arXiv:2303.06462v1 [math.GT] 11 Mar 2023

# 去范畴化海盖德－弗洛尔理论及 E 和 F 的作用

ANDREW MANION

Abstract. 我们定义了更大版本的向量空间，这些空间可通过对曲面的带边界（缝合）Heegaard Floer 不变量进行去范畴化而得到。我们还在这些更大的空间上定义了双模结构；这些结构与 Rouquier 和作者在带边界的 Heegaard Floer 理论中引入的高阶作用去范畴化后产生的双模结构相似，但更加精细。特别是，这些新的双模结构涉及两个奇生成元 $E$ 和 $F$ 在 $\mathfrak{gl}(1|1)$上的作用，而先前的双模结构只涉及 $E$的作用。在 $\mathbb{F}_2$上，我们证明这些新的双模满足必要的粘合性质，从而在同构意义下得到一个取值于分次代数和双模的 $1+1$ 开闭拓扑量子场论；尤其是，与先前相关研究不同，我们证明了沿圆以及沿区间粘合曲面时的粘合定理。在整数上，我们证明类似的构造可得到两个部分定义的开闭拓扑量子场论，其定义域因双模奇偶性的选取方式不同而有所区别。我们提出猜想，将这些开闭拓扑量子场论与 Mikhaylov 和 Geer–Young 最近研究的 $\mathfrak{psl}(1|1)$ 陈–西蒙斯拓扑量子场论联系起来。

## Contents

1. 引言 2 2. 区间与圆上的代数作用 13 2.1. 缝合曲面与开闭协边 13 2.2. 较大态空间上的作用 13 2.3. 根据弧与圆的集合定义基 16 2.4. 张量积 17 2.5. 作用的射影性 20 2.6. 联系较大与较小的态空间 21 3. 区间与圆的粘合定理 21 3.1. 区间粘合引理 21 3.2. 圆周粘合引理 23 3.3. 复合开闭协边 34 4. 次数与奇偶性移位 37 参考文献 39

## 1. Introduction

本文旨在探讨一个关于 Rouquier 与作者 [MR20] 的工作，以及相关工作 [LM21、Man20、CM22、Man22、Man23] 最自然且最常被提出的问题之一：在 $E$、$F$、$K_1^{\pm 1}$、$K_2^{\pm 1}$ 这些 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ 的生成元中，[MR20] 及其他这些论文在带边 sutured Heegaard Floer 同调的弦代数上，讨论了 $E$ 而非 $F$（或在不同约定中讨论 $F$ 而非 $E$）的高阶作用。$E$ 的对偶对象在相关研究中占据重要地位，但在去范畴化后，它们与 $E$ 满足的关系类型不同于 $E$、$F \in U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ 所满足的关系。为什么我们不能同时拥有 $E$ 和 $F$？本文对此提出一种解释，并且在去范畴化层面提出一种经过修改的设置，使 $E$ 和 $F$ 的作用自然出现。在这一修改后的设置中，我们将证明沿圆及区间粘合曲面的粘合定理，进一步推广 [MR20、Man22、Man23] 中所考虑的曲面粘合类型。

区间与正半部。[MR20]中的高阶作用有两个重要特征：

- 它们是以下对象的范畴化的作用：
$$U(\mathfrak{psl}(1|1)^+) = \mathbb{C}[E]/(E^2)$$
其中，$\mathfrak{psl}(1|1)$是由两个奇元素 $E$ 和 $F$ 生成、超括号为零的李超代数，而 $\mathfrak{psl}(1|1)^+$ 是它的正半部，即由一个超括号为零的奇元素 $E$ 生成的李超代数。

- 它们与带角曲面边界上的区间相关，而非圆。

我们想指出，在扩张至点的拓扑量子场论中，这两个特征密切相关，其中区间被视为从一个点到其自身的恒等余边界。

粗略地说，当一个完全扩张的三维拓扑量子场论将某个 Hopf 代数 $H$ 的表示范畴（带有张量结构）赋给一个点时，它便会将 Drinfeld 双 $D(H)$ 的表示范畴赋给一个圆。李代数 $\mathfrak{g}$ 的三维 Chern–Simons 或 Reshetikhin–Turaev 拓扑量子场论会将 $U_q(\mathfrak{g})$ 的表示的半单化范畴赋给一个圆，而 $U_q(\mathfrak{g})$“几乎”是 $U_q(\mathfrak{g}^+)$ 的 Drinfeld 双，其中 $\mathfrak{g}^+$ 是 $\mathfrak{g}$的正半部。然而，通常情况下，$U_q(\mathfrak{g})$ 并非真正的 Drinfeld 双；Reshetikhin–Turaev 理论赋给圆的模范畴 $\mathcal{C}$ 也并非真正的 Drinfeld 中心；而且 Reshetikhin–Turaev 理论实际上无法描述为一种完全扩张的拓扑量子场论，即在点上赋予某个 $U_q(\mathfrak{g}^+)$ 的表示范畴。与此相对，将 $\mathcal{C}$ 赋给点的 Turaev–Viro 理论应当是完全扩张的，并将 $\mathcal{C}$的 Drinfeld 中心（在某种意义上说是 $\mathcal{C}^2$）赋给圆。从这个意义上说，$\mathcal{C}$ 的 Reshetikhin–Turaev 理论是 $\mathcal{C}$ 的 Turaev–Viro 理论在 $1{+}1{+}1$ 扩张拓扑量子场论层面上的平方根。

现在，对于特殊情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}(1|1)$，我们有 $U(\mathfrak{psl}(1|1)) \cong D(U(\mathfrak{psl}(1|1)^+))$，因此（忽略$q$）将 Reshetikhin–Turaev 理论通过正半部 $\mathfrak{psl}(1|1)^+$ 延拓到一个点时遇到的上述困难应该会消失。我们提出如下不精确猜想。

猜想 1.1. 如果我们取 $H = U(\mathfrak{psl}(1|1)^+) = \mathbb{C}[E]/(E^2)$，其中 $\Delta(E) = E \otimes 1 + 1 \otimes E$和 $\varepsilon(E) = 0$，那么将 (Rep($H$) $\otimes$) 赋给一个点的拓扑量子场论可以同时恢复以下两者：

- Mikhaylov [Mik15] 和 Geer–Young [GY22] 所研究的 $\mathfrak{psl}(1|1)$ 陈–西蒙斯拓扑量子场论的相关方面；
- Man22, Man23] 所研究的 1 维和 2 维中带边界缝合希加德·弗洛尔理论去范畴化的相关方面 [

因此，它们彼此密切相关。

注意，将 $H($ $\otimes)$（表示范畴）赋给点的拓扑量子场论，会将表示范畴 $H$ 作为其自身上的双模范畴赋给区间，并将表示范畴 $D(H)$ 赋给圆。因此，对于适当的带角点曲面 $F$，我们应当预期区间上的 $U(\mathfrak{psl}(1|1)^+)$ 作用，以及圆上的 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 作用 $\partial F\ \partial F$。第一类作用正是由 [MR20] 的高阶作用所范畴化的。

命题 1.2. [MR20] 中存在“$E$ 而非 $F$”，因为 [MR20], 中的高阶作用和张量积，以及 [DM14], 的早期工作，都与点和区间的 Heegaard Floer 同调关系更密切，而非与圆的 Heegaard Floer 同调关系更密切。

注 1.3. 在 [DM14], 的致谢部分，Douglas–Manolescu 表示，他们关于带角 Heegaard Floer 同调的工作（ [MR20] 正是建立在这项工作之上）受到 David Nadler 向 Manolescu 提出的一个问题的启发：“圆的塞伯格–维滕不变量是什么？”按照我们提出的解释，Douglas–Manolescu 的工作所涉及的其实是点的塞伯格–维滕不变量或 Heegaard Floer 不变量，它大致会是

$$(2\,\mathrm{Rep}(\mathcal{U}(\mathfrak{psl}(1|1)^+)), \circledotimes)$$

其中，$\mathcal{U}(\mathfrak{psl}(1|1)^+)$是 $\mathcal{U}$ in [MR20] 中称为 $\mathcal{U}$ 的微分分次幺半范畴，而 $\circledotimes$ 是 [MR20]中定义的高阶张量积运算。如果我们的解释大致准确，那么它将为 [MR20]中的高阶张量积运算及其与 Heegaard Floer 同调的关系提供一个非常精妙的概念性解释：粗略地说，我们提出

$\circledotimes$ 的 [MR20] 高阶张量积是点的 Heegaard Floer同调中的关键要素。

注 1.4。从另一个角度看，这一设想并非完全不可信。Heegaard Floer同调本身的定义基于这样一种假设：将塞伯格–维滕理论扩展到曲面后，它会为曲面 $\Sigma$ 赋予某个对称幂的深谷范畴 $\Sigma$。相应地，在定义三维流形的 Heegaard Floer同调时，人们会沿着二维 Heegaard 曲面作分解，并在该曲面上开展研究（这比三维流形不变量预期的维度低一维，而维度之所以降低，是因为这里利用了扩展拓扑量子场论结构）。

现在，Lipshitz–Ozsv´ath–Thurston 和 Zarev 对带边界的 Heegaard Floer 理论的变体，都是通过在三维流形上选取一条额外的切割来运作的。这条切割与 Heegaard

曲面横截，并与 Heegaard 曲面相交于一个1维流形。要定义曲面的带边 Floer 不变量，需要处理这个1维流形（以带基点匹配圆或弧图的形式）；要定义三维协边的带边 Floer 不变量，则需要处理一个 Heegaard 曲面，其1维边界由带基点匹配圆或弧图给出。人们很容易认为，带边界的 Heegaard Floer 理论再次利用了比预期低一个维度（高一个扩张层级）的扩展拓扑量子场论结构；事实上，根据 [MR20] ，带边 Floer 曲面不变量是一个2-表示2-范畴中的对象，而该范畴应当赋给带基点匹配圆或弧图所对应的1维流形。

最后， [MR20] 中的张量积及其关于带边 Floer 曲面不变量的相应粘合公式，早已见于 Douglas–Manolescu 的带角 Heegaard Floer 同调理论 [DM14], ；该理论同样基于对三维流形再作一次切割（此切割同时横截 Heegaard 曲面和上述“带边”切割）。Douglas–Manolescu 采用 Lipshitz–Ozsv´ath–Thurston 的带边 Floer 理论变体，对相关情形有不同的拓扑解释；而 [MR20]采用 Zarev 的变体，并得到了弧图所关联代数的粘合公式，适用于按“区间 $=$ 区间 $\cup_{\mathrm{pt}}$ 区间”的方式进行粘合（对于弧图所表示的曲面，这对应于下文例1.6中涉及 $p = 2$ 的开裤带曲面粘合情形）。具体而言，粘合后弧图的代数是两部分代数的高阶张量积，这使人们预期的将 Rep($U(\mathfrak{psl}(1|1)^+)$) $\otimes$ 赋给一个点的拓扑量子场论范畴化。

主要结果。现在我们陈述本文的主要结果，其表述将基于开闭拓扑量子场论，而非延伸至点的拓扑量子场论。我们计划在 [Man] （准备中）中重新讨论延伸至点的拓扑量子场论。

在 [MR20, Man22, Man23] 中，对于圆，我们没有预期的 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 作用；我们只有区间上的 $U(\mathfrak{psl}(1|1)^+)$ 作用。事实上，虽然我们预期恒等余边界 $\mathsf{id}_{S^1}$ 在 $S^1$ 上会被赋予 Rep($U(\mathfrak{psl}(1|1))$) 上的恒等函子，也就是将 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 与其自身作张量积所得的双模（4 维），但在 [Man22, Man23] 中与该余边界关联的向量空间维数只有 2。本文将定义相关空间，使其具有预期的作用：区间上的 $U(\mathfrak{psl}(1|1)^+)$ 作用，以及圆上的 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 作用。

令 $2\mathsf{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 表示 [LP08]中定义的 $1+1$ 开闭余边界范畴。对于 $2\mathsf{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中由按指定顺序排列的不交并的定向区间和圆组成的一个对象 $M$ ，定义 $A_{EF}(M)$为按顺序取超环的张量积

$$U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{psl}(1|1)^+) := \mathbb{Z}[E]/(E^2)$$

对于 $M$ 的区间分支

$$U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{psl}(1|1)) := \mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE)$$

对于 $M$ 的圆周分支，其中 $\mathbb{Z}\langle\cdots\rangle$ 表示非交换多项式。通过设定 $\deg(E) = -1$ 和 $\deg(F) = 1$，为这些超环赋予 $\mathbb{Z}$-分次。

我们首先陈述关于 $\mathbb{F}_2$ 的主要结果；将 $A_{EF}^{\mathbb{F}_2}(M) = A_{EF}(M) \otimes \mathbb{F}_2$ 视为普通的非超 $\mathbb{Z}$-分次代数。设 $F\colon M_1 \to M_2$ 是 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的一个态射，且$S_+ = M_2 \sqcup (-M_1)$。令 $S_-$ 表示 $\partial F \setminus S_+$的闭包。设 $P$为一点集，每个点分别位于 $F$ 的一个 $S_+$ 边界分支上（以下构造在同构意义下与$P$无关）。对于任意有理数[1] $A \in \mathbb{Q}$，令

$$\begin{aligned}\delta_A(F) = &-Ah + (A-1)\#\{\text{no-}S_+ \text{ non-closed components of } F\}\\ &+ A\#\{\text{no-}S_- \text{ non-closed components of } F\}\\ &+ (2A-1)\#\{\text{closed components of } F\}\\ &+ ((A-1)/2)\#\{S_+ \text{ intervals}\} - (1/2)\#\{S_+ \text{ circles}\}.\end{aligned} \tag{1}$$

我们将在 $\mathbb{Q}$-分次向量空间上定义一个关于 $(A_{EF}^{\mathbb{F}_2}(M_2),\ A_{EF}^{\mathbb{F}_2}(M_1))$ 的双模结构

$$\mathbf{Z}^P_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F) := \wedge^* H_1(F, P; \mathbb{F}_2)\{\delta_A(F)\},$$

其中 $\{\cdot\}$表示在 $\mathbb{Q}$-分次上的平移，而外代数的直和项 $\wedge^k$ 处于 $\mathbb{Q}$-次数 $k$。注意，$\wedge^* H_1(F, P)$ 比 [Man22, Man23] 中出现的空间 $\wedge^* H_1(F, S_+)$ 维数更高，当且仅当 $F$ 至少有一个连通分支 $F_0$，其具有一个 $S_+$边界圆，且该边界圆不是 $F_0$的唯一边界圆。

定理 1.5。设 $M_1$、$M_2$ 和 $M_3$ 是 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的对象，并且令

$$M_3 \xleftarrow{F'} M_2 \xleftarrow{F} M_1$$

为 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的态射。对于任意 $A \in \mathbb{Q}$，我们有

$$\mathbf{Z}^P_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F' \circ F) \cong \mathbf{Z}^P_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F') \otimes_{A_{EF}^{\mathbb{F}_2}(M_2)} \mathbf{Z}^P_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F)$$

作为 $(A_{EF}^{\mathbb{F}_2}(M_3),\ A_{EF}^{\mathbb{F}_2}(M_1))$ 上的 $\mathbb{Q}$-分次双模。

定理 1.5 的一个版本在 $\mathbb{Z}$ 上成立；参见定理 3.3。

例1.6。$\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的态射包括图1所示的闭合和开放 $p$裤子。许多拓扑量子场论会将这类协边分别对应到与圆或区间相关联的幺半范畴上的 $p$重张量积函子。用双模来表述，若圆或区间对应于一个 Hopf 代数 $H$，则预期相应的 $p$裤子协边会对应到 $H^{\otimes p}$，作为一个关于（$H$，$H^{\otimes p}$）的双模，其右作用由乘法给出，左作用由 $H$的余乘法给出。在我们的设定中，我们可以探究哪些 $A \in \mathbb{Q}$ 的选取能使闭合或开放的 $p$裤子协边对应到具有正确分次的预期双模。

[1]我们不必局限于 $\mathbb{Q}$-分次，也可以更一般地选择 $A \in \mathbb{R}$ 或 $A \in \mathbb{C}$。另一方面，我们最关注的 $A$ 选择是 $A = 1/2$ 和 $A = 1$。对于这些选择，$\mathbb{Q}$-分次实际上分别就是 $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$-分次或 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次。

