arXiv:2303.06485v1 [math.NT] 11 Mar 2023

二次型理论中有限性条件的比较

KARIM JOHANNES BECHER 和 SAURABH GOSAVI

Abstract. 我们探讨并联系二次型理论中研究的某些域不变量的有限性条件。这包括 u-不变量、约化稳定指数，以及系数为 $\mu_2 = \{+1, -1\}$ 的伽罗瓦上同调群的符号长度，还有一个称为分裂高度的新不变量。

Keywords: u-不变量，Pfister 型，Milnor K-理论，伽罗瓦上同调，符号长度，实域，稳定指数，分裂高度
Classification (MSC 2020): 11E04, 11E10, 11E81, 19D45

1. The u-invariant

推动域上二次型理论发展的一个重要动力，是研究取值于 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 的某些域不变量。其中最著名的例子是所谓的 u 不变量。关于 u 不变量的最新结果包括对某些特定域的精确确定，即 [15, 定理 3.4] 中的局部域有限生成扩张，以及 $\mathbb{R}$ 上曲面的函数域，见 [6, 定理 0.12]。

本文旨在将 u 不变量的有限性与其他域不变量的有限性条件联系起来。对于包含本原四次单位根的域，[12, 定理 5.4] 证明了 u 不变量有限，当且仅当对所有 $n \in \mathbb{N}$，符号长度 λ^n 有限。我们将在第 2 节讨论这一系列不变量。在定理 5.4 中，我们将把这一刻画推广到所有特征不等于 2 的域。特别是，这将涵盖（形式上）实域的情形，此时存在域序。

设 F 是一个特征不为 2 的域。我们用 $F^\times$ 表示 F 的乘法群，用 $F^{\times 2}$ 表示其非零平方子群。F 中平方和的集合记为 ΣF^2。根据 Artin-Schreier 定理 [13, 定理 VIII.1.10]，F 存在域序当且仅当 $-1 \notin \Sigma F^2$。若 $-1 \in \Sigma F^2$，则称 F 非实，否则称为 实。

关于域上二次型理论的基本概念和事实，凡本文未作说明者，请读者参阅 [13]和 [9]的前几章。术语型 始终指正则二次型。对于域 F 上的型 φ，我们

日期：2023年11月3日。

用 $[\varphi]$ 表示其 Witt 等价类，用 $\dim(\varphi)$ 表示其维数（秩）。我们用 $\mathrm{W}F$ 表示 F 的 Witt 环，它由 F上的型 φ 的类 $[\varphi]$ 组成；用 $\mathrm{I}F$ 表示其基本理想，该理想由偶维型的类组成。我们用 $\mathrm{I}_t F$ 表示 $\mathrm{W}F$的挠理想，它由 $\mathrm{W}F$中有限加法阶的元素组成。所谓 F 上的挠型，是指 F 上的型 φ 满足 $[\varphi] \in \mathrm{I}_t F$。Pfister 局部-整体原理指出，$F$ 上的挠型恰好是在 F的所有序下符号差均为零的型。

域 φ 上的型 F 若在 F^n 中有非平凡零点，则称为各向同性，其中 φ 满足 $n = \dim(\varphi)$；否则称为各向异性。根据 Elman 和 Lam [8, 定义 1.1], ，u-不变量 F 定义为

$u(F) = \sup\{\dim(\varphi) \mid \varphi$ 上的各向异性挠形式 $\}$.

