arXiv:2303.06487v1 [math.GN] 11 Mar 2023

关于 Rothberger 性质的开闭版本的一些观察

Manoj Bhardwaj[a]、Alexander V. Osipov[b]

[a]德里大学数学系，新德里-110007，印度[b]乌拉尔联邦大学克拉索夫斯基数学与力学研究所，俄罗斯叶卡捷琳堡

摘要

本文证明，Rothberger 性质的开闭版本 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 与博雷尔强零测性彼此独立。对于零维度量空间 (X,d)，X 满足 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 当且仅当 X对于每一个与 d 具有相同拓扑的度量都具有博雷尔强零测性。在零维空间中，博弈 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 等价于博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$，点开博弈也等价于点开闭博弈。利用反射，我们证明博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 与点开闭博弈在策略上和马尔可夫意义下互为对偶。文中给出了一个空间的例子，在该空间上博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 无法判定。

关键词：强零测度、选择原理、点开闭博弈、零维空间 2010年数学主题分类：54D20,54A20

1. 引言

1938年，Rothberger [14]（另见 [11]）在拓扑空间中引入了一种覆盖性质。若空间 X 满足如下条件，则称其具有 Rothberger性质：对于开覆盖 $\langle \mathcal{U}_n$ 的每个序列 $n\in\omega\rangle$，都存在一个序列 $\langle V_n:\ n\in\omega\rangle$，使得对每个 n，V_n 都是 $\mathcal{U}_n$ 中的一个元素，并且每个 $x\in X$ 都属于V_n，其中某个 n。这一性质强于 Lindel¨of 性质，且在连续像下保持不变。

网址：manojmnj27@gmail.com（Manoj Bhardwaj）、OAB@list.ru（Alexander V. Osipov）

提交至.....的预印本 2023年3月14日

通常，每个选择原理 $S_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 都可以与某个拓扑博弈 $G_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 联系起来。因此，Rothberger性质 $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 与 Rothberger博弈 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 相联系。

设 X 是一个拓扑空间。在 X 上进行的 Rothberger博弈 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 是一场由两位参与者 Alice 和 Bob 进行的博弈。

第 1 回合：Alice 选择 X 的一个开覆盖 $\mathcal{U}_1$ 。Bob 选择一个集合 $U_1 \in \mathcal{U}_1$。

第 2 回合：Alice 选择 X 的一个开覆盖 $\mathcal{U}_2$ 。Bob 选择一个集合 $U_2 \in \mathcal{U}_2$。

etc.

如果族 $\{U_n : n \in \omega\}$ 是空间 X 的一个覆盖，那么 Bob 赢得博弈 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$。否则，Alice 获胜。

一个拓扑空间是 Rothberger 空间，当且仅当 Alice 在博弈 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ [13] 中没有获胜策略。

在 [9] 中，Galvin 证明，对于第一可数空间 X，Bob 在 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 中有获胜策略，当且仅当 X 是可数的。

本文继续研究文献 [3, 4, 5]，中开创的弱 Rothberger 型性质，并定义一种新的博弈——弱 Rothberger 博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$。在零维空间中，Rothberger 博弈与弱 Rothberger 博弈等价。利用反射，我们得出 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 与点开闭博弈在策略意义下及马尔可夫意义下互为对偶。

2. 预备知识

设 (X,τ) 或 X 是一个拓扑空间。若一个集合在拓扑空间中既是开集又是闭集，则称其为开闭集。设 ω 为第一个无限基数，ω_1 为第一个不可数基数。对于本文未定义的术语和符号，请参见 [8]。

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的开覆盖集族。

符号 $S_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 表示以下选择假设：对于 $\mathcal{A}$ 中元素的每个序列 $\langle \mathcal{U}_n : n \in \omega\rangle$，都存在一个序列 $\langle U_n : n \in \omega\rangle$，使得对于每个 n，$U_n \in \mathcal{U}_n$ 且 $\{U_n : n \in \omega\} \in \mathcal{B}$ [15]。

本文中，$\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 将表示空间 X的以下开覆盖集族：

$\mathcal{O}$： X的所有开覆盖所组成的集族。

$\mathcal{C}_\mathcal{O}$： X的所有开闭覆盖所组成的集族。

显然，X 具有 Rothberger性质，当且仅当 X 满足 $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$.

