arXiv:2303.06491v2 [math.GT] 2 Jan 2024

纽结 Floer 同调中的连通和与有向系统

SUDIPTA GHOSH 和 IAN ZEMKE

Abstract. 我们证明了瞬子结 Floer 同调的若干基本性质。我们的论证依赖于缝 Floer 理论的一般性质，也适用于 Heegaard Floer 和单极 Floer 的情形；其中许多结果早已为人所知。我们的主要结果是瞬子结 Floer 同调的连通和公式。对这一结果的推广证明了瞬子结 Floer 同调负版本的定向 skein 精确三角。最后，我们推导出瞬子结 Floer 同调负版本的一种新模型，它表现为多项式环上的自由有限生成链复形，而非直接极限。这一构造对所有 Floer 理论而言都是新的。我们也在 Heegaard Floer 理论的背景下探讨了这些结果。

Contents

1. 引言1.1. 结果 1.2. $KHI^-(Y$的自由极限定义 $K)$1.3. 文章结构 2
1.4. 致谢 2. 缝 Floer 理论背景 2.1. 缝合 Heegaard Floer 同调 3
2.2. 缝合瞬子 Floer 同调 2.3. 缝合单极 Floer 同调 2.4. Floer 理论 4
中的接触把手映射 2.5. 关于 Heegaard Floer 接触 2-手柄映射 3. 5
结 Floer 同调中的有向系统背景 3.1. 旁路附加 3.2. 结 Floer 同调 5
直极限的构造 4. 传递系统背景 4.1. 传递系统 4.2. 射影传递系统 5
4.3. 极限与射影传递系统 4.4. 自然性与直接极限结 Floer 同调 5. 6
若干张量积 5.1. 关于 $\mathbb{F}[U]$5.2. 张量积与传递系统 6. 超立方体与广 7
义特征空间 6.1. 超立方体 6.2. 广义特征空间与超立方体 6.3. 特征 7
子空间函子 6.4. 同时特征空间 6.5. 比较特征空间 7. 直接极限 8
Heegaard 结 Floer 同调中的连通和 7.1. 概述 9
9
11
11
11
12
12
14
14
14
15
16
16
18
21
23
23
24
24

7.2. 分解迭代映射锥 26 7.3. 获得导出张量积 28 8. 瞬子与单极子背景下的连通和 30 8.1. 构造迭代映射锥 30 8.2. 分解圆盘 31 9. 分次 34 9.1. 分次背景 36 9.2. 定理 9.2 的证明概述 37 9.3. 分次与 $F_{n、m}$ 38 9.4. 分次与 $I_{n、m}$ 40 10. 定向 skein 精确三角 44 10.1. 瞬子链环同调上的 Alexander 分次 45 10.2. 定理 10.1 的证明 47 10.3. 分次 49 11. U-作用于连通和 50 11.1. 代数动机 51 11.2. U-作用于连通和 52 11.3. 定理 11.1 的证明 54 12. 关于旁路正合三角 56 13. 自由模型 59 13.1. 链环的自由模型 60 13.2. Floer 理论中的自由模型 60 参考文献 62

1. Introduction

本文研究一系列源自不同 Floer 理论的结不变量。Ozsv´ath 和 Szab´o [OS04] 定义了一套重要的结不变量，通常$\widehat{\ }$称为结 *Floer* 同调。这些不变量的形式为向量空间$HFK(Y,K)$以及一个 $\mathbb{F}[U]$-模$HFK^-(Y,K)$。本文取 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$或 $\mathbb{C}$。Kronheimer 和 Mrowka [KM10b]定义了结 Floer 同调的单极子版本和瞬子版本，我们分别记为

$$\widehat{KHM}(Y,K) \quad \text{and} \quad \widehat{KHI}(Y,K).$$

上述不变量是有限维向量空间。最近，Li [Li21]的工作将瞬子理论和单极理论扩展为负型不变量

$$KHI^-(Y,K) \quad \text{and} \quad KHM^-(Y,K).$$

它们具有有限生成模的形式，其定义在 $\mathbb{C}[U]$ 或 $\mathcal{R}[U]$上，其中 $\mathcal{R}$ 是 Novikov 环。

Li 的这一视角以 Etnyre、Vela-Vick 和 Zarev [EVVZ17]以及 Golla [Gol15], 的早期工作为基础。他们将 $\mathbb{F}[U]$-模 $HFK^-(Y,\ K)$ 描述为 $Y\backslash\nu(K)$ 在各种纵向斜率下的缝合不变量的直接极限。这些作者采用了 Honda、Kazez 和 Mati´c [HKM08] [HKM09] 关于 Juh´asz 的 Heegaard Floer 理论中缝合流形接触不变量的奠基性工作 [Juh06]。

通过在缝合瞬子 Floer 同调和单极 Floer 同调的框架中仿照这些构造，Li 定义了瞬子极限结 Floer 同调 $KHI^-(Y,\ K)$ 以及$KHM^-(Y,\ K)$，它们是 $\mathbb{C}[U]$ 或 $\mathcal{R}[U]$ 上的模，其中 $\mathcal{R}$ 是 Novikov 环。

有一个众所周知的猜想认为

$$\widehat{KHI}(Y,K) \cong \widehat{HFK}(Y,K)\otimes\mathbb{C} \quad \text{and} \quad KHI^-(Y,K) \cong HFK^-(Y,K)\otimes\mathbb{C}.$$