若 F 是非实域，则 F 上的每个型都是挠型，因此 $u(F)$ 就是 F 上所有各向异性型维数的上确界。此处引用的关于 u-不变量的结果均来自 [12]，且适用于非实域，因此定义上没有差异。

2. Pfister forms and symbol lenghts

设 $n \in \mathbb{N}$。对于 $a_1, \ldots, a_n \in F^\times$，我们用 $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ 表示由张量积 $\langle 1, -a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n\rangle$ 给出的 F 上的 2^n 维二次型。这类二次型称为 n 重 ***Pfister*** 型。

我们用 $\mathrm{P}^n(F)$ 表示 F 上 n 重 Pfister 型的 Witt 等价类集合。容易看出，理想 $\mathrm{I}^n F$ 在加法下由 $\mathrm{P}^n(F)$ 生成。

我们用 $H^n(F)$ 表示 F 的系数取自 $\mu_2 = \{-1, +1\}$ 的 n 次伽罗瓦上同调群。定义及基本性质见 [18] 。由杯积 $(a_1) \cup \cdots \cup (a_n)$（其中 a_1、……、$a_n \in F^\times$）给出的 $H^n(F)$ 的元素称为符号。

我们依赖所谓的***Milnor*** 猜想的如下确认。

2.1.**定理** (Orlov-Vishik-Voevodsky)。存在一个自然同构 m

$$e_n : \mathrm{I}^n F/\mathrm{I}^{n+1} F \to H^n(F)$$

它将 n 重 ***Pfister*** 型 $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ 的类映射为符号$(a_1) \cup \cdots \cup (a_n)$，其中 a_1，……，$a_n \in F^\times$。

证明。参见 [20]，并结合 [17, 定理 4.1]或 [16, 定理 1.1]。 □

根据定理 2.1，$H^n(F)$ 由符号生成。对于 $\alpha \in H^n(F)$，我们定义$\lambda^n(\alpha) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \alpha = \Sigma_{i=1}^k \beta_i$，其中取 β_1、……、β_k中的某些符号，这些符号属于 $H^n(F)\}$.

设 φ是 F上的一个二次型。若 $[\varphi] \in \mathrm{I}^n F$，则按照 [11, 定义 1.3]，我们定义

$\lambda^n(\varphi) =$在某些 ρ_1、……、$\rho_k \in \mathrm{P}^n(F)\}$.模 $\mathrm{I}^{n+1} F$下取最小值 $\{k \in \mathbb{N} \mid [\varphi] \equiv \Sigma_{i=1}^k \rho_i$。若 $e_n([\varphi]) = \alpha \in H^n(F)$，则由定理 2.1 可得 $\lambda^n([\varphi]) = \lambda^n(\alpha)$。

下面的问题是 [11, 问题 1.1] 的一个变体。

2.2. **问题**。 若 $[\varphi] \in \mathsf{I}^n F$，能否用维数$\varphi$来界定 $\lambda^n(\varphi)$？如果可以，能否使该界与 F 无关?

目前仅对 $n \leqslant 3$ 已知肯定答案：参见 [11, 命题 1.1 e)]，适用于 $n = 2$ 和 [11, 推论 2.1]，适用于 $n = 3$。对于给定的维数 $m \in \mathbb{N}$，该问题与构造一个泛对象的问题有关（即按照 [7,定义 5.1] 的意义上的一个*versal* 对），该对象对应于如下函子：将域 F 映射到维数为 m、满足 $[\varphi] \in \mathrm{I}^n F$ 的型 φ 的集合。

对于 $n \in \mathbb{N}$， F 的 n 次符号长度定义为

$$\lambda^n(F) \;=\; \sup\{\lambda^n(\varphi) \mid \varphi \in \mathsf{I}^n F\}.$$

注意， $\lambda^1(F) \leqslant 1 = \lambda^0(F)$。

根据定理 2.1，对于任意$n \in \mathbb{N}$，我们有 $\lambda^n(F) = \sup\{\lambda^n(\alpha) \mid \alpha \in H^n(F)\}$。关于不变量族 $(\lambda^n(F))_{n\in\mathbb{N}}$ 及其与 u-不变量的关系， [11] 对相关问题（其中大多数仍未解决）作了概述。其中一个问题是，对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $\lambda^2(F) < \infty$ 是否意味着 $\lambda^n(F) < \infty$。

