在我们来证明第一个主要结果。

定理 1.3 的证明：令

$$q_n : P_n(\mathbb{Z}) \rtimes GL_2(\mathbb{Z}) \to GL_2(\mathbb{Z}) : (v, S) \mapsto S$$

为商映射。注意，由于 $\mathrm{Ker}(q_n|_H) = H \cap P_n(\mathbb{Z})$ 是阿贝尔群， H 可 amenable 当且仅当 $q_n(H)$ 可 amenable。我们分两种情况讨论。

1. 若 H 可 amenable，令 $C = q_n(H)$，则 H 包含于可 amenable 子群 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} C$ 中。由极大性可得 $H = P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} C$，且 C 是 G 中的极大可合子群。

2. 现在假设 H 不可 amenable，并令 $K = q_n(H)$。

   断言 1：子群 $H \cap P_n(\mathbb{Z})$ 在 $\rho_n(K)$ 下不变。事实上，固定 $h \in H$，并将 $h = (v_h, q_n(h))$ 写成半直积 G_n 的一个元素。对于 $(w, 1) \in H \cap P_n(\mathbb{Z})$，由于 $P_n(\mathbb{Z})$ 是阿贝尔群，我们有：

$$\begin{aligned}(\rho_n(q_n(h^{-1}))w, 1) &= (0, q_n(h))^{-1}(w, 1)(0, q_n(h)) \\ &= (0, q_n(h))^{-1}(-v_h, 1)(w, 1)(v_h, 1)(0, q_n(h)) \\ &= ((v_h, 1)(0, q_n(h)))^{-1}(w, 1)((v_h, 1)(0, q_n(h))) \\ &= (v_h, q_n(h))^{-1}(w, 1)(v_h, q_n(h)) = h^{-1}(w, 1)h\end{aligned}$$

   它属于 $H \cap P_n(\mathbb{Z})$，因为后者是 H 中的正规子群。这就证明了断言 1。

   断言 2：我们有 $H \cap P_n(\mathbb{Z}) = \{0\}$。为此，令 k 为自由阿贝尔群 $H \cap P_n(\mathbb{Z})$ 的秩，因此 $0 \le k \le n+1$，我们必须证明 $k = 0$。若 $k = n+1$，则 $H \cap P_n(\mathbb{Z})$ 在 $P_n(\mathbb{Z})$ 中具有有限指数，因此 H 在 $H \cdot P_n(\mathbb{Z})$ 中具有有限指数。由极大性可知，我们必须有 $H \cdot P_n(\mathbb{Z}) = H$，即 $P_n(\mathbb{Z}) \subset H$ 且 $H = P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} K$；由于 K 不是可 amenable 的，这与命题 3.1 的第 (2) 部分矛盾。

若 $1 \le k \le n$，我们将 W 记为由 $H \cap \mathbb{Z}^{n+1}$生成的 $P_n(\mathbb{R})$ 的线性子空间。根据断言 1，子空间 W在 $\rho_n(K)$ 下不变，这与命题 3.1 的第 1 部分矛盾。由此证明断言 2。

此时我们知道，$q_n|_H$ 将 H 同构映射到 K，因此根据命题 2.2，存在一个 1- 余循环 $b \in Z^1(K, P_n(\mathbb{Z}))$，使得 $H = \{(b(k)\ k) : k \in K\}$。由 H 的极大性可知，该 1-余循环不能扩展到 G的更大子群。这证明了定理的正向蕴含。

反过来，若 C是 G的极大可 amenable 子群，则 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes C$是 Haagerup 群，其极大性可由命题 3.1 的第 2 部分立即推出。若 K 是 G 的非 amenable 子群，且 $b \in Z^1(K, P_n(\mathbb{Z}))$是一个不能扩展到更大子群的 1-余循环，那么 $H = \{(b(k)\ k) : k \in K\}$ 是 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes_{\rho_n} G$的一个 Haagerup 子群，其极大性可由定理正向蕴含中的二分立即推出。 ■

5 上同调问题：n 奇

5.1 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中的极大子群

回顾一下，群 G 中的子群 H 称为极大的，如果 H 是 G 的真子群中极大的子群。

命题 5.1. 群 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 存在有限指数任意大的自由极大子群；也存在无限指数的自由极大子群。

证明：由于 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 同构于自由积 $C_2 * C_3$，因此 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 的子群 H 是自由群，当且仅当它是无挠的；当且仅当它不含 2 阶或 3 阶元素；当且仅当它与 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中 s 和 t （的像）的共轭类不相交。

1. 有限指数。设 p 为素数，且 $p \equiv 11$ 模 12。考虑同余子群

$$\overline{\Gamma}_0(p) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \mod p\}.$$