若空间 X 满足选择原理 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$，则称其具有弱 Rothberger性质。

可以注意到， $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O}) \Rightarrow S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$，并且每个连通空间都必须满足 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$。那么，带有通常拓扑的实数集满足 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$，但不满足 $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$。

设 (X,τ) 是一个拓扑空间，且 $\mathcal{T}_X = \tau \setminus \{\emptyset\}$ 是一个不含空集的拓扑。

- 设 $\mathcal{T}_{X,x} = \{U \in \mathcal{T}_X : x \in U\}$ 是 $x \in X$ 处的局部点基。
- 设 $\mathcal{P}_X = \{\mathcal{T}_{X,x} : x \in X\}$ 是 X 的局部点基集。
- 设 $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{X,x}} = \{U \in \mathcal{T}_X : U$ 是 $X, x \in U\}$ 中的一个闭开集。
- 设 $\mathcal{C}_X = \{\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{X,x}} : x \in X\}$。

3. 关于 $S_1(C_o, C_o)$ 的结果

3.1. $S_1(C_o,C_o)$ 与博雷尔强零测性彼此独立

回顾一下，若实数集 X 是零测的（或具有零测度），则对于每个正数 ϵ，都存在一个覆盖 $\{I_n\}_{n\in\omega}$，使得 X 中每个集合 Σ_n 的直径 diam$(I_n) < \epsilon$。

为了限制零测或零测集这一概念，博雷尔于 1919年 [1] 定义了一个比零测性更强的概念。如今，这一概念称为强零测性，也称强零测集。

博雷尔强零测：若对每个正实数序列 $\langle \epsilon_n : n \in \omega \rangle$，都存在一个由 Y 的子集构成的序列 $\langle J_n : n \in \omega \rangle$，使得每个 J_n 的直径为 $< \epsilon_n$，并且 Y 被 $\{J_n : n \in \omega\}$ 覆盖，则称 Y 是博雷尔强零测的。

然而，博雷尔未能构造出非平凡（即不可数）的博雷尔强零测集合实例。因此他猜想，不存在这样的实例。

1928年，Sierpinski 指出，每个卢津集都是博雷尔强零测的，因此连续统假设意味着博雷尔的猜想是错误的。

Sierpinski 询问，博雷尔强零测这一性质在取同胚像（甚至连续像）时是否保持不变。

1941年，Rothberger 在连续统假设下给出了否定的答案。这促使 Rothberger 引入了以下博雷尔强零测的拓扑版本（该版本在取连续像时保持不变）。

1988年，Miller 和 Fremlin [12] 证明，空间 Y 具有 Rothberger性质（$S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$），当且仅当，对于生成 Y 拓扑的每个度量， Y 上的度量空间都具有博雷尔强零测。

回顾一下，如果一个空间 X 有一个由既开又闭集组成的基，那么它就是零维的。现在我们证明， $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$与博雷尔强零测性彼此独立。由于实数集不是零测的，它不具有博雷尔强零测性，但满足$S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$。由于每个具有博雷尔强零测性的度量空间必定是零维且可分的， $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$等价于 $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$（见下文定理 3.1）。因此，根据定理 6(c)， $[12]$, 存在一个具有博雷尔强零测性的实数子集，但它不满足 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$。

以下结果的证明很容易通过将开集替换为该拓扑空间的既开又闭基中的集合得到。

定理 3.1. 对于零维空间 X, $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 等价于$S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$。

由 $[12]$, 中的定理 1 可得以下推论。

推论 3.2. 对于零维度量空间 (X,d)，以下陈述等价：

1. X 满足 $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$；2. X 满足 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$；3. 对于每个生成原拓扑的度量， X 都具有博雷尔强零测；4. X 在贝尔空间 ω^ω （配备通常度量）中的每个连续像都具有博雷尔强零测。