这是 Kronheimer 和 Mrowka 更一般猜想的类似结果 [KM10b，猜想 7。24] 认为

$$I^{\#}(Y) \cong \widehat{HF}(Y) \otimes \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

单极子 Floer 同调与 Heegaard Floer 同调之间的联系相对而言得到了更好的理解。Baldwin 和 Sivek [BS21] 在 Taubes [Tau10],Colin、Ghiggini 和 Honda [CGH10], [CGH12a], [CGH12b], [CGH12c] 的工作基础上证明了存在一个 $\mathcal{R}$-模的同构

$$\widehat{KHM}(Y, K; \mathcal{R}) \cong \widehat{HFK}(Y, K, \mathbb{Z}_2) \otimes \mathcal{R}, \tag{1.2}$$

其中， $\mathcal{R}$ 表示模 2 Novikov 环。

在本文中，我们证明了关于缝合纽结 Floer 同调和直接极限版本的一系列新性质。我们着重证明瞬子理论中的连通和公式，但还将证明若干其他结果，其中一些即使在 Heegaard Floer 情形下也是新的。我们的目标是给出适用于全部三种情形（瞬子、单极子和 Heegaard Floer）的统一证明。

1.1. 结果。本文的核心结果如下定理所述：

定理 1.1。设 K_1、K_2 分别是 *3*-流形 Y_1 和 Y_2 中的零同调结。则瞬子极限 *Floer* 同调 $KHI^-(Y_1\#Y_2, K_1\#K_2)$ 同构于如下导出张量积

$$KHI^-(Y_1, K_1) \,\widetilde{\otimes}_{\mathbb{C}[U]}\, KHI^-(Y_2, K_2)$$

作为一个 $\mathbb{C}[U]$-模。

注意，Heegaard Floer 理论中连通和公式的原始证明 [OS04] 利用了 $K_1\#K_2$ 的一个特殊 Heegaard 图的存在性。另一种策略是考虑与 $(Y_1, K_1) \sqcup (Y_2, K_2)$ 以及 $(Y_1\#Y_2, K_1\#K_2)$ 相关的裤形余边的协边映射，如 [Zem19] 中所述。这两种策略在缝合瞬子理论中均不可用。

定理 1.1 的证明包含两个主要要素。第一个是在缝合 Floer 理论中对分解曲面进行的一种新颖操作。第二个要素是一系列关于广义特征空间和过滤链复形的非常一般的结果，这些结果是进行缝合瞬子理论中的迭代映射锥构造所必需的。

我们回顾一下，迭代映射锥构造为 Floer 理论提供了一套非常通用的工具，可将链环 $L \subseteq Y$ 不同 Dehn 手术的 Floer 同调联系起来。该构造源于 Floer 最初为瞬子同调建立的 Dehn 手术正合三角 [Flo95] 。在 Heegaard Floer 理论中，Ozsv´ath 和 Szab´o [OS05] 证明了一个链环手术谱序列，这是正合三角推广到链环后的自然形式。许多作者已将这一构造推广到大多数其他 Floer 理论。参见 [KM11] [Blo11] [Sca15]。

上述工作在瞬子 Floer 同调中建立了迭代映射锥构造。然而，它们不足以用于缝合瞬子理论，因为缝合瞬子理论是通过对普通瞬子复形中若干算子取某些广义特征空间而构造的。在第6节中，我们描述了一个关于特征空间和滤过复形的非常一般的框架，该框架在缝合瞬子同调的背景下建立了迭代映射锥复形的适当版本。我们预计这将具有独立的研究价值。

此外，我们还使用 Heegaard 图，在 Heegaard Floer 理论的背景下阐释了我们的证明。在此过程中，我们还证明了 J. Rasmussen 的一个民间结果，该结果将用于接触 2-柄的 Honda-Kazez-Mati´c 映射与某些四维余 bordism 映射联系起来。见第2.5节。该猜想被 Golla [Gol15] 用于其直接极限纽结 Floer 同调的构造中。

我们的方法也可用于研究结同调理论中的 skein 正合三角。根据 Ozsv´ath 和 Szab´o [OS04, Theorem 10.2] 以及 Kronheimer 和 Mrowka [KM10a, Theorem 3.1]的工作，Heegaard、瞬子和单极子结 Floer 同调的帽版本已知满足定向 skein 关系。在 Heegaard Floer 同调中，Ozsv´ath 和 Szab´o [OS07,

Theorem 1.1] 证明了结 Floer 同调的负版本 $HFK^-(Y,\ K)$ 也满足 skein 精确三角。在瞬子理论中，此前负版本是否满足 skein 正合三角仍是一个未解问题 [GLW19, Question 1.20]。我们采用与证明连通和公式相似的方法，证明如下：

定理 1.2. 设 L_+、L_- 和 L_0 是如上所述的 Y 中的定向链环。若 L_+ 中指定交叉处相交的两股属于同一分支，则存在一个正合三角

$$\cdots KHI^-(L_+) \xrightarrow{f} KHI^-(L_-) \xrightarrow{g} KHI^-(L_0) \widetilde{\otimes}_{\mathbb{C}[U_1,U_2]} \mathbb{C}[U_1,U_2]/(U_1-U_2) \xrightarrow{h} KHI^-(L_+)\cdots.$$