因此，$\overline{\Gamma}_0(p)$ 是 $PSL_2(p)$ 中上三角子群在模 p 约化下的原像。因此，$\Gamma_0(p)$ 是 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中指数为 $p+1$ 的极大子群。对于 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$，通过直接计算可得，$gsg^{-1}$ 的 (2,1) 项为 c^2+d^2；由于 c^2+d^2 模 4 与 $p \equiv 3$ 同余，因此不能被 p 整除；所以$\overline{\Gamma}_0(p)$ 不含阶为 2 的元素。类似地，(2,1) 项

gtg^{-1} 的值为 c^2-cd+d^2。反设 p 整除 c^2-cd+d^2。那么它也整除 4(c^2-cd+d^2) $=(2c-d)^2+3d^2$，由此可得勒让德符号 $\left(\frac{-3}{p}\right)=-1$；这一点可通过求 d 模 p 的逆元看出。利用二次互反律，这与模 3 下的 $p\equiv 2$ 矛盾。因此，$\overline{\Gamma}_0(p)$ 不含阶为 3 的元素，故为自由群。

2. 无限指数。我们将结合其证明，援引 [FLMS22]中的定理 E。考虑 $\mathbb{N}=\{1,2,...\}$上的以下两个置换：

$$a=(12)(34)(56)(78)...$$

$$b=(123)(456)(789)...$$

将对称群 $Sym(\mathbb{N})$ 视为一个带有逐点收敛拓扑的波兰群。令 T 为 $Sym(\mathbb{N})$ 的子集，由满足以下条件的那些ϑ构成：在 $Sym(\mathbb{N})$ 中， $PSL_2(\mathbb{Z})$ 对 $\mathbb{N}$ 的作用由将s 映射到 a 且将 t 映射到 $\vartheta b\vartheta^{-1}$定义，并且该作用在 $\mathbb{N}$ 上是传递的。根据 [FLMS22],中的引理 6.2，集合 T 是 $Sym(\mathbb{N})$ 中一个非空的 G_δ ，因而 T 本身是波兰群。现在， [FLMS22], 第 6.2 节中的定理 E 及其证明表明，对于 $\vartheta\in T$的一个泛型选择，相应的 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 作用将是二重传递的（事实上是高度传递的，即对每个 $n\geq 1$ 都是 n-传递的）。由二重传递性可知，$\mathbb{N}$ 中任意一点的稳定子都是 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中的一个无限指数极大子群。由于 a 和 $\vartheta b\vartheta^{-1}$ 是无不动点的置换，该稳定子不与 s 和 t的共轭类相交，因此它是自由的。 ■

5.2 情形 $n=1$

下一个结果仅适用于 $n=1$；特别地，它适用于 $G=SL_2(\mathbb{Z})$ 和 $G=GL_2(\mathbb{Z})$。对于 $SL_2(\mathbb{Z})$， [JS21] 中的引理 2.14 给出了另一种证明。

命题 5.2. 设 G 是 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的一个子群，其中含有一个阶为 6 的元素 t_0 。设 $\rho\colon G\to GL_N(\mathbb{Z})$ 是一个同态，满足 $\rho(t_0^3)=-1$，且 $\rho(t_0)$ 不以 -1 为特征值。那么 $H^1(G,\mathbb{Z}^N)=0$。特别地，这适用于 $\rho=\rho_1|_G$。

证明：在群的 amalgamated 积中，任何有限阶元素都共轭于某个因子中的有限阶元素（例如，见 [Se77] 第 3 节中的推论 1）。因此，在 $GL_2(\mathbb{Z})=D_4*_{D_2}D_6$ 中，如有必要，对 G 作共轭后，我们可以假设 $t_0=t$，从而 $\varepsilon=t_0^3$ 属于 G。

固定 $b\in Z^1(G,\mathbb{Z}^N)$，我们要证明 b是一个 1-余边界。根据引理 2.3（应用于 $z=\varepsilon$），只需证明 $b(\varepsilon)\in 2\mathbb{Z}^N$。

令 $T=:\rho(t_0)$，则：

$$0=T^3+1=(T+1)(T^2-T+1).$$

由于根据假设，$T+1$ 在 $M_N(\mathbb{C})$ 中可逆，因此我们有 $0=T^2-T+1$，即 $2T=T^2+T+1$。现在利用 1-余循环关系展开 $t_0^3=\varepsilon$，得到

$$b(\varepsilon)=(T^2+T+1)b(t_0)=2Tb(t_0).$$

也就是说 $b(\varepsilon)\in 2\mathbb{Z}^N$。关于 ρ_1 的最后一个结论，只需注意到 -1 不是 $t=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$ 的特征值。 ■

现在我们重新考察 Jiang-Skalski 的一个例子（ [JS21] 中的命题 2.16）：对于 $N\geq 2$，定义

$$\Gamma_1(N)=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}):c\equiv 0 \mod N, a\equiv d\equiv 1 \mod N\}.$$