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathrm{I}^n_{\mathrm{t}} F = \mathrm{I}^n F \cap \mathrm{I}_{\mathrm{t}} F$简记为。令 $i, n \in \mathbb{N}$。我们用 $2^i \times \mathrm{I}^n F$ 表示由 $\mathrm{I}^n F$中元素的 2^i重倍类构成的理想。由于 2^i 在 $\mathrm{W}F$中对应于 i重 Pfister 型 $\langle 1, 1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, 1\rangle$的类，因此我们有$2^i \times \mathrm{I}^n F \subseteq \mathrm{I}^{n+i} F$。

在 [3], 下述对 [11, 命题 3.3] 的改进已得到。

2.3. **定理**。 令 $\lambda = \lambda^2(F)$ 并假设 $\lambda < \infty$。则 $\mathsf{I}^{2\lambda+2}_{\mathrm{t}} F = 0$。此外，若 F 是非实的，则 $\mathsf{I}^{2\lambda+2} F = 0$；否则 $\mathsf{I}^{2\lambda+2} F = 8 \times \mathsf{I}^{2\lambda-1} F$。

证明。 见 [3, 定理 1 和 2]。 □

2.4. **推论**。 令 $\lambda = \lambda^2(F)$ 并假设 $\lambda < \infty$。则对任意整数 $n \geqslant 2\lambda + 2$， $\lambda^n(F) = \lambda^{2\lambda+2}(F)$。此外，若 $\lambda > 0$，则 $\lambda^{2\lambda+2}(F) \leqslant \lambda^{2\lambda-1}(F)$。

证明。若 F 是非实的，则由定理 2.3 可得，对所有整数 $n \geqslant 2\lambda + 2$， $\lambda^n(F) = 0$。设 F 是实的。则由定理 2.3 可得，对所有整数 $n \geqslant 2\lambda + 2$， $\mathrm{I}^{2\lambda+2}_{\mathrm{t}} F = 0$ 且 $\mathrm{I}^n F = 2^{n-2\lambda+1} \times \mathrm{I}^{2\lambda-1} F$。因此， $\mathrm{W}F$ 中乘以 2 定义了一个同构 $\mathrm{I}^n F \to \mathrm{I}^{n+1} F$，以及对所有整数 $n \geqslant 2\lambda + 2$的一个双射 $\mathrm{P}^n(F) \to \mathrm{P}^{n+1}(F)$。对任意整数 $n \geqslant 2\lambda + 2$，这诱导出一个同构 $\mathrm{I}^n F/\mathrm{I}^{n+1} F \to \mathrm{I}^{n+1} F/\mathrm{I}^{n+2} F$，它限制为相应生成元集合之间的双射，这些生成元由 Pfister 型的类给出，因此 $\lambda^{n+1}(F) = \lambda^n(F)$。此外，由于 $\mathrm{I}^{2\lambda+2} F = 8 \times \mathrm{I}^{2\lambda-1} F$， $\mathrm{W}F$ 中乘以 8 得到一个满同态 $\mathrm{I}^{2\lambda-1} F \to \mathrm{I}^{2\lambda+2} F$，它限制为一个满射 $\mathrm{P}^{2\lambda-1}(F) \to \mathrm{P}^{2\lambda+2}(F)$；诱导的满射 $\mathrm{I}^{2\lambda-1} F/\mathrm{I}^{2\lambda} F \to \mathrm{I}^{2\lambda+2} F/\mathrm{I}^{2\lambda+3} F$则给出 $\lambda^{2\lambda+2}(F) \leqslant \lambda^{2\lambda-1}(F)$。综上即得所述结论。□

2.5. **引理**。 设 $m \in \mathbb{N}$。$\mathrm{W}F/\mathsf{I}^{m+1} F$ 中的每个类都由一个型 φ表示，且满足 维数$(\varphi) \leqslant 1 + \Sigma_{j=1}^{m} 2^j \lambda^j(F)$。