若它们属于不同的分支，则存在一个正合三角

$$\cdots KHI^-(L_+) \xrightarrow{f} KHI^-(L_-) \xrightarrow{g} KHI^-(L_0) \otimes_{\mathbb{C}} W_s \xrightarrow{h} KHI^-(L_+)\cdots$$

其中 W_s 是由下式给出的分次模

$$W_s = \begin{cases} \mathbb{C}, & \textit{if } s=0,\ 1 \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

此外，f、g 和 h 保持 *Alexander* 分次。这里，我们赋予 $\mathbb{C}[U_1、\ U_2]$ 由设定 $A(1)=0$ 和 $A(U_1)=A(U_2)=-1$ 所确定的 *Alexander* 分次。

注意，我们可以赋予 $KHI^-(L_0) \widetilde{\otimes}_{\mathbb{C}[U_1,\ U_2]} \mathbb{C}[U_1,\ U_2]/(U_1-U_2)$ 一个 $\mathbb{C}[U]$ 的自然作用，令 U 通过 U_1（或 U_2）作用于 $\mathbb{C}[U_1,\ U_2]/(U_1-U_2)$。目前，我们只能在分次群的层面上证明定理 10.1。我们提出以下猜想：

猜想 1.3。*$KHI^-(L_0) \widetilde{\otimes}_{\mathbb{C}[U_1,U_2]}\mathbb{C}[U_1,U_2]/(U_1-U_2)$ 上存在自然的 $\mathbb{C}[U_1,\ldots,U_{\ell-1}]$-模结构，使得映射 f, g 和 h 是 $\mathbb{C}[U_1,\ldots,U_{\ell-1}]$-等变的。*

从代数角度来看，我们预期导出张量积上的模结构$KHI^-(L_0) \widetilde{\otimes}_{\mathbb{C}[U_1,U_2]} \mathbb{C}[U_1,U_2]/(U_1-U_2)$需要先为 A_∞上的$KHI^-(L_0)$赋予 $\mathbb{C}[U_1$-模结构 $U_2]$。我们注意到，定义一个 A_∞-模结构，实质上等价于将$KHI(L_0)$建模为 $\mathbb{C}[U_1$上的自由有限生成链复形 $U_2]$。我们在第13节提出这样一个自由有限生成链复形。我们预计，将我们的技术加以推广即可证明该模型满足猜想1.3 ，但为简洁起见，本文不作此尝试。

1.2. **KHI 的一种极限自由定义**$KHI^-(Y,\ K)$。 **</style}按照 Gol和 EVVZ的做法，用缝合流形定义极限结 Floer 同调时，是对结补空间的正旁路映射取直接极限。对于某些技术性论证，这种做法有时并不实用，因为所得的群并非某个链复形的同调，而是同调群的直接极限。我们对连通和公式的证明启发出一种新的 KHI**$^-(K)$ 模型，它是一个在 $\mathbb{C}[U]$ 上有限生成的自由链复形的同调，并且无需取直接极限。事实上，若 Γ_n 是 K的一个 n-框架经线，我们将映射锥复形$CKI^-(K,\ n)$定义为映射锥复形

$$\mathrm{Cone}\left(SFH(S^3\backslash\nu(K),\Gamma_n)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[U] \xrightarrow{\phi^-|\,\mathrm{id}-\phi^+|U} SFH(S^3\backslash\nu(K),\Gamma_{n+1})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[U] \right)$$

它是一个在 $\mathbb{C}[U]$ 上有限生成的自由链复形。

定理 *1.4*。 *</style}存在一个* $\mathbb{C}[U]$-模同构

$$H_*CKI^-(K,n) \cong KHI^-(K)$$

对于所有 $n\in\mathbb{Z}$。

我们注意到，定理 1.4 在 Heegaard Floer 情形下此前尚不为人所知。利用带边 Floer 理论 [LOT18], 我们在第 13.2 节证明，它在 Heegaard Floer 理论中同样成立，并将上述结果与 [EVVZ17]中的描述进行比较。

我们注意到，上述构造可以相当直接地推广，从而为3-流形中的链环给出一个自由有限生成链复形。我们将在第13.1节简要介绍这一构造。

1.3. **组织**。 在第 2 节中，我们回顾接触拼接映射，并将接触 2-手柄映射与四维手术映射联系起来。在第3 节中，我们简要回顾$SFH\,(M、\ \gamma)$旁路附加的定义，以及从直接极限视角出发的 $HFK^{-}(Y$ 的定义， $K)$。在第 4 节中，我们讨论与射影传递系统的直接极限相关的代数，以及结 Floer 同调直接极限的自然性。在第 5 节中，我们讨论本文中出现的若干张量积。在第7 节中，我们在 Heegaard Floer 理论的背景下描述连通和公式的证明。在第8 节中，我们证明瞬子理论中的连通和公式。在第9 节中，我们考虑分次。在第 10 节中，我们证明负型瞬子结 Floer 同调的 skein 精确三角。在第11 节中，我们证明连通和公式保持 $\mathbb{C}[U]$-模结构。在第 12 节中，我们应用这些技术计算旁路正合三角中的映射。