3.2. 对偶选择博弈

选择博弈 $G_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是 Alice 和 Bob 两位参与者进行的 ω 长度博弈。在第 n 回合，Alice 选择 $A_n \in \mathcal{A}$，随后 Bob 选择$B_n \in A_n$。若满足 $\{B_n : n < \omega\} \in \mathcal{B}$，则 Bob 获胜；否则 Alice 获胜。

我们考虑以下策略：

• Alice 在 $G_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 中的策略是一个函数 $\sigma\colon (\bigcup \mathcal{A})^{<\omega} \to \mathcal{A}$。若对所有 $n < \omega$，当 $x_n \in \sigma\langle x_i : i < n\rangle$ 时，均有 $\{x_n : n \in \omega\} \notin \mathcal{B}$，则称 Alice 的策略 σ 为获胜策略。如果 Alice 有获胜策略，我们记作$Alice \uparrow G_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$。

• Bob 在 $G_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 中的策略是一个函数 $\tau\colon \mathcal{A}^{<\omega} \to \bigcup \mathcal{A}$。若策略 τ 满足对所有 $n < \omega$, $\{\tau(A_0, ..., A_n)$ 均有 $n <\omega\} \in \mathcal{B}$，则称其为 Bob 的必胜策略。

• Alice 的预先确定策略是一种只考虑当前回合编号的策略。形式上，它是一个函数 $\sigma : \omega \to \mathcal{A}$。如果 Alice 有必胜的预先确定策略，我们记作 $Alice \uparrow_{pre} G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$。

• Bob 的马尔可夫策略是指一种只考虑玩家 Alice 最近一步行动和当前回合数的策略。形式上，它是一个函数 τ: $\mathcal{A} \times \omega \to \bigcup \mathcal{A}$。如果 Bob 有制胜的马尔可夫策略，我们记作$Bob \uparrow_{mark} G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$。

注意，$Bob \uparrow_{mark} G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Rightarrow Bob \uparrow G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Rightarrow Alice \not\uparrow G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Rightarrow Alice \not\uparrow_{pre} G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$。

值得注意的是，$Alice \not\uparrow_{pre} G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 等价于选择原理 $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$。

如果满足以下两个条件，则称博弈 G_1 和 G_2 是策略对偶的:

- $Alice \uparrow G_1$ 当且仅当 $Bob \uparrow G_2$
- $Alice \uparrow G_2$ 当且仅当 $Bob \uparrow G_1$。

若以下两个条件均成立，则称博弈 G_1 和 G_2 为马尔可夫对偶:

- $Alice \uparrow_{pre} G_1$ 当且仅当 $Bob \uparrow_{mark} G_2$
- $Alice \uparrow_{pre} G_2$ 当且仅当 $Bob \uparrow_{mark} G_1$。

若博弈 G_1 和 G_2 既是策略对偶，又是马尔可夫对偶，则称它们为对偶。

给定集合 X，令 $\mathcal{C}(X) = \{f \in (\bigcup X)^X : \ x \in X \Rightarrow f(x) \in x\}$ 为 X上所有选择函数构成的集族。

若 X 相对于 $\subseteq$在 Y 中共初，则记作 $X \preceq Y$；也就是说，$X \subseteq Y$，并且对所有 $y \in Y$，都存在 $x \in X$ 使得 $x \subseteq y$。

在选择博弈的语境中，当$\mathcal{A}' \preceq \mathcal{A}$ [7]时，$\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{A}$ 的选择基。

定义 3.3. [7] 若$\{range(f) : f \in \mathcal{C}(\mathcal{R})\}$ 是 $\mathcal{A}$的选择基，则称集合 $\mathcal{R}$ 为集合 $\mathcal{A}$ 的反射。

Let $G_1(\mathcal{A}, \neg\mathcal{B}) := G_1(\mathcal{A}, \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A}) \setminus \mathcal{B})$.