还定义向量 $v_N=\begin{pmatrix}1/N\\0\end{pmatrix}$，它属于 $\mathbb{Q}^2$。接着，Jiang-Skalski 证明，$\Gamma_1(N)$ 恰好是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中满足 $b_N(g)=gv_N-v_N$属于 $\mathbb{Z}^2$ 的元素所组成的集合，因此 b_N 是 $Z^1(\Gamma_1(N)\ \mathbb{Z}^2)$ 中的一个 1-余循环，它不能延拓到某个上群，并且 $H_N=\{(b_N(k)\ k):\ k\in\Gamma_1(N)\}$ 在$\mathbb{Z}^2\rtimes SL_2(\mathbb{Z})$中是极大的 Haagerup 群。我们通过指出，对于无穷多个 N 的取值，H_N 实际上是一个自由群，使这一结果更加精确。

命题 5.3. 若 N 可被某个满足 $p\equiv 11 \mod 12$ 的素数 p 整除，则H_N 是一个自由群。

证明：我们将用到这样一个事实：自由群的任意子群都是自由群。只需证明 $\Gamma_1(N)$ 是自由群。由于 $\Gamma_1(N)\subset\Gamma_1(p)$，我们将问题归结为 $\Gamma_1(p)$ 的情形。显然 $\varepsilon\notin\Gamma_1(p)$，因此 $\Gamma_1(p)$ 单射地映入其在 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中的像。显然，后者包含于 $\overline{\Gamma}_0(p)$ 中，而根据命题 5.1 的证明，该群是自由群。故结论得证。 ■

5.3 n 奇数，一般情形

对于一般的奇数 n，我们有如下结论：

命题 5.4. 设 G 是 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的一个有限生成子群。假设G 由 k 个元素 $g_1, g_2, ..., g_k$ 生成，且包含 $\varepsilon=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$。那么，当 n 为奇数时，$H^1(G,P_n(\mathbb{Z}))$ 是域 $\mathbf{F}_2$ （含两个元素）上的向量空间，其维数至多为 $(k-1)(n+1)$。

证明：根据引理 2.3 的第一部分，我们知道 $H^1(G,P_n(\mathbb{Z}))$ 是 $\mathbf{F}_2$ 上的向量空间。现在，任意余循环 $b\in Z^1(G,P_n(\mathbb{Z}))$ 都完全由向量 $b(g_1)$ ...,$b(g_k)$ 决定。另一方面，边界映射

∂: $P_n(\mathbb{Z}) \to Z^1(G, P_n(\mathbb{Z}))$: $P \mapsto \partial P$，其中 $(\partial P)(g) = \rho_n(g)P - P$，是单射。因此，$H^1(G, P_n(\mathbb{Z}))$ 是 $(P_n(\mathbb{Z}))^{k-1}$ 的一个子商，这给出了所需的维数上界。■

定理 1.4 的证明：令 M 为 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中的一个极大自由子群，如命题 5.1 所述。任意将 M 的一个自由基提升到 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中，我们得到 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的一个自由子群 K，其秩为 k（可能为 $k = \infty$）。特别地，$H^1(K, P_n(\mathbb{Z}))$ 作为阿贝尔群的秩为 $(k-1)(n+1)$。现在，根据 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 中 M 的极大性，以及中心扩张

$$1 \to \langle \varepsilon \rangle \to SL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{Z}) \to 1$$

不分裂这一事实，我们可知 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中 K 的上群只有 $K \times \langle \varepsilon \rangle$ 和 $SL_2(\mathbb{Z})$。对于这两者，H^1 都是挠群（由命题 5.4 可知），因此，$H^1(K, P_n(\mathbb{Z}))$ 中任意无限阶的 1-余循环 b 都无法延拓到 K 的上群，而子群 $H = \{(b(k)\ k) : k \in K\}$ 是 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 中的极大 Haagerup 子群。 ■

6 上同调问题：n 偶数

我们将看到，对于 n 偶数，群 $H^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 和 $H^1(GL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 都是无限的，因此情况与 n 奇数时截然不同。

由于 $\rho_n(\varepsilon) = 1$ as n 为偶数，根据引理 2.3 的第二部分，我们可以用 $H^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 替换 $H^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$，同样也可以用 $H^1(PGL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 替换 $H^1(GL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z})$。

6.1 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的情形

S令 $S = \rho_n(s)\ T = \rho_n(t)$，并回忆一下，$S, T$生成 $\rho_n(SL_2(\mathbb{Z})) \simeq PSL_2(\mathbb{Z})$.