1.4. **致谢**。 作者谨向 John Baldwin、Zhenkun Li、Steven Sivek 和 Fan Ye 致谢，感谢他们指出文中的若干错误与疏漏，并就本文提出了许多有益的讨论和建议。第一作者感谢 John Baldwin 提出了促成本研究的问题。第一作者感谢 Zhenkun Li 提供了富有见地的讨论，帮助改进了第 9 节中的一些论证。本项目的大部分工作是在第一作者就读于路易斯安那州立大学研究生期间完成的，第一作者谨向其导师 David Shea Vela-Vick 和 Scott Baldridge 致谢，感谢他们的支持与鼓励。第一作者的研究由其导师 David Shea Vela-Vick 的 NSF Grant 1907654 资助。第二作者的研究由 NSF grant 2204375 资助。第一作者感谢马克斯·普朗克数学研究所在本项目的大部分研究期间接待了自己。

2. Background on sutured Floer theories

本节回顾 Juh´asz 的缝合 Floer 同调 [Juh06] ，以及 Kronheimer 和 Mrowka [KM10b]所定义的单极与瞬子 Floer 同调的对应理论。

我们首先回顾 Gabai 的缝合流形概念 [Gab83], ，该概念适用于缝合 Floer 同调的情形:

定义 2.1。 A 缝合流形 $(M,\ \gamma)$ 由一个紧致、有向的 3-流形 M 以及一个闭的嵌入 1-流形 $\gamma \subseteq \partial M$组成。记 $R(\gamma)$为 $\partial M \backslash \gamma$。此外，我们假设满足以下条件:

(1) M 没有闭分支。(2) $\pi_0(\gamma)$ 满射到 $\pi_0(\partial M)$。(3) $\partial M \backslash \gamma$ 的分支被划分为两个子流形，即 $R_+(\gamma)$ 和 $R_-(\gamma)$，使得

$$\partial R_+(\gamma) = \gamma \quad \text{and} \quad \partial R_-(\gamma) = -\gamma.$$

我们称 $(M,\ \gamma)$ 为平衡的，如果 $\chi(R_+(\gamma)) = \chi(R_-(\gamma))$。

2.1. **缝合 Heegaard Floer 同调**。现在我们简要回顾 Juh´asz 构造缝合 Heegaard Floer 同调的方法 [Juh06]。如果 $(\Sigma,\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$ 是平衡缝合流形 $(M,\ \gamma)$的 Heegaard 图，那么 Juh´asz 考虑两个环面

$$\mathbb{T}_\alpha := \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n \quad \text{and} \quad \mathbb{T}_\beta := \beta_1 \times \cdots \times \beta_n$$

在对称积 $\mathrm{Sym}^n(\Sigma)$ 内部。Juh´asz 将缝合链复形 $CF(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$定义为由交点 $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$生成的自由 $\mathbb{F}$-向量空间。$CF(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 上的微分计数 Maslov 指数为 1 的伪全纯圆盘。群 $SFH\,(M, \gamma)$ 定义为 $CF(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$的同调。

2.2. **缝合瞬子 Floer 同调**。本小节回顾 Kronheimer 和 Mrowka [KM10b] 给出的缝合瞬子 Floer 同调的定义。

设 $(Y,\ \alpha)$ 由一个闭定向三维流形 Y 和一个闭定向 1-流形 $\alpha \subseteq Y$组成，后者与某个嵌入曲面横截相交于奇数个点。我们将以下数据与这一对相关联：

- 一个厄米线丛 $w \to Y$，其 $c_1(w)$ 庞加莱对偶于 α；
- 一个 $U(2)$ 丛 $E \to Y$，配备一个同构 $\Theta\colon\ \Lambda^2 E \to w$。

瞬子 *Floer* 同调 $I_*(Y)_\alpha$ 是陈-西蒙斯泛函在 $\mathsf{ad}(E)$上的 $SO(3)$ 联络空间 $\mathcal{B} = \mathcal{C}/\mathcal{G}$ 上的莫尔斯同调，取模于行列式为 1 的规范变换。它是一个相对 $\mathbb{Z}/8$分次的 $\mathbb{C}$-模。

对于每个偶维同调类 $\Sigma \in H_d(Y)$，都存在一个算子

$$\mu(\Sigma) : I_*(Y)_\alpha \to I_{*+d-4}(Y)_\alpha.$$

该算子在 [KM10b，第 7 节中有描述。2]详细背景请参见 [DK97，第 5.1 节。2]

注2.2。算子 $\mu(\Sigma)$ 可以按以下意义进行局部化。我们可以从 $Y \times \mathbb{R}$内部删除 $\Sigma \times \{0\}$的一个邻域，从而得到一个从 $Y \sqcup (S^1 \times \Sigma)$到 Y的协边。这给出了一个从 $I_*(Y)_\alpha \otimes I_*(S^1 \times \Sigma)_\alpha$到 $I_*(Y)_\alpha$的映射F。如果 y是将协边映射应用于 $D^2 \times \Sigma$所得的像，那么 $\mu(\Sigma)\colon\ I_*(Y)_\alpha \to I_*(Y)_\alpha$ 等于将协边映射 F应用于 $I_*(Y)_\alpha \otimes \mu(\Sigma)(y)$所得的结果。参见 [KM10b，推论 7.2] 的证明。

定理 2.3 ([KM10b，推论 7.2])。假设 R 是 Y 中一个亏格为正且 $\#(\alpha \cap R)$ 为奇数的闭曲面。那么，算子 $\mu(R)$ 和 $\mu(pt)$ 在 $I_*(Y)_\alpha$上的同时特征值属于以下数对的一个子集。

$$(i^r 2k, (-1)^r 2)$$

对于 $0 \leqslant r \leqslant 3$和 $0 \leqslant k \leqslant g(R) - 1$，其中 $i = \sqrt{-1}$。