- 闭合的 $p$裤子$\mathcal{P}_{p,\text{ 闭合}}$ 有 $h = p$。它没有与 $S_-$相交但不与 $S_+$相交的连通分支，有一个与 $S_+$ 相交但不与 $S_-$相交的连通分支，并且没有闭分支。它没有 $S_+$ 区间，也没有 $p+1$ $S_+$ 圆。因此，

$$\delta_A(\mathcal{P}_{p,\text{closed}}) = -Ap + A - (p+1)/2$$

并且我们希望这个量等于 $-p$。方程

$$p(-A + 1/2) + (A - 1/2) = 0$$

当且仅当 $A = 1/2$时，对所有 $p$ 都成立；注意，对于一般的开闭协边$F$ ，我们有

$$\begin{aligned}\delta_{1/2}(F) = &- h/2 - (1/2)\#\{\text{no-}S_+ \text{ non-closed components of } F\} \\ &+ (1/2)\#\{\text{no-}S_- \text{ non-closed components of } F\} \\ &- (1/4)\#\{S_+ \text{ intervals}\} - (1/2)\#\{S_+ \text{ circles}\}.\end{aligned}$$

- 开 $p$-元裤子 $\mathcal{P}_{p,\text{ 开}}$ 也有 $h = p$。它没有与$S_-$ 相交但不与 $S_+$相交的连通分支，也没有与 $S_+$ 相交但不与 $S_-$相交的连通分支，并且没有闭分支。它有 $p+1$ $S_+$ 个区间，没有 $S_+$ 个圆。因此，

$$\delta_A(\mathcal{P}_{p,\text{open}}) = -Ap + ((A-1)/2)(p+1).$$

并且我们希望这个量等于 $-p$。方程

$$p(-A/2 + 1/2) + (A-1)/2 = 0$$

当且仅当 $A = 1$时，对所有 $p$ 都成立；注意，对于一般的开闭协边 $F$，我们有

$$\begin{aligned}\delta_1(F) = &- h + \#\{\text{no-}S_- \text{ non-closed components of } F\} \\ &+ \#\{\text{closed components of } F\} - (1/2)\#\{S_+ \text{ circles}\}.\end{aligned}$$

因此，式（1）中的选择 $A = 1/2$和 $A = 1$ 尤其值得关注。第一种选择对于圆粘合以及与现有三维非半单拓扑量子场论文献（如 [Man23] ，下文将进一步讨论）的联系而言，似乎最为自然；第二种选择则似乎最适合用于建立高阶张量积与 [MR20] 中出现的那种沿区间的曲面粘合之间的联系。

作为定理 1.5 的推论，我们得到一个取值于代数和双模的 $1+1$ 维开闭拓扑量子场论。由于它取值于代数和双模，而非向量空间和线性映射，我们在概念上将其视为某个 $2+1$ 维拓扑量子场论扩展结构的一部分，例如下文讨论的三维非半单拓扑量子场论。以下推论的证明与 [Man23 中推论 1.3] 的证明相同。

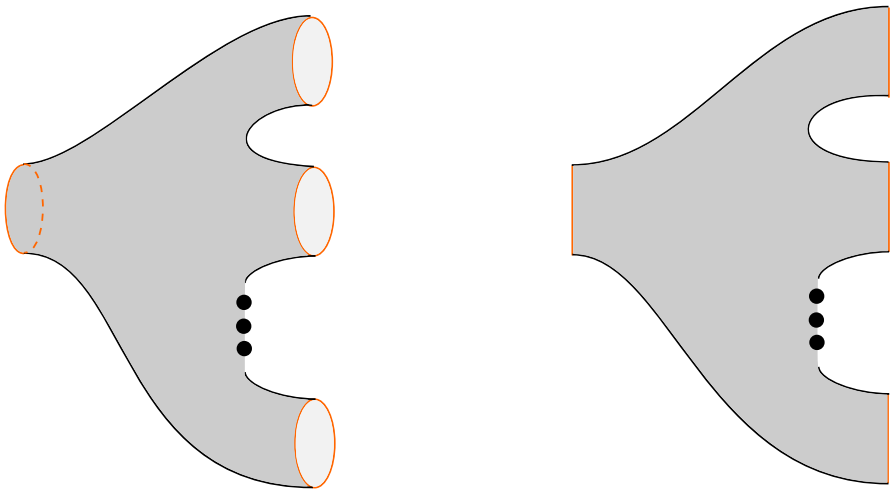

FIGURE 1. 左：闭合的 $p$ 元裤子，右侧有 $p$ 个圆，左侧有一个圆。右：开放的 $p$ 元裤子，右侧有 $p$ 个区间，左侧有一个区间。

推论 1.7。对于任意 $A \in \mathbb{Q}$，赋值

$$M \mapsto A_{EF}^{\mathbb{F}_2}(M) \quad and \quad F \mapsto \mathbf{Z}^P_{\delta_A(F),\mathbb{F}_2}(F)$$

给出一个对称幺半函子，从 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 到对称幺半范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{F}_2}$，其中包含 $\mathbb{Z}$ 分次代数，以及模掉同构后的 $\mathbb{F}_2$ 和 $\mathbb{Q}$ 分次双模。

相反，对 [MR20] 的高阶作用进行去范畴化时，会引出一些空间

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta,\mathbb{F}_2}(F) := \wedge^* H_1(F, S_+; \mathbb{F}_2)\{\delta(F)\}$$

其中，$\delta$ 取自 [Man23]中描述的一个更大的函数参数化族 $\mathcal{S} \to \mathbb{Q}$。若 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\text{开放}}$表示 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的全子范畴，其对象仅由区间构成，不含圆，那么根据 [Man23，推论 1.3]，，空间 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta\,\mathbb{F}_2,}(F)$ 给出一个函子，从 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\text{开放}}$映入 $\mathbb{Z}$ 分次代数和 $\mathbb{F}_2$ 分次双模的范畴。它们似乎只允许 $U^{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{psl}(1|1)^+)$ 的自然作用，而不允许 $U^{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的自然作用。

令 $V(0,0)^{\mathbb{F}_2}$ 表示 $U^{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{psl}(1|1))$ 上的二维 $\mathbb{Z}$ 分次模，其定义为商空间 $U^{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{psl}(1|1))/(F)$；该记法改编自 [GY22, 第 2.3 节。2]注意，$V(0,0)^{\mathbb{F}_2}$ 仅局部于 $\mathbb{Z}$ 次数 $-1$ 和 0。对于含有 $p$ $S_+$ 个圆的 $F$，我们将在命题 2.11 中证明

$$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F) \cong \mathbf{Z}^P_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F) \otimes_{(U^{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{psl}(1|1)))^{\otimes p}} (V(0,0)^{\mathbb{F}_2})^{\otimes p}. \tag{2}$$

这个公式表明，$\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta_A\,,\ \mathbb{F}_2}(F)$ 的正确解释是：从较大的态空间 $\mathbf{Z}^P_{\delta_A,\ \mathbb{F}_2}(F)$ 得到的态空间，其中每个 $S_+$ 边界分支都标记为 $U^{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的表示 $V(0,0)^{\mathbb{F}_2}$。

提议 1.8。我们在 [MR20]，中得到了预期的 $U(\mathfrak{psl}(1|1)^+)$ 的范畴化作用，但没有得到预期的 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的范畴化作用，因为 [MR20] 的高阶作用是在态空间 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta_A\,,\ \mathbb{F}_2}(F)$ 的范畴化上（其中 $U^{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的所有作用都被“标记

在其他地方”），而不是在更大的态空间 $\mathbf{Z}^{P}_{\delta_A,\ \mathbb{F}_2}(F)$ 的范畴化上。若要同时如实地得到 $E$ 和 $F$ 的作用，应首先将 $\mathbf{Z}^{P}_{\delta_A,\ \mathbb{F}_2}(F)$ 范畴化；这或许可以通过对带边 sutured Heegaard Floer 同调中的弦代数构造进行某种改造或推广来实现，使得当 $\mathbf{Z}^{P}_{\delta_A,\ \mathbb{F}_2}(F)$ 大于 $\mathbf{Z}^{S_+}_{\delta_A\ ,\ \mathbb{F}_2}(F)$ 时，代数具有更多基本幂等元。

注释 1.9。即使将有理数$\mathbf{Z}^{P}_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F)$及其 $E$和 $F$的作用进行范畴化，这些作用在去范畴化层面仍会满足 $EF+FE=0$ 。关系$EF+FE=0$ 是 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 关系 $EF+FE=(K-K^{-1})/(q-q^{-1})$，适用于具有 $K$-权 1 或 $-1$的表示。人们也希望能够将更一般的 $K$-权（例如有理数 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ 的向量表示或定义表示，带有 $K=q$）进行范畴化，并赋予 $E$ 和 $F$ 的作用，使其在去范畴化层面满足相应关系。与三维 $\mathfrak{psl}(1|1)$ 陈–西蒙斯拓扑量子场论 [Mik15] ，以及 Geer–Young 的 $\mathcal{D}^{q,\mathrm{int}}$拓扑量子场论 [GY22], 之间的联系——在其中，对于“临界”或非一般装饰曲面会出现关系 $EF+FE=0$ ，而对于一般装饰曲面则会出现 $EF+FE$ 非零的关系——或有助于探索如何进一步推广有理数$\mathbf{Z}^{P}_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F)$ 的假设性范畴化，以纳入 $E$和 $F$的高阶作用，且 $EF+FE$ 非零。

注释 1.10. Ellis–Petkova–V´ertesi [EPV19] 关于 Petkova–V´ertesi 的缠结Floer同调 [PV16]的研究中，也出现了在带边弦代数上满足$EF+FE=0$的 $E$ 和 $F$ 的高阶作用。在这种情形下同时出现 $E$和 $F$，似乎是由于相关弦代数所基于的弧图具有特殊对称性，而更一般的弦代数所基于的弧图则不具备这种对称性。Tian[Tia16], 以不同方式重新运用带边 sutured Heegaard Floer 同调的工具，也在某些代数上定义了满足 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ 关系的 $E$ 和 $F$ 的作用。尽管这两种情形似乎都与我们在此讨论的内容没有密切联系，但如果存在任何联系，进一步探究将会很有意思。

注释 1.11. 本文研究作用于分次向量空间上的 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$。在某些情形下，也可以等价地研究作用于普通向量空间上的 $U(\mathfrak{pgl}(1|1))$，并要求 $U(\mathfrak{pgl}(1|1))$ 的额外生成元“$H_2$”可对角化；此时，$H_2$ 的特征子空间可代替分次向量空间中不同次数的直和项。然而，我们尤其关注由与圆的代数作张量积给出的函子。若 $M$是 $U(\mathfrak{pgl}(1|1))$ 上的右模，且 $N$是其左模，那么 $M\otimes_{U(\mathfrak{pgl}(1|1))}N$会将 $M$ 的 $H_2$ 权子空间与 $N$ 的 $H_2$ 权子空间张量在一起，对每个 $k$皆如此，所得结果具有 $H_2$ 权 $k$。相较之下，若 $M$ 是 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 上的右分次模，且 $N$ 是其左分次模，那么对每个 $(k,l)$， $M\otimes_{U(\mathfrak{psl}(1|1))}N$ 都会将 $M$ 的 $k$ 次子空间与 $N$ 的 $l$ 次子空间张量在一起，所得结果的次数为 $k+l$。第二种行为与我们的粘合定理相容，而第一种则不相容。因此，从这个意义上说，此处采用的视角似乎更倾向于 $\mathfrak{psl}(1|1)$，而非 $\mathfrak{pgl}(1|1)$。

符号与奇偶性。若要从 $\mathbb{F}_2$ 转到 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{Z}$，我们也需要将符号与奇偶性纳入考量。外代数 $\wedge^* H_1(F,P;\mathbb{Z})$ 自然是一个超阿贝尔

群，其中 $\wedge^k$ 的奇偶性取模 $k$；对于任意给定的 $F$，我们可以选择是否反转其奇偶性，并且希望这些选择与粘合相兼容。

我们尚未找到一种方法，能够定义从 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中态射的集合 $\mathcal{S}$ 到 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的奇偶移位函数 $\pi$，使其在不交并下可加，并且同时满足区间和圆粘合定理。不过，若只考虑 $\mathcal{S}$ 的某些子集，则存在有趣的奇偶移位函数。首先注意，若我们能选取 $A$，使得对所有 $F$，$\delta_A(F)$ 都是整数，那么就可以用 $\delta_A(F)$ 模 2 来定义奇偶性移位；由于粘合与 $\delta_A$ 兼容，因此它也会与奇偶性兼容。然而，不存在这样的 $A$，能使 $\delta_A(F)$ 始终为整数（见命题 4.1）。为继续讨论，我们考察在特殊情形 $A = 1/2$ 和 $A = 1$ 下，何时 $\delta_A(F)$ 为整数：

- $\delta_{1/2}(F)$ 是整数，当且仅当 $F$ 中的 $S_+$ 个区间数量，模 4 同余于与 $S_-$ 非平凡相交的 $F$ 的边界分支数量的两倍时，才是整数（见第4节）。在这种情况下，记作

$$\pi_{1/2}(F) := \delta_{1/2}(F)$$

  模 2。
- $\delta_1(F)$ 是整数，当且仅当 $F$ 的 $S_+$ 个圆的数量为偶数。在这种情况下，记作

$$\pi_1(F) := \delta_1(F)$$

  模 2。

上述两种性质在不交并下，以及将一个 $S_+$区间粘合到一个 $S_+$ 区间或将一个 $S_+$ 圆粘合到一个 $S_+$ 圆时，均保持不变。

定义1.12。令 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\text{闭++}}$ 表示 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的子范畴，其中态射的 $S_+$ 区间数量模 4 同余于其与 $S_-$ 非平凡相交的边界分支数量的两倍。令 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\text{开++}}$ 表示 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的子范畴，其中态射包含偶数个 $S_+$ 圆。注意，$2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的“闭扇区”（通常的 $1{+}1$维定向协边范畴，其中 $S_-$ 始终为空）是 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\text{闭++}}$的子范畴，而 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的“开扇区”（由不含圆的对象构成的全子范畴）是 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\text{开++}}$的子范畴。

对于 $A \in \mathbb{Q}$ 和 $\pi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的任意选择：

- 若 $F$ 是 $2\mathrm{Cob}_{\text{外闭++}}$中的态射，则该 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群

$$\mathbf{Z}^P_{\delta_A,\pi_{1/2}}(F) := \left(\mathbb{Z}^{0|1}\right)^{\otimes \pi_{1/2}(F)} \otimes \wedge^* H_1(F,P)\{\delta_A(F)\}$$

  自然具有作为 $(A_{EF}(M_2)\ A_{EF}(M_1))$ 上双模的结构。
- 若 $F$ 是 $2\mathrm{Cob}_{\text{外开++}}$中的态射，则该 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群

$$\mathbf{Z}^P_{\delta_A,\pi_1}(F) := \left(\mathbb{Z}^{0|1}\right)^{\otimes \pi_1(F)} \otimes \wedge^* H_1(F,P)\{\delta_A(F)\}$$

  自然具有作为 $(A_{EF}(M_2)\ A_{EF}(M_1))$ 上双模的结构。

The定理 3.3（定理 1.5 的 $\mathbb{Z}$ 版本）给出如下推论 .