定理 3.4. (*[7],* 推论 26) 如果 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{A}$的反射，那么 $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 和 $G_1(\mathcal{R}, \neg\mathcal{B})$ 互为对偶。

点开博弈 $PO(X)$ 是一种博弈：Alice 选择 X中的点，Bob 为每个选定的点选择一个开邻域；如果 Bob 的选择构成一个覆盖，Alice 就获胜。

定理 3.5. *[9]* 博弈 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 与每个拓扑空间上的点开博弈策略对偶。

定理 3.6. *[6]* 博弈 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 与每个拓扑空间上的点开博弈马尔可夫对偶。

推论 3.7. 博弈 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 与每个拓扑空间上的点开博弈对偶。

回顾一下，若两个博弈 G 和 G' 等价（同构），则

1. $Alice\uparrow G$ 当且仅当 $Alice\uparrow G'$;
2. $Bob\uparrow G$ 当且仅当 $Bob\uparrow G'$。

由于 $\mathcal{P}_X$ 是 $\mathcal{O}$ 的反射（[7], 命题 28），Rothberger博弈$G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 与 $G_1(\mathcal{P}_X,\neg\mathcal{O})$ 对偶（[7], 推论 29）。众所周知，博弈 $G_1(\mathcal{P}_X,\neg\mathcal{O})$ 等价于点开博弈。

3.3. 点开闭博弈与拟连通分支开闭博弈

空间 X 上的点开闭博弈 $PC(X)$ 按照以下规则进行:

在每个回合 $n\in\omega$中，Alice 选取一个点 $x_n\in X$，然后 Bob 选择一个开闭集 $U_n\subseteq X$，使得 $x_n\in U_n$。对局结束时

$$x_0,U_0,x_1,U_1,x_2,U_2,...,x_n,U_n,...,$$

若 $X=\bigcup_{n\in\omega}U_n$，则 Alice 获胜；否则 Bob 获胜。

我们用 τ_c 表示空间 X 中所有非空闭开子集组成的集族，用 $\tau_c^{<\omega}$表示 τ_c 的所有有限子集组成的集族。

空间 X 上的点开闭博弈中，Alice 的策略是一个函数φ：$\tau_c^{<\omega}\to X$。

空间 X 上点开闭博弈中 Bob 的策略是一个函数ψ：$X^{<\omega}\to\tau_c$，使得对于所有 $\langle x_0,x_1,...,x_n\rangle\in X^{<\omega}\setminus\{\langle\rangle\}$，都有 $x_n\in\psi(\langle x_0,...,x_n\rangle)=U_n$。

空间 X上的点开闭博弈中 Alice 的策略 φ：$\tau_c^{<\omega}\to X$，若对于每个由开闭集构成的序列 $\langle U_n:\ n\in\omega\rangle$

空间 X 的子集序列，满足 $\forall n \in \omega$，$(x_n = \varphi(\langle U_0, U_1, ..., U_{n-1}\rangle) \in U_n)$，都有 $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$。如果 Alice 在空间 X上的点开闭博弈中拥有获胜策略，我们记作 $Alice\uparrow PC(X)$。

策略 $\psi: X^{<\omega} \to \tau_c$ 是 Bob 在空间X 上的点开闭博弈中的一种策略；如果对空间 X中任意点序列 $\langle x_n : n \in \omega\rangle$，都有 $X = \bigcup_{n\in\omega}\{U_n: U_n = \psi(\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle)\}$，那么它就是 Bob 的获胜策略。如果 Bob 在空间 X上的点开闭博弈中拥有获胜策略，我们记作$Bob\uparrow PC(X)$。

博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$ 是 Alice 和 Bob 两位参与者进行的博弈，每个自然数 n 对应一回合。每回合中，Alice 选取空间的一个开闭覆盖，Bob 从该覆盖中选取一个成员。如果 Bob 在整个博弈过程中选取的集合覆盖了该空间，则 Bob 获胜；否则 Alice 获胜。