引理 6.1. 两个向量在 $P_n(\mathbb{Z})$ 中的赋值 $S \mapsto b(S)\ T \mapsto b(T)$，可以扩展为 $b \in Z^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$，当且仅当 $(1+S)b(S) = 0$ 且 $(1+T+T^2)b(T) = 0$。

证明：将 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 视为自由积 $\langle S \rangle * \langle T \rangle = \langle S, T | S^2 = 1, T^3 = 1 \rangle$。因此，赋值 $S \mapsto b(S)\ T \mapsto b(T)$ 可扩展为 1-余循环，当且仅当它满足 $(S+1)b(S) = 0$（通过利用 1-余循环关系展开 $S^2 = 1$ 得到）以及 $(1+T+T^2)b(T) = 0$（通过利用余循环关系展开 $T^3 = 1$ 得到）。■

定义如下（n为偶数时）：

$$\eta(n) = \begin{cases} 0 & if \quad n \equiv 2 \mod 3 \\ 1 & if \quad n \equiv 0 \mod 3 \\ -1 & if \quad n \equiv 1 \mod 3 \end{cases}$$

定理 6.2。当 n 为偶数时：

$$rk(H^1(PSL_2(\mathbb{Z}), P_n(\mathbb{Z})) = \frac{n+1+3(-1)^{\frac{n}{2}+1}-4\eta(n)}{6} > 0.$$

特别地， $rk(H^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z})) \geq \frac{n-6}{6}$。

证明：由于我们只关注 $H^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 的无挠部分，因此可以在有理数域上进行运算，并计算 $H^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Q}))$ 的 $\mathbb{Q}$-维数。

我们定义 $Z^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Q}))$ 的一个子群如下：

$$Z_0^1 =: \{b \in Z^1(PSL_2(\mathbb{Z}), P_n(\mathbb{Q})) : b(T) = 0\},$$

我们首先注意到，每个余循环 $b \in H^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Q}))$ 都与 Z_0^1 中的一个余循环上同调等价。就仿射作用而言，这是显然的：若与 b 关联的仿射作用是 $\alpha(g)$ $v = gv + b(g)$（其中$v \in P_n(\mathbb{Q})$），那么对任意 $w \in P_n(\mathbb{Q})$，向量 $w_0 =: {}_{13}(w + \alpha(T)$ $w + \alpha(T^2)w)$ 在 $\alpha(T)$ 下不变，因此余边界 $b'(g) = b(g) + gw_0 - w_0$ 在 T 上消失。

因此，令 $m_0 =: \dim\ Z_0^1$ 和 $n_0 =: \dim(Z_0^1 \cap B^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Q})))$，我们有

$$\dim(H^1(PSL_2(\mathbb{Z}), P_n(\mathbb{Q}))) = \dim(Z_0^1/(Z_0^1 \cap B^1(PSL_2(\mathbb{Z}), P_n(\mathbb{Q})))) = m_0 - n_0,$$

并且只需分别计算 m_0 和 n_0。这将分 3 步完成。注意，根据引理 6.1，空间 Z_0^1 可以与 $\ker(S+1)$等同

1. 计算 $m_0 = \dim(\ker(S+1))$。注意，对于 $P \in P_n(\mathbb{Z})$，有 $(SP)(X,Y) = P(Y, -X)$。将 P展开为单项式之和 $P(X,Y) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k} Y^k$，得到

$$(SP)(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k Y^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_{n-k} X^{n-k} Y^k,$$

因此， $SP = -P$ 当且仅当

$$a_k = (-1)^{k+1} a_{n-k} \text{ for every } k = 0, 1, ..., n. \tag{2}$$

因此，我们可以任意选取 $a_0, a_1, ..., a_{n/2-1}$，而当 $n \equiv 0 \bmod 4$ 时，$a_{n/2} = 0$；当 $n \equiv 2 \bmod 4$ 时，$a_{n/2}$ 可以任意选取。因此

$$m_0 = \frac{n+1+(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{2}. \tag{3}$$

2. 我们断言， $Z_0^1 \cap B^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Q}))$ 可与 $\ker(T-1)$ 等同。事实上， $b \in Z_0^1$ 是一个 1-余边界，当且仅当存在 $P \in P_n(\mathbb{Q})$，使得 $b(S) = (S-1)(P)$ 且 $0 = (T-1)(P)$。这又等价于

$b(S) \in (S-1)(\ker(T-1))$。这便将 $Z_0^1 \cap B^1(PSL_2(\mathbb{Z}), P_n(\mathbb{Q}))$ 与 $(S-1)(\ker(T-1))$ 等同起来。

要证明这一结论，还需证明 $(S-1)|_{\ker(T-1)}$ 是单射，即 $\ker(S-1) \cap \ker(T-1) = \{0\}$。但是，由于 S, T生成 $PSL_2(\mathbb{Z})$，空间 $\ker(S-1) \cap \ker(T-1)$ 恰好是 $\rho_n(SL_2(\mathbb{Z}))$-不变向量在$P_n(\mathbb{Q})$中的空间；根据命题 3.1 的第一部分，该空间为 0。