推论 1.13. 设 $\mathbf{SAlg}_{\mathbb{Z}}$ 表示由 $\mathbb{Z}$ 分次超环和 $\mathbb{Q}$ 分次双模构成、以同构为等价关系的对称幺半范畴。

- 对于任意 $A \in \mathbb{Q}$，赋值

$$M \mapsto A_{EF}(M) \quad and \quad F \mapsto \mathbf{Z}^P_{\delta_A, \pi_{1/2}}(F)$$

给出一个从 $\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\text{闭++}}$ 到 $\mathbf{SAlg}_{\mathbb{Z}}$ 的对称幺半函子。

- 对于任意 $A \in \mathbb{Q}$，赋值

$$M \mapsto A_{EF}(M) \quad and \quad F \mapsto \mathbf{Z}^P_{\delta_A, \pi_1}(F)$$

给出一个从 $\mathbf{2Cob}^{\mathrm{ext}}{}_{\text{开++}}$ 到 $\mathbf{SAlg}_{\mathbb{Z}}$ 的对称幺半函子。

证明与 [Man23 中推论 1.3] 的证明相同。

非半单拓扑量子场论。近年来，人们对三维 Witten–Reshetikhin–Turaev 拓扑量子场论的非半单类比理论产生了浓厚兴趣（例如参见 [ADO92, CGPM14, Mik15, BCGPM16, GPV17, AGPS18, GPPV17, GHN+21, CGP21, Jag22, GY22]）。特别是，其中一些构造 [Mik15, BCGPM16, AGPS18, GY22] 源自李超代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 或其相关代数的量子表示论，并与亚历山大多项式和 Reidemeister挠率有关。De Renzi [DR22], 提出了一种定义非半单三维拓扑量子场论的一般机制：他利用普适构造，从他称为相对模范畴 $\mathcal{C}$的数据出发，定义一类 1+1+1 扩展拓扑量子场论。特别地，$\mathcal{C}$ 带有一个分解 $\mathcal{C} = \oplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$，其中 $G$ 是某个阿贝尔群；这些数据还包括另一个阿贝尔群 $Z$，使得该理论在（带装饰的）曲面上的态空间是 $Z$-分次向量空间。

在 [GY22 的定理 2.23 中，$\hbar = \pi i/2$ 和 $q = i$] Geer 与 Young 定义了一个 $\mathbb{C}$线性[2]相对模范畴 $\mathcal{D}^{q,\ \mathrm{int}}$ 带有 $G = \mathbb{C}/((2\pi i/\hbar)\mathbb{Z}) = \mathbb{C}/(4\mathbb{Z})$ 和 $Z = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。他们提出，由 De Renzi 的构造 [DR22] 与 $\mathcal{D}^{q,\ \mathrm{int}}$ 相关联的拓扑量子场论，是 Mikhaylov 论文 [Mik15], 主要研究对象的一种（经同调截断、非导出的）数学实现；Mikhaylov 将其称为 $\mathfrak{psl}(1|1)$ Chern-Simons 拓扑量子场论。我们将此拓扑量子场论的非扩张版本记为 $\mathbf{Z}^{GY}$，扩张版本记为 $\mathbf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}$。

对于由 $p$ 个圆的不交并（每个圆都装饰有 $0 \in G$），$\mathbf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}$ 赋予一个以 $Z$分次向量空间为富化结构的范畴；该范畴可视为 $Z$分次范畴的 $p$重普通张量幂（如 [Kel82，第 1.4]节）的幂等元完备化，其中的对象是 $Z$分次投射模，且这些投射模定义在 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 上。$p$重张量积

$$P(0,0)_{\overline{0}} \otimes \cdots \otimes P(0,0)_{\overline{0}}$$

自然地给出该范畴的一个对象，其中 $P(0,0)_{\overline{0}}$表示 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$，其 $Z$ 分次的第一分量恒为零，第二分量是 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 作为其自身上的 $\mathbb{Z}$ 分次模时的通常分次，其中 $\deg(E) = -1$ 且 $\deg(F) = 1$；第三分量则由超向量空间 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 上的奇偶性给出。参见 [GY22，第 2.3 节。3]

[2]讨论非半单拓扑量子场论时，我们将在 $\mathbb{C}$ 上而不是 $\mathbb{Z}$ 上进行研究。

现在，设 $F$ 是一个从 $M_1$ （由 $p_1$ 个零标记圆组成）到 $M_2$ （由 $p_2$ 个零标记圆组成）的零标记二维配边，并假设$F$ 的每个连通分支都与 $M_1$ 非平凡相交；鉴于这些标记，这相当于满足 [DR22 第 2 节3] 中定义的、针对作为从 $M_1$ 到 $M_2$ 的配边的 $F$ 的可容许性条件。拓扑量子场论 $\mathsf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}$ 将一个函子赋给 $F$，该函子在上述富化范畴之间，并且我们可以将此函子作用于对应于 $(P(0,0)\overline{0})^{\otimes p_1}$ 的对象上。由此得到与 $M_2$ 相关联的范畴中的一个对象，而该范畴有一个到 $(U(\mathfrak{psl}(1|1)))^{\otimes p_2}$ 上的 $Z$ 分次投射模范畴的典范函子。应用这个附加函子后，我们得到一个 $Z$ 分次超向量空间 $\mathsf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}(F)$（略微滥用记号），其上有一个左作用

$$(U(\mathfrak{psl}(1|1)))^{\otimes p_2} = A_{EF}(M_2),$$

作为左模是投射的。此外，将相同的函子序列应用于从 $(P(0,0)\overline{0})^{\otimes p_1}$ 到其自身的态射，$\mathsf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}(F)$ 也具有一个右作用

$$(U(\mathfrak{psl}(1|1)))^{\otimes p_1} = A_{EF}(M_1).$$

总而言之，$\mathsf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}(F)$ 上存在一个关于 $(A_{EF}(M_2)\ A_{EF}(M_1))$ 的双模结构，且作为左模是投射的。我们还可以通过 $Z = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 去掉分次的第一分量，因为在此情形下它始终为零；也可以去掉第三分量，因为它已由超向量空间结构体现。因此，我们将 $\mathsf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}(F)$ 视为一个 $\mathbb{Z}$-分次双模。

事实证明（见命题 2.8），空间 $\mathsf{Z}^{P}_{\delta,\ \pi}(F)$ 作为 $A_{EF}(M_2)$ 上的左模是投射的，当且仅当 $F$ 的每个连通分支都与入边界 $M_1$相交；也就是说，恰好在满足 De Renzi 的可容许性条件时成立。这里所讨论的曲面 $F$ 是 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}\ \text{闭}++}$ 中的态射，因此它们具有 $\delta_{1/2}(F)\in\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$。对于这样的 $F$，我们提出如下猜想。

猜想 1.14. 若每个连通分支都与 $F$ 相交，则作为 $(A_{EF}(M_2)\ A_{EF}(M_1))$ 上按 $\mathbb{Z}$ 分次的双模，我们有

$$\mathbf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}(F) \cong \mathbf{Z}^{P}_{\delta_{1/2},\pi_{1/2}}(F).$$

注意，猜想 1.14 使用的分次和奇偶平移，与 [Man23 中关于 $\mathsf{Z}^{S_+}$ 的猜想 1.6] 相同。对于亏格为零的连通曲面 $F$，De Renzi 在 [DR22 第 7.5], 节讨论了态空间的分次维数；我们对 $\mathsf{Z}^{P}_{\delta_{1/2},\pi_{1/2}}(F)$ 的次数和奇偶平移与这一讨论相符。进一步考察分次维数之外的双模结构，在例 2.7 中我们将证明，对于从 $(S^1)^{\sqcup p}$ 到 $S^1$ 的闭$p$元裤子协边 $F$，双模 $\mathsf{Z}^{P}_{\delta_{1/2},\pi_{1/2}}(F)$ 可识别为 $(U(\mathfrak{psl}(1|1)))^{\otimes p}$，其右作用由乘法给出，即 $(U(\mathfrak{psl}(1|1)))^{\otimes p}$ 的作用；左作用则由余乘法 $\Delta(E) = E\otimes 1 + 1\otimes E$和 $\Delta(F) = F\otimes 1 + 1\otimes E$在$U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 上诱导，即$U(\mathfrak{psl}(1|1))$ 的作用。因此，函子 $(\mathsf{Z}^{P}_{\delta_{1/2},\pi_{1/2}}(F)\otimes_{(U(\mathfrak{psl}(1|1)))^{\otimes p}} -)$ 给出 $p$ 重表示的张量积，其中表示 $U(\mathfrak{psl}(1|1))$，这与 [DR22 中关于 $\mathsf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}(F)$ 的命题 7.3] 一致。

注 1.15。虽然 TQFT $\mathsf{Z}^{GY}$ 在 [GY22] 中所述的带装饰协边上具有函子性（大致而言：配有带色带状图的不带角点的三维协边），$\wedge^* H_1(F, S_+)$

是 Zarev 对曲面的带边界缝合希加德·弗洛尔不变量的去范畴化，因此应当在某些“缝合协边”（大致而言：带角的三维协边）下具有函子性。Geer–Young 使用应用于带装饰的协边的普适构造来定义其 TQFT；而带边 sutured Heegaard Floer 同调及其去范畴化，也可以视为通过将普适构造应用于缝合协边（“Zarev 帽”）而得到，这一观点源自 [Zar10]。

似乎可以将一部分带装饰的协边与一部分缝合协边对应起来；带装饰的协边允许更一般的着色，而缝合协边允许更一般的拓扑。若能建立这种对应关系，并将其扩展为一种同时概括带装饰的协边和缝合协边的协边类型（可能是配备某种更一般着色数据的缝合协边），将会很有意思。这样一来，我们希望 $\mathsf{Z}^{GY}$ 在这些更一般的协边下具有函子性，并且能够定义一种理论，将 $\mathsf{Z}^{GY}_{\mathrm{ext}}$ 扩展到带角曲面和缝合协边，并将去范畴化的带边界缝合希加德·弗洛尔理论从与 $\mathfrak{psl}(1|1)$ 相关的颜色扩展到与 Geer–Young 的 $U_q^E(\mathfrak{gl}(1|1))$ 相关的更一般颜色（参见 [GY22，第 6.1] 节中的讨论）。

注 1.16。本文的结果也受到带边界希加德·弗洛尔同调中一些开放问题的启发，方向有所不同。Mikhaylov 的 $\mathfrak{psl}(1|1)$ 切恩-西蒙斯理论旨在恢复闭三维流形的图拉耶夫扭量；反过来，这种扭量可由复杂的 $HF^+$ 和 $HF^-$ 版本的 Heegaard Floer同调范畴化，而截至目前，带边界希加德·弗洛尔同调在很大程度上仍局限于较简单的版本 $\widehat{HF}$。例如，无法从 $\widehat{HF}$恢复光滑四维流形中有趣的 Ozsv´ath–Szab´o 混合不变量；这需要 $HF^+$和 $HF^-$。对于亏格-零曲面，已有一些工作超越了 $\widehat{HF}$ 框架（例如 Ozsv´ath–Szab´o 的带边界 HFK）；而在亏格一的情形下，Lipshitz–Ozsv´ath–Thurston 曾介绍过一种带边界版本 [LOT] of $HF^-$，但尚未在文献中发表（相关代数见 [LOT21]）。不过，总体而言，如何扩展带边界希加德·弗洛尔技术，使得通过沿曲面切割三维流形能够恢复 $HF^+$和 $HF^-$，仍是一个重大的开放问题。人们或许可以先彻底理解去范畴化层面，尤其是理解一种适用于图拉耶夫扭量的拓扑量子场论方法，例如 $\mathfrak{psl}(1|1)$ 切恩-西蒙斯理论，再尝试将所有内容范畴化，并结合带边界希加德·弗洛尔同调与三维非半单拓扑量子场论的方法恢复 $HF^+$ 和 $HF^-$。本文试图朝这一目标迈进一步。

组织结构。第2节中，我们回顾一些预备定义，为 $S_+$ 的区间分支和圆周分支上的空间 $\wedge^* H_1(F,P)$ 定义代数作用，讨论这些作用何时给出投射模，并将 $\wedge^* H_1(F,S_+)$ 与 $\wedge^* H_1(F,P)$ 联系起来。第3节中，我们证明主要结果；第4节中，我们进一步详细解释对次数和奇偶平移的选择。

致谢。作者谨向 Bojko Bakalov、Sergei Gukov、Corey Jones、Rapha¨el Rouquier 和 Matthew Young 致谢，感谢他们的有益讨论。作者的部分研究经费由美国国家科学基金会资助，项目编号 DMS-2151786。

## 2. Algebra actions for intervals and circles

2.1. 缝合曲面与开闭协边。我们回顾一下缝合曲面的定义，采用 [Man23] 中的表述。

定义 2.1（参见 [Zar11], 的定义 1.2 及 [Man23] 的定义 2.1）。缝合曲面由数据 $(F, \Lambda, S_+, S_-, \ell)$ 构成，其中：

- $F$ 是一个紧致定向曲面，允许带边界（$F$ 可以不连通，也允许有闭分支）；
- $\Lambda$ 是在 $F$ 的每个边界连通分支上选取偶数个点（也可以不选）；
- $\partial F \setminus \Lambda$ 的连通分支交替标记为 $S_+$ 或 $S_-$，交替顺序沿着 $\Lambda$上的点排列。$\partial F$ 中不含 $\Lambda$ 上任何点的连通分支是 $S_+$圆或 $S_-$ 圆；其余 $S_+$ 和 $S_-$ 的连通分支都是闭区间。
- $\ell$ 由以下数据组成：将 $S_+$ 的每个连通分支标记为“入射”或“出射”，并分别对入射的 $S_+$ 连通分支集和出射的 $S_+$ 连通分支集指定一个次序。

我们通常将缝合曲面称为 $F$，并省略提及其余数据。可以将缝合曲面 $F$ 视为 Lauda–Pfeiffer 在 [LP08]中定义的 $1+1$维开闭 cobordism 范畴 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的一个态射。该态射的源是 $S_+$ 的入射部分 $M_1$ （反转定向后），靶是出射部分$M_2$，因此 $S_+ = M_2 \sqcup (-M_1)$。 $F$ 的非粘合边界是 $S_-$。对应于 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中一对可复合态射的缝合曲面见 [Man23，图2]。

2.2. 更大态空间上的作用。选取 $S_+$ 的每个连通分支（区间或圆）中各一个点，组成有限子集 $P$ of $S_+$ 。对于任意 $\delta \in \mathbb{Q}$ 和 $\pi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ，我们将在超阿贝尔群上定义超代数作用

$$\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F) := (\mathbb{Z}^{0|1})^{\otimes \pi(F)} \otimes \wedge^* H_1(F, P)\{\delta(F)\}.$$

具体而言，对于 $S_+$ 的区间分支，我们将定义 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的作用；对于 $S_+$ 的圆分支，则定义 $\mathbb{Z}\langle E、\ F\rangle/(E^2、\ F^2、\ EF+FE)$ 的作用。对于 $S_+$ 的出射分支，这些作用将取左作用的形式；对于 $S_+$ 的入射分支，则取右作用的形式。记 $\varepsilon_F$ 为 $(\mathbb{Z}^{0|1})^{\otimes \pi(F)}$ 的标准基元素。

定义 2.2（参见 [Man23] 的定义 2.4）。设 $(F, \Lambda, S_+, S_-, \ell)$ 为一个缝合曲面，并设 $X$ 是 $S_+$ 的一个出射区间或圆分支。选取如上所述的有限点集$P$。对于任意 $\delta \in \mathbb{Q}$ 和 $\pi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，我们定义

$$E = E_I \colon \mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F) \to \mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)$$

如下。

- 定义 $\phi_X\colon\ H_1(F,P)\to\mathbb{Z}$ 为如下映射的复合

$$\phi_X := H_1(F,P)\xrightarrow{\partial} H_0(P)\xrightarrow{[p_X]^*\cdot -}\mathbb{Z}$$

其中，$[p_X]^*$ 是 $H^0(P)$ 中与 $H_0(P)$ 中唯一点 $p_X$ 的同调类对偶的类；该点属于 $P$，并包含于 $X$ 中。

- 对于 $k\geq 1$，定义 $\Phi_X\colon\ T^kH_1(F,P)\to T^{k-1}H_1(F,P)$，如下：

$$\Phi_X := \sum_{i=1}^{k}\Bigg(T^{i-1}H_1(F,P)\otimes_{\mathbb{Z}} H_1(F,P)\otimes_{\mathbb{Z}} T^{k-i}H_1(F,P)$$
$$\xrightarrow{(-1)^{i-1}\,\mathrm{id}_{T^{i-1}H_1(F,P)}\otimes\phi_X\otimes\mathrm{id}_{T^{i-1}H_1(F,P)}} T^{i-1}H_1(F,P)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} T^{k-i}H_1(F,P).\Bigg)$$

- 由于上述定义中的符号 $(-1)^{i-1}$，我们得到一个诱导映射

$$\overline{\Phi_X}\colon\ \wedge^k H_1(F,P)\to\wedge^{k-1}H_1(F,P).$$

定义

$$\overline{\Phi_X}'\colon (\mathbb{Z}^{0|1})^{\otimes\pi(F)}\otimes\wedge^k H_1(F,P)\{\delta(F)\}\to(\mathbb{Z}^{0|1})^{\otimes\pi(F)}\otimes\wedge^{k-1}H_1(F,P)\{\delta(F)\}$$

by

$$\overline{\Phi_X}'(\varepsilon_F\otimes\omega) := (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F\otimes\overline{\Phi_X}(\omega).$$

- 令 $E$ 为所有 $k\geq 1$ 上映射 $\overline{\Phi_X}'$ 的和。$E$ 是奇映射，而 $\Phi_X$ 的定义中符号 $(-1)^{i-1}$ 确保了 $E^2=0$。