所有包含某个连通分支的闭开集的交集称为空间 [10]的拟连通分支。

空间 X 上的拟连通分支开闭博弈 $QC(X)$按以下规则进行：

在每一回合 $n \in \omega$ 中，Alice 选取 X 的一个拟连通分支 A_n，然后 Bob 选择一个开闭集 $U_n \subseteq X$，满足 $A_n \subseteq U_n$。在游戏结束时

$$A_0, U_0, A_1, U_1, A_2, U_2, ..., A_n, U_n, ...,$$

若 $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$，则 Alice 获胜；否则 Bob 获胜。

我们用 Q_X 表示空间 X 的所有拟连通分支构成的集族，用 $Q_X^{<\omega}$ 表示 Q_X 的所有有限子集构成的集族。

空间 X 上拟连通分支开闭博弈中 Alice 的策略是一个函数 $\varphi: \tau_c^{<\omega} \to Q_X$。

空间 X 上拟连通分支开闭博弈中 Bob 的策略是一个函数 $\psi: Q_X^{<\omega} \to \tau_c$，满足对于所有 $\langle A_0, A_1, ..., A_n\rangle \in Q_X^{<\omega} \setminus \{\langle\rangle\}$，都有 $A_n \subseteq \psi(\langle A_0, ..., A_n\rangle) = U_n$。

空间 X 上拟连通分支开闭博弈中 Alice 的策略 $\varphi: \tau_c^{<\omega} \to Q_X$ 是 Alice 的获胜策略，若对于空间 X 的每个开闭子集序列 $\langle U_n : n \in \omega\rangle$，只要 $\forall n \in \omega$，就有 $(A_n = \varphi(\langle U_0, U_1, ..., U_{n-1}\rangle) \subseteq U_n)$，且 $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$。若 Alice 在空间 X 上的拟连通分支开闭博弈中有获胜策略，我们记作 $Alice\uparrow QC(X)$。

空间 X 上拟连通分支开闭博弈中 Bob 的策略 $\psi: Q_X^{<\omega} \to \tau_c$ 是 Bob 的获胜策略，当且仅当对于每个序列 $\langle A_n :$

$n \in \omega\rangle$，由空间 X 的拟连通分支构成，我们有 $X = \bigcup_{n\in\omega}\{U_n : U_n = \psi(\langle A_0, A_1, ..., A_n\rangle)\}$。如果 Bob 在空间 X 上的拟连通分支开闭博弈中有获胜策略，我们记作 $Bob\uparrow QC(X)$。

命题 3.8. 点开闭博弈与拟连通分支开闭博弈等价。

证明。设 $\varphi : \tau_c^{<\omega} \to X$ 是 Alice 在空间 X 上的点开闭博弈中的一个获胜策略。那么，对空间 X 的任意开闭子集序列 $\langle U_n : n \in \omega\rangle$ 及 $n \in \omega$，满足 $\psi(\langle U_0, U_1, ..., U_{n-1}\rangle) = Q[\varphi(\langle U_0, U_1, ..., U_{n-1}\rangle)]$ ($Q[x]$ 是 x 的拟连通分支）的函数 $\psi : \tau_c^{<\omega} \to Q_X$ 是 Alice 在拟连通分支开闭博弈中的获胜策略。这是由 $x_n = \varphi(\langle U_0, U_1, ..., U_{n-1}\rangle) \in Q[x_n] \subseteq U_n$ 这一事实得出的。

设 $\varphi : \tau_c^{<\omega} \to Q_X$ 是 Alice 在空间 X 上的拟连通分支开闭博弈中的一个获胜策略。那么，对空间 X 的任意开闭子集序列 $\langle U_n : n \in \omega\rangle$ 及 $n \in \omega$，满足 $\psi(\langle U_0, U_1, ..., U_{n-1}\rangle) \in \varphi(\langle U_0, U_1, ..., U_{n-1}\rangle)$ 的函数 $\psi : \tau_c^{<\omega} \to X$ 是 Alice 在点开闭博弈中的获胜策略。