3. 计算 $n_0 = \dim(\ker(T-1))$。由于 $T^3 = 1$，算子 T定义了循环群 C_3的一个表示 σ，而 $n_0 = \dim(\ker(T-1))$ 是该表示中平凡表示的重数。回顾一下，C_3 有 3 个不可约表示，维数均为 1：平凡表示 χ_0 以及由 $\chi_\pm(T) = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$定义的特征标 $\chi_\pm$。现在，σ等价于 n_0 个 χ_0、n_+ 个 χ_+ 以及n_-个 χ_-的直和。注意，$n_+ = n_-$，因为 σ 是实表示。计算 σ 的特征，我们得到

$$n+1 = Tr(1) = n_0\chi_0(1) + n_+\chi_+(1) + n_-\chi_-(1) = n_0 + 2n_+;$$

$$Tr(T) = n_0\chi_0(T) + n_+\chi_+(T) + n_-\chi_-(T) = n_0 - n_+.$$

解这个方程组，得到：n_0

$$rk(\ker(T-1)) = n_0 = \frac{n+1+2Tr(T)}{3}. \tag{4}$$

还需计算 $Tr(T)$，才能得到 n_0 的精确值。我们注意到，ρ_n 可扩展为 $SL_2(\mathbb{C})$ 在空间 $P_n(\mathbb{C})$ 上的一个表示。限制到紧致环面 $T = \{a_\vartheta = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix} : \vartheta \in \mathbb{R}\}$，我们有经典公式（例如参见 [Ha03] 中的公式（7.26））：

$$Tr(\rho_n(a_\vartheta)) = \frac{\sin((n+1)\vartheta)}{\sin(\vartheta)}.$$

由于 t 在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的阶为 6，因此它在 $SL_2(\mathbb{C})$ 中共轭于 $a_{\pi/3}$，于是：

$$Tr(T) = Tr(\rho_n(a_{\pi/3})) = \frac{\sin((n+1)\pi/3)}{\sin(\pi/3)} = \eta(n). \tag{5}$$

利用等式 (3)、(4) 和 (5)，即可得到所需结果。注意，对于 n =2,4,6，我们从下表得到 $m_0 > n_0$：

n	n_0	m_0
2	1	2
4	1	2
6	3	4

(6)

■

推论 6.3. 对于 $n \geq 2$ 偶数，设 M 是命题 5.1 中的 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 的一个自由极大子群；设 $K \simeq M \times \langle \varepsilon \rangle$ 表示 M 在$SL_2(\mathbb{Z})$中的原像。则半直积 $P_n(\mathbb{Z}) \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 含有无穷多个形如 $H = \{(b(g)\ g) : g \in K\}$ 的极大 Haagerup 子群 H，其中$b \in Z^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$，而且它们在 $P_n(\mathbb{Z})$ 下两两不共轭。

证明：设 M 的秩为 k（可能为 $k = \infty$）。由引理 2.3，得$rk(H^1(K, P_n(\mathbb{Z}))$ $= rk(M, P_n(\mathbb{Z}))$ $= (k-1)(n+1)$，因为 M 是自由的。因此由定理 6.2：

$$rk(H^1(K, P_n(\mathbb{Z})) \geq n+1 > \frac{n+1+3(-1)^{\frac{n}{2}+1} - 4\eta(n)}{6} = rk(H^1(SL_2(\mathbb{Z}), P_n(\mathbb{Z})).$$

因此，取 b 上的余循环，其在限制映射 $H^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z})) \to H^1(K, P_n(\mathbb{Z}))$ 的余核中的类具有无限阶，我们便可构造出所需形式的极大 Haagerup 子群。 ■

6.2 GL2(Z) 的情形

我们回顾记号 $S = \rho_n(s)$ $T = \rho_n(t)$，并补充记号 $W =: \rho_n(w)$。注意，对于 $P \in P_n(\mathbb{Z})$，有 $(WP)(X,Y) = P(Y,X)$；特别地，$WP = P$（分别地，$WP = -P$）表示 P 是对称的（分别地，反对称的）。

为了估计 $H^1(GL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 的秩，我们需要以下表示论引理。

引理 6.4。空间 $P_n^0 =: \{P \in P_n(\mathbb{Q}) : P$对称 $TP = P\}$ 的 $\mathbb{Q}$-维数为 $^{n+4+2\eta}{}_{(n)\ 6}$。

证明：我们注意到 P_n^0 在 $\rho_n|_{D_3}$ 作用下不变，因此可以使用二面体群 $D_3 = \langle T, W \rangle$ 的表示论。这个群有 3 个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约表示：平凡特征 χ_0、由 $\chi_1(T) = 1$ 和 $\chi_1(W) = -1$ 定义的非平凡特征 χ_1，以及定义在 $\mathbb{R}^3$ 中的二维不可约表示，其中向量的 3 个坐标之和为 0。D_3 的特征表为：

	e	T	W
χ_0	1	1	1
χ_1	1	1	-1
π	2	-1	0

写出 $\rho_n|_{D_3} = n_0\chi_0 \oplus n_1\chi_1 \oplus n_\pi\pi$。由特征表可知，$P_n^0$的维数恰好是 $\rho_n|_{D_3}$中 χ_0的重数 n_0。为计算 n_0，我们将计算 $\rho_n|_{D_3}$的特征。记 P_n^s（分别为 P_n^a）为 $P_n(\mathbb{Q})$ 中对称（分别为反对称）多项式构成的子空间。那么