证明。 我们不妨假设，对于 $1 \leqslant j \leqslant m$， $\lambda^j(F) < \infty$；否则结论显然成立。

我们通过对 m应用归纳法来证明该命题。显然，该命题对 $m = 0$成立。为完成归纳步骤，现在假设 $m > 0$。令 $\lambda = \lambda^m(F)$。考虑一个定义在 F上的型 ϑ。根据关于 $m-1$的归纳假设，我们有 $[\vartheta] = [\psi]$ 模 $\mathrm{I}^m F$，其中 ψ 是一个满足 $\dim(\psi) \leqslant 1 + \Sigma_{j=1}^{m-1} 2^j \lambda^j(F)$ 的型。于是$[\vartheta \perp -\psi] \in \mathrm{I}^m F$。由于 $\lambda = \lambda^m(F) < \infty$，存在定义在 F上的 m重 Pfister 型ρ_1，.....，ρ_λ，使得 $[\varphi \perp -\psi] \equiv [\rho_1 \perp \ldots \perp \rho_\lambda]$ 模 $\mathrm{I}^{m+1} F$。因此，令 $\varphi = \psi \perp \rho_1 \perp \ldots \perp \rho_\lambda$，便得到 $[\vartheta] \equiv [\varphi]$ 模 $\mathrm{I}^{m+1} F$。由于 $\dim(\varphi) = \dim(\psi) + 2^m \lambda \leqslant 1 + \Sigma_{j=1}^{m} 2^j \lambda^j(F)$，命题得证。□

若 F 是非实的，则由引理 2.5 和定理 2.3 可知， $u(F) < \infty$ 等价于对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\lambda^n(F) < \infty$。我们的主要目标是将这一观察推广到实域。这将由定理 5.4 实现。

3. The stability index

实域上的二次型理论融合了所谓约化理论的内容——在该理论中，平方和被视同平方——以及所谓挠型的研究。 u-不变量仅反映后者的某些方面。对于实域，研究这一不变量还需结合稳定指数的研究；稳定指数刻画了域的序空间。本节将重新考察这一不变量及其与 u-不变量的关系。

F 的（约化）稳定指数，记作 $\mathrm{st}(F)$，定义为

$$\mathrm{st}(F) \;=\; \inf\left\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{I}^{n+1} F = 2 \times \mathrm{I}^n F + \mathrm{I}_{\mathrm{t}}^{n+1} F\right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,.$$

注意，$\mathrm{st}(F) = 0$ 当且仅当 F 是非实的或唯一排序的。

3.1. 例子。 无限迭代幂级数域 $K = \mathbb{R}((t_1))((t_2))\ldots$是实的，且 $u(K) = 0$ 并且 $\mathrm{st}(K) = \infty$。

3.2. **定理** (Elman-Lam-Kr¨uskemper)。 对于 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{I}^{n+1} F(\sqrt{-1}) = 0$当且仅当 $\mathrm{I}_{\mathrm{t}}^{n+1} F = 0$ 且 $\mathrm{st}(F) \leqslant n$。

证明。 参见 [5] 或 [9,推论 35.27]。 □

3.3. 定理 （舒伯特）。 令 $s = \mathrm{st}(F)$。如果 $s = 0$，那么 $u(F(\sqrt{-1})) \leqslant \frac{3}{2} u(F) + 1$。如果 $0 < s < \infty$，那么 $u(F(\sqrt{-1})) \leqslant \frac{3}{2} u(F) + (2^{s+1} - 1)2^{s-1}$。

证明。 参见 [19, 推论 1]。 □

由 [4, 推论 2.3], ，可以得到稳定指数关于二符号长度的一个简单上界，而这个上界已知是最优的。

3.4. 定理 (Becher-G-ladki)。 我们有 $\mathrm{st}(F) \leqslant 2\lambda^2(F) - 1$。

证明。 作为 [4, 推论2.3], 中证明的另一种方式，该结论也可直接由定理 2.3 得出，正如 [3, 节 1]末尾所解释的那样。□

4. The splitting height

在 [12, 定理 4.2]中已经指出，符号长度受一个界控制，该界是使某些伽罗瓦上同调类分裂的有限域扩张的最小次数上界。将其转化为二次型的语言后，这促使人们引入了另一个域不变量，而对它的研究才刚刚开始。