设 $\psi : X^{<\omega} \to \tau_c$ 是 Bob 在 X 上的点开闭博弈中的获胜策略。那么函数 $\rho : Q_X^{<\omega} \to \tau_c$ 满足：对于空间 X 的任意拟连通分支序列 $\langle A_n : n \in \omega\rangle$，以及某些 $x_0, ..., x_n$，若对每个 $i = 0, ..., n$ 都有 $\rho(\langle A_0, A_1, ..., A_n\rangle) = \psi(\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle)$，则它是 Bob 在拟连通分支开闭博弈中的获胜策略。

设 $\psi : Q_X^{<\omega} \to \tau_c$ 是 Bob 在 X 上的拟连通分支开闭博弈中的获胜策略。那么函数 $\rho : X^{<\omega} \to \tau_c$ 满足：对于空间 X 中的任意点序列 $\langle x_n : n \in \omega\rangle$，若对每个 $i = 0, ..., n$ 都有 $A_i = Q[x_i]$，则 $\rho(\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle) = \psi(\langle A_0, A_1, ..., A_n\rangle)$；该函数是 Bob 在点开闭开闭博弈中的获胜策略。 □

命题 3.9. $\mathcal{C}_X$ 是 $\mathcal{C}_\mathcal{O}$的反射。

证明。对于每个开闭覆盖 $\mathcal{U}$，相应的选择函数 $f \in \mathcal{C}(\mathcal{C}_X)$ 就是证明 $x \in f(\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{X,\,x}}) \in \mathcal{U}$ 的证人。

□

由定理 3.4，我们得到以下结果。

推论 3.10. $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$ 和 $G_1(\mathcal{C}_X, \neg\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 互为对偶。

注意，$PC(X)$ 和 $G_1(\mathcal{C}_X, \neg\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 是同一个博弈。

由命题 3.8，$PC(X)$ 和 $QC(X)$ 等价，因此得到以下结果。

命题 3.11。博弈 $G_1(\mathcal{C}_X, \neg\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 等价于拟连通分支-开闭博弈。

推论 3.12. 若空间 X 是可数个拟连通分支的并，则 Bob $\uparrow G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$.

以下蕴含链总是成立：

$$
\begin{array}{c}
X \text{ 是可数个拟连通分支的并} \\
\Downarrow \\
Bob \uparrow G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O}) \\
\Downarrow \\
Alice \not\uparrow G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O}) \\
\Updownarrow \\
X \text{ has mildly Rothberger property.}
\end{array}
$$

以下结果的证明很容易得出，只需将开集替换为该拓扑空间的既开又闭基中的集合即可。

定理 3.13. 对于零维空间，以下陈述成立：

1. 博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$ 与博弈 $G_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ 等价。2. 点开闭博弈与点开博弈等价。

由 [13] 和 [2], 可得以下结果。

定理 3.14. 对于空间 X，以下陈述成立：

1. *[13]* X 满足 $S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ 当且仅当 $Alice \not\uparrow G_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$。
2. *[2]* X 满足 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$ 当且仅当 $Alice \not\uparrow G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$。

推论 3.15. 对于空间 X，以下陈述等价：

1. X 满足 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$; 2. $Alice \uparrow\!\!\!

9. $Bob \uparrow^{\gamma}_{mark} QC(X)$.

推论 3.16. 对于零维空间 X，以下命题等价：

1. X 满足 $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$;
2. X 满足 $S_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$; 3. $Alice \uparrow^{\gamma}_{pre} G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$; 4. $Alice \uparrow^{\gamma}_{pre} G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$; 5. $Alice \uparrow^{\gamma} G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$; 6. $Alice \uparrow^{\gamma} G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$; 7. $Bob \uparrow^{\gamma} G_1(\mathcal{P}_X,\neg\mathcal{O})$; 8. $Bob \uparrow^{\gamma} G_1(\mathcal{C}_X,\neg\mathcal{C}_\mathcal{O})$; 9. $Bob \uparrow^{\gamma} PO(X)$; 10. $Bob \uparrow^{\gamma} PC(X)$; 11. $Bob \uparrow^{\gamma} QC(X)$; 12. $Bob \uparrow^{\gamma}_{mark} PO(X)$; 13. $Bob \uparrow^{\gamma}_{mark} PC(X)$; 14. $Bob \uparrow^{\gamma}_{mark} QC(X)$.