当 $X$ 是 $S_+$ 的入射区间或圆分支时，类似地定义 $E$，但有以下区别：

- 在 $\Phi_X$ 的定义中，我们用 $(-1)^{k-i}$ 作为符号，而不用 $(-1)^{i-1}$；
- 我们定义 $\overline{\Phi_X}'$ 时不带符号 $(-1)^{\pi(F)}$。

$$\overline{\Phi_X}'(\varepsilon_F\otimes\omega) := \varepsilon_F\otimes\overline{\Phi_X}(\omega),$$

注2.3. 在 [Man22, Man23], 中，我们本可以像定义 2.2 中那样，为 $S_+$ 的圆周分支定义 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 在整数 $\delta_{\pi}^{S_+}(F)$ 上的作用。然而，这些作用似乎缺乏充分的动机；如果我们认为整数 $\delta_{\pi}^{S_+}(F)$ 是如命题 2.11 所示由整数 $\delta_{\pi}^{P}(F)$ 得到的，那么通过标记 $S_+$ 个圆，我们就相当于在每个 $S_+$ 圆上“用尽”了代数作用，没有留下任何剩余作用。相应地，整数 $\delta_{\pi}^{S_+}(F)$ 在沿圆粘合时似乎不具备粘合定理。

下面的定义终于让我们得到了与圆的 $E$端同态相对应的 $F$ 端同态。

定义 2.4. 设 $(F,\Lambda,S_+,S_-,\ell)$ 是一个缝合曲面，且 $C$ 是 $S_+$ 的一个圆分支。赋予 $C$ 其作为 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中一个对象（的一部分）时所具有的定向；换言之，若 $C$ 是出射的，就赋予 $C$ 从 $F$ 诱导出的边界定向；并赋予 $C$ 与之相反的

定向，若 $C$ 是入射的。按上述方式选取一个有限点集 $P$。对于任意 $\delta \in \mathbb{Q}$ 和 $\pi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，定义

$$F = F_C \colon \mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F) \to \mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)$$

发送至

$$\varepsilon_F \otimes \omega \mapsto (-1)^{\pi(F)} \varepsilon_F \otimes ([C] \wedge \omega)$$

若 $C$ 为出射且

$$\varepsilon_F \otimes \omega \mapsto \varepsilon_F \otimes (\omega \wedge [C])$$

若 $C$ 为入射。

命题 2.5。以下关系成立：

- 若 $I$ 是 $S_+$的一个区间分支，则定义 2.2 中的自同态 $E = E_I$ 满足 $E^2 = 0$。
- 若 $C$ 是 $S_+$的一个圆分支，则定义 2.2 中的自同态 $E = E_C$ 和定义 2.4 中的自同态 $F = F_C$满足 $E^2 = 0$、 $F^2 = 0$和 $EF + FE = 0$。
- 对于 $S_+$ 的任意一对不同入射分支，端同态 $E$ 或 $F$ 反对易；任意一对不同出射分支也同样如此。若一对自同态分别来自一个入射分支和一个出射分支，则它们可交换。

证明。区间和圆情形中的关系 $E^2 = 0$ 由定义 2.2 中的符号 $(-1)^{i-1}$ 或 $(-1)^{k-i}$ 得出。圆情形中的关系 $F^2 = 0$ 由 $[C] \wedge [C] = 0$得出。

设 $C$ 是 $S_+$的一个圆分支，因此我们有两个对应于 $C$的自同态 $E$ 和 $F$。非正式地说，若 $C$ 是出射的，则 $E$ 的作用是从左侧向内移动（每越过一个因子便带上一个符号），直到到达点 $p_C$处边界非平凡的各个楔因子，并对每种移除其中一个楔因子的方式求和（带符号）。先作用 $F$ 再作用 $E$，可确保随后 $E$ 的作用中的每一项都比先作用 $E$ 再作用 $F$多越过一个因子 $[C]$。由此可得 $EF + FE = 0$。$S_+$ 中两个入射分支的反对易性，以及 $S_+$ 中一个入射分支和一个出射分支的可交换性，可用类似论证得出。□

对于 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的对象 $M$，令 $A_{EF}(M)$ 表示按顺序对 $M$ 和 $\mathbb{Z}\langle E$ 的区间分支所对应的超代数 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$，以及 $M$ 的圆周分支所对应的超代数 $F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE)$ 取张量积。若 $F\colon M_1 \to M_2$ 是 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的一个态射，命题 2.5 赋予 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\pi}(F)$ 一个作为 $(A_{EF}($ $M_2)$ $A_{EF}(M_1))$ 上双模的结构。如果愿意，我们也可以将所有内容与 $\mathbb{F}_2$ 取张量积，并忽略符号和超结构。我们将所得双模记为 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\mathbb{F}_2}(F)$，因为 $\pi$ 在 $\mathbb{F}_2$ 上无关紧要。

例 2.6。图 2 展示了在某个特定的缝合曲面 $F$ 及其边界上特定选取的$S_+$圆 $C$和 $S_+$区间 $I$ 的情况下， $F_C$、 $E_C$和 $E_I$对元素$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in$整数$^{S_+}_{\delta\,,\,\mathbb{F}_2}(F)$的作用。

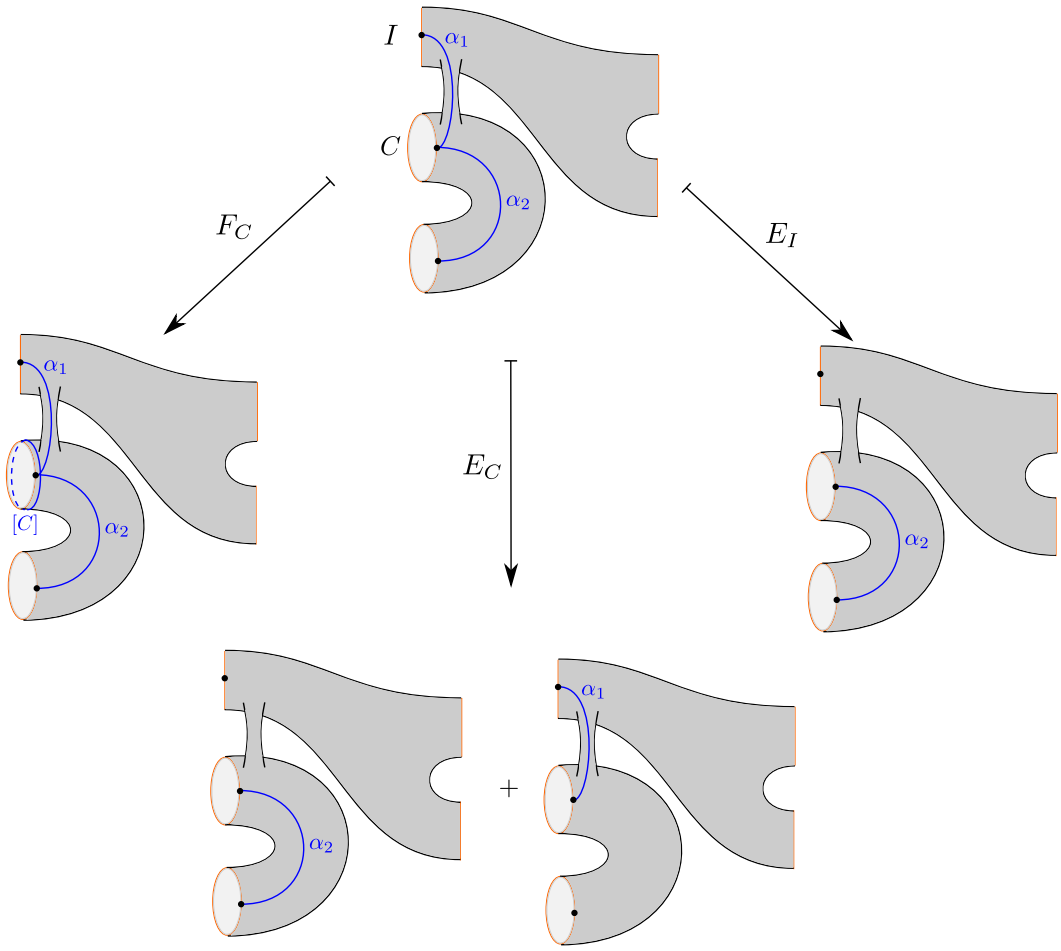


FIGURE 2. $F$ 在圆上的作用，以及 $E$ 在圆和区间上的作用（为简单起见，系数取在 $\mathbb{F}_2$ 中）。

2.3. 根据弧和圆的集合定义基。 [Man22、Man23] 中关于粘合结果的证明使用了 $H_1(F, S_+)$ 的某些基的选取；这里的证明也将类似地使用 $H_1(F, P)$的基。如 [Man22 中引理 4.1] 的证明以及 [Man23 中引理 3.1], 的证明所示，给定一个缝合曲面 $F$，我们可以选取一个保留缝合数据的同胚，将 $F$ 映到有限个“标准”缝合曲面的不交并上，例如图 3 所示的曲面。如下所述，在每个标准缝合曲面中定义一组定向弧和圆，例如图 3 中蓝色弧和圆的集合。

- 在每个“把手”中，取两个定向圆，如图3所示。
- 对于 $F$ 的所有边界分支（无论它们是否与 $S_-$ 有非平凡交集），除一个选定的分支外，沿每个边界分支取一个定向圆。

- 选择一个嵌入在 $F$ 中的连通无环有向图 $\Gamma_F$，其顶点集为 $P$。

$\Gamma_F$的圆和边构成了 $H_1(F, P)$的一组基，因此它们的楔积构成了 $\wedge^* H_1(F, P)$的一组基。将 $\varepsilon_F \otimes -$ 作用于这些楔积，我们得到$(\mathbb{C}^{0|1})^{\otimes \pi(F)} \otimes \wedge^* H_1(F, P)\{\delta(F)\}$的一组基。

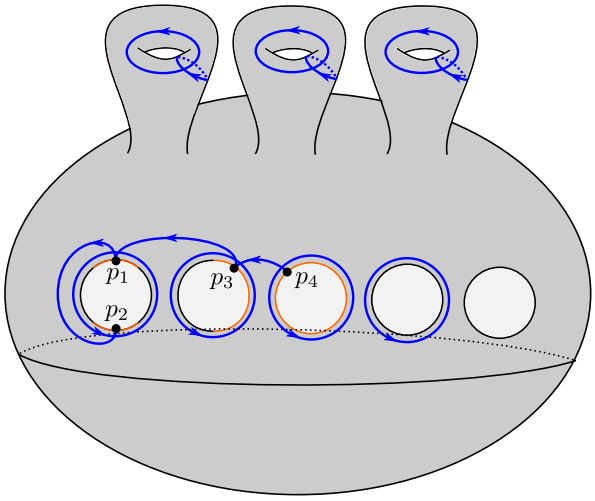


FIGURE 3. 构成 $H_1(F,P)$ 的基的定向弧和圆，其乘积构成 $\wedge^* H_1(F,P)$ 的基。集合 $P$由标记为 $p_1$、$p_2$、 $p_3$ 和 $p_4$ 的点组成。 $\partial F$ 的子集 $S_+$ 以橙色绘出，而 $S_-$ 以黑色绘出。与 Man22 的图 16], 相比，我们这里多了一个蓝色圆。

2.4. 张量积。这里我们更详细地讨论一类重要的例子，即例1.6中的闭合和开放 $p$-元裤子。事实上，对于开放的 $p$-元裤子$\mathcal{P}_{\text{open}}$, [Man23，命题2.7] 基本上无需改动即可适用；我们有 $H_1(F,P) \cong H_1(F,S_+)$，因为 $\mathcal{P}_{\text{open}}$ 没有 $S_+$ 圆，而本文中的分次移位已在例1.6中处理。因此

$$\mathbf{Z}^P_{\delta_1,\pi_1}(\mathcal{P}_{\text{open}}) \cong (\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$$

作为 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2)$,$(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p})$ 上的 $\mathbb{Z}$ 分次双模，其中 $(\mathbb{Z}[E]/(E^2))^{\otimes p}$ 通过乘法在右侧作用，而 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的左作用由余乘法诱导

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + 1 \otimes E.$$

令 $\mathcal{P}_{\text{closed}}$ 表示闭的 $p$ 元裤子。在图4中，将弧从上到下标记为 $e_1$、.....、 $e_p$，将圆从上到下标记为 $\sigma_1$、.....、 $\sigma_p$。按图4所示为它们定向：

- $e_p$ 从出边界定向到入边界， $e_{p-1}$ 从入边界定向到出边界，依此交替进行；

- $\sigma_p$ 采用与其对应的入射$S_+$ 圆的边界定向相反的定向， $\sigma_{p-1}$ 采用其对应的入射 $S_+$ 圆的边界定向，依此交替进行。

对于闭合的 $p$ 元裤子，我们有 [Man23 命题 2.7] 的如下类似结果。

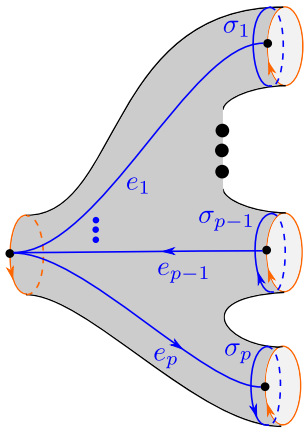


FIGURE 4. 弧 $e_1, \dots, e_p$ 和圆 $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ 上的定向构成了 $H_1(\mathcal{P}_{\text{closed}}, P)$的一组基。图中 $\mathcal{P}_{\text{closed}}$的 $S_+$ 个边界圆上的定向是诱导的边界定向，未作反转。

命题2.7。定义一个映射

$$\mathbf{Z}^P_{\delta_{1/2},\pi_{1/2}}(\mathcal{P}_{\text{closed}}) \to (\mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE))^{\otimes p}$$

将基元素

$$\varepsilon_{\mathcal{P}_{\text{closed}}} \otimes (e_1^{\delta_1} \wedge \sigma_1^{\delta_1'}) \wedge \cdots \wedge (e_p^{\delta_p} \wedge \sigma_p^{\delta_p'})$$

$\mathbf{Z}^P_{\delta_{1/2},\pi_{1/2}}(\mathcal{P}_{\text{closed}})$（其中 $\delta_i, \delta_i' \in \{0, 1\}$）映射到元素

$$(E^{1-\delta_1} F^{\delta_1'}) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_p} F^{\delta_p'})$$

$(\mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE))^{\otimes p}$。该映射是一个 $\mathbb{Z}$-分次双模之间的同构，其底环为

$$(\mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE), (\mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE))^{\otimes p})$$

其中，$(\mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE))^{\otimes p}$通过乘法右作用，而 $\mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE)$的左作用由余乘法诱导

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + 1 \otimes E, \qquad \Delta(F) = F \otimes 1 + 1 \otimes F.$$

证明。根据例1.6以及将$\pi_{1/2}$ 定义为 $\delta_{1/2}$的奇偶性，该映射保持$\mathbb{Z}$-分次和奇偶性。它在基元素上给出一个双射，因此我们需要证明它与 $\mathbb{Z}\langle E、 F\rangle/（E^2、 F^2、 EF + FE）$的左乘以及（$\mathbb{Z}\langle E、 F\rangle/（E^2、 F^2、 EF + FE）$）$^{\otimes p}$的右乘相容。

我们先来看 $E$的左乘。由于$\pi_{1/2}（\mathcal{P}_{\text{closed}}）= p$，乘积

$$E \cdot (\varepsilon_{\mathcal{P}_{\text{closed}}} \otimes (e_1^{\delta_1} \wedge \sigma_1^{\delta_1'}) \wedge \cdots \wedge (e_p^{\delta_p} \wedge \sigma_p^{\delta_p'})),$$

由下式给出

$$\begin{aligned}(-1)^p \sum_{i:\delta_i=1} (-1)^{\delta_1+\delta_1'+\cdots+\delta_{i-1}+\delta_{i-1}'} (-1)^{p-i+1} \\ \cdot \varepsilon_{\mathcal{P}_{\text{closed}}} \otimes (e_1^{\delta_1} \wedge \sigma_1^{\delta_1'}) \wedge \cdots \wedge (1 \wedge \sigma_i^{\delta_i'}) \wedge \cdots \wedge (e_p^{\delta_p} \wedge \sigma_p^{\delta_p'});\end{aligned} \tag{3}$$

the 因子 $(-1)^{p-i+1}$ 源自我们对 $e_i$所选择的定向。同时，

$$E \cdot ((E^{1-\delta_1}F^{\delta'_1}) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_p}F^{\delta'_p}))$$