若一个型是双曲型或与一维二次型维特等价，我们就称它为分裂的。设 φ 是 F上的一个型。给定域扩张L/F，记 φ_L 为将 φ 通过标量扩张至 L后得到的 L 上的型。注意，每个 F 上的型在 F的代数闭包上都会变为分裂型，因此它已经在 F的某个有限域扩张上分裂。对于 F上的型 φ ，记 $\gamma(\varphi)$为使 φ_L 分裂的域扩张 L/F 的最小次数 $[L:\ F]$ ，并称 $\gamma(\varphi)$为 φ的分裂高度。

我们进一步定义

$$\gamma(F) \ = \ \sup\{\gamma(\varphi) \mid \varphi \text{ quadratic form over } F\} \ \in \ \mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

并称其为 F的分裂高度。

4.1. **命题**。 对于 F上的任意型 φ，都有 $\gamma(\varphi) \leqslant 2^k$，其中$k = \lfloor \frac{1}{2}$维数$(\varphi)\rfloor$。特别地，若 F是非实的且 $u(F) < \infty$，则对于 $k = \lfloor \frac{1}{2}u(F)\rfloor$，有 $\gamma(F) \leqslant 2^k$。

证明。 设 φ 是 F 上的一个二次型。令 $n = \dim(\varphi)$，并设 $a_1, \ldots, a_n \in F^\times$ 满足 $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$。置 $k = \lfloor \frac{n}{2}\rfloor$，并令 $K = F(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_k})$，其中 $b_i = -a_{2i-1}a_{2i}$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant k$ 成立。则 φ_K 是分裂的，且 $\gamma(\varphi) \leqslant [K:\ F] \leqslant 2^k$。

现在假设 F 是非实的，且 $u(F)$ 有限。置 $k = \lfloor \frac{1}{2}u(F)\rfloor$。考虑 F 上的任意一个型 φ。令 φ' 为 φ 的各向异性部分。则 $\gamma(\varphi) = \gamma(\varphi')$，且 $\dim(\varphi') \leqslant u(F)$，由此 $\gamma(\varphi) = \gamma(\varphi') \leqslant 2^k$。这表明 $\gamma(F) \leqslant 2^k$。□

4.2. **推论**。 假设 $u(F(\sqrt{-1})) < \infty$。令 $k = \lfloor \frac{1}{2}u(F(\sqrt{-1}))\rfloor$。则$\gamma(F) \leqslant 2^{k+1}$。

证明。 由命题 4.1 及 γ 的定义可知，此结论显然成立。 □

4.3. **引理**。 设 $n \in \mathbb{N}$。对于每个 $\alpha \in H^n(F)$，都存在一个可分域扩张 K/F，满足 $[K:\ F] \leqslant \gamma(F)$，使得 $\alpha_K = 0$。

证明。由定理 2.1，存在一个型 ψ ，满足 $[\psi] \in \mathrm{I}^n F$ ，且$e_n([\psi]) = \alpha$。存在一个有限域扩张 K/F，满足 $[K:\ F] \leqslant \gamma(F)$，使得 ψ_K 是双曲的。由于 ψ_K 是双曲的，我们有 $\alpha_K = e_n([\psi_K]) = 0$。由于 $\mathrm{char}(F) \neq 2$，取 K_0 为 K 中 F 的可分闭包，则自然映射$H^n(K_0) \to H^n(K)$ 是单射。因此我们可以假设 $K_0 = K$ ，从而 K/F 是可分的。□