$$Tr(W) = \dim(P_n^s) - \dim(P_n^a) = (\frac{n}{2}+1) - \frac{n}{2} = 1,$$

因此， $\rho_n|_{D_3}$ 的特征为:

$$n+1 = Tr(1) = n_0 + n_1 + 2n_\pi;$$

$$Tr(T) = n_0 + n_1 - n_\pi;$$

$$1 = Tr(W) = n_0 - n_1.$$

解出 n_0，并使用公式 (5)，即可得到所需结果。 ■

定理 6.5。对于偶数 n，我们有

$$rk(H^1(GL_2(\mathbb{Z}), P_n(\mathbb{Z})) = \frac{n-5+3(-1)^{\frac{n}{2}+1} - 4\eta(n)}{12}.$$

特别地， $rk(H^1(GL_2(\mathbb{Z}) \ P_n(\mathbb{Z}))) \geq \frac{n-12}{12}$ 。

证明：至于 $SL_2(\mathbb{Z})$，我们将在有理数域上进行处理。我们将用到群上同调中 Hochschild–Serre 长正合列的一部分，即：如果 G 是一个群， $N \triangleleft G$ 是一个正规子群，且 V 是一个 G-模并满足 $V^G = 0$，那么限制映射 $H^1(G,V)$ $\to H^1(N,V)^{G/N}$ 是同构（参见 [Gu80] 中的第 8.1 节）。

我们将其应用于 $V = P_n(\mathbb{Q})$ $G = GL_2(\mathbb{Z})$ 和 $N = SL_2(\mathbb{Z})$，因此 $G/N = \langle W \rangle$ 的阶为 2。因此，我们必须求出 $H^1(PSL_2(\mathbb{Z}) \ P_n(\mathbb{Q}))$ 上的 W-不变部分。这相当于求 $Z^1(PSL_2(\mathbb{Z}) \ P_n(\mathbb{Q})$ 中的 W-不变部分，并除以 $B^1(PSL_2(\mathbb{Z}) \ P_n(\mathbb{Q}))$ 中的 W-不变部分。当然，我们将利用这样一个事实： $P_n(\mathbb{Q})$ 的子空间中的 W-不变部分正是该子空间中的对称多项式。

根据定理 6.2 证明开头的结论， $Z^1(SL_2(\mathbb{Z}) \ P_n(\mathbb{Q})$中的每个余循环都与 Z_0^1中的某个余循环上同调，而 Z_0^1与 ker$(S+1)$ 同构。由公式 (2)，多项式 $P(X,Y)$ $= \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} Y^k$ 属于 ker$(S+1)$，当且仅当$a_k = (-1)^{k+1} a_{n-k}$对每个 $k = 0$, 1，...， n都成立。因此，多项式 $P(X,Y)$ 对称，当且仅当偶数 k 时 $a_k = 0$ ，奇数 k时 $a_k = a_{n-k}$ 。于是我们得到:

$$\dim(Z_0^1)^W = \frac{n+1+(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{4}. \tag{7}$$

现在我们来计算 $(Z_0^1 \cap B^1(PGL_2(\mathbb{Z}) \ P_n(\mathbb{Q})))^W$ 的维数。与定理 6.2 证明的第三步一样，利用 $SW = WS$，我们首先将这个空间识别为 $(S-1)$(ker$(T-1) \cap$ ker$(W-1))$，其次识别为 ker$(T-1) \cap$ ker$(W-1)$，后者是引理 6.4 中的子群 P_n^0：其维数为 $\frac{n+4+2\eta_{(n)}}{6}$ 。

总结如下：由 (7) 可得:

$$\dim(H^1(GL_2(\mathbb{Z}) \ P_n(\mathbb{Z})) = \dim(Z_0^1)^W - \dim(Z_0^1 \cap B^1(PGL_2(\mathbb{Z}) \ P_n(\mathbb{Q})))^W$$

$$= \frac{n+1+(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{4} - \frac{n+4+2\eta(n)}{6}$$

$$= \frac{n-5+3(-1)^{\frac{n}{2}+1}-4\eta(n)}{12}.$$

显然，该量的下界为 $\frac{n-12}{12}$。 ■

由此我们进入定理 1.5 的证明。

定理 1.5 的证明：只需证明限制映射 $H^1(GL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z})) \to H^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 的余核的秩为 >0。比较定理 6.2 和定理 6.5 中的公式即可得到这一结论。事实上，我们有

$$\frac{n+1+3(-1)^{\frac{n}{2}+1}-4\eta(n)}{6}-\frac{n-5+3(-1)^{\frac{n}{2}+1}-4\eta(n)}{12}=\frac{n+7+3(-1)^{\frac{n}{2}+1}-4\eta(n)}{12}>0$$