在 [9], Galvin 和 Telg´arsky（ [16]中的定理 6.3）证明：如果 X 是一个 Lindel¨of 空间，且其中每个元素都是 G_δ，那么 Bob 在 $G_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 中有获胜策略，当且仅当 X 是可数的。

定理 3.17. 设 X 是一个空间，其中每个拟连通分支都是可数个开闭集的交，则 $Bob \uparrow G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 当且仅当 X 是可数个拟连通分支的并。

证明. 设 Bob 在 X 上的博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 中有一个获胜策略。由于博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O},\mathcal{C}_\mathcal{O})$ 与点开闭博弈互为对偶，并且根据命题 3.8，点开闭博弈与拟连通分支开闭博弈等价。

设 Alice 在拟连通分支开闭博弈中有一个获胜策略。设 φ 是 Alice 在 X 上进行的拟连通分支开闭博弈中的一个获胜策略。对每个拟连通分支 Q，存在一个序列 $\langle V_k : k \in \omega\rangle$，其中各项都是开闭集，且 $Q = \cap_{k\in\omega} V_k$。

因此，我们将 Bob 对 Alice 所下 Q 的回应限制为 $\{V_k : k \in \omega\}$。

设 Alice 以拟连通分支$\varphi(\langle\rangle) = Q_{\langle\rangle}$开始点开闭博弈。随后 Bob 以某个$k_0 \in \omega$对应的形式为$V_{k_0,\ \langle\rangle}$的闭开集作出回应。

Alice 在这场博弈中的下一步是一个拟连通分支 $\varphi(\langle V_{k_0,\ \langle\rangle}\rangle) = Q_{\langle k_0\rangle}$。随后 Bob 以形如$V_{k_1,\ \langle k_0\rangle}$的闭开集作答，其中 $k_1 \in \omega$。

现在 Alice 在这场博弈中的下一步是一个拟连通分支 $\varphi(\langle V_{k_0,\ \langle\rangle}, V_{k_1,\ \langle k_0\rangle}\rangle) = Q_{\langle k_0,\ k_1\rangle}$。随后 Bob 以形如$V_{k_2,\ \langle k_0,\ k_1\rangle}$的闭开集作答，其中$k_2 \in \omega$，依此类推。

类似地，我们通过令 $Q_{\langle\rangle} = \varphi(\langle\rangle)$，并对每个 $s \in \omega^{<\omega}$ 以及每个 $k \in \omega$，定义 $\langle Q_s : s \in \omega^{<\omega}\rangle$

$$Q_{s^\frown\langle k\rangle} = \varphi(\langle V_{s(0),s\restriction 0}, V_{s(1),s\restriction 1}, ..., V_{s(m-1),s\restriction(m-1)}, V_{k,s}\rangle),$$

其中 $m = dom(s)$。由此我们构造一个可数集族 $\{Q_s : s \in \omega^{<\omega}\}$。

现在证明 $\bigcup\{Q_s : s \in \omega^{<\omega}\} = X$。若可能，假设$\bigcup\{Q_s : s \in \omega^{<\omega}\} \neq X$，那么存在 $y \in X \setminus \{Q_s : s \in \omega^{<\omega}\}$。于是，对任意 $s \in \omega^{<\omega}$，都有 $y \notin Q_s$。对每个 $Q_n \in \{Q_s : s \in \omega^{<\omega}\}$，存在某个 k_n，使得$y \notin V_{k_n,\ n}$。于是 Alice 输掉了以下拟连通分支开闭博弈

$$\langle Q_0, V_{k_0,0}, Q_1, V_{k_1,1}, ..., Q_n, V_{k_n,n}, ...\rangle$$

在其中，Alice 使用策略 φ，因为$y \notin \bigcup_{n\in\omega} V_{k_n,\ n}$，这就产生了矛盾。

反向结论由推论 3.12 得出。 □

3.4. 确定性与 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$ 博弈

由两位参与者 Alice 和 Bob 进行的博弈 G，如果 Alice 在博弈 G 中有获胜策略，或者 Bob 在博弈 G 中有获胜策略，则称该博弈是确定的。否则，G 是不确定的。