由下式给出

$$\sum_{i:\delta_i=1} (-1)^{(1-\delta_1)+\delta'_1+\cdots+(1-\delta_{i-1})+\delta'_{i-1}}((E^{1-\delta_1}F^{\delta'_1}) \otimes \cdots \otimes (EF^{\delta'_i}) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_p}F^{\delta'_p})). \tag{4}$$

表达式 (3) 和 (4) 在我们的映射下相对应，因此我们的映射保留了 $E$ 的左乘作用。

接下来，为了计算

$$F \cdot (\varepsilon_{\mathcal{P}_{\text{closed}}} \otimes (e_1^{\delta_1} \wedge \sigma_1^{\delta'_1}) \wedge \cdots \wedge (e_p^{\delta_p} \wedge \sigma_p^{\delta'_p})), \tag{5}$$

我们注意到，如果 $[C]$ 是 $\mathcal{P}_{\text{closed}}$ 的出射圆的同调类，且取边界定向，那么

$$[C] = \sigma_p - \sigma_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1}\sigma_1.$$

因此，(5) 等于

$$\begin{aligned}&(-1)^p \sum_{i:\delta'_i=0} (-1)^{\delta_1+\delta'_1+\cdots+\delta_{i-1}+\delta'_{i-1}+\delta_i}(-1)^{p-i} \\ &\cdot \varepsilon_{\mathcal{P}_{\text{closed}}} \otimes (e_1^{\delta_1} \wedge \sigma_1^{\delta'_1}) \wedge \cdots \wedge (e_i^{\delta_i} \wedge \sigma_i) \wedge \cdots \wedge (e_p^{\delta_p} \wedge \sigma_p^{\delta'_p}).\end{aligned} \tag{6}$$

与此同时，

$$F \cdot ((E^{1-\delta_1}F^{\delta'_1}) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_p}F^{\delta'_p}))$$

由下式给出

$$\sum_{i:\delta'_i=0} (-1)^{(1-\delta_1)+\delta'_1+\cdots+(1-\delta_{i-1})+\delta'_{i-1}+(1-\delta_i)}(E^{1-\delta_1}F^{\delta'_1}) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_i}F) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_p}F^{\delta'_p}). \tag{7}$$

由于（6）和（7）在我们的映射下相对应，因此我们的映射保持对 $F$ 的左乘。

现在我们考虑对元素 $E_i := 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes E \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ 进行右乘，其中它属于 $(\mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE))^{\otimes p}$。计算

$$(\varepsilon_{\mathcal{P}_{\text{closed}}} \otimes (e_1^{\delta_1} \wedge \sigma_1^{\delta'_1}) \wedge \cdots \wedge (e_p^{\delta_p} \wedge \sigma_p^{\delta'_p})) \cdot E_i,$$

当 $\delta_i = 0$ 时，我们得到零；而当 $\delta_i = 1$ 时，我们得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{\delta'_i+\delta_{i+1}+\delta'_{i+1}+\cdots+\delta_p+\delta'_p}(-1)^{p-i} \\ &\cdot \varepsilon_{\mathcal{P}_{\text{closed}}} \otimes (e_1^{\delta_1} \wedge \sigma_1^{\delta'_1}) \wedge \cdots \wedge (e_i \wedge \sigma_i^{\delta'_i}) \wedge \cdots \wedge (e_p^{\delta_p} \wedge \sigma_p^{\delta'_p}).\end{aligned} \tag{8}$$

与此同时，

$$((E^{1-\delta_1}F^{\delta'_1}) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_p}F^{\delta'_p})) \cdot E_i$$

如果 $\delta_i = 0$，它也为零；而如果 $\delta_i = 1$，则得到

$$(-1)^{\delta'_i+(1-\delta_{i+1})+\delta'_{i+1}+\cdots+(1-\delta_p)+\delta'_p}(E^{1-\delta_1}F^{\delta'_1}) \otimes \cdots \otimes (EF^{\delta'_i}) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_p}F^{\delta'_p}). \tag{9}$$

由于（8）和（9）在我们的映射下相对应，因此我们的映射保持右乘 $E_i$。

最后，我们考虑右乘元素 $F_i := 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes F \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$（$\mathbb{Z}\langle E,\ F\rangle/(E^2,\ F^2,\ EF+FE)$）$^{\otimes p}$。该作用

$$(\varepsilon_{\mathcal{P}_{\text{closed}}} \otimes (e_1^{\delta_1} \wedge \sigma_1^{\delta_1'}) \wedge \cdots \wedge (e_p^{\delta_p} \wedge \sigma_p^{\delta_p'})) \cdot F_i$$

当 $\delta_i' = 1$ 时为零，而当 $\delta_i' = 0$ 时，我们得到

$$(10)\quad (-1)^{\delta_{i+1}+\delta_{i+1}'+\cdots+\delta_p+\delta_p'}(-1)^{p-i}\varepsilon_{\mathcal{P}_{\text{closed}}} \otimes (e_1^{\delta_1} \wedge \sigma_1^{\delta_1'}) \wedge \cdots \wedge (e_i^{\delta_i} \wedge \sigma_i) \wedge \cdots \wedge (e_p^{\delta_p} \wedge \sigma_p^{\delta_p'}).$$

与此同时，

$$((E^{1-\delta_1}F^{\delta_1'}) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_p}F^{\delta_p'})) \cdot F_i$$

当 $\delta_i' = 1$ 时也为零，而当 $\delta_i' = 0$ 时，我们得到

$$(11)\qquad (-1)^{(1-\delta_{i+1})+\delta_{i+1}'+\cdots+(1-\delta_p)+\delta_p'}(E^{1-\delta_1}F^{\delta_1'}) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_i}F) \otimes \cdots \otimes (E^{1-\delta_p}F^{\delta_p'}).$$

由于 (10) 和 (11) 在我们的映射下对应，因此我们证明了该命题。 □

2.5. 作用的射影性。由于拓扑量子场论 $\mathsf{Z}_{\text{ext}}^{GY}$ 涉及投射模范畴，我们应当考察 $\mathsf{Z}_{\delta,\ \pi}^{P}(F)$ 何时作为左模或右模是投射的。

命题 2.8。设 $M_2 \xleftarrow{F} M_1$ 是 $\mathsf{2Cob}^{\text{ext}}$ 中的一个态射。对于任意 $\delta \in \mathbb{Q}$ 和 $\pi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

- 若 $F$ 的每个连通分支都与入边界 $M_1$ 相交，则 $A_{EF}(M_2)$ 在 $\mathsf{Z}_{\delta,\ \pi}^{P}(F)$ 上的左作用是投射的。
- 若 $F$ 的每个连通分支都与出边界 $M_2$ 相交，则 $A_{EF}(M_1)$ 在 $\mathsf{Z}_{\delta,\ \pi}^{P}(F)$ 上的右作用是投射的。

证明。我们将证明第一条陈述；第二条类似。对于 $F$的一个连通分支 $F_0$，选取一个指定点 $p \in F_0 \cap P \cap M_1$。我们可以安排使 $F_0$中的所有基弧都有一个端点位于 $p$，并且可以选择包含 $p$的 $M_1$ 的连通分支，使其成为 $F_0$ 中唯一没有围绕它取基圆的边界圆。利用由此得到的 $\mathbb{Z}$-基，可以看出 $\mathsf{Z}_{\delta,\ \pi}^{P}(F)$ 是 $A_{EF}(M_2)$ 上的自由左模，其 $A_{EF}(M_2)$-基由所有满足以下条件的楔积 $\omega$ 组成:

- 对于 $M_2$ 的每个圆分支 $C$，$\omega$ 可被对应的基弧 $e_C$ 整除，但不能被对应的基圆 $\sigma_C$ 整除;
- 对于 $M_2$ 的每个区间分支 $I$，$\omega$ 可被对应的基弧$e_I$整除。

由此可知，$\mathsf{Z}_{\delta,\ \pi}^{P}(F)$ 是 $A_{EF}(M_2)$ 上的投射左模。 □

注 2.9. 在域上，环 $A_{EF}(M)$ 是局部的，因此投射模是自由的。如果 $F$ 的某个连通分支与 $M_1$ 不相交，那么可以构造 $A_{EF}(M_2)$ 的一个非零元素，使其在 $\mathsf{Z}_{\delta,\ \pi}^{P}(F)$ 上的作用为零，这与自由性矛盾，因此命题 2.8 的逆命题在域上成立。

注记 2.10. 回顾一下，对于 $\mathsf{2Cob}^{ext}$ 中的对象 $M$，在 Man 中考察的代数 $A(M)$ 是若干个 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的张量积，这些因子仅由 $M$ 的区间分支索引，而不由圆分支索引。在 Man 中，$A(M_2)$ 和 $A(M_1)$ 在

整数$\delta_{\pi}^{S_+}$, $(F)$ 上的作用的投射性满足与命题 2.8 中类似的性质；如果 $F$ 的每个连通分支都与 $M_1$ 有非平凡交集，那么 $A(M_2)$ 的左作用是投射的；对于 $M_2$ 和 $A(M_1)$ 的右作用，结论也类似。若在域上进行讨论，则逆命题也成立。

2.6. 联系较大的态空间与较小的态空间。现在我们讨论如何从本文所考虑的空间 $\mathbf{Z}_{\delta\,\pi,\pi}^{S_+}(F)$ 中恢复 [Man23] 的态空间 $\mathbf{Z}_{\delta\,\pi,}^{S_+}(F)$。设 $M_2 \xleftarrow{F} M_1$ 是 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的一个态射；定义 $\mathbf{Z}_{\delta\,\pi}^{S_+}$, $(F)$ 及其 $A(M_i)$ 作用时，从代数角度来说，将 $F$ 的圆视为入射还是出射并无区别，因此为简单起见，我们假设 $F$ 的所有圆都位于其入边界 $M_1$ 中。

命题 2.11. 对任意 $\delta \in \mathbb{Q}$ 和 $\pi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，有

$$\mathbf{Z}_{\delta,\mathbb{F}_2}^{S_+}(F) \cong \mathbf{Z}_{\delta,\mathbb{F}_2}^{P}(F) \otimes_{(U^{\mathbb{F}_2}(\mathfrak{psl}(1|1)))^{\otimes p}} (V(0,0)^{\mathbb{F}_2})^{\otimes p}$$

*and*

$$\mathbf{Z}_{\delta,\pi}^{S_+}(F) \cong \mathbf{Z}_{\delta,\pi}^{P}(F) \otimes_{(U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{psl}(1|1)))^{\otimes p}} (V(0,0)_{\overline{0}})^{\otimes p}.$$

证明。右侧的张量积是 $\mathbf{Z}_{\delta\,,\mathbb{F}_2}^{P}(F)$ 和 $\mathbf{Z}_{\delta\,,\pi}^{P}(F)$ 关于自同态 $F_C$ 的像取商所得，其中 $S_+$ 的每个圆分支 $C$ 均对应一个这样的商。按照第 2.3 节中的方式选取基后，这个商会消去所有可被任意圆 $C$ 的类 $[C]$ 整除的基元素，而不会对其余基元素施加任何其他关系。其余基元素与 [Man22, Man23] 中为 $\mathbf{Z}_{\delta\,\mathbb{F}_2,}^{S_+}(F)$ 和 $\mathbf{Z}_{\delta\,\pi\,,}^{S_+}(F)$ 选取的基元素相同。□

## 3. A gluing theorem for intervals and circles

3.1. 区间粘合引理。设 $F$ 是一个缝合曲面，其 $S_+$ 的所有连通分支均为出射的，即 $F$ 对应于 $2\mathrm{Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中从某个对象 $M$ 到 $M$ 的态射。设 $I_1$ 和 $I_2$ 是 $S_+$ 的两个区间分支，分别包含 $P$ 中的点 $p_1$ 和 $p_2$，且具有关联映射 $E_1$ 和 $E_2$。设 $\overline{F}$ 是将 $I_1$ 和 $I_2$ 按照定向相容的方式粘合后得到的结果。

引理 3.1。 *[* 参见 [Man22], 的引理 4.1 和 [Man23]*]* 的引理 3.1。对于任意 $A \in \mathbb{Q}$ 以及满足 $\pi_j(F)$ 有定义的任意 $j \in \{1/2, 1\}$，可得 $\pi_j(\overline{F})$ 也有定义，并且存在一个同构

$$\mathbf{Z}_{\delta_A,\pi_j}^{P}(\overline{F}) \cong \frac{\mathbf{Z}_{\delta_A,\pi_j}^{P}}{\mathrm{im}(E_1 + E_2)}$$

在 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群之间，且与以下左作用相容： $S_+$ 中既不是 $I_1$ 也不是 $I_2$ 的区间分支上的 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$，以及 $S_+$ 的圆周分支上的 $\mathbb{Z}\langle E, F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE)$。在 $\mathbb{F}_2$ 上，我们有一个类似的同构，且无须要求 $\pi_j$ 良定义。

证明。 $j = 1$的 $\pi_j(\overline{F})$ 的良定义性源于区间粘合不会改变 $S_+$ 圆的数量。对于 $j = 1/2$，这是因为当将 $I_1$ 粘合到 $I_2$

时， $S_+$ 区间的数量减少两个，而与 $S_-$ 相交的 $F$ 边界分支的数量也会增加或减少一个。

对于该同构，证明大体遵循 [Man23 引理 3.1] 的证明；我们只指出将该证明调整到当前情形所需的修改。令 $\delta := \delta_A$ 和 $\pi := \pi_j$。

情形 1-2：只有 $I_2$ 单独存在。当我们证明该同构与其余作用相交织时，现在可能存在更多类型的其余作用（圆上的 $E$ 和 $F$，以及区间上的 $E$）。[Man23] 中关于区间 $E$ 作用的论证，同样适用于圆上的 $E$ 作用。若 $C$ 是 $S_+$ 的一个圆分支，且对应的 $F$-自同态为 $F_C$，那么按照 [Man23 引理 3.1] 证明中的记号，我们有

$$F_C(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C] \wedge e \wedge \omega') = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C] \wedge \omega')$$

在有理数 $E^P_{\delta,\,\pi}(F)$ 中。在我们的同构下，该元素映到

$$(-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C] \wedge \omega')$$

在有理数 $E^P_{\delta,\,\pi}(\overline{F})$ 中，这也正是用 $F_C$ 作用于 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C] \wedge \omega')$ 所得的结果，因为 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$。

情形 1-3：$I_1$ 和 $I_2$ 都不是孤立的。再次，我们必须考虑该同构关于更多类型作用的交织性质。圆的 $E$ 作用可由区间的 $E$ 作用的同一证明推出。对于 $S_+$ 中的一个圆 $C$ 及其对应的 $F$-自同态$F_C$，我们有

$$F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge [C] \wedge \omega')$$

and

$$F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C] \wedge \omega').$$

同时，若 $F_{\overline{C}}$ 表示情形 $\overline{F}$ 中的类似自同态，则有

$$F_{\overline{C}}(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(\overline{F})+1}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge [C] \wedge \omega')$$

and

$$F_{\overline{C}}(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C] \wedge \omega').$$

交织性质由 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$得出。

情形 2-1a：$I_1$ 和 $I_2$ 在 $F$的同一连通分支中并非孤立。若 $C$ 是 $S_+$ 的一个圆分支（无论它是否包含 $q$），则

$$F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge [C] \wedge \omega')$$

and

$$F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C] \wedge \omega').$$

在 $\overline{F}$ 这一侧，我们有

$$F_C(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(\overline{F})+1}\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C] \wedge \omega')$$

and

$$F_C(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_F \otimes ([C] \wedge \omega').$$

交织性质再次由 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$ 得出。

情形 2-1b 和 2-2：上述情形中的论证在这里仍然适用。 □

3.2. 圆粘合引理。与上一节一样，设 $F$ 是一个缝合曲面，其所有连通分支均为出射分支，即 $F$ 对应于 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中从 $\varnothing$ 到某个对象 $M$ 的一个态射。设 $C_1$ 和 $C_2$ 是 $S_+$ 的两个圆周分支，分别包含 $P$ 上的点 $p_1$ 和 $p_2$，并具有关联映射 $E_1$、$F_1$ 以及 $E_2$、$F_2$。设 $\overline{F}$ 是将 $C_1$ 和 $C_2$ 按照定向相容的方式粘合在一起所得的结果。

引理 3.2。对于任意 $A \in \mathbb{Q}$，以及任意使 $\pi_j(F)$ 有定义的 $j \in \{1/2, 1\}$，可得 $\pi_j(\overline{F})$ 也有定义，并且存在一个同构

$$\mathbf{Z}^P_{\delta_A,\pi_j}(\overline{F}) \cong \frac{\mathbf{Z}^P_{\delta_A,\pi_j}}{\mathrm{im}(E_1 + E_2) + \mathrm{im}(F_1 + F_2)}$$

该同构是 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群之间的同构，并且与 $S_+$ 的区间分支上 $\mathbb{Z}[E]/(E^2)$ 的左作用，以及既非 $C_1$ 也非 $C_2$ 的圆周分支上 $F\rangle/(E^2, F^2, EF + FE)$ 的左作用相容。在 $\mathbb{F}_2$ 上，我们有一个类似的同构，且不要求 $\pi_j$ 良定义。

证明。当 $j = 1$ 时，$\pi_j(\overline{F})$的良定义性源于沿 $S_+$ 圆粘合不会改变 $S_+$ 圆的数量模 2。当 $j = 1/2$ 时，沿 $S_+$圆粘合既不会改变 $S_+$ 区间的数量，也不会改变与 $S_-$ 有非平凡交的 $F$ 边界分支的数量。

For 为构造同构，令 $\delta := \delta_A$，且 $\pi := \pi_j$。我们将考虑各种情形 s.

