arXiv:2303.06454v1 [math.GR] 11 Mar 2023

离散赋值环、分拆与p-群 I

BOUBAKEUR BAHRI 和 YASSINE GUERBOUSSA

谨以此文缅怀 *Mohsen S. Ghoraishi*（*...-2022*）。

摘要。具有自同构 x （满足 $1+\ldots+x^{p-1}=0$）的有限阿贝尔 p-群，可视为适当离散赋值环 $\mathcal{O}$ 上的模，其中该环包含 $\mathbb{Z}_p$ （p-进整数环）。这引出了一个自然问题：比较 A 作为 $\mathbb{Z}_p$-模时的不变量与其作为 $\mathcal{O}$-模时的不变量。我们在更一般的背景下解决了后一个问题，并给出了一些关于某些 p-群的结构及其自同构的应用。

关键词： p-群、整数分拆、离散赋值环。

1. 引言；主要结果

设 $\mathfrak{o}$和 $\mathfrak{O}$ 是两个离散赋值环，其极大理想分别为 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{P}$，并假设存在一个嵌入 $\rho:\mathfrak{o}\to\mathfrak{O}$，且$\mathfrak{O}$是有限生成的 $\mathfrak{o}$-模。因此，剩余域 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 嵌入到 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$中，且相应的扩张次数 $d=[\mathfrak{O}/\mathfrak{P}:\mathfrak{o}/\mathfrak{p}]$ 是有限的。此外，由于 $\mathfrak{p}\mathfrak{O}\neq\mathfrak{O}$ （根据中山引理），存在唯一的整数$e\geq 1$ 使得 $\mathfrak{p}\mathfrak{O}=\mathfrak{P}^e$。

记 $\mathcal{F}_{\mathfrak{O}}$ （分别为 $\mathcal{F}_{\mathfrak{o}}$）为 $\mathfrak{O}$（分别为 $\mathfrak{o}$）上的有限生成挠模范畴。对于 $\mathcal{F}_{\mathfrak{O}}$中的对象 M，记ρ_*M 为将 M 限制标量至 $\mathfrak{o}$后得到的 $\mathfrak{o}$-模。由于 $\mathfrak{O}$ 是 $\mathfrak{o}$上的有限生成模，且 $e\geq 1$，可知 ρ_*M 属于 $\mathcal{F}_{\mathfrak{o}}$；因此我们有一个从 $\mathcal{F}_{\mathfrak{O}}$ 到 $\mathcal{F}_{\mathfrak{o}}$的典范加性函子 $M\mapsto\rho_*M$。现在，由于 $\mathfrak{O}$ 是主理想整环，与 M对应的是唯一的分拆 $\lambda=(n_1,\ldots,n_s)$，使得

$$M\cong\bigoplus_{i=1}^{s}\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{n_i}.$$

类似地，存在唯一的分拆 $\rho_*(\lambda)=(m_1,\ldots,m_r)$，使得

$$\rho_*M=\bigoplus_{i=1}^{r}\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{m_i}.$$

日期：2023年3月14日。

因此，自然会提出这样一个问题：确定上述不变量 $(n_1,\dots,n_s)$ 与 $(m_1,\dots,m_r)$ 之间的关系；换言之：

问题 1.1. 对于满足上述假设的所有 $\mathfrak{o}$、$\mathfrak{O}$ 和 $\rho\colon\ \mathfrak{o}\to\mathfrak{O}$，求相应的映射 $\lambda\mapsto\rho_*(\lambda)$。

这个问题源于研究有限 p-群的自同构时经常遇到的一种情形。后一种情形是指一个阿贝尔有限p-群 A，其上有一个循环群 $\langle x\rangle$ 作用，并且满足

$$a\cdot(1+x+\cdots+x^{p-1})=0,\quad \text{for all } a\in A. \tag{1}$$

（也就是说，x 在 A上诱导出一个阶为 p 的分裂自同构。）

在这种情况下，A 具有自然的 $\mathbb{Z}_p$ -模结构（其中 $\mathbb{Z}_p$ 是 p-进整数环）。此外，x 对 A的作用自然地扩张到多项式环 $\mathbb{Z}_p[X]$上，其中 X 在 A 上的作用为端同态 $x-1$，也就是说，对所有 $a\in A$ 和所有 $f\in\mathbb{Z}_p[X]$，均有 $a\cdot f=a\cdot f(x-1)$。

Set $g=\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}X^{i-1}$. Plainly, we have $g=((X+1)^p-1)/X$, so

$$g(x-1)=1+x+\cdots+x^{p-1},\quad \text{and}\quad A\cdot g=0.$$

因此，A 实际上是一个 $\mathfrak{O}=\mathbb{Z}_p[X]/(g)$-模。此外，由于 g 是艾森斯坦多项式，$\mathfrak{O}$ 是一个离散赋值环，其极大理想为$\mathfrak{P}=(\pi)$，其中 π 表示 X 在 $\mathfrak{O}$ 中的典范像（参见 [13, 第一章，第6]节；另见第 5 节）。总之，我们得到以下事实（在下文中将不加证明地使用）。

$(*)$ 若 A 是有限阿贝尔 p-群，且 $\langle x\rangle$ 是作用于 A 并满足条件 *(1)* 的循环群，则在该作用下，A 是离散赋值环 $\mathfrak{O}=\mathbb{Z}_p[X]/(g)$ 上的一个模

$$a\cdot f(\pi)=a\cdot f(x-1),\quad \textit{for all } a\in A \textit{ and all } f\in\mathbb{Z}_p[X],$$

其中 π 表示 X 在 $\mathfrak{O}$ 中的典范像。

在上述情形下，我们可以比较 A 作为阿贝尔 p-群（等价地，作为 $\mathbb{Z}_p$-模）的不变量与其作为 $\mathbb{Z}_p[X]/(g)$ 上的模的不变量。换言之，我们由此得到问题 1.1，其中 $\mathfrak{o}=\mathbb{Z}_p$ 和 $\mathfrak{O}=\mathbb{Z}_p[X]/(g)$。如下文所示，解决后一个问题可为 A 的结构带来有用的限制，这些限制可应用于若干情形，尤其是研究有限 p-群的自同构时。