4.4. **定理** (Krashen)。 假设对于每个 $d \in \mathbb{N}$，都存在 $N_d \in \mathbb{N}$，使得 $\gamma(F') \leqslant N_m$对所有满足 $[F':\ F] \leqslant m$ 的域扩张 F'/F均成立。那么，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有$\lambda^n(F) < \infty$ 。

证明。设 $n \in \mathbb{N}$。假设意味着，对于任意满足 $d < n$ 的 $d, m \in \mathbb{N}$，以及任意满足 $[F' \colon F] \leqslant m$ 的域扩张 F'/F， $H^d(F')$ 中任一类的有效指标（定义见第 $[12, \text{节，定义 } 1]$ ）都不超过 N_m。

由 $[12, \text{定理 } 4.2]$ 可知，对于任意 $\alpha \in H^n(F)$， $\lambda^n(\alpha)$ 可由 N_n 控制。因此， $\lambda^n(F) < \infty$ 由定理 2.1 得出。□

4.5. **问题**。对于有限域扩张 F'/F，能否用 $\gamma(F)$ 和 $[F' \colon F]$ 来控制 $\gamma(F')$？

5. Weakly isotropic forms and the main theorem

在假设 $-1 \in F^{\times 2}$ 的条件下，D. Krashen $[12, \text{定理 } 5.4]$ 证明， F 的 u-不变量有限，当且仅当对所有 $n \in \mathbb{N}$，次数为 n 的符号长度有限。我们将在定理 5.4 中得到一个推广，该推广也涵盖 F 为实的情形，尤其不假设 $-1 \in F^{\times 2}$。

设 φ 是 F上的一个型。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $n \times \varphi$ 表示 $\varphi \perp \ldots \perp \varphi$的 n 重正交和。若存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $n \times \varphi$ 是各向同性的，我们称 φ 弱各向同性；否则称 φ 强各向异性。注意，任何非平凡的挠型都是弱各向同性的。

5.1. **引理**。设 ρ 是 F 上的一个挠型，且 ϑ 是 ρ 的一个子型，其中维数$(\vartheta) > \frac{1}{2}$ 维数$(\bar{\rho})$。则 ϑ 是弱各向同性的。

证明。由于 ρ是一个挠型，存在一个正整数 k，使得 $k \times \rho$是双曲的。因此， $k \times \rho$ 包含一个维数等于$_1{}_2$维数$(k \times \varphi)$的全各向同性子空间。由于 $k \times \vartheta$ 是 $k \times \rho$ 的一个子型，并且

$$\mathsf{dim}(k \times \vartheta) = k \cdot \mathsf{dim}(\vartheta) > \tfrac{1}{2} k \cdot \mathsf{dim}(\varphi) = \tfrac{1}{2} \mathsf{dim}(k \times \varphi)\,,$$

我们得出结论： $k \times \vartheta$ 是各向同性的。 □

5.2. **引理**。设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\mathsf{I}^n F = 2 \times \mathsf{I}^{n-1} F$。那么 $\mathsf{I}_{\mathsf{t}}^{n+1} F = 0$，并且在 F 上满足 $[\psi] \in \mathsf{I}^{2n-1} F$ 的每个各向异性型 ψ 都是强各向异性的。

证明。由于 $\mathrm{I}^n F = 2 \times \mathrm{I}^{n-1} F$，由 $[13, \text{推论 XI.4.18 (2) 和定理 XI.4.5}]$ 可知， F上的型 $2^n \times \langle 1 \rangle$ 表示 ΣF^2的所有元素。根据[2, 命题 2.4], ，这表明对于 F上的任意型 ρ， $2^n \times \rho$ 要么是各向同性的，要么是强各向异性的。由于 $\mathrm{I}^{2n-1} F = 2^n \times \mathrm{I}^{n-1} F$，我们得出结论：在 F 上类属于 $\mathrm{I}^{2n-1} F$ 的每个各向异性型都是强各向异性的。□