情形 1：$C_1$和 $C_2$位于 $F$的不同连通分支上。选取一个 $\mathbb{Z}$-基作为 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)$的基，如第 2.3 节所述；不失一般性，我们可以假设 $C_1$ 和 $C_2$ 各自至多与一条基弧相邻。

情形 1-1：$C_1$ 和 $C_2$ 都单独存在。假设 $C_1$ 和 $C_2$ 分别是 $F$中其所在连通分支内 $S_+$ 的唯一连通分支。

情形 1-1a：在与 $C_1$ 或 $C_2$相同的 $F$ 连通分支中，没有 $S_-$ 圆。在这种情况下，粘合会产生一个 $F$的闭分支。自同态 $E_1$、$E_2$、$F_1$和 $F_2$ 各自都为零，因此 $E_1 + E_2$ 和 $F_1 + F_2$ 也为零。粘合对 $\delta$ 相关量的影响如下：

- 无-$S_-$ 非闭合分支的数量减少 2。
- 闭分支的数量增加 1。
- $S_+$ 圆的数量减少 2。

因此，$\delta$ 的变化为

$$-2A + (2A - 1) - 2(-1/2) = 0,$$

因此， $\pi$的变化也为零。结论现在由 $H_1(F,P) \cong H_1(\overline{F},\overline{P})$ 得出；交织性质成立，因为包含 $C_1$ 和 $C_2$ 的 $F$ 连通分支与 $S_+$ 的其他连通分支均不相交。

情形 1-1b：含有 $S_-$ 圆的连通分支中有 $C_1$，但含有 $C_2$的连通分支中没有。粘合使与 $\delta$ 相关的量发生如下变化：

- 无-$S_+$ 非闭合分支的数量增加 1。
- 无-$S_-$ 非闭合分支的数量减少 1。
- $S_+$ 圆的数量减少 2。

由此产生的 $\delta$ 变化为

$$(A-1)-(A)-2(-1/2)=0,$$

因此， $\pi$ 的变化也为零。

选取基时，我们可以确保 $[C_1]$是一个基圆。粘合之前，$\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\pi}(F)$ 的基元素要么是 $\varepsilon_F \otimes ([C_1]\wedge\omega')$，要么是 $\varepsilon_F\otimes\omega'$，其中某个由基弧和基圆构成的楔积 $\omega'$ 不能被 $[C_1]$整除。

映射 $E_1$ 和 $E_2$ 各自均为零，因此 $E_1+E_2=0$。对于 $F_1$，我们有

- $F_1(\varepsilon_F\otimes([C_1]\wedge\omega'))=0$;
- $F_1(\varepsilon_F\otimes\omega')=(-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F\otimes([C_1]\wedge\omega')$.

由于 $F_2$ 是零映射，因此我们有 $F_1+F_2=F_1$，并且要将 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\pi}(F)$ 对 $F_1$的像取商空间。该商空间的一组基由元素 $\varepsilon_F\otimes\omega'$ 构成，其中 $\omega'$ 不能被 $[C_1]$整除。这些相同的元素构成 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\pi}(\overline{F})$ 的一组基，并且存在一个双射：对于 $F$，将 $\varepsilon_F\otimes\omega'$ 映至 $\overline{F}$所对应的 $\varepsilon_F\otimes\omega'$。因此，我们得到一个 $\mathbb{Q}$分次的超阿贝尔群同构；交织性质成立，因为包含 $C_1$ 和 $C_2$ 的 $F$ 的连通分支与 $S_+$的其他连通分支均不相交。

在含有 $C_2$ 的连通分支中有一个 $S_-$ 圆，而在含有 $C_1$ 的连通分支中没有，这种情形与此情形类似，因此我们不再单独讨论。

情形 1-1c：含有 $C_1$ 的连通分支和含有 $C_2$ 的连通分支中都各有一个 $S_-$ 圆。粘合使与 $\delta$ 相关的量发生如下变化：

- $h$ 增加 1（因为 $[C_1]$ 在 $H_1(\overline{F},S_+)$ 中变为非零）。
- 不含 $S_+$ 的非闭合分支数量增加 1。
- $S_+$ 圆的数量减少 2。

$\delta$ 的变化量为

$$(-A)+(A-1)+2(-1/2)=0,$$

因此， $\pi$ 的变化也为零。

选择基时，我们可以确保 $[C_1]$ 和 $[C_2]$ 都是基圆。粘合之前，包含 $C_1$ 的 $F$ 连通分支中还有另一个边界圆不是基圆，包含 $C_2$的连通分支也同样如此。粘合之后，粘合后的连通分支现在有两个不是基圆的边界圆，但我们不把其中一个

改成基圆，而是令 $[C_1]$ 成为基圆（模去其他基圆后， $[C_1]$与其中任一非基边界圈同调等价，至多差一个符号）。

在粘合之前，$\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)$ 的基元素可以采用以下形式：

- $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes \omega'$

其中 $\omega'$ 既不能被 $[C_1]$ 整除，也不能被 $[C_2]$整除。映射 $E_1$ 和 $E_2$ 分别都为零；我们有

- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$

and

- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')$.

Th我们，在除以 $\mathrm{im}(F_1 + F_2)$ 的商空间中，有 $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega') = 0$ a nd

$$\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega') = -\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega').$$

该商空间的一组基由元素 $\varepsilon_F \otimes \omega'$ 和 $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$ 构成。根据构造，这些基元素自然对应于我们在 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(\overline{F})$ 中的基元素，并且存在一个双射，将 $\varepsilon_F \otimes \omega'$ for $F$ 映射到 $\varepsilon_F \otimes \omega'$ for $\overline{F}$，并将 $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$ for $F$ 映射到$\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$ for $\overline{F}$。因此，我们得到一个 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群的同构；交织性质成立的原因与前面几种情况相同。

情形 1-2：只有 $C_2$ 是孤立的。现在假设 $C_2$ 是其所在的 $F$ 连通分支中唯一的 $S_+$ 连通分支，但 $C_1$ 所在的 $F$连通分支中还有另一个 $S_+$ 连通分支。

情形 1-2a：与 $C_2$处于同一连通分支的 $S_-$ 圆不存在。无论包含 $C_1$的 $F$ 连通分支是否与 $S_-$ 有非平凡交集，粘合都会使与 $\delta$ 相关的量发生如下变化：

- $h$减少 1。
- 不含 $S_-$ 的非闭合分支数量减少 1。
- $S_+$ 圆的数量减少 2。

$\delta$ 的变化结果为

$$-(-A) - (A) - 2(-1/2) = +1,$$

因此 $\pi$ 也会改变 1。

选择基时，我们可以确保 $C_1$ 是一个基圆，并且有唯一一条基弧 $e_1$ 与 $C_1$相交。对 $e_1$ 定向，使其从曲面指向 $C_1$内部。$\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\pi}(F)$ 的基元素可以采用以下形式：

- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes \omega'$。

我们有

- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi\ (F)\ \varepsilon_F} \otimes \omega'$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0$。

映射 $E_2$ 为零，因此在模掉 $\mathrm{im}(E_1 + E_2)$ 的商空间中，我们将形如$\varepsilon_F \otimes \omega'$ 和 $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$的基元素置为零。

$\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\pi}(F)$上的端同态 $F_1$ 和 $F_2$ 下降为模掉 $\mathrm{im}(E_1 + E_2)$ 的商空间上的端同态；我们有 $F_2 = 0$ 并且

- $F_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')$.

再对 $\mathrm{im}(F_1 + F_2)$ 取商时，我们将形如 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')$ 的基元素设为零，剩下的基元素形如 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$。

与此同时，在 $\overline{F}$ 中，$e_1$ 和 $[C_1]$ 都不再是基弧或基圆；其基由元素 $\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$ 给出，其中 $\omega'$ 遍历与上文相同的楔积（不能被 $e_1$ 或 $[C_1]$ 整除）。商空间的基与 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\pi}(\overline{F})$ 的基之间存在一个双射，由下式给出：

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'.$$

由于 $\delta$ 和 $\pi$ 各自的 $\overline{F}$ 比其 $F$ 多一个，这个双射给出了一个 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群的同构。

为了验证这个双射与 $E$ 生成元的其余作用相容，令 $X \notin \{C_1, C_2\}$ 为 $S_+$ 的一个区间或圆分支。先假设 $e_1$ 不与 $X$ 相接；在 $\mathbf{z}^P_{\delta,\,\pi(F)\ \mathrm{im}(E_1+E_2)+\mathrm{im}(F_1+F_2)}$ 中，我们有

$$E_X(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge E_X(\omega')),$$

而在整数$^P_{\delta,\pi}(\overline{F})$ 中，我们有

$$E_X(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes E_X(\omega').$$

这些元素在我们的双射下被视为相同，因为 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$。如果 $e_1$ 与 $X$相邻，那么在 $E_X(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega'))$ 中会出现的额外“移除 $e_1$”项，在 整数$^P_{\delta,\,\pi(F)\,\mathrm{im}(E_1+E_2)}$中为零，即使不再对 $\mathrm{im}(F_1 + F_2)$ 取商空间，分析结果也不变。

为了说明该双射与 $F$ 生成元的其余作用相互交织，令 $C \notin\{C_1, C_2\}$ 为 $S_+$的一个圆分支。如果 $C$ 与 $C_1$不属于 $F$ 的同一连通分支，那么无论 $C$ 是否为基圆，$[C]$ 关于基圆的展开都不涉及 $[C_1]$，于是我们有

$$F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge ([C] \wedge \omega')) \in \frac{\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)}{\mathrm{im}(E_1+E_2)+\mathrm{im}(F_1+F_2)}.$$

我们还有

$$F_C(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C] \wedge \omega') \in \mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(\overline{F});$$

在我们的双射下，这些元素被视为相同。若 $C$ 与 $C_1$ 位于 $F$ 的同一连通分支中，但 $C$ 也是一个基圆，则论证不变。若 $C$ 与 $C_1$ 位于 $F$ 的同一连通分支中，且它不是基圆，那么将我们的四类基元素与 $[C]$ 作楔积，得到 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)$ 时，会出现一个额外项，它乘以 $[C_1]$，而不是改变 $\omega'$。然而，这个额外项在 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)$ $\mathrm{im}(F_1+F_2)$ 中消失，因此也在 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)$ $\mathrm{im}(E_1+E_2)+\mathrm{im}(F_1+F_2)$ 中消失。在 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(\overline{F})$ 中，$[C]$ 的基展开缺少 $[C_1]$ 项，因此我们的双射交织了 $F_C$ 的作用。

情形 1-2b：在 $F$ 的同一连通分支中，至少有一个 $S_-$ 圆与 $C_2$。若包含 $C_1$ 的 $F$ 连通分支与 $S_-$ 不相交，则粘合会如下改变与 $\delta$ 相关的量：

- $h$减少 1。
- 无-$S_-$ 非闭合分支的数量减少 1。
- $S_+$ 圆的数量减少 2。

$\delta$ 中由此产生的变化为

$$-(-A) - (A) - 2(-1/2) = +1,$$

因此，$\pi$ 也变化 1。另一方面，如果包含 $C_1$ 的 $F$ 连通分支与 $S_-$ 有非平凡交集，那么 $h$ 保持不变（若以 $H_1(F, S_+)$ 而非 $H_1(F, P)$ 的基来表示，则我们失去一条基弧，但获得一个基圆），而与 $\delta$ 相关的量变化如下：

- $S_+$ 圆的数量减少 2。

因此，$\delta$ 的变化为

$$-2(-1/2) = +1,$$

因此，$\pi$ 也变化了 1。

选择基时，我们可以确保 $C_1$ 和 $C_2$ 是基圆；还可以确保 $C_1$ 与唯一的基弧 $e_1$ 相接，并且 $e_1$ 从曲面指向 $C_1$。

关于被 $e_1$ 整除的情形，基元素的形式为 $\varepsilon_F \otimes \omega'$ 或 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$，其中 $\omega'$ 不能被 $e_1$ 整除。我们有

- $E_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0,$
- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes \omega'$

映射 $E_2$ 为零，因此在模掉 $\mathrm{im}(E_1 + E_2)$ 的商空间中，我们令形式为 $\varepsilon_F \otimes \omega'$ 的基元素为零。现在，模掉 $\mathrm{im}(E_1 + E_2)$ 的商空间的基元素，关于被 $[C_1]$ 和 $[C_2]$ 整除的情形，具有以下形式：

- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$

其中，$\omega'$ 既不能被 $e_1$ 整除，也不能被 $[C_2]$整除。我们有

- $F_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_2] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')$

and

- $F_2(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_2] \wedge \omega')$.

在商空间 uotient by $\mathrm{im}(F_1 + F_2)$ 中，因此有 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega') = 0$ and

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_2] \wedge \omega') = -\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega').$$

商空间的基元素形式为 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$ 或 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')$。

同时，对于 $\overline{F}$，$e_1$ 不再是基弧；我们无需在 $\overline{F}$ 的剩余边界分支之一周围另加一个新的基圆，而可以将 $[C_1]$ 作为 $\overline{F}$ 的基圆。定义一个基元素的双射，将

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$$

and

$$\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C_1] \wedge \omega').$$

由于 $\delta$ 和 $\pi$ 对于 $\overline{F}$ 的数量都比对于 $F$ 多一个，这个双射给出了一个 $\mathbb{Q}$分次超阿贝尔群的同构。

$E$ 其余作用的交织性质如上所述。对于 $F$ 的其余作用，唯一可能出现问题的情况是：$C \notin \{C_1, C_2\}$ 与 $C_1$ 位于 $F$ 的同一连通分支中，但 $C \notin \{C_1, C_2\}$ 不是基圆。将 $[C]$ 展开为基圆之和时，含有一项 $\pm[C_1]$，因此

$$F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge (\pm[C_1]) \wedge \omega') + \cdots \tag{12}$$

其中其余各项均不能被 $[C_1]$ 整除。对于 $\overline{F}$，由于我们将 $[C_1]$ 作为一个基圆纳入其中，因此 $[C]$ 按基圆展开的结果与 $F$ 的展开相同。于是得到

$$F_C(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes ((\pm[C_1]) \wedge \omega') + \cdots$$

其中其余各项与 (12) 中的相同，只是去掉了 $e_1$ ，并将 $\varepsilon_F$ 替换为 $\varepsilon_{\overline{F}}$；而 $\pm$ 的两处出现表示相同的符号。由于 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$，交织性质成立。

情形 1-3： $C_1$ 和 $C_2$ 都不是单独的。如果包含 $C_1$ 的 $F$ 连通分支或包含 $C_2$ 的 $F$ 连通分支与 $S_-$不相交，那么粘合会使与 $\delta$ 相关的量发生如下变化：

- $h$减少 1。
- 无-$S_-$ 非闭合分支的数量减少 1。
- $S_+$ 圆的数量减少 2。

因此， $\delta$ 的变化如上所述为 $+1$ ，所以 $\pi$ 也变化 1。另一方面，如果包含 $C_1$ 的 $F$ 连通分支和包含 $C_2$ 的 $F$ 连通分支都与 $S_-$有非平凡交集，那么 $h$ 保持不变，因为我们失去一条基弧并得到一个基圆；与 $\delta$ 相关的量唯一的变化是 $S_+$ 圆的数量减少 2。因此， $\delta$变化 $+1$ ，而 $\pi$ 变化 1。

选择基时，我们可以确保 $C_1$ 和 $C_2$ 是基圆， $C_i$ 与 $i \in \{1, 2\}$对应的唯一一条弧 $e_i$ 相交，并且 $e_1$ 从曲面指向 $C_1$ ，而 $e_2$ 则从 $C_2$ 指向曲面。根据被 $e_1$ 和 $e_2$整除的情况，$\mathbf{Z}^+_{\delta\,\pi,}$ $(F)$的基元素有四种类型， $E_1$ 和 $E_2$ 在这些基元素上的作用如下：

- $E_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes \omega'$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')) = 0$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)} e_2 \wedge \omega'$

and

- $E_2(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = 0$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi\ (F)\ +1}\varepsilon_F \otimes \omega'$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2} e_1 \wedge \omega'$.