定义 2.4 ([KM10a，定义 7。3])。给定 Y，α，以及 R 如定理 2.3中所述，令

$$I_*(Y|R)_\alpha \subseteq I_*(Y)_\alpha$$

为 $(2g(R) - 2,\ 2)$-特征值 $(\mu(R),\ \mu(pt))$ 在 $I_*(Y)_\alpha$上的广义特征子空间。

定义 2.5 ([KM10b，第 7 节。4])。设 $(M,\ \gamma)$ 是一个平衡缝合流形。令 T为一个连通、紧致且定向的曲面，其亏格至少为 2，并且 ∂T 与 γ 具有相同的$\widetilde{\ }$分支数。若流形 M 可通过沿反向定向映射将 $\partial T \times [-1,\ 1] \subseteq T \times [-1,\ 1]$ 粘合到正则邻域 $A(\gamma) \subseteq \partial M$而得到，则称其为 $(M,\ \gamma)$ 的预闭合

$$h\colon A(\gamma) \to \partial T \times [-1, 1]$$

$\widetilde{\ }$满足 $h(\partial T \times \{\pm 1\}) \subseteq R_\pm(\gamma)$。边界 ∂M 有两个微分同胚分支，我们将其记为 R_+ 和 R_-。这里，R_+（分别是 R_-）是与 $R_+(\gamma)$（分别是$\widetilde{\ }R_-(\gamma)$）非平凡相交的分支。我们通过任意一个固定$\widetilde{\ }$点 $q \in T$ 的反向定向微分同胚，将 R_+ 与 R_- 粘合，得到一个流形 Y。我们将 $R_+ = R_-$ 在 Y中的像记为 R，将弧 $q \times [-1,1]$的像记为 α。我们称这对 (Y, R, α) 为 (M, γ)的一个闭包。R的亏格称为闭包 (Y, R)的亏格。注意，α 是一条简单闭曲线，它与 R在一点处横截相交，并且 $\alpha \cap \mathsf{int}(M) = \varnothing$

定义 2.6 节([KM10b，定义 7.10])。对于亏格至少为 2 的闭包 (Y, R, α)，定义

$$SHI(M, \gamma) \coloneqq I_*(Y|R)_\alpha$$

2.3. **缝合单极 Floer 同调**。在本小节中，我们简要回顾缝合单极子同调的定义，该定义同样由 Kronheimer 和 Mrowka 提出 [KM10b]。

定义 2.7 ([KM10b，定义 4.3])。对于亏格至少为 2 的闭包 $(Y,\ R)$，定义

$$SHM(M,\gamma) := \bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}(Y|R)} \widetilde{HM}(Y,\mathfrak{s}),$$

其中

$$\mathfrak{S}(Y|R) = \left\{\mathfrak{s}\in \mathrm{Spin}^c(Y)|\ c_1(\mathfrak{s})[R] = 2g(R)-2,\ \widetilde{HM}(Y,\mathfrak{s}) \neq 0\right\}.$$

2.4. **Floer 理论中的接触把手映射**。Giroux 引入了接触把手[Gir91，定义 5.5]。Baldwin 和 Sivek [BS16] 定义了瞬子和单极 Floer 理论中的接触把手映射，而 Juh´asz 和第二作者在 Heegaard Floer 理论中定义了平行映射 [JZ20]。Juh´asz 和第二作者的构造为 Honda、Kazez 和 Mati´c 的接触拼接映射提供了另一种描述 [HKM08]。

2.4.1. 接触 *1*-柄。设 D_+ 和 D_- 是 ∂M 中互不相交的嵌入圆盘，且每个圆盘都与 γ 相交于一条单独的真嵌入弧。我们将 $D^2\times[-1,\ 1]$ 视为一个标准接触 3-球。我们通过微分同胚将 $D^2\times[-1,\ 1]$ 粘合到 $(M,\ \gamma)$

$$D^2\times\{-1\}\to D_- \quad \text{and} \quad D^2\times\{1\}\to D_+$$

分别保持和反转定向，并将分界集与缝合线对应起来。然后，如图 2.1 所示将角磨圆。令 $(M',\ \gamma')$ 为所得的缝合流形。

在 Heegaard Floer 方面，若 $(\Sigma、\ \boldsymbol{\alpha}、\ \boldsymbol{\beta})$ 是 $(M、\ \gamma)$的 Heegaard 图，则通过将一条带粘合到 $(M'、\ \gamma')$ 其中接触 1-柄的两个足端附着于此处，我们得到 $\partial\Sigma$ 的 Heegaard 图。我们不添加新的 $\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\beta}$ 曲线；见图2.2。链复形上的映射是由 Heegaard 曲面包含所诱导的典范映射。我们也将此映射称为 C_{h_1}。更多细节请见[JZ20，第 3.3 节。2]。