5.3. **命题**。假设 $0 < \lambda^2(F) < \infty$。那么

$$u(F) \leqslant 2\left(1 + \Sigma_{j=1}^{2\lambda^2(F)+1} 2^j \lambda^j(F) + 2^{2\lambda^2(F)+2}\big(2^{2\lambda^2(F)+1} - 1\big)\lambda^{2\lambda^2(F)-1}(F)\right).$$

证明。令 $\lambda = \lambda^2(F)$ 和 $k = 1 + \Sigma_{j=1}^{4\lambda+2} 2^j \lambda^j(F)$。由定理 2.3，得到 $\mathrm{I}^{2\lambda+2} F = 8 \times \mathrm{I}^{2\lambda-1} F = 2 \times \mathrm{I}^{2\lambda+1} F$。由引理 5.2 可知，每个满足 $[\vartheta] \in \mathrm{I}^{4\lambda+3} F$ 的 ϑ 上的型都是强各向异性的。

考虑实数域 F 上的一个各向异性挠型 φ。由引理 2.5，存在实数域 F 上的一个各向异性型 ψ，满足 $\dim(\psi) \leqslant k$，且 $[\varphi] \equiv [\psi]$ 模 $\mathrm{I}^{4\lambda+3}F$。令 ϑ 为 $\varphi \perp -\psi$ 的各向异性部分。则 $[\vartheta] \in \mathrm{I}^{4\lambda+3}F$。因此，$\vartheta$ 是强各向异性的。此外，$[\vartheta \perp \psi] = [\varphi] \in \mathrm{I}_{\mathrm{t}}F$，所以 $\vartheta \perp \psi$ 是一个挠型。由于 ϑ 是强各向异性的，由引理 5.1 得到 $\dim(\vartheta) \leqslant \frac{1}{2}\dim(\vartheta \perp \psi)$。由于 $\dim(\vartheta \perp \psi) \leqslant \dim(\vartheta) + \dim(\psi)$，可知 $\dim(\vartheta) \leqslant \dim(\psi) \leqslant k$。由于 φ 是各向异性的且 $[\varphi] = [\vartheta \perp \psi]$，我们得出 $\dim(\varphi) \leqslant \dim(\vartheta \perp \psi) \leqslant 2k$。

根据推论 2.4，对于每个整数 $n \geqslant 2\lambda + 2$，我们有 $\lambda^n(F) \leqslant \lambda^{2\lambda-1}(F)$。因此可得 $k \leqslant 1 + \Sigma_{j=1}^{2\lambda+1} 2^j \lambda^j(F) + (\Sigma_{j=2\lambda+2}^{4\lambda+2} 2^j)\lambda^{2\lambda-1}(F)$。由于$\Sigma_{j=2\lambda+2}^{4\lambda+2} 2^j = 2^{2\lambda+2}(2^{2\lambda+1} - 1)$，结论成立。□

现在我们可以给出本文的主要结果，它是对 [12, 定理 5.4] 的推广。它将 [19, 定理 3], 中的等价关系 $(i) \Leftrightarrow (ii)$ 推广到这里。

5.4.**定理**。以下命题等价：

(i) $u(F) < \infty$ 且 $st(F) < \infty$。*(ii)* $u(F(\sqrt{-1})) < \infty$。*(iii)* $\lambda^n(F) < \infty$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。*(iv)* $\lambda^n(F) < \infty$ 对 $2 \leqslant n \leqslant 2\lambda^2(F) + 1$成立。*(v)* 对每个 $d \geqslant 1$，都存在 $N_d \in \mathbb{N}$ 使得 $\gamma(F') \leqslant N_d$ 对所有满足 $[F'$ 的域扩张 F'/F 均成立：$F] \leqslant d$。