其中，不等式由 $7+3(-1)^{\frac{n}{2}+1}-4\eta(n)\geq 0$ 得出。 □

例 2. 对于 $n=2$，4，我们可以给出显式的余循环，证明限制映射 $Rest: H^1(GL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z})) \to H^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 的像具有无限指数。

回顾定理 6.2 的证明，我们定义了 $Z_0^1 =: \{b \in Z^1(PSL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z})) : b(T)=0\}$，并将其自然地识别为 $\ker(1+S)$。对于 $a\in\mathbb{Z}$，通过规定以下内容来定义 $b_a \in Z^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$:

$$(b_a(S))(X,Y)=a(X^n-Y^n);\ b_a(T)=0;$$

由 (2) 可得 $b_a(S)\in\ker(1+S)$，因此 $b_a\in Z_0^1$。我们首先证明，对于 $a\neq 0$，余循环 b_a 在 H^1 中非零。

假设 b_a 是一个余边界。根据定理 6.2 证明的第 3 步，空间 $Z_0^1\cap B^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 自然地同构于 $(S-1)(\ker(T-1))$。对于 $n=2,4$，由表 (6) 可知 $rk(\ker(T-1))=1$。对于 $n=2$，空间 $\ker(T-1)$ 由 X^2-XY+Y^2 生成（这是 $\mathbb{Z}^2$ 上的一个 t-不变二次型），直接计算可得 $(S-1)(X^2-XY+Y^2)=2XY$，从而推出 $a=0$。对于 $n=4$，我们将 X^2-XY+Y^2 替换为 $(X^2-XY+Y^2)^2$，并以类似方式进行。

最后，由于 b_a 是反对称的，对于 $a\neq 0$，它在 H^1 中的类显然不属于 $H^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))^W$，后者是限制映射 $H^1(GL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z})) \to H^1(SL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 的像。

回到定理 6.5，我们注意到，对于 $n=2$，4、6、8、12，$rk(H^1(GL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z})))=0$。这意味着，对于这些取值，$H^1(GL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 是一个有限群。我们将证明它非零。

推论 6.6。固定一个偶数 $n\geq 2$。定义

$$m=\begin{cases} n/4 & if \quad n\equiv 0 \mod 4 \\ (n+2)/4 & if \quad n\equiv 2 \mod 4. \end{cases}$$

那么 $H^1(GL_2(Z)\ P_n(\mathbb{Z}))$ 的阶至少为 2^m。

证明：我们先给出两个观察。

1. 一个 1-余循环 $b \in Z_0^1$，若 $b(S)$ 是对称的，则可通过规定 $b(W) = 0$，将其从 $PSL_2(\mathbb{Z})$ 延拓到$PGL_2(\mathbb{Z})$。事实上， $PGL_2(\mathbb{Z}) \simeq D_2 *_{C_2} D_3$，其中 $C_2 = \langle W\rangle, D_2 = \langle S, W\rangle, D_3 = \langle T, W\rangle$。因此，根据余循环关系， b可通过 $b|_{D_3} = 0$ 延拓到 D_3，并可通过定义 $b(SW) = b(S)$ 延拓到 D_2；由于 $b(S)$ 对称，这确实等于 $b(WS) = Wb(S)$。因此， b 可延拓到 amalgamated 积。

2. 如果余循环 $b \in Z^1(PGL_2(\mathbb{Z})\ P_n(\mathbb{Z}))$ 满足 $b(W) = 0$，且它是一个余边界，那么存在 $P \in P_n(\mathbb{Z})$，使得 $(W-1)P = 0$ （即 P 对称），并且$b(S) = (1-S)P$。但是，$SP(X,Y) = P(Y,-X) = P(-X,Y)$（由对称性），因此，设 $P(X,Y) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} a_k (X^{n-k}Y^k + X^kY^{n-k}) + a_{n/2}X^{\frac{n}{2}}Y^{\frac{n}{2}}$，我们得到

$$((1-S)P)(X,Y) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} a_k(1-(-1)^k)(X^{n-k}Y^k + X^kY^{n-k}) + a_{n/2}(1-(-1)^{\frac{n}{2}})X^{\frac{n}{2}}Y^{\frac{n}{2}},$$

因此 $(1-S)P$ 只有偶数系数。

现在我们来证明定理本身。对于 $\varepsilon \in \{0,1\}^m$，定义 $b_\varepsilon(T) = 0$ 并且

$$b_\varepsilon(S)(X,Y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k (X^{n-2k+1}Y^{2k-1} + X^{2k-1}Y^{n-2k+1}) & if \quad n \equiv 0 \mod 4 \\ \sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k (X^{n-2k+1}Y^{2k-1} + X^{2k-1}Y^{n-2k+1}) + \varepsilon_m X^{\frac{n}{2}}Y^{\frac{n}{2}} & if \quad n \equiv 2 \mod 4. \end{cases}$$