在瞬子与单极 Floer 方面，Baldwin 和 Sivek [BS16] 构造了一个闭包$(Y,\ R)$ 它是 $(M、\ \gamma)$ 的闭包，同时也是 $(M'、\ \gamma')$的闭包。更多细节请见 [BS16，第 4 节。2] Baldwin 和 Sivek 在缝合单极子与瞬子理论中定义了接触1-手柄映射

$$C_{h_1} : SHI(M,\gamma)\to SHI(M',\gamma')$$

为恒等映射。

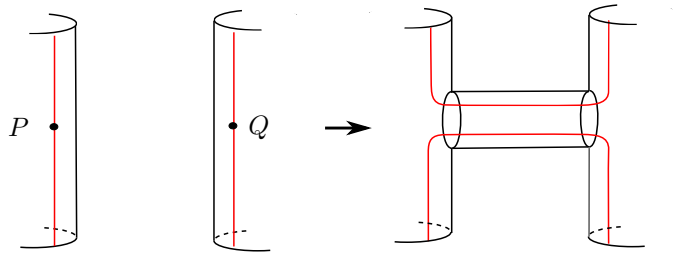


FIGURE 2.1. 左：缝合流形 $(M,\ \gamma)$ 其缝合线上有两个点 P 和 Q 。右：通过在 P 和 Q处连接一个接触 1-柄得到的流形 $(M',\ \gamma')$。

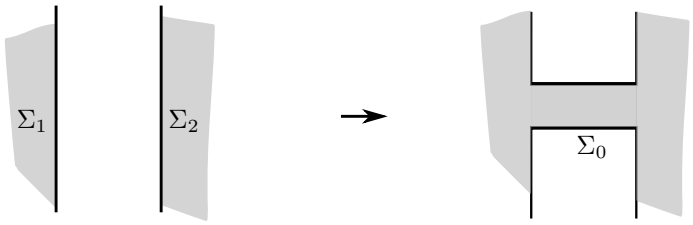


FIGURE 2.2. 接触把手映射定义中所用的图表

2.4.2. 接触 *2*-柄。设 μ 是 ∂M 中的一条嵌入曲线，它与 γ 横截相交于两点。令 $A(\mu)$ 为 μ 的一个环形邻域，它与 γ 相交于两条弧。我们通过一个反定向微分同胚将 $D^2 \times [-1,\ 1]$ 粘合到 $(M,\ \gamma)$

$$\partial D^2 \times [-1,1] \to A(\gamma).$$

我们通过添加一条弧来改变缝合线，使其同时位于 $D^2 \times \{-1\}$ 和 $D^2 \times \{1\}$上，并按照图 2.3中的方式将角磨圆。令 (M', γ') 为所得的缝合流形。

我们首先讨论 Heegaard Floer 一侧的接触 2-柄，这是 Juh´asz 和第二作者在 [JZ20, 第 3.3 节3] 中介绍的。设 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 是 (M, γ) 的一个可容许图。假设 $\mu \subseteq \partial M$ 是该 2-手柄的附着圈。我们假设 μ 与 γ 相交于两点，$p_1, p_2 \in M$。记作 $\lambda_\pm = \mu \cap R_\pm(\gamma)$。由于 $R_+(\gamma)$ 是通过沿 $\boldsymbol{\beta}$ 对 Σ 做手术得到的，我们可以将 λ_+ 看作 Σ 上避开 $\boldsymbol{\beta}$ 的一条嵌入弧。类似地，λ_- 可以看作 Σ 上避开 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一条曲线。我们在图 2.4 中构造一个 Heegaard 图 $(\Sigma', \boldsymbol{\alpha} \cup \alpha_0, \boldsymbol{\beta} \cup \beta_0)$，对应于 (M', γ')。曲面 Σ' 是通过在 p_1 和 p_2 处向 Σ 的边界添加一条带 B 得到的。曲线 α_0 是将曲线 λ_- 与带中的一条弧首尾相接得到的。曲线 β_0 是将曲线 λ_+ 与带中的一条弧首尾相接得到的。我们假设 α_0 和 β_0 在带中相交于一点（在带外也可能有其他交点）。我们定义接触 2-手柄映射

$$C_{h^2} : SFH(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \to SFH(\Sigma', \boldsymbol{\alpha} \cup \alpha_0, \boldsymbol{\beta} \cup \beta_0)$$

由公式

$$C_{h_2}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \times c,$$

其中，$c \in \alpha_0 \cap \beta_0$ 是带中的交点。更多详情请参见 [JZ20，第 3 节3] 。

现在让我们转向瞬子和单极 Floer 这一侧。Baldwin 和 Sivek[BS16，第 4 节2]将接触 2-手柄映射定义如下。设 μ' 是将 μ 稍微推进到 M 中所得到的纽结。设 $(M_0,\ \gamma_0)$ 是相对于边界框架沿 μ' 进行 0-手术后由 $(M,\ \gamma)$ 得到的流形。缝合流形 $(M_0,\ \gamma_0)$ 可以通过附加一个接触 1-柄从 $(M',\ \gamma')$ 得到。由于 μ' 包含在 M 的内部，我们可以通过沿 μ' 附加一个四维 2-把手，构造 $(M,\ \gamma)$ 与 $(M_0,\ \gamma_0)$ 的闭包之间的协边。Baldwin 和 Sivek 定义

$$C_{h_2} := {C_{h_1}}^{-1} \circ F_W : SFH(M, \gamma) \to SFH(M', \gamma'),$$

其中 F_W 是沿 μ' 附加 2-手柄的协边映射。

2.5. **关于 Heegaard Floer 接触 2-手柄映射**。本节证明，JZ20] 给出的 Heegaard Floer 接触 2-手柄映射定义，与 Baldwin 和 Sivek 在 [BS16 第 4 节中给出的定义2] （针对缝合单极子和瞬子 Floer 同调）等价。