证明。$(i \Rightarrow ii)$ 这是定理 3.3。

$(ii \Rightarrow v)$ 假设 $u(F(\sqrt{-1})) < \infty$。令 F'/F 为有限域扩张。根据定理 2.10], , 我们有 $u(F'(\sqrt{-1})) \leqslant \frac{1}{2}(d+1)u(F(\sqrt{-1}))$，其中$d = [F' : F]$。由推论 4.2，我们得出 $\gamma(F') \leqslant 2\gamma(F'(\sqrt{-1})) \leqslant 2^{k+1}$，其中 $k = \lfloor \frac{1}{4}(d+1)u(F(\sqrt{-1})) \rfloor$。

$(v \Rightarrow iii)$ 这是定理 4.4。

$(iii \Rightarrow iv)$ 这个推论显然成立。

$(iv \Rightarrow i)$ 由定理 3.4 和命题 5.3 可得。□

Acknowledgments

我们谨向 Stephen Scully 致谢，感谢他帮助我们查找了一些参考文献。我们感谢以色列科学基金会提供的资助，项目编号 353/21。

References

[1] J.K. Arason 和 A. Pfister。Witt 环的 Krull 交定理的证明。《Invent. Math.》12 (1971)，173–176。[2] K.J. Becher。极小弱各向同性型。《Math. Z.》252 (2006)，91–102。[3] K.J. Becher。Brauer 2-挠指标有界的域。《Math. Ann.》(2023)。https: // doi.org/10.1007/s00208-023-02566-1[4] K.J. Becher 和 P. G-ladki。符号长度与稳定指数。《J. Algebra》354 (2012)，71–76。[5] K.J. Becher 和D.B. Leep。Elman-Lam-Kr¨ uskemper 定理。《*ISRN Algebra*》(2011)，文章编号 106823（8 页）。

[6] O. Benoist。实曲面的周期-指标问题。Publ. Math. Inst. Hautes
《科学研究纪事》130 (2019), 63–110.[7] G. Berhuy 和 G. Favi. 本质维数：函子观点（根据 A. Merkur- jev）。《数学文献》8 (2003), 279–330.[8] R. Elman 和 T.-Y. Lam. 二次型与 u-不变量， I。《Math. Z.》131 (1973), 283–304.[9] R. Elman、N. Karpenko 和 A. Merkurjev. 二次型的代数与几何理论。美国数学会丛书，第56卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008.[10] B. Kahn. 若干域不变量的比较。《J. Algebra》232 (2000), 485–492.[11] B. Kahn. 附属于二次型的“水平”不变量，第21–33页。代数与数论，R. Tandon 编，印度斯坦图书机构，德里，2005.[12] D. Krashen. 伽罗瓦上同调中的周期与指标、符号长度及一般分裂。《伦敦数学会通报》48 (2016), 985–1000.[13] T.-Y. Lam. 域上的二次型导论。数学研究生教材，第67卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005.[14] D.B. Leep. 二次型组。《纯粹与应用数学杂志》350 (1984), 109–116.[15] D.B. Leep. u-进函数域的 p-不变量。《纯粹与应用数学杂志》679 (2013), 65–73.[16] F. Morel. 关于二次型的 Milnor猜想与模2动机复形。帕多瓦大学数学研讨会报告114 (2005), 63–101.[17] D. Orlov、A. Vishik 和 V. Voevodsky. 一个关于 $K^M/2$ 的正合列及其在二次型中的应用。《数学年鉴》165 (2007), 1–13.[18] J. P. Serre. 伽罗瓦上同调。Patrick Ion 从法文译出。施普林格出版社，柏林，1997.[19] C. Schubert. 形式实域上 u-不变量的上升。《Math. Ann.》338 (2007), 757–765.[20] V. Voevodsky. 以 $\mathbb{Z}/2$ 系数取值的动机上同调。《高等科学研究所数学出版物》98 (2003), 59–104.

Universiteit Antwerpen, Departement Wiskunde, Middelheimlaan 1, 2020 Ant-werpen, Belgium.电子邮箱地址：karimjohannes.becher@uantwerpen.be

Technion-Israel Institute of Technology, Department of Mathematics, Haifa32000, Israel.电子邮箱地址：smgos@campus.technion.ac.il