可以观察到，对于任意可数空间，博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$ 都是确定的。但在一个弱 Rothberger 空间中，如果每个拟连通分支都是可数多个开闭集的交，且该空间有不可数多个拟连通分支，那么参与者 Alice 和 Bob 都没有获胜策略。因此，对于每个拟连通分支都是可数多个开闭集的交，且有不可数多个拟连通分支的弱 Rothberger 空间，博弈 $G_1(\mathcal{C}_\mathcal{O}, \mathcal{C}_\mathcal{O})$ 是不确定的。因此，每个不可数的零维弱 Rothberger 度量空间都是不确定的。

回忆一下，若一个不可数实数集 L 满足：对于每个贫集 M，$L \cap M$ 都是可数的，那么它就是一个卢津集。连续统假设蕴含卢津集的存在

。卢津集是这样一种空间的例子：博弈$G_1(\mathcal{C}_{\mathcal{O}}, \mathcal{C}_{\mathcal{O}})$ 的结果无法确定。

致谢。作者谨向审稿人致以谢意，感谢他们认真审阅稿件并提出宝贵意见。本研究作为乌拉尔数学中心开展的研究工作的一部分完成，并获得俄罗斯联邦科学与高等教育部的资助（协议编号：075-02-2023-913）。

参考文献

[1] E. Borel, 《零测集的分类》, 《法国数学会通报》47（1919年）, 97–125。[2] M. Bhardwaj 和 B. K. Tyagi, 《弱 Menger 与弱 Rothberger 博弈》, 已提交。[3]M. Bhardwaj，A.V. Osipov, 《Hurewicz 基覆盖性质的弱版本与 Hurewicz 零测度空间》, 《比利时数学会通报——Simon Stevin》29(1)（2022年）, 121–131。[4] M. Bhardwaj，A.V. Osipov, 《关于弱 Menger 性质与拓扑博弈的一些观察》, 《Filomat》36(15)（2022年）, 5289–5296。[5] M. Bhardwaj，A.V. Osipov, 《Hurewicz 基覆盖性质的星形版本与强零测度空间》, 《土耳其数学杂志》44(3)（2020年）, 1042–1053。[6] S. Clontz 和 J. Holshouser, 《有限信息策略与离散选择性》, 《拓扑学及其应用》265（2019年）, 106815。[7] S. Clontz, 《对偶选择博弈》, 《拓扑学及其应用》272（2020年）, 107056。[8] R. Engelking, 《一般拓扑学》, 修订增补版，Heldermann Verlag Berlin（1989年）。[9] F. Galvin, 《点开博弈的不确定性》, 《波兰科学院通报》26（1978年）, 445–449。[10] K.P. Hart，Jun-iti Nagata，J.E. Vaughan, 《一般拓扑学百科全书》, Elsevier Science，2003年，536页。（Jerzy Mioduszewski, d-21 连通性）。

.[11] W. Hurewicz, 《论博雷尔定理的一种推广》, 《数学杂志》24（1925年）, 401–421。[12] A.W. Miller 和 D.H. Fremlin, 《Hurewicz、Menger 与 Rothberger 的一些性质》, 《数学基础》129（1988年）, 17–33。[13] J. Pawlikowski, 《点开博弈的非确定集》, 《数学基础》144（1994年）, 279–285。[14] F. Rothberger, 《性质 C 的一种强化》, 《数学基础》30（1938年）, 50–55。[15] M. Scheepers, 《开覆盖的组合学（I）：拉姆齐理论》, 《拓扑学及其应用》69（1996年）, 31–62。[16] R. Telgarsky, 《由拓扑博弈定义的空间》, 《数学基础》88:3（1975年）, 193–223。