这验证了 Honda–Kazez–Mati´c 对接触旁路附加所定义的粘合映射公式；该公式是 Rasmussen 提出的猜想（参见 [Gol15，定理 5.5]）。据我们所知，文献中尚未出现 Rasmussen 公式的证明。

引理 2.8。令 $\mu \subseteq \partial M$ 为接触 *2*-柄的附着圈，令 μ' 为将 μ 稍微推入 M 后得到的带框结，并赋予其与 ∂M平行的框架。记 $(M_0、\ \gamma_0)$

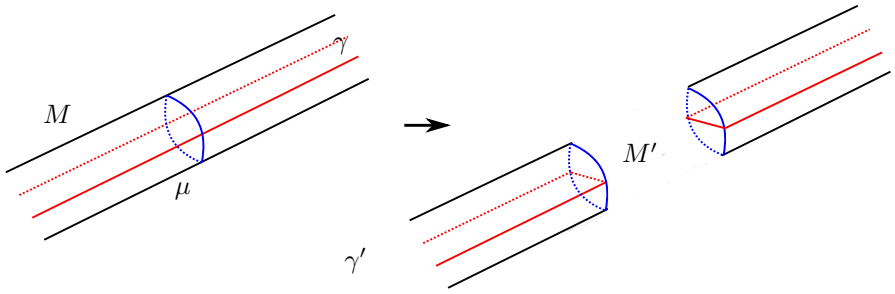


FIGURE 2.3. 左：缝合流形 $(M,\ \gamma)$ 以及曲线 $\mu \subseteq \partial M$，它与 γ 相交于两点。右：沿曲线 μ 进行接触 2-柄附着。在两幅图中，我们都将 M 和 M' 视为所示曲面的外部。

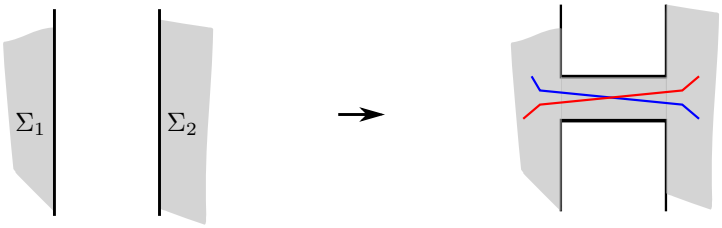


FIGURE 2.4. 用于定义接触 2-手柄映射的 Heegaard 图。左侧是 $(\Sigma,\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$，右侧是 $(\Sigma',\ \boldsymbol{\alpha} \cup \{\alpha_0\},\ \boldsymbol{\beta} \cup \{\beta_0\})$。

为 *sur* 化的缝合流形。存在一个乘积圆盘 $D \subseteq M_0$，其边界为 μ，通过用盖帽封闭 μ 与沿 μ' 附着的 *2*-手柄的核心。然后

$$C_{h^2} = (C_{h^1})^{-1} \circ F_W$$

其中， F_W 是针对 μ'的四维 *2*-手柄映射，如 [Juh16], 中所定义； $(C_{h^1})^{-1}$ 是与乘积圆盘 D对应的接触*1*-手柄映射的逆映射。

证明。 2-手柄映射 F_W 可以通过先对 Heegaard 图进行稳定化 $(\Sigma、\ \boldsymbol{\alpha}、\ \boldsymbol{\beta})$，然后如图 2.5所示计数全纯三角形来计算。在 [JZ20，第 2 节2], 的术语中，图 2.5 中的稳定化是 复合稳定化。自然映射 $\sigma(\mathbf{x}) =\mathbf{x} \times c_0$ 与根据 [JZ20，命题 22]的自然性得到的映射一致。这里， c_0 是图 2.5中所示的典范交点。

沿 μ'附着 2-手柄后， $(M_0$的 *Heegaard* 图 $\gamma_0)$ 与先进行接触2-手柄附着、再进行接触 1-柄附着所得的图表一致。接触1-手柄映射的逆映射对应于删除额外带。陈述中的等式 $C_{h^2} = (C_{h^1})^{-1} \circ F_W$ 可通过一个简单的模型三角形计数得到证明，如图 2.5所示。 □

3. BACKGROUND ON DIRECTED SYSTEMS IN KNOT FLOER HOMOLOGIES

本节回顾使用直接极限构造结 Floer 同调的方法。该构造最初由 Etnyre、Vela-Vick 和 Zarev [EVVZ17], 提出，Golla [Gol15],则独立地使用 Heegaard Floer 理论给出了这一构造。后来，Li [Li 21] 在单极子理论和瞬子理论中给出了类似构造，采用了 Baldwin 和 Sivek 的接触拼接映射 [BS16]。

3.1. **旁路附加**。 旁路附加由 Honda 提出 [Hon00]。设 α是 ∂M 中的一条嵌入弧，并且与 γ 相交于三点。沿 α 进行旁路移动会将 γ替换为一组新的缝合线 γ'，它们与 γ 的差异仅存在于 α的邻域内，如图 3.1所示。