在模去 $\mathrm{im}(E_1 + E_2)$ 的商空间中，我们看到 $\varepsilon_F \otimes \omega' = 0$ 和

$$\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega') = -\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega').$$

商空间的基元素形式为 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$ 或 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$。根据 $[C_1]$和 $[C_2]$的整除性，这些元素分为四类， $F_1$和 $F_2$ 在这些元素上的作用如下：

- $F_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$

and

- $F_2(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')$,

- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$.

因此，模掉 $\mathrm{im}(E_1 + E_2) + \mathrm{im}(F_1 + F_2)$ 后的商空间的基元素具有以下形式之一：

- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge [C_1] \wedge \omega')$。

与此同时，在$\overline{F}$ 中，我们可以像往常一样将 $[C_1]$ 作为基圆，而 $e_1$与 $e_2$ 的拼接会产生一条新的基弧 $e$。作如下识别

- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge [C_1] \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega')$。

这些识别给出了 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群的一个同构。对于交织性质，与区间或圆相对应的 $E$ 作用，若其既不与 $e_1$ 相交，也不与 $e_2$ 相交，则按上述方式处理。如果 $X$ 包含 $e_1$ 的一个端点，那么我们有

- $E_X(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = 0$,
- $E_X(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$（一个额外的负号来自移除 $-e_1$，另一个来自将 $e_2$ 替换为 $-e_1$），
- $E_X(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $E_X(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge [C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')$.

在 $\overline{F}$ 中， $X$ 现在包含了 $e$ 的一个端点（该点从 $X$ 指向曲面内部），因此

- $E_X(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega') = 0$,
- $E_X(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(\overline{F})+1}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$,
- $E_X(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $E_X(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(\overline{F})+1}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C_1] \wedge \omega')$.

因为 $\pi(\overline{F}) = \pi(F) + 1$，我们的识别交织了 $E$ 剩余的作用 .

对于 $F$ 的剩余作用，唯一一个与上述情况不完全类似的情形是： $C \notin \{C_1, C_2\}$ 与 $C_2$ 属于同一个连通分支，但 $C \notin \{C_1, C_2\}$ 不是基圆。将$[C]$ 按基圆展开后含有一项 $\pm[C_2]$，因此

$$F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge (\mp[C_1]) \wedge \omega') + \cdots$$

and

$$F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge (\mp[C_1]) \wedge \omega') + \cdots .$$

关键的观察是，在 $\overline{F}$ 中，圆 $C_1$ 和 $C_2$ 的方向相反，因此$[C_2] = -[C_1]$，而将 $[C]$ 按基圆展开时会出现一项 $\mp[C_1]$。我们

have

$$F_C(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}} \otimes ((\mp[C_1]) \wedge \omega') + \cdots$$

and

$$F_C(\varepsilon_{\overline{F}} \otimes (e \wedge \omega') = (-1)^{\pi(\overline{F})}\varepsilon_{\overline{F}+1} \otimes (e \wedge (\mp[C_1]) \wedge \omega') + \cdots .$$

因此，在我们的对应关系下， $F$ 和 $\overline{F}$ 两种情形中 $F_C$ 的公式一致 .

情形 2： $C_1$ 和 $C_2$ 位于 $F$的同一个连通分支上。

情形 2-1：粘合 $C_1$ 和 $C_2$ 会产生 $F$的一个闭分支。假设包含 $C_1$ 和 $C_2$ 的 $F$ 连通分支除此之外与 $S_+$ 和 $S_-$均不相交，因此粘合 $C_1$ 和 $C_2$ 会产生 $F$的一个闭分支。与 $\delta$ 相关的量变化如下:

- $h$ 增加 1（就 $H_1(F, S_+)$的基而言，一个基弧变成了一个基圆，并且我们又增加了一个基圆）。
- 无-$S_-$ 非闭合分支的数量减少 1。
- 闭分支的数量增加了 1。
- 圆的数量减少了 2。

由此产生的变化为 $\delta$

$$(-A) - (A) + (2A - 1) - 2(-1/2) = 0$$

因此 $\pi$ 也保持不变。

在选择基时，我们可以确保 $C_1$ 是一个基圆，并且唯一与 $C_1$ 或 $C_2$ 相交的基弧，是一条从 $C_2$ 指向外部并进入 $C_1$的弧 $e$ 。我们有

- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes \omega'$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0$

and

- $E_2(\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes \omega'$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0$.

因此， $E_1 + E_2 = 0$。对于 $i \in \{1, 2\}$ ，我们还有

- $F_1(\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega')$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$

and

- $F_2(\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega')$,

- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$

所以 $F_1 + F_2$ 也是零映射。

与此同时，在 $\overline{F}$ 中，弧 $e$ 闭合成一个基圆 $\tau$，而我们可以保留 $[C_1]$ 作为一个基圆。作如下等同

- $\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge [C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes \omega' \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$。

这些识别给出了 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群的一个同构，且交织性质不会出现任何问题。

情形 2-2：包含 $C_1$ 和 $C_2$ 的 $F$ 连通分支不包含 $S_+$ 的其他连通分支，但至少含有一个 $S_-$ 圆。与 $\delta$ 相关的量变化如下：

- $h$ 增加 1（就 $H_1(F, S_+)$的基而言，一条基弧变成了一个基圆，并且我们又添加了一个基圆）。
- 无$S_+$ 非闭合分支的数量增加 1。
- $S_+$ 圆的数量减少 2。

$\delta$ 的变化结果为

$$(-A) + (A-1) - 2(-1/2) = 0,$$

因此 $\pi$ 也保持不变。

选择基时，我们可以确保 $C_1$ 和 $C_2$ 都是基圆，并且唯一与 $C_1$ 或 $C_2$ 相交的基弧是一条从 $C_2$ 指向 $C_1$的弧 $e$ 。计算 $E_1$ 和 $E_2$时，我们不考虑被 $[C_i]$整除的情况；我们有

- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi\ (F)}\ \varepsilon_F \otimes \omega'$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0$

and

- $E_2(\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes \omega'$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0$

因此， $E_1 + E_2$ 是零映射。

类似地，w 计算 $F_1$ 和 $F_2$时，我们不考虑被 $e$整除的情况；我们有

- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$

and

- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,

- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')$.

因此，在模去 $\mathrm{im}(F_1 + F_2)$ 的商空间中，我们有 $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega') = 0$ 以及

$$\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega') = -\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega').$$

商空间的基元素形式为 $\varepsilon_F \otimes \omega'$、 $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$、 $\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega')$，以及$\varepsilon(F) \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega')$。

与此同时，在 $\overline{F}$ 中，基弧 $e$闭合后成为基圆 $\tau$，而我们可以保留$[C_1] = -[C_2]$ 作为基圆。作如下认同

- $\varepsilon_F \otimes \omega' \leftrightarrow \varepsilon_F \otimes \omega'$,
- $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_F \otimes (\tau \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e \wedge [C_1] \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_F \otimes (\tau \wedge [C_1] \wedge \omega')$;

我们得到一个 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群的同构，并且交织性质仍然没有问题。

情形 2-3： $F$ 包含 $C_1$ 和 $C_2$ 的连通分支还包含 $S_+$的至少另一个连通分支。与 $\delta$ 相关的量变化如下:

- $S_+$ 圆的数量减少 2。

注意， $h$ 保持不变，因为从 $H_1(F, S_+)$的基来看，两条基弧合并形成了一个基圆（$-1$ 到 $h$），但我们也添加了另一个基圆（$+1$ 到 $h$）。因此， $\delta$ 的变化量为 $+1$，所以 $\pi$ 也变化了 1。

选择基时，我们可以确保 $C_1$ 和 $C_2$ 都是基圆， $C_i$ 与 $i \in \{1, 2\}$的一条唯一基弧 $e_i$ 相接，并且 $e_1$ 从曲面指向 $C_1$，而 $e_2$ 则从 $C_2$ 指向曲面。

计算 $E_1$ 和 $E_2$时，我们不考虑被 $[C_1]$ 或 $[C_2]$整除的情况；有

- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes \omega'$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')) = 0$,
- $E_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0$

and

- $E_2(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = 0$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes \omega'$,
- $E_2(\varepsilon_F \otimes \omega') = 0$.

在模掉 $\mathrm{im}(E_1 + E_2)$ 的商空间中，因此有 $\varepsilon_F \otimes \omega' = 0$ and

$$\varepsilon_F \otimes (e_2 \wedge \omega') = -\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega').$$

商空间的基元素形式为 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$ 和 $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$。

计算 $F_1$ and $F_2$ 时，我们不必考虑被 $e_1$ or $e_2$ 整除；我们有

- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $F_1(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')$

and

- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega')$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')) = 0$,
- $F_2(\varepsilon_F \otimes \omega') = (-1)^{\pi(F)}\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega')$.

在模去 $\mathsf{im}(F_1 + F_2)$ 后，我们有 $\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge [C_2] \wedge \omega') = 0$ and

$$\varepsilon_F \otimes ([C_2] \wedge \omega') = -\varepsilon_F \otimes ([C_1] \wedge \omega').$$

因此，对于模去 $\mathsf{im}(E_1 + E_2) + \mathsf{im}(F_1 + F_2)$ 的商空间，我们有四类基元素：

- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge [C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')$.

与此同时，对于 $\overline{F}$，弧 $e_1$ 和 $e_2$ 合并成一个基圆 $\tau$，我们也可以保留$[C_1]$ 作为一个基圆。作如下识别

- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge [C_1] \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes (\tau \wedge [C_1] \wedge \omega')$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes \omega'$,
- $\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega') \leftrightarrow \varepsilon_{\overline{F}} \otimes ([C_1] \wedge \omega')$;

我们得到一个 $\mathbb{Q}$-分次超阿贝尔群的同构。

对于交织性质，我们需要考察：如果 $C \notin \{C_1, C_2\}$ 不是基圆，而是与 $C_1$ 和 $C_2$ 位于同一连通分支中的某个对象，会发生什么。在这种情况下，$[C]$按基圆展开时会包含项 $\pm([C_1] + [C_2])$，而可能妨碍交织性质的项是：

- $F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \pm([C_1] + [C_2]) \wedge \omega' + \cdots$,
- $F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge [C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+2}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge (\pm[C_2]) \wedge [C_1] \wedge \omega') + \cdots$,
- $F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge \pm([C_1] + [C_2]) \wedge \omega' + \cdots$,
- $F_C(\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge [C_1] \wedge \omega')) = (-1)^{\pi(F)+1}\varepsilon_F \otimes (e_1 \wedge (\pm[C_2]) \wedge [C_1] \wedge \omega') + \cdots$.

然而，在商空间 $\mathbf{z}^{P,\ \pi(F)\,\mathrm{im}(E_1+E_2)+\mathrm{im}(F_1+F_2)}_{\delta}$ 中，这些项全都为零。同时，在 $\overline{F}$ 中，$[C_2]$变得等于 $-[C_1]$，因此 $\pm([C_1] + [C_2])$ 从 $[C]$ 的基展开中消失，所以对 $\mathbf{Z}^{P,\ \pi}_{\delta}(\overline{F})$ 应用 $F_C$ 时，不会出现与上述项类似的项。交织性质由此得证。□

3.3. 开闭配边的复合。尽管定理 1.5 仅在 $\mathbb{F}_2$ 上表述，我们将证明以下更一般的版本。

定理 3.3. 设 $M_1$、 $M_2$ 和 $M_3$ 为 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 的对象，并令

$$M_3 \xleftarrow{F'} M_2 \xleftarrow{F} M_1$$

是 $\mathsf{2Cob}^{\mathrm{ext}}$ 中的态射。对于任意 $A \in \mathbb{Q}$，我们有

$$\mathbf{Z}^P_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F' \circ F) \cong \mathbf{Z}^P_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F') \otimes_{A^{\mathbb{F}_2}_{EF}(M_2)} \mathbf{Z}^P_{\delta_A,\mathbb{F}_2}(F)$$

作为 $\mathbb{Q}$-分次双模，定义在 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathbb{F}_2$-代数 $(A^{\mathbb{F}_2}_{EF}(M_3)\ A^{\mathbb{F}_2}_{EF}(M_1))$ 上。此外，若对于某个 $j \in \{1/2, 1\}$，$\pi_j(F)$ 和 $\pi_j(F')$ 都有定义，则 $\pi_j(F' \circ F)$ 也有定义，并且我们有

$$\mathbf{Z}^P_{\delta_A,\pi_j}(F' \circ F) \cong \mathbf{Z}^P_{\delta_A,\pi_j}(F') \otimes_{A_{EF}(M_2)} \mathbf{Z}^P_{\delta_A,\pi_j}(F)$$

作为 $\mathbb{Q}$-分次双模，定义在 $\mathbb{Z}$-分次超环 $(A_{EF}(M_3)\ A_{EF}(M_1))$ 上。

证明。关于 $\pi_j(F' \circ F)$ 的断言可由引理 3.2 证明开头的论证得出。下文假设要么存在 $j \in \{1/2, 1\}$，使得 $\pi_j(F)$ 和 $\pi_j(F')$ 有定义；要么我们是在 $\mathbb{F}_2$ 上工作；我们将采用 $\mathbb{Z}$ 版本的记号。令 $\delta = \delta_A$和 $\pi = \pi_j$。

如 [Man23，定理 1 的证明中，2],我们可以写成整数$^P_{\delta,\pi}(F')\otimes_{A_{EF}(M_2)}$整数$^P_{\delta,\pi}(F)$ a s

$$\frac{\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)}{\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{(\varepsilon_{F'} \otimes x)a \otimes (\varepsilon_F \otimes y) - (\varepsilon_{F'} \otimes x) \otimes a(\varepsilon_F \otimes y)\}} \tag{13}$$

其中，分母中的 $a$ 是任意的乘法生成元

$$a = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes E \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

or

$$a = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes F \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$A_{EF}(M_2)$ 的， $x$ 是 $\wedge^* H_1(F', P)$ 的任意基元素，而 $y$ 是 $\wedge^* H_1(F, P)$ 的任意基元素。

令 $\mathrm{Left}_{A_{EF}(M_1)}\left[\text{整数}^P_{\delta,\pi}(F') \otimes_{\mathbb{Z}} \text{整数}^P_{\delta,\pi}(F)\right]$ 表示整数$^P_{\delta,\pi}(F')\ \otimes_{\mathbb{Z}}$整数$^P_{\delta,\pi}(F)$，其中超交换超代数 $A_{EF}(M_1)$ 的右作用视为左作用；元素 $a$ 先转换到右侧（此时会产生一个符号），再从右侧作用。若令 $(F' \sqcup F)_{\mathrm{left}}$ 表示将其所有 $S_+$ 边界分支均视为出射的 $F' \sqcup F$，则作为 $\mathbb{Q}$- 分次超阿贝尔群，我们有

$$\mathrm{Left}_{A_{EF}(M_1)}\left[\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)\right] \cong \mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}((F' \sqcup F)_{\mathrm{left}})$$

通过映射 $\Phi$发送

$$\varepsilon_{F'} \otimes x \otimes \varepsilon_F \otimes y \mapsto (-1)^{|x|\pi(F)} \varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\mathrm{left}}} \otimes (x \wedge y).$$

同构 $\Phi$ 与 $A_{EF}(M_3)$ 的左作用相容；对于 $F$ 的入射圆，它也与 $F$ 的左作用相容；对于 $F$ 的入射区间或圆，它则以负号联系 $E$ 的左作用（关于这个负号的解释与 [Man23 定理 1.2] 的证明相同）。

映射 $\Phi$ 将 $(\varepsilon_{F'} \otimes x)a \otimes (\varepsilon_F \otimes y)$ 送到

$$(-1)^{(|x|+1)\pi(F)}\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (xa \wedge y)$$