我们先给出问题 1.1 的解答；需要引入一些记号。对于分拆 $\lambda=(n_1,\dots,n_s)$，我们用 $\ell(\lambda)$ 表示 λ 的长度，用 $|\lambda|$ 表示其各部分之和，即 $\ell(\lambda)=s$，且 $|\lambda|=\sum_{i=1}^{s}n_i$。若$l$ 是一个正整数，则记 $\lambda_{e,\,l}$ 为由满足 $(l-1)e<n_j\le le$ 的部分 n_j 构成的 λ 的子分拆（回忆一下，e 是满足 $\mathfrak{p}\mathfrak{O}=\mathfrak{P}^e$ 的正整数）。我们将 λ 在 (e,l) 处的权 $w_{e,\,l}(\lambda)$ 定义为

$$w_{e,l}(\lambda)=\sum_{n_j}(n_j-(l-1)e),$$

其中 n_j 遍历 $\lambda_{e,\ l}$ 的所有分量。若$\lambda_{e,\ l}$ 为空，则令$\ell(\lambda_{e,\ j})=|\lambda_{e,\ j}|=0$。显然，我们有

$$w_{e,l}(\lambda)=|\lambda_{e,l}|-\ell(\lambda_{e,l})(l-1)e. \tag{2}$$

最后，我们需要以下关键结果：

$$f_{e,l}(\lambda)=\ell(\lambda_{e,l+1})e-w_{e,l+1}(\lambda)+w_{e,l}(\lambda). \tag{3}$$

定理 1.2. 设 M 是 $\mathcal{F}_{\mathfrak{O}}$ 中的一个对象， λ 是其对应的分拆。则，

$$\rho_*M\cong\bigoplus_{i\geq1}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^i)^{f_{e,i}(\lambda)d}.$$

用 $(1^{a_1}\dots i^{a_i}\dots)$ 表示每个 i 出现 a_i 次的分拆，由此可知，与 ρ_*M 对应的分拆 $\rho_*(\lambda)$ 等于

$$\rho_*(\lambda)=(1^{f_{e,1}(\lambda)d}\dots i^{f_{e,i}(\lambda)d}\dots).$$

取 $\mathfrak{o}=\mathbb{Z}_p$ 和 $\mathfrak{O}=\mathbb{Z}_p[X]/(g)$，其中 $g=\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}X^{i-1}$。我们有 $\mathfrak{P}=(\pi)$，其中 π 是 X 在 $\mathfrak{O}$ 中的典范像，而 $p\mathfrak{O}=\mathfrak{P}^{p-1}$ （因此 $e=p-1$）。剩余域为 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，故 $d=1$。另请注意，对所有 $n\geq1$，都有 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^n\cong\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$。将这些数据代入定理 1.2，得到如下结果。

推论 1.3. 设 A 是一个有限阿贝尔 p-群，且 $\langle x\rangle$ 是一个作用于 A上的循环群，使得 $A\cdot(1+\dots+x^{p-1})=0$。若 λ是将 A 视为 $\mathfrak{O}=\mathbb{Z}_p[X]/(g)$上的模时所对应的分拆，则

$$A\cong\bigoplus_{i\geq1}\mathbb{Z}/p^{f_{p-1,i}(\lambda)}\mathbb{Z}.$$

特别地，对于 $\lambda=(n)$，我们有

$$A\cong(\mathbb{Z}/p^{l+1}\mathbb{Z})^r\oplus(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^{p-r-1},$$

其中 $n=l(p-1)+r$，且 $0<r\leq p-1$。

事实上，可以通过 $\langle x\rangle$得到 A 的任意扩张 H 的结构的详细信息。下文中，$\gamma_n(H)$表示 H的下中心列的第 n项，而 $d(H)$表示其生成元的最少个数。

定理 1.4. 设 A 是一个非平凡有限阿贝尔 p-群， $\langle x\rangle$ 是一个作用于 A上的循环p-群，使得 $A\cdot(1+\dots+x^{p-1})=0$，且 H是 A由 $\langle x\rangle$扩张得到的任意扩张。若 $\lambda=(n_1,\dots,n_s)$是将 A视为 $\mathfrak{O}=\mathbb{Z}_p[X]/(g)$上的模时所对应的分拆，则

(i) 对于每个 $n\geq1$，都有 $\gamma_{n+1}(H)=A\cdot\mathfrak{P}^n$。(ii) H是幂零类为 n_1的幂零群，且 A的指数为 p^m，其中 $m=\lceil\frac{n_1}{p-1}\rceil$（也就是说， m是最小的整数 $\geq\frac{n_1}{p-1}$）。(iii) 对于每个 $n\geq1$，都有 $A^{p^n}=\gamma_{np-n+1}(H)$（注意， A^{p^n} 在加法记号中对应于 p^nA）。

(iv) 对于每个 $j \geq 2$, $\gamma_j(H)/\gamma_{j+1}(H)$ 都是秩为 d_j 的初等阿贝尔群，其中 d_j 是 λ 中为 $\geq j$ 的部分的数量。(v) $A/\gamma_2(H)$ 是秩为 $d_1 = \ell(\lambda)$ 的初等阿贝尔群，并且

$$d(A) = \sum_{j=1}^{p-1} d_j.$$

注意到 $(d_1, d_2, \ldots)$ 正是分拆 λ 的共轭；因此，λ 可以由 H 的下中心列各因子覆盖。$Z_n(H)$ 的上中心列各项也可类似确定。例如，$Z(H)$ 由 $\langle x^p \rangle$ 和 A 的子群 $A^{\langle x \rangle}$ 生成，该子群由 x 下的不动元构成；容易看出，$A^{\langle x \rangle} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathfrak{P}^{n_i-1}/\mathfrak{P}^{n_i}$ 是初等阿贝尔群，其秩为 $\ell(\lambda)$。

为了说明推论 1.3 和定理 1.4 在研究有限 p-群的自同构时的用途，我们将证明以下结果。

定理 1.5。设 G 是有限非阿贝尔 p-群，且 $Z(\Phi(G))$（即 *Frattini* 子群的中心）可由 $p-2$ 个元素生成。那么 G 有一个阶为 p 的非内自同构，该自同构逐个固定 $\Phi(G)$ 元素。

上述结果尤其证实了非内自同构猜想（见 [10, 问题 4.13]）：每个有限非阿贝尔 p<style id='8'}-群都有阶为 p 的非内自同构，这适用于另一类 p-群。关于这一猜想的更多信息和参考文献，见 Ghoraishi [9]。事实上，定理 1.5 改进了 [9], 中的主要结果，该结果表明，对于满足$|\Phi(G)| \leq p^5$的 p-群，猜想成立。结合我们的结果以及当 $\Phi(G)$ 为阿贝尔群时猜想成立这一事实，可知当 $|\Phi(G)| \leq p^p$ 时猜想也成立（注意，后一个界可以改进为 p^{p+1}）。