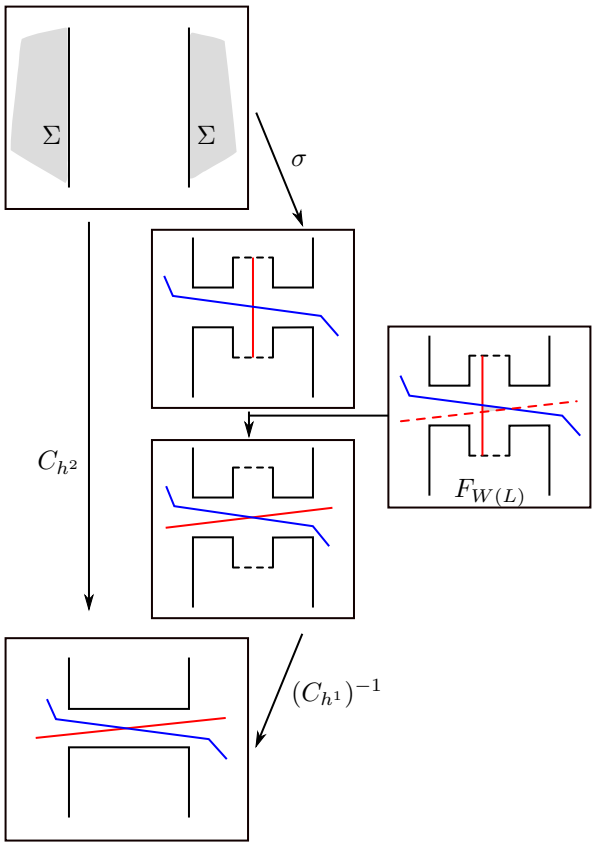


FIGURE 2.5. 将接触 2-柄映射 C_{h^2} 实现为以下复合：先进行复合稳定化 σ，再进行四维 2-把手映射 F_W，最后进行接触 1-手柄映射 $(C_{h^1})^{-1}$的逆映射。最右侧方框中标出了 2-手柄映射的一个全纯三角形。

令 (M', γ') 为所得的缝合流形。若 γ是接触结构 ξ在M上的分界集，则沿 α进行旁路移动，就是按照 Honda[Hon00]的定义附加一个实际的旁路。

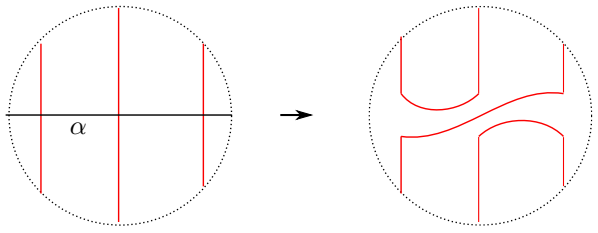


FIGURE 3.1. 沿着弧 $\alpha \subseteq \partial M$ 附加一个旁路，其中∂M 的定向指向外侧。

我们注意到，旁路附加等价于沿着以 α 的端点为中心、位于 ∂M中的圆盘附加一个接触 1-柄，然后沿着由 α 和所附加的 1-柄上的核心弧组成的圆附加一个接触 2-柄。关于这一论述，参见 Ozbagci [Ozb11，第 3]节。从拓扑上看，1-柄和 2-柄构成一个消去对，因此

3-流形的微分同胚类型不变。然而，接触结构发生了改变，缝合线 γ 被 γ'取代。

3.2. **直接极限结 Floer 同调的构造**。现在我们回顾将结 Floer 同调描述为直接极限 [EVVZ17] [Gol15] [Li21]。令 $SFH(S^3\backslash\nu(K),\Gamma_n)$ 表示带缝合线的结外部，其中缝合线 Γ_n 表示斜率为 $\lambda+n\mu$ 的两条方向相反的曲线，位于 $\partial Y(K)$上。这里， λ 是 Seifert 经线，而 μ 是纽结 K的子午线。上文所述的旁路附加诱导出接触拼接映射

$$\phi_n^+,\phi_n^-\colon SFH(S^3\backslash\nu(K),\Gamma_n)\to SFH(S^3\backslash\nu(K),\Gamma_{n+1}).$$

我们有时将 $\phi_n^\pm$缩写为 $\phi^\pm$。我们将复形 $SFH(S^3\backslash\nu(K),\Gamma_n)$ 视为在 $n\in\mathbb{N}$上的传递系统，其中过渡映射为正旁路映射 ϕ^+。负号结 Floer 复形 $HFK^-(K)$ 定义为关于这些映射的直接极限。

利用接触拼接映射的函子性，很容易看出 $\phi^+\circ\phi^-\simeq\phi^-\circ\phi^+$。特别地，可以在直接极限上定义作用 U，其定义为 ϕ^-。

此外，群 $HFK^-(Y,K)$ 具有一个 $\mathbb{Z}$-值 Alexander 分次，如[Li21]所述。相对于此分次， U 将分次平移 -1。更多细节请参见第 9.1 节。

4. Background on transitive systems

本节介绍传递系统的一些代数背景，重点讨论结 Floer 同调中出现的构造。

4.1. **传递系统**。 以下我们用 $\mathbf{k}$ 表示一个环。

定义 4.1。 设 $(I,\leqslant)$ 是一个有向偏序集。定义在 $(I,\leqslant)$ 上的一个传递系统 由一族$\mathbf{k}$-模 G_i以及一个指定的同态$\phi_{i\to j}$构成：当 $i\leqslant j$时， $G_i\to G_j$，并满足以下条件：

(1) $\phi_{i\to i}=\mathrm{id}_{G_i}$(2)
$\phi_{j\to k}\circ\phi_{i\to j}=\phi_{i\to k}$。

一个射影传递系统的$\mathbf{k}$