其中，$xa$ 仍在整数 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F')$ 中计算。就 $A(M_2)$ 在整数 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}((F' \sqcup F)_{\text{left}})$ 上的左作用 $\bullet_1$（来自 $F'$）而言，我们可以将此元素写成以下任一形式

$$\begin{aligned}&(-1)^{(|x|+1)\pi(F)+\pi(F')+\pi(F)+|x|}a \bullet_1 \varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\\ &= (-1)^{|x|\pi(F)+\pi(F')+|x|}a \bullet_1 \varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\end{aligned}$$

如果 $a$ 是一个 $F$ 生成元，或者

$$\begin{aligned}&-(-1)^{(|x|+1)\pi(F)+\pi(F')+\pi(F)+|x|}a \bullet_1 \varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\\ &= -(-1)^{|x|\pi(F)+\pi(F')+|x|}a \bullet_1 \varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\end{aligned}$$

如果 $a$ 是一个 $E$ 生成元（额外的负号与证明 Man23 定理 1.2] 中出现负号的原因相同）。类似地，$\Phi$ 将

$$(\varepsilon_{F'} \otimes x) \otimes a(\varepsilon_F \otimes y) = (-1)^{\pi(F)}(\varepsilon_{F'} \otimes x) \otimes (\varepsilon_F \otimes ay)$$

to

$$(-1)^{\pi(F)+|x|\pi(F)}\varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge ay)$$

其中，$ay$ 仍在整数 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F)$ 中计算。就 $A(M_2)$ 在整数 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}((F' \sqcup F)_{\text{left}})$ 上的左作用 $\bullet_2$（来自 $F$）而言，我们可以将此元素写成以下任一形式

$$\begin{aligned}&-(-1)^{\pi(F)+|x|\pi(F)+\pi(F')+\pi(F)+|x|}a \bullet_2 \varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\\ &= -(-1)^{|x|\pi(F)+\pi(F')+|x|}a \bullet_2 \varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\end{aligned}$$

如果 $a$ 是一个 $F$ 生成元（额外的负号是因为，在 $F$ 情形下由 $a$ 添加的圆的定向与在 $(F' \sqcup F)_{\text{left}}$ 情形下由 $a$ 添加的圆的定向相反），或者

$$\begin{aligned}&(-1)^{\pi(F)+|x|\pi(F)+\pi(F')+\pi(F)+|x|}a \bullet_2 \varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\\ &= (-1)^{|x|\pi(F)+\pi(F')+|x|}a \bullet_2 \varepsilon_{(F' \sqcup F)_{\text{left}}} \otimes (x \wedge y)\end{aligned}$$

若 $a$ 是一个 $E$ 生成元。

因此，我们得到 (13) 与下式之间的一个同构

$$\text{Right}_{A_{EF}(M_1)}\left[\frac{\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}((F' \sqcup F)_{\text{left}}))}{\text{span}\{a \bullet_1 \left(\varepsilon_{(F \sqcup F')_{\text{left}}} \otimes z\right) + a \bullet_2 \left(\varepsilon_{(F \sqcup F')_{\text{left}}} \otimes z\right)\}}\right] \tag{14}$$

其中，在分母中，$a$ 是 $A_{EF}(M_2)$ 的任意一个乘法生成元，而 $z$ 是整数 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}((F' \sqcup F)_{\text{left}}))$ 的任意一个基元素。该同构与 $A_{EF}(M_3)$ 的左作用相容；对于 $F$ 的入射圆，它也与 $F$ 的左作用相容；对于 $F$ 的入射区间或圆，它将 $E$ 的左作用与负号联系起来。

分母是若干子空间之和：

- $\mathsf{im}(E_1 + E_2)$ 对于 $M_2$ 每个配有 $E$-自同态$E_1$、$E_2$的整数 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\pi}((F' \sqcup F)_{左})$ 的区间分支，以及
- $\mathsf{im}(E_1 + E_2) + \mathsf{im}(F_1 + F_2)$ 对于 $M_2$ 的每个圆分支，都带有相关的 $E$- 自同态 $E_1, E_2$ 和 $F$-自同态 $F_1, F_2$，它们作用于 $\mathbf{Z}^P_{\delta,\,\pi}((F' \sqcup F)_{左})$。

逐个连通分支地取 $M_2$ 的商，并对区间分支应用引理 3.1、对圆分支应用引理 3.2，可得 (14) 中的商空间同构于

$$\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}((F' \circ F)_{\mathrm{left}})$$

因为 $(F' \circ F)_{\mathrm{left}}$ 是对 $(F' \sqcup F)_{\mathrm{left}}$ 作完所有这些粘合后得到的曲面。因此，推论陈述中同构右侧的对象同构于

$$\mathrm{Right}_{A_{EF}(M_1)}\left[\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}((F' \circ F)_{\mathrm{left}})\right],$$

与 $A_{EF}(M_3)$ 的左作用及 $F$ 生成元对 $A_{EF}(M_1)$ 的右作用相容，并通过负号将 $A_{EF}(M_1)$ 的 $E$生成元的右作用联系起来。等价地，它同构于

$$\mathbf{Z}^P_{\delta,\pi}(F' \circ F)$$

与 $A_{EF}(M_3)$ 的左作用和 $A_{EF}(M_1)$ 的右作用相容，正如所需。 □

## 4. Degree and parity shifts

我们在此解释为何为 $\delta_A$ 选择公式 (1)。与 [Man23 第 4], 节中一样，我们将假定一个一般公式

$$\delta = C_1 k_1 + \cdots + C_9 k_9$$

用于与缝合曲面 $F$ 相关联的分次移位，其中

- $k_1$ 是连通分支的数量
- $k_2$ 是亏格（对所有连通分支求和）
- $k_3$ 是闭分支的数量
- $k_4$ 是不含 $S_+$ 的非闭合分支数量
- $k_5$ 是不含 $S_-$ 的非闭合分支数量
- $k_6$ 是 $S_+$ 区间的数量
- $k_7$ 是 $S_+$ 圆的数量
- $k_8$ 是 $S_-$ 圆的数量
- $k_9$ 是 $F$ 中同时具有 $S_+$ 和 $S_-$的边界圆数量。

与 [Man23]中一样，若且唯若满足以下方程组，$\delta$ 才与引理 3.1（区间粘合）相容：

$$-C_1 + C_4 - 2C_6 + C_8 - 2C_9 = 0 \quad \text{(Case 1-1)} \tag{15}$$
$$-C_1 - 2C_6 - C_9 = 1 \quad \text{(Case 1-2 or 1-3, no } S_- \text{ circle created)} \tag{16}$$
$$-C_1 - 2C_6 + C_8 - 2C_9 = 1 \quad \text{(Cases 1-2 or 1-3, one } S_- \text{ circle created)} \tag{17}$$
$$-2C_6 + C_9 = 1 \quad \text{（情形 2-1a，未生成 } S_- \text{ 圆）} \tag{18}$$
$$-2C_6 + C_8 = 1 \quad \text{(Case 2-1a, one } S_- \text{ circle created)} \tag{19}$$
$$-2C_6 + 2C_8 - C_9 = 1 \quad \text{(Case 2-1a, two } S_- \text{ circles created)} \tag{20}$$
$$C_4 - 2C_6 + 2C_8 - C_9 = 0 \quad \text{(Case 2-1b)} \tag{21}$$
$$C_2 - 2C_6 - C_9 = 1 \quad \text{(Case 2-2a, no } S_- \text{ circle created)} \tag{22}$$
$$C_2 - 2C_6 + C_8 - 2C_9 = 1 \quad \text{(Case 2-2a, one } S_- \text{ circle created)} \tag{23}$$
$$C_2 + C_4 - 2C_6 + C_8 - 2C_9 = 0 \quad \text{(Case 2-2b)} \tag{24}$$

解的一般族由下式给出

$$(-2C_9,\, 2C_9,\, C_3,\, -1,\, C_5,\, (C_9 - 1)/2),\, C_7,\, C_9,\, C_9) \tag{25}$$

对于 $C_3$、$C_5$、$C_7$、$C_9$ 的任意取值。现在，通过考察引理 3.2 的证明，我们看到，$\delta$ 与圆粘合相容，当且仅当满足以下方程组：

$$-C_1 + C_3 - 2C_5 - 2C_7 = 0 \quad \text{(Case 1-1a)} \tag{26}$$
$$-C_1 + C_4 - C_5 - 2C_7 = 0 \quad \text{(Case 1-1b)} \tag{27}$$
$$-C_1 + C_4 - 2C_7 = 0 \quad \text{(Case 1-1c)} \tag{28}$$
$$-C_1 - C_5 - 2C_7 = 1 \quad \text{(Case 1-2a)} \tag{29}$$
$$-C_1 - C_5 - 2C_7 = 1 \quad \text{(Case 1-2b or 1-3, no } S_- \text{ near } C_1) \tag{30}$$
$$-C_1 - 2C_7 = 1 \quad \text{(Case 1-2b or 1-3, } S_- \text{ near } C_1) \tag{31}$$
$$C_2 + C_3 - C_5 - 2C_7 = 0 \quad \text{(Case 2-1)} \tag{32}$$
$$C_2 + C_4 - 2C_7 = 0 \quad \text{(Case 2-2)} \tag{33}$$
$$C_2 - 2C_7 = 1 \quad \text{(Case 2-3).} \tag{34}$$

Fr由 (27) 和 (28) 得到 $C_5 = 0$。将 (25) 代入 (26)–(34)，得到：

$$\begin{aligned} 2C_9 + C_3 - 2C_7 &= 0 \\ 2C_9 - 1 - 2C_7 &= 0 \\ 2C_9 - 1 - 2C_7 &= 0 \\ 2C_9 - 2C_7 &= 1 \\ 2C_9 - 2C_7 &= 1 \\ 2C_9 - 2C_7 &= 1 \\ 2C_9 + C_3 - 2C_7 &= 0 \\ 2C_9 - 1 - 2C_7 &= 0 \\ 2C_9 - 2C_7 &= 1. \end{aligned}$$

当且仅当 $C_7 = C_9 - 1/2$ 和 $C_3 = -1$时，这些方程成立。令 $C = C_9$，我们得到一般形式的

$$(-2C,\, 2C,\, -1,\, -1,\, 0,\, (C-1)/2,\, C-1/2,\, C,\, C)$$

所有上述方程的共同解，因此我们可以取

$$\delta = -2Ck_1 + 2Ck_2 - k_3 - k_4 + ((C-1)/2)k_6 + (C-1/2)k_7 + Ck_8 + Ck_9.$$

我们还有

$$h = -2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8 + k_9,$$

so

$$Ch = -2Ck_1 + 2Ck_2 + 2Ck_3 + Ck_4 + Ck_5 + Ck_6 + Ck_7 + Ck_8 + Ck_9.$$

因此，我们可以将 $\delta$ 改写为

$$\delta = Ch + (-2C-1)k_3 + (-C-1)k_4 + (-C)k_5 + ((-C-1)/2)k_6 - (1/2)k_7.$$

令 $A = -C$，我们得到

$$\delta = -Ah + (2A-1)k_3 + (A-1)k_4 + Ak_5 + ((A-1)/2)k_6 - (1/2)k_7 \tag{35}$$

这就恢复了 $\delta_A$ 的方程 (1)。

命题 4.1. 不存在这样的 $A \in \mathbb{C}$，使得对所有缝合曲面，(35) 都是整数。

证明。将 (35) 代入边界位于 $S_-$ 中的圆盘，得到 $\delta = A - 1$，因此 $A$ 必须是整数。再将 (35) 代入边界位于 $S^+$ 中的圆盘，得到 $\delta = A - 1/2$，因此 $A$ 不可能是整数。□

## References

[ADO92] Y. Akutsu、T. Deguchi 和 T. Ohtsuki。彩色链环的不变量。《J. Knot Theory Ramifications》，1(2):161–184，1992年。[AGPS18] N. Aghaei、A. M. Gainutdinov、M. Pawelkiewicz 和 V. Schomerus。GL(1|1) 切恩-西蒙斯理论的组合量子化 I：环面，2018年。arXiv:1811.09123。

[BCGPM16] C. Blanchet、Francesco C.、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。非半单拓扑量子场论、Reidemeister 挠率与 Kashaev不变量。《Adv. Math.》，301:1–78，2016年。arXiv:1404.7289。[CGP21] F. Costantino、S. Gukov 和 P. Putrov。非半单拓扑量子场论与 BPS q级数，2021年。arXiv:2107.14238。[CGPM14] F. Costantino、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand。通过链环手术表示和非半单范畴构造三维流形的量子不变量。《J. Topol.》，7(4):1005–1053，2014年。arXiv:1202.3553。[CM22] W. Chang 和 A. Manion。通过高阶表示研究 Ozsváth–Szabó带边界HFK 中的相容性，2022年。arXiv:2207.00549。[DM14] C. L. Douglas 和 C. Manolescu。关于角化Floer同调的代数。《J. Topol.》，7(1):1–68，2014年。arXiv:1105.0113。[DR22] M. De Renzi。非半单扩展拓扑量子场论。《Mem. Amer. Math. Soc.》，277(1364):v+161，2022年。arXiv:1703.07573。[EPV19] A. P. Ellis、I. Petkova 和 V. V´ertesi。量子 $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 与缠结Floer同调。《Adv. Math.》，350:130–189，2019年。arXiv:1510.03483。[GHN+21] S. Gukov、P.-S. Hsin、H. Nakajima、S. Park、D. Pei 和 N. Sopenko。库仑分支的 Rozansky-Witten几何与对数结不变量。《J. Geom. Phys.》，168:论文编号 104311，22页，2021年。arXiv:2005.05347。[GPPV17] S. Gukov、D. Pei、P. Putrov 和 C. Vafa。BPS谱与三维流形不变量，2017年。arXiv:1701.06567。[GPV17] S. Gukov、P. Putrov 和 C. Vafa。五膜与三维流形同调。《J. High Energy Phys.》，(7):071，前置部分+80，2017年。arXiv:1602.05302。[GY22] N. Geer 和 M. B. Young。由 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$和 $U(1|1)$切恩-西蒙斯理论构造三维拓扑量子场论，2022年。arXiv:2210.04286。[Jag22] M. Jagadale。装饰拓扑量子场论及其 Hilbert空间，2022年。arXiv:2206.14967。[Kel82] G. M. Kelly。《富化范畴论基本概念》，伦敦数学会讲义笔记系列第64卷。剑桥大学出版社，剑桥-纽约，1982年。[LM21] A. D. Lauda 和 A. Manion。Ozsv´ath-Szab´o 带边界代数与范畴$\mathcal{O}$的子商。《Adv. Math.》，376:论文编号 107455，59页，2021年。arXiv:1910.03770。[LOT] R. Lipshitz、P. S. Ozsv´ath 和 D. P. Thurston。环面的带边界 $HF^-$ 模。编写中。[LOT21] R. Lipshitz、P. S. Ozsv´ath 和 D. P. Thurston。环面的一个带边界 $HF^-$ 代数，2021年。arXiv:2108.12488。[LP08] A. D. Lauda 和 H. Pfeiffer。开闭弦：二维扩展拓扑量子场论与 Frobenius 代数。《Topology Appl.》，155(7):623–666，2008年。arXiv:math/0510664。[Man] A. Manion。迈向点的 Heegaard Floer同调。编写中。[Man20] A. Manion。标准基中的三价顶点与带边界结Floer同调，2020年。arXiv:2012.07184。[Man22] A. Manion。关于 Heegaard Floer同调中某些高阶作用的去范畴化，2022年。arXiv:2203.00094。[Man23] A. Manion。去范畴化Heegaard Floer理论中带符号的曲面粘合，2023年。arXiv:2303.02889。[Mik15] V. Mikhaylov。解析挠率、三维镜像对称与超群Chern-Simons理论，2015年。arXiv:1505.03130。[MR20] A. Manion 和 R. Rouquier。高阶表示与带角 Heegaard Floer 同调，2020年。arXiv:2009.09627。

[PV16] I. Petkova 和 V. V´ertesi。组合缠结 Floer 同调。几何与拓扑，20(6)：3219– 3332，2016年。arXiv:1410.2161。[Tia16] Y. Tian。克利福德代数和 $U_q(\mathfrak{sl}(1|1))$ 的范畴化。辛几何期刊，14(2)：541–585，2016年。[Zar10] R. Zarev。缝合 Floer 同调的拼接与胶合，2010年。arXiv:1010.3496。[Zar11] R. Zarev。边界缝合 Floer 同调。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2011年。博士学位论文——哥伦比亚大学。arXiv:0908.1106。

Department of Mathematics, North Carolina State University, 2108 SAS Hall, Raleigh,NC 27695电子邮箱地址：ajmanion@ncsu.edu