Gaschütz [6, 7], 和 Schmid [14], 的早期研究揭示了 p-自同构与有限 p-群的上同调性质之间的相关关系，这一关系可应用于非内自同构猜想（另见 Abdollahi[1], 和 [4]）。我们对定理 1.5 的证明依赖于上同调；下面将证明相应结果。

定理 1.6。设 Q 是一个非循环有限 p-群，且 $A \neq 0$ 是一个同时也是有限 p-群的 Q-模。若 A 可由 $p-2$ 个元素生成（作为阿贝尔群），则 A 不是上同调平凡的。

这里不妨回顾一下：若对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 和所有 $S \leq Q$，Tate 上同调群 $H^n(S, A)$ 均为零，则称 A 是一个 Q-模上同调˜平凡。

值得注意的是，推论 1.3 和定理 1.4 可以进一步推广，得到类似定理 1.6 和 1.5 的结果，不过这会远远超出本文的目标（参见第 4 节）。我们将在另一篇论文中继续探讨这一问题。

定理 1.2 和 1.4 的证明分别见第 2 节和第 3 节。在第 4 节中，我们讨论如何通过非内自同构猜想来

上同调，以及在此背景下如何利用推论 1.3 和定理 1.4；定理 1.5 和 1.6 的证明也在该节给出。在第 5 节中，我们讨论其他应用、推广，以及与问题 1.1 相关的一些组合问题。

2. 定理 1.2 的证明

首先注意，对所有整数 $i, j \geq 1$， $\mathfrak{o}$-模 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^j$ 和 $\mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{j+i}$同构（ $\mathfrak{o}$-线性映射 $x \mapsto \pi^i x$诱导了这样的同构，其中 π 是 $\mathfrak{O}$的一个一致化元）。

引理 2.1. $\mathfrak{o}$-模 $\mathfrak{O}$ 是秩为 ed的自由模，并且

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^{rd}, \quad for\ all\ r = 1, \ldots, e.$$

（这里，（$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$）^{n} 表示 n 个 $\mathfrak{o}$-模 k的直和。）

证明。 根据假设， $\mathfrak{O}$ 是一个无挠有限生成的 $\mathfrak{o}$-模，因此存在一个整数 $n \geq 1$, 使得 $\mathfrak{O}$ 是 n 个 $\mathfrak{o}$的直和。由此可得 $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}\mathfrak{O} \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^n$。另一方面，由于 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ 在 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$上的次数为 d，我们有 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P} \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^d$，所以 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ 在 $\mathfrak{o}$上的长度为 d 。现在，由于 $\mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1} \cong \mathfrak{O}/\mathfrak{P}$，对所有 $r \geq 1$， $\mathfrak{o}$-模 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r$ 的长度为 rd。对于$1 \leq r \leq e$，我们有 $\mathfrak{p}\mathfrak{O} = \mathfrak{P}^e \subseteq \mathfrak{P}^r$，因此 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r$ 是 $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}\mathfrak{O} \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^n$的一个商；于是 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^{rd}$，如所述。取 $r = e$，立即得到 $n = ed$，从而完成证明。□

接下来，我们将确定所有$n \geq 1$时 $\mathfrak{o}$-模 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n$ 的结构。

命题 2.2. 设 n 为正整数，并写作 $n = le + r$，其中$0 < r \leq e$。那么，

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{l+1})^{rd} \oplus (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)^{(e-r)d},$$

证明。 首先，若 $l = 0$，则 $n = r \leq e$，因此由引理 2.1， $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^{rd}$，如所述。

其次，若 $n = le$，则 $\mathfrak{P}^n$ =$(\mathfrak{p}\mathfrak{O})^l$；因此 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n = \mathfrak{O}/\mathfrak{p}^l\mathfrak{O}$，并且由引理 2.1 的第一部分可得$\mathfrak{O}/\mathfrak{p}^l\mathfrak{O} \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)^{ed}$；故此时结论成立。

对于一般情形，写作

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{m_1} \oplus \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{m_t},$$

其中 $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_t \geq 1$。我们有 $\mathfrak{p}^l(\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n) = \mathfrak{P}^{el}/\mathfrak{P}^n$，它与 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r$ 同构；因此根据第一种情形， $\mathfrak{p}^l(\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n) \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^{rd}$。另一方面，我们有

$$\mathfrak{p}^l(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{m_i}) = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{p}^{\min\{l,m_i\}}/\mathfrak{p}^{m_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\max\{m_i-l,0\}}.$$

因此， $m_i - l = 1$对于 $i = 1$, ..., rd; 而 $m_i \le l$对于 $i = rd+1$, ..., t。此外, $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n$ 对 $\mathfrak{p}^l(\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n)$ 的商显然与 $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}^l\mathfrak{O} = \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{el}$ 同构；因此根据第二种情形, $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}^l\mathfrak{O} \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)^{ed}$。因此,

$$\bigoplus_{i=1}^{t} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\min\{l,m_i\}} \cong (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)^{ed}.$$

因此， $t = ed$, 并且对于所有 $i = rd+1$, ..., ed, $m_i = l$；结论得证。 □

为完成定理 1.2 的证明，令 M 为 $\mathcal{F}_{\mathfrak{O}}$ 的一个对象， λ 为其对应的分拆。假设 l 是使得 $\lambda_{e,\ l}$ 非空的最大整数，并令 $n_1 \ge \ldots \ge n_a$ 为 $\lambda_{e,\ l}$ 的各分量。令 j 为满足 $n_1 = \ldots = n_j = le$ 的最大指数；于是 $n_i = (l-1)e + r_i$，其中 $0 < r_i < e$，对 $i = j+1$, ..., a 均成立。根据命题 2.2, $\lambda_{e,\ l}$ 的各分量给出 $\rho_* M$ 的一个直因子，其形式为

$$[(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)^{je} \oplus ((\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)^{\sum_{i=j+1}^{a} r_i} \oplus (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{l-1})^{(a-j)e-\sum_{i=j+1}^{a} r_i})]^d.$$

现在注意到， $je + \sum_{i=j+1}^{a} r_i$ 不过是权 $w_{e,\ l}(\lambda)$，而 a 只是 $\lambda_{e,\ l}$ 的长度；因此上式可写为

$$[(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)^{w_{e,l}(\lambda)} \oplus (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{l-1})^{\ell(\lambda_{e,l})e - w_{e,l}(\lambda)}]^d.$$

类似地，$\lambda_{e,\ l-1}$ 在 $\rho_* M$ 中诱导出一个形如

$$[(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{l-1})^{w_{e,l-1}(\lambda)} \oplus (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{l-2})^{\ell(\lambda_{e,l-1})e - w_{e,l-1}(\lambda)}]^d.$$

由此可知， $\rho_* M$ 的典范分解中包含的 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{l-1}$ 的个数等于$f_{e,\ l-1}(\lambda)d$。此外， $\rho_* M$ 中包含的 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$ 的个数为$w_{e,\ l}(\lambda)d$，这与$f_{e,\ l}(\lambda)d$ 相同，因为$\ell(\lambda_{e,\ l+1}) = w_{e,\ l+1}(\lambda) = 0$。用同样的方法对 $i = l-2, \ldots, 1$ 进行论证，可知 $\rho_* M$ 中包含的 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^i$ 的个数等于 $f_{e,\ i}(\lambda)d$，证明至此完成。

3. 定理 1.4 的证明

对于 $a \in A$，元素 $a \cdot (x-1)$ 显然与 H中的交换子$[a, x]$ 相同。我们断言

$$\gamma_{n+1}(H) = A \cdot (x-1)^n, \quad \text{for all } n \ge 1. \tag{4}$$

包含关系 $A \cdot (x-1)^n \subseteq \gamma_{n+1}(H)$ 显然成立。为证明反向包含，我们对 n 使用归纳法。首先注意，每个 $h \in H$ 都可写成 $h = bx^i$，其中 $b \in A$, 且 $i \ge 1$ 为某个整数。利用事实 $(x^i - 1) = (1 + \cdots + x^{i-1})(x-1)$，可得

$$[a, h] = [a, x^i] = a \cdot (x^i - 1) \in [A, H],$$

即 $[A, H] \le A \cdot (x-1)$。现在，由于 $A/[A, H]$ 在 $H/[A, H]$ 中是中心的，且H/A 是循环群，商群 $H/[A, H]$ 是阿贝尔群；因此 $\gamma_2(H) \le [A, H]$。这就证明了 $n = 1$的情形。接下来，假设 (4) 对某个 $n \ge 1$成立，并令$a \in \gamma_{n+1}(H)$。如上所述，我们可以写成 $[a, h] = a' \cdot (x-1)$，其中 $a' \in \gamma_{n+1}(H)$。

根据假设， $a' \in A\cdot(x-1)^n$，所以 $[a,h]\in A\cdot(x-1)^{n+1}$，这证明了$\gamma_{n+2}(H)$ $\subseteq A\cdot(x-1)^{n+1}$；结论得证。

回忆一下， A 上的 $\mathfrak{O}$-模结构定义为：对于 $a\in A$和 $f\in\mathbb{Z}_p[X]$， $a\cdot f(\pi)=a\cdot f(x-1)$；由此有 $A\cdot(x-1)^n=A\cdot\pi^n=A\cdot\mathfrak{P}^n$。根据 (4)，对于所有 $n\geq 1$， $\gamma_{n+1}(H)=A\cdot\mathfrak{P}^n$；这就证明了 (i)。

根据假设， $\mathfrak{O}$-模 A 满足

$$A\cong\bigoplus_{i=1}^{s}\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{n_i},$$

又因为 $A\neq 0$，可知 n_1 是满足 $A\cdot\mathfrak{P}^{n_1}=0$的最小正整数；因此由 (i) 可知， H 的幂零类为 n_1。此外，若我们写作 $n_1=l(p-1)+r$，其中 $0<r\leq p-1$；那么根据推论 1.3，我们有

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{n_1}\cong(\mathbb{Z}/p^{l+1}\mathbb{Z})^r\oplus(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^{p-r-1}.$$

显然， $\mathbb{Z}/p^{l+1}\mathbb{Z}$是 A 作为阿贝尔群的分解中所含的一个极大循环 p-群；因此 A 的指数为 p^{l+1}，并且显然 $l+1=\lceil\frac{n_1}{p-1}\rceil$。这就证明了 (ii)。

对于 (iii)，注意到对于每个 $n\geq 1$ ，我们都有 $p^n\mathfrak{O}=\mathfrak{P}^{n(p-1)}$；因此用加法记号表示， $p^nA=A\cdot p^n\mathfrak{O}=A\cdot\mathfrak{P}^{n(p-1)}$；现在由 (i) 可立即得到结论。

接下来，注意到对于每个整数 $j\geq 2$，我们都有

$$\gamma_j(H)=A\cdot\mathfrak{P}^{j-1}\cong\bigoplus_{i=1}^{s}\mathfrak{P}^{\min\{n_i,j-1\}}/\mathfrak{P}^{n_i}.$$

因此，

$$\gamma_j(H)/\gamma_{j+1}(H)\cong\bigoplus_{i=1}^{s}\mathfrak{P}^{\min\{n_i,j-1\}}/\mathfrak{P}^{\min\{n_i,j\}}.$$

对于 $n_i\leq j-1$， 商 $\mathfrak{P}^{\min\{n_i,j-1\}}/\mathfrak{P}^{\min\{n_i,j-1\}}$ 消失；因此

$$\gamma_j(H)/\gamma_{j+1}(H)\cong\bigoplus_{n_i\geq j}\mathfrak{P}^{j-1}/\mathfrak{P}^j\cong\bigoplus_{n_i\geq j}\mathfrak{O}/\mathfrak{P}.$$

现在，由于 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ 是一个阶为 p 的循环群， $\gamma_j(H)/\gamma_{j+1}(H)$ 是初等阿贝尔群，其秩 d_j 等于集合 $\{i\mid n_i\geq j\}$ 的基数。此外，我们有 $A/\gamma_2(H)\cong\bigoplus_{i=1}^{s}\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$，因此 $A/\gamma_2(H)\cong(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^s$。于是， $A/\gamma_2(H)$ 是秩为 $d_1=\ell(\lambda)$ 的初等阿贝尔群。此外，

$$|A:\gamma_p(H)|=|A:\gamma_2(H)|\prod_{j=2}^{p-1}|\gamma_j(H):\gamma_{j+1}(H)|;$$

由 (iii) 和 (iv) 可得 $p^{d(A)}=p^{\sum_{i=1}^{p-1}d_i}$，这就证明了 (iv)，并完成了定理 1.4 的证明。

4. 上同调与非内自同构

在本节中， Q表示一个有限的 p-群，而 A 表示一个 Q-模，它同时也是一个有限的 p-群。我们用 $H^n(Q,A)$、 $n\in\mathbb{Z}$ 表示 Q 以 A 为系数的 Tate 上同调群（例如参见 [13, 第 VIII 章，§1]）。注意，

$$\hat{H}^0(Q,A)=A^Q/A^\tau,\quad \text{and}\quad \hat{H}^{-1}(Q,A)=\ker\tau/[A,Q];$$

其中， A^Q 是 A中的不动点子模，而 $\tau\colon A\to A$ 是由 Q 诱导的范数（或迹）映射（即，对所有 $a\in A$， $a^\tau=\sum_{x\in Q}a\cdot x$）。

$\hat{}$ 回顾一下，若对所有 $S\le Q$ 和 $n\in\mathbb{Z}$， $H^n(S,A)$均为零，则称 Q-模 A 是上同调平凡的。根据 Gaschütz 的一个结果，要使 A 上同调平凡，只需对某个 $n\in\mathbb{Z}$有 $\hat{H}^n(Q,A)=0$。请注意，这个结果也是由 Uchida 独立证明的；我们将其称为 Gaschütz-Uchida 定理。

以下结果由 P. Schmid 得出（见 [14, 命题 1]），证明定理 1.6 时需要用到。

引理 4.1. 若 $A\neq 0$ 作为 Q-模是上同调平凡的，那么对 Q的每个非平凡子群 H，都有 $C_Q(A^H)=H$。

定理 1.6 的证明。设 $x\in Q$ 的阶为 p，且 $B=A\cdot(x-1)$。显然， $B\cdot(1+\cdots+x^{p-1})=0$，因此我们可以将 B 视为 $\mathfrak{O}=\mathbb{Z}_p[X]/(g)$ 上的模。记

$$B\cong\bigoplus_{i=1}^{s}\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{n_i}.$$

若 $n_1\ge p-1$，则由推论 1.3， $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{n_1}$ 给出一个秩为 $p-1$ 的阿贝尔 p-群；因此 A 不可能由少于 $p-1$ 个元素生成，这与假设矛盾。这说明 $n_1\le p-2$。现在，由定理 1.4(ii)可得 $B\cdot(x-1)^{p-2}=0$ 和 $pB=0$，也就是说， $A\cdot(x-1)^{p-1}=0$ 且$pA\cdot(x-1)=0$。考虑由 $\langle x\rangle$ 诱导的范数映射 $\tau_x\colon A\to A$（即对所有 $a\in A$， $a^{\tau_x}=a\cdot(1+\ldots+x^{p-1})$）。利用恒等式

$$1+X+\ldots+X^{p-1}=\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}(X-1)^{i-1},$$

由此可得

$$a^{\tau_x}=\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}a\cdot(x-1)^{i-1}=pa.$$

反设 A 上同调平凡。特别地，$\hat{H}^0(\langle x\rangle,A)=A^{\langle x\rangle}/A^{\tau_x}=0$；随后 $A^{\langle x\rangle}=A^{\tau_x}=pA$，由引理 4.1 得 $C_Q(pA)=\langle x\rangle$。若 $y\in Q$ 是另一个阶为 p 的元素，同理可得 $C_Q(pA)=\langle y\rangle$；因此 Q 有唯一的阶为p的子群，所以 Q 或为循环群，或为广义四元数群。若 $p=2$，则 $A=0$，这并非如此；因此可假设 $p>2$，此时 Q 是循环群，矛盾。定理 1.6 得证。

1-余循环与自同构。令 $\delta: Q \to A$ 为一个 1-余循环，即满足 $\delta(xy) = \delta(x)\cdot y + \delta(y)$ 的映射，其中 x、$y \in Q$ 任意。给定 $x \in G$，我们用 $A_{\delta,\, x}$ 表示由元素 $\delta(x^n)$、$n \geq 0$ 生成的 A 的子群。容易看出

$$\delta(x^n) = \delta(x)\cdot(1 + x + \cdots + x^{n-1}), \quad \text{for all } n \geq 1.$$

特别地，$A_{\delta,\, x}$ 是由 $\delta(x)$ 生成的 A（视为 $\langle x\rangle$-模）的子模。此外，若 $x^p = 1$，则 $A_{\delta,\, x}$ 可视为 $\mathfrak{O} = \mathbb{Z}_p[X]/$ 上的模（g）。

引理 4.2。采用上述记号，$\mathfrak{O}$-模 $A_{\delta,\, x}$ 满足

$$A_{\delta,x} \cong \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n, \quad \textit{for some integer } n \geq 0.$$

特别地，$A_{\delta,\, x}$ 是初等阿贝尔群，当且仅当 $n \leq p-1$。

证明。从 $\mathfrak{O}$ 到 $A_{\delta,\, x}$ 的 $\mathfrak{O}$-线性映射 $\alpha \mapsto \delta(x)\cdot\alpha$ 是满射，因为 $A_{\delta,\, x}$ 由 $\delta(x)$ 生成。此外，该映射的核是 $\mathfrak{O}$ 的非零理想（因为 $A_{\delta,\, x}$ 是有限的），因此它具有 $\mathfrak{P}^n$ 的形式，其中 $n \geq 0$ 为某个整数，这就证明了第一个断言。第二个断言由推论 1.3 立即得出。□

设 A 是 p-群 G 的正规阿贝尔子群，且 $Q = G/C_G(A)$。则在由 $a\cdot\bar{g} = a^g$ 定义的作用下，A 是一个 Q-模，其中 $a \in A$ 且 $g \in G$（当然，$\bar{g}$ 表示 g 在 Q 中的典范像）。令 $Z^1(Q, A)$ 表示由 1-余循环 $\delta: Q \to A$ 构成的阿贝尔群。回忆一下，若存在 $a \in A$ 使得对所有 $x \in Q$，$\delta \in Z^1(Q, A)$ 满足 $\delta(x) = a(x-1)$，则称其为 1-余边界；这些 1-余边界构成 $Z^1(Q, A)$ 的子群 $B^1(Q, A)$，而商 $Z^1(Q, A)/B^1(Q, A)$ 与第一上同调群 $\hat{}H^1(Q, A)$ 相同。

对于每个 $\delta \in Z^1(G, A)$，我们都可以定义一个自同构 $\varphi_\delta: G \to G$，其定义为

$$g^{\varphi_\delta} = g\delta(\bar{g}), \quad \text{for all } g \in G.$$

映射 $\delta \mapsto \varphi_\delta$ 显然定义了一个单射群同态，其像恰好是由那些在 $C_G(A)$ 和 G/A 上作用平凡（也就是说，对于所有$x \in C_G(A)$，都有 $x^\sigma = x$；并且对于所有 $g \in G$，都有 $g^{-1}g^\sigma \in A$）的 G 的自同构 σ组成的子群 $\mathrm{Aut}(G; A)$。用 $\mathrm{Inn}(G; A)$ 表示属于 $\mathrm{Aut}(G; A)$ 的 G 的内自同构。采用乘法记号，由某个 $a \in A$ 诱导的 1-余边界 δ 可写为 $\delta(\bar{g}) = a^g a^{-1}$，对所有$g \in G$均成立；因此 φ_δ 是由 a^{-1} 诱导的 G 的内自同构。特别地，这说明 $B^1(Q, A)^\varphi \subseteq \mathrm{Inn}(G;\ A)$。

引理 *4.3*。在上述记号下，等式 $B^1(Q, A)^\varphi = \mathit{Inn}(G;\ A)$ 成立，当且仅当 $A = C_G(C_G(A)) \cap Z_G(A)$，其中 $Z_G(A)$ 是满足 $Z_G(A)/A = Z(G/A)$ 的子群。在这种情况下，φ 诱导一个同构，将 $\hat{}H^1(Q, A)$ 映到 $\mathit{Aut}(G;\ A)/\mathit{Inn}(G;\ A)$ 上。

上述结果在文献中广为人知（通常表述为 $C_G(C_G(A)) = A$ 是 φ 将 $B^1(Q, A)$ 映到 Inn$(G; A)$ 上的充分条件）；证明很直接，留给读者。

为了证明定理 1.5，我们需要 Deaconescu 和 Sil- berberg 的一个结果 [5], ，该结果断言，在$C_G(Z(\Phi(G))) \neq \Phi(G)$的情形下，非内自同构猜想成立（Ghoraishi [8]中给出了对后者的一个小幅改进）。

定理 1.5 的证明。设 $A = Z(\Phi(G))$。如上所述，我们可以假设 $C_G(A) = \Phi(G)$，因此 $Q = G/\Phi(G)$。定理 1.6 表明， Q-模 A 不是上同调平凡的，因此由 Gaschütz-Uchida 定理可知 $\hat{}H^1(Q, A) \neq 0$。现在，引理 4.3 保证 Aut$(G; A)$ 含有非内自同构；只要证明 Aut$(G; A)$ 的指数为 p，定理便得证。由于 Aut$(G; A)$ 同构于 $Z^1(Q, A)$，我们只需证明后者的指数为 p。令 $\delta \in Z^1(Q, A)$，且 $x \in Q$。由引理 4.2，存在某个整数 n，使得A_δ, $_x \cong \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n$ 。关于 A 的假设保证$A_{\delta,x}$ 可由$p-2$个元素生成，因此由推论 1.3 可得 $n \leq p-2$。由此可知$A_{\delta,x}$ 是初等阿贝尔的；因此对所有 $x \in Q$，都有 $p\delta(x) = 0$ ，也就是说 $p\delta = 0$，证毕。

5. 进一步的结果与问题

离散赋值环的扩张。设 $\mathfrak{o}$ 为一个极大理想为 $\mathfrak{p}$的离散赋值环，且 e 为一个正整数。存在一种系统的方法，可构造出扩张 $\mathfrak{o}$ 且满足以下条件的离散赋值环 $\mathfrak{O}$ ： (i)$\mathfrak{O}$ 是一个有限生成的 $\mathfrak{o}$-模；(ii) $\mathfrak{O}$ 的极大理想 $\mathfrak{P}$ 满足 $\mathfrak{p}\mathfrak{O} = \mathfrak{P}^e$。事实上，考虑任意一个艾森斯坦多项式 $f = X^e + a_{e-1}X^{e-1} + \cdots + a_0$在 $\mathfrak{o}$上（因此 a_{e-1}、 $\ldots a_0 \in \mathfrak{p}$和 $a_0 \notin \mathfrak{p}^2$），并令 $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}[X]/(f)$。那么，$\mathfrak{O}$是一个满足上述条件的离散赋值环（参见 [13,第一章，§6]）。

为方便读者，我们给出证明。首先，将 $\mathfrak{o}$ 视为其在 $\mathfrak{O}$ 中的典范像。显然， $\bar{1}$, $\bar{X}, \ldots, \bar{X}^{e-1}$ 构成 $^-$上的 $\mathfrak{o}$-模 $\mathfrak{O}$ 的一组基（其中 X 表示 X 在 $\mathfrak{O}$中的典范像）。令 $_-$ $_-$ $_-\mathfrak{P} = (X)$。由假设， $\mathfrak{p} = (a_0)$，且由于 $a_0 = -(X^e + \cdots + a_1X)$，我们有 $\mathfrak{p}\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}$。接下来注意，模 $\mathfrak{p}$ 约化会诱导一个满环同态 φ: $\mathfrak{o}[X] \to (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})[X]$ ，它将 f 映到 X^e；因此我们有一个满同态 $\mathfrak{O} \to (\mathfrak{o}/\mathfrak{p})[X]/(X^e)$，其核为 $\mathfrak{p}\mathfrak{O}$。由此可知， $\mathfrak{P}$ 是包含 $\mathfrak{p}\mathfrak{O}$ 的 $\mathfrak{O}$ 的唯一极大理想。若 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{O}$的一个极大理想，则 $\mathfrak{p}\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{m}$（否则便有 $\mathfrak{p}\mathfrak{O} + \mathfrak{m} = \mathfrak{O}$，于是由中山引理可得 $\mathfrak{m} = \mathfrak{O}$，矛盾）；因此 $\mathfrak{m} = \mathfrak{P}$。这表明 $\mathfrak{O}$ 是一个局部环，它显然是诺特环，其极大理想 $\mathfrak{P}$ 由一个非幂零元素生成；因此 $\mathfrak{O}$ 是一个离散赋值环（参见 [13, 第一章命题 2]）。由同构 $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}\mathfrak{O} \cong k[X]/(X^e)$ 可立即得出 $\mathfrak{p}\mathfrak{O} = \mathfrak{P}^e$ 。

高阶分圆多项式。取 $\mathfrak{o}=\mathbb{Z}_p$，以及 $g_m(X)=\Phi_{p^m}(X+1)$，其中 Φ_{p^m} 表示第 p^m 个分圆多项式。显然，$g_m(X)$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 上的艾森斯坦多项式，而 $\mathfrak{O}_m=\mathbb{Z}_p[X]/(g_m)$ 与分圆域 $\mathbb{Q}_p[\zeta_{p^m}]$ 的整数环重合，其中 ζ_{p^m} 是一个本原的 p^m 次单位根。由上文可知，$e=(p-1)p^{m-1}$，也就是说，$\mathfrak{O}_m$ 的极大理想 $\mathfrak{P}$ 满足 $p\mathfrak{O}_m=\mathfrak{P}^{(p-1)p^{m-1}}$。

设 A 是有限阿贝尔 p-群，且有一个循环群 $\langle x\rangle$ 作用于 A。我们可以将 A 视为多项式环 $\mathbb{Z}_p[X]$ 上的模，其中 X 以端同态 $x-1$ 的形式作用于 A。显然，A 满足 $A\cdot g_m=0$ 当且仅当

$$A\cdot(1+x^{p^{m-1}}+\cdots+x^{p^{m-1}(p-1)})=0. \tag{5}$$

这个条件相当于说，$x^{p^{m-1}}$ 作为阶为 p 的分裂自同构作用于 A。由此可知，每个容许这种自同构的 A 都具有作为 $\mathfrak{O}_m=\mathbb{Z}_p[X]/(g_m)$-模的自然结构。令 $\mathfrak{o}=\mathbb{Z}_p$ 和 $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}_m$，应用定理 1.2，可得推论 1.3 的一个更一般版本（取 $m=1$ 即可得到后者）。例如，若 $A\cong\mathfrak{O}_m/\mathfrak{P}^n$ 作为一个 $\mathfrak{O}_m$-模，那么 A 作为阿贝尔群的结构由下式给出

$$A\cong(\mathbb{Z}/p^{l+1}\mathbb{Z})^r\oplus(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^{(p-1)p^m-r},$$

其中 $n=l(p-1)p^{m-1}+r$，且 $0<r\le(p-1)p^{m-1}$。

我们还有定理 1.4 的一个显然类似结论。假设 $\langle x\rangle$ 以这样的方式作用于 A：$x^{p^{m-1}}$ 诱导出一个阶为 p的 A的分裂自同构（换言之，x 满足条件 (5)）。令 H 为 A 被 $\langle x\rangle$扩张得到的任意扩张，并令 $\lambda=(n_1,\dots,n_s)$ 为将 A 视为 $\mathfrak{O}_m=\mathbb{Z}_p[X]/(g_m)$上的模时对应的分拆。与定理 1.4 的证明相同，我们有

$$\gamma_{n+1}(H)=A\cdot\mathfrak{P}^n,\ \text{for all } n\ge 1.$$

类似地可得：

(a) H 的幂零类为 n_1，且 A的指数为 p^l，其中 l 是满足 $\ge p^{m-1}{}^{n_1}$ $(p-1)$的最小整数。(b) 对所有 $n\ge 1$，$A^{p^n}=\gamma_{n(p-1)p^{m-1}+1}(H)$。(c) 对于 $j\ge 2$，因子群 $\gamma_j(H)/\gamma_{j+1}(H)$是秩为 d_j的初等阿贝尔群，其中 $(\ell(\lambda)\ d_2,d_3,\dots)$ 是与 λ共轭的分拆。(v) $A/\gamma_2(H)$是秩为 $d_1=\ell(\lambda)$的初等阿贝尔群，并且

$$d(A)=\sum_{j=1}^{(p-1)p^{m-1}}d_j.$$

当然，也可以取 $m=1$ 来涵盖定理 1.4。

诱导模的数量。设 λ 为一个分拆，M 为相应的 $\mathfrak{O}$-模。由于 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ 是长度为 d的 $\mathfrak{o}$-模，$\mathfrak{o}$-模

$\rho_* M$ 的长度为 $|\lambda|d$。另一方面，定理 1.2 表明 $\rho_* M$ 的长度为 $\sum_{i\geq 1} i f_{e,\ i}(\lambda)d$；因此，

$$\sum_{i\geq 1} i f_{e,i}(\lambda) = |\lambda|. \tag{6}$$

可以直接证明上述恒等式。首先，公式 (2) 和 (3) 立即推出

$$f_{e,i}(\lambda) = \ell(\lambda_{e,i+1})(i+1)e - \ell(\lambda_{e,i})(i-1)e - |\lambda_{e,i+1}| + |\lambda_{e,i}|. \tag{7}$$

接下来，注意到在和式 $\sum_{i\geq 1} i f_i(\lambda)$ 中，项 $\sum_{i\geq 1} i(i+1)\ell(\lambda_{e,\ i+1})e$与 $-\sum_{i\geq 1} i(i-1)\ell(\lambda_{e,\ i})e$相消；因此

$$\begin{aligned}\sum_{i\geq 1} i f_{e,i}(\lambda) &= \sum_{i\geq 1} i|\lambda_{e,i}| - \sum_{i\geq 1} i|\lambda_{e,i+1}| \\ &= \sum_{i\geq 1} i|\lambda_{e,i}| - \sum_{i\geq 1}(i-1)|\lambda_{e,i}| \\ &= \sum_{i\geq 1} |\lambda_i| \\ &= |\lambda|,\end{aligned}$$

如所述。

设 $\mathcal{P}$ 为所有分拆的集合，$\mathcal{P}_n$ 为 $n \geq 1$的分拆集合。由此可知，映射 f_e：$\mathcal{P} \to \mathcal{P}$，定义为 $f_e(\lambda) = (1^{f_e}, 1(\lambda) \ldots i^{f_e}, 1(\lambda) \ldots)$，将 $\mathcal{P}_n$ 映到自身（即 $f_e(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{P}_n$）。为简便起见，令 $f_e(n)$ 表示集合 $f_e(\mathcal{P}_n)$ 的基数。显然，$f_e(n)$ 是长度为 n 的 $\mathfrak{o}$-模（按同构计）的数量，其结构由 $\mathfrak{O}$ 的作用诱导。特别地，当 $e = (p-1)p^{m-1}$ (p 为素数) 时，$f_e(n)$ 给出阶为 p^n 的阿贝尔群的数量，这些群具有一个自同构，其 p^{m-1} 次幂是阶为 p 的分裂自同构。

问题 5.1. 对于每个 $e \geq 2$，确定映射 $n \mapsto f_e(n)$。特别是，确定比例 $f_e(n)/\mathrm{p}(n)$ 在 $n \to +\infty$ （其中$\mathrm{p}(n) = |\mathcal{P}_n|$。）时的变化。

例如，$f_e(n) = 1$当且仅当 $n \leq e$（因为这样的每个分拆 λ 都会给出相应的 n 模 $\mathfrak{o}$（$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$）^{n}）。设 n 属于区间 $]e, 2e]$，且 λ 是 n的一个分拆。若 λ_e,2 为空，则 λ 给出 $\mathfrak{o}$模（$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$）^{n}。若$\lambda_e$,2 非空，则它恰好包含一个分量 n_1，记作 say，而 λ 给出 $\mathfrak{o}$模（$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^2$）$^r \oplus$（$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$）$^{n-2r}$，其中 $r = n_1 - e$。由于 r 的可能取值为$e+1$、……、n，可得 $f_e(n) = n - e + 1$ 对 $e < n \leq 2e$成立。类似地，可以在区间 $]2e, 3e]$，$]3e, 4e]$ 等中计算 $f_e(n)$，不过这种方法会越来越不适用。似乎 $f_e(n)$ 的取值也与 e 整除 e'时 $f_{e'}(n)$ 的取值有关。

关于某些 p-群的结构。设 A 是一个阿贝尔有限 p 群，且 x 是 A 的一个自同构，其阶为 p。显然， x 在$A\cdot(x-1)$上诱导一个分裂自同构。因此，推论 1.3 和定理 1.4 对 $A\cdot(x-1)$ 的结构以及 $A/A^{\langle x\rangle}$ 的结构都给出了限制（其中 $A^{\langle x\rangle}$ 是 x作用下的不动元子群）。注意，若能回答问题 5.1，便能更深入地了解这些限制。

后者的第一个可能应用，是对含有指数为 p 的阿贝尔子群 A 的非阿贝尔有限 p-群 G 进行有效分类；这样的分类将使我们能够轻松计算对于每个 $n\geq 1$，阶为 p^n 的这类 G 的数量。

可以先考虑存在元素 $x\in G\setminus A$ 的情形，该元素通过共轭作用于 A，且其作用是阶为 p 的分裂自同构。固定 A 以及 $Q=\langle x\rangle$ 的作用后， A 对 Q 的扩张（在等价意义下）与第二上同调群 $\hat{H}^2(Q,A)$ 的元素相对应。容易看出，该群同构于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\ell(\lambda)}$，其中 λ 是与作为 $\mathfrak{O}$-模的 A 相对应的分拆。

也可以利用上述结果对最大类的后代数 p-群进行分类。Miech[11] 已经给出了这类群的分类。后来 [12], 中出现了一个简化证明，不过或许还需要一个更为清晰的证明，使我们能够以直接的方式求出给定阶的这类 p-群的数量。注意，定理 1.4 表明，至少对于每个这样的 p-群 G， $\gamma_3(G)$ 具有形式 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^n$。

最后请注意，若 M 是任意有限 p 群 G 的极大子群，且 $Z(G)\leq M$，则推论 1.3 和定理 1.4 所给出的限制适用于 $Z(M)/Z(G)$。事实上，每个 $x\in G\setminus M$ 都通过共轭作用于 $[Z(M)\ x]$，成为一个阶为 p 的分裂自同构；显然， $Z(M)/Z(G)\cong[Z(M)\ x]$。

致谢

我们感谢 Naomi Jochnowitz 和 Evgeny Khukhro 的关注，并感谢他们进行的几次宝贵讨论。

参考文献

[1] A. Abdollahi, 《强 p 群具有阶为 p 的非内自同构及某些上同调》, 《代数杂志》**323** (2010) 779-789. [2] A. Abdollahi, 《有限素数幂阶群上的上同调平凡模》, 《代数杂志》 **342** 2011 154 160 ( ), - A. Abdollahi、M. Guedri 和 Y. Guerboussa, [3] 《某些类有限 p 群的 Tate 上同调非平凡性》, 《*Comm. Algebra.*》(2017). [4] M.T. Benmoussa、Y. Guerboussa, 《半阿贝尔 p 群的一些性质》, 《澳大利亚数学会通报》(2014) [5] M. Deaconescu、G. Silberberg, 《有限 p 群的阶为 p 的非内自同构》, 《代数杂志》**250** (2002), 283-287. [6] W. Gaschütz, 《 p 群的上同调平凡性与外自同构》。《数学杂志》**88**, 432-433 (1965)。

[7] W. Gaschütz, 《非阿贝尔 p 群具有外部 p 自同构》, 《代数杂志, **4** (1966), 1-2. [8] M. S. Ghoraishi, 《有限非阿贝尔 p 群的非内自同构》, 《澳大利亚数学会通报》**89** (2014) 202-209. [9] S.M. Ghoraishi, 《有限 p 群中逐点固定中心的非内自同构》, 《国际群论杂志》**8**(1) (2019), 1–9. [10] V.D. Mazurov 和 E. I. Khukhro, 《库罗夫卡笔记本：群论未解问题》, 第18版, 俄罗斯科学院西伯利亚分部数学研究所, 新西伯利亚, 2014. [11] R. J. Miech, 《最大类幂零类的后亚阿贝尔 p 群》。《美国数学会会刊, 第**236**卷, 1978, 第93-119页。[12] R. J. Miech, 《最大类幂零类的后亚阿贝尔 p 群 II》, 《美国数学会会刊, 第**272**卷, 1982, 第465-474页。[13] J.-P. Serre, 《局部域》, 《数学研究生教材》, **67**, 施普林格出版社, 纽约, 1979。M.J. Greenberg 从法文译出。[14] P. Schmid, 《正则 p 群的一种上同调性质》, 《数学杂志》**175** (1980) 1-3. [15] K. Uchida, 《关于 Tannaka 猜想中的上同调平凡模》。《日本学士院纪要》**41** (1965), 第4期, 249-253.