注意，由 (2) 可知 $(S+1)b_\varepsilon(S) = 0$，因此根据引理 6.1，我们得到一个余循环$b_\varepsilon \in Z_0^1$，使得 $b_\varepsilon(S)$ 对称。于是，根据证明中的第一个观察，我们可以通过 $b_\varepsilon(W) = 0$ 将其扩展为 $PGL_2(\mathbb{Z})$。

另一方面，如果 ε_1、ε_2 是 $\{0,1\}^m$ 中不同的元素，那么 $(b_{\varepsilon_1} - b_{\varepsilon_2})(S)$ 至少有一个奇数系数，因此根据上面的第二个观察， $b_{\varepsilon_1} - b_{\varepsilon_2}$ 不可能是余边界。 ■

6.3 一个组合应用

我们以一个有趣的组合推论结束本文，该推论来自我们对定理 6.2 的证明。对于偶数 n，其和

$$\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix},$$

这是帕斯卡三角形中一条对角线上的交错和，可以通过组合方法计算（见 [BQ08]）。我们给出一个表示论推导。

推论 6.7. 对于偶数 n:

$$\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} = \eta(n)$$

。证明：根据公式 (5)，只需证明左边等于 $Tr(T) = Tr(T^{-1})$。为此，我们注意到，对于 $P \in P_n(\mathbb{R})$，有 $T^{-1}(P)(X,Y) = P(X-Y,X)$。因此，在典范基 $X^n, X^{n-1}Y, ..., XY^{n-1}, Y^n$ 中，对于$k = 0, 1, ..., n$，有：

$$(T^{-1})(X^{n-k}Y^k) = X^k(X-Y)^{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n-k}(-1)^\ell \begin{pmatrix} n-k \\ \ell \end{pmatrix} X^{n-\ell}Y^\ell.$$

在最后一个求和中，如果 $k > \frac{n}{2}$，则不会出现项 $X^{n-k}Y^k$；如果$0 \leq k \leq \frac{n}{2}$，则该项的系数为 $(-1)^k \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix}$。换言之， T^{-1} 在典范基下的矩阵的第 k 个对角系数为

$$\begin{cases} 0 & if \quad k > \frac{n}{2} \\ (-1)^k \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} & if \quad k \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

由此得到 T^{-1} 的迹：

$$Tr(T^{-1}) = \sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix}.$$

■

参考文献

[BQ08] A.T. Benjamin 和 J.J. Quinn, 《交错和的另一种方法：一种值得一试的方法》, College Math. J. 39 (2008), 191-201.[Br82] K.S. Brown, 《群上同调》, Grad. Texts in Math. 87, Springer Verlag 1982.[BT16] M. Bucher 和 A. Talambutsa, 《自由积与 amalgamated 积的指数增长率》, Israel Journal of Mathematics 212 (2016), 521-546.[Bur91] M. Burger, 《$SL(3,\mathbb{Z})$的 Kazhdan 常数》, J. reine angew. Math. 413 (1991), 36-67.[CCJJV]P.-A. Cherix、M. Cowling、P. Jolissaint、P. Julg和 A. Valette, 《具有 Haagerup 性质的群》。Birkh¨auser, Progress in Math. 197, 2001.[Co09] Y. Cornulier, 《作用于树上的群中的无限共轭类》, Groups Geom. Dyn. 3 (2009) 267-277。

[FLMS22] P. Fima、F. Le Maître、S. Moon 和 Y. Stalder，《作用于树上的群的高传递性刻画》，Discrete Analysis 2022:8, 63 pp, https://doi.org/10.19086/da.37645[Gu80] A. Guichardet，《拓扑群与李代数的群上同调》，Textes math´ematiques, Cedic-Nathan, 1980.[Ha03] B.C. Hall，《李群、李代数与表示》，Springer Grad. Texts in Math. 222, 2003.[Ji21] Y. Jiang，《 $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}))$中的极大Haagerup子代数》，J. Op- erator Theory 86 (2021), 203-230.[JS21] Y. Jiang 和 A. Skalski，《具有 Haagerup 性质的极大子群与冯·诺伊曼子代数》，Groups Geom. Dyn. 15 (2021), no. 3, 849-892.[Jo02] P. Jolissaint，《有限冯·诺伊曼代数的 Haagerup逼近性质》，J. Operator Theory 48 (2002), 549-571.[Se77] J.-P. Serre，《树、amalgames、 SL_2》，Ast´erisque 46, Soc. Math. France, 1977.[Zim] R.J. Zimmer，《遍历理论与半单群》，Monographs i n Math., Springer, 1984。作者地址：

纳沙泰尔大学数学研究所 11
埃米尔·阿尔冈街—Unimail
CH-2000 纳沙泰尔—瑞士
alain.valette@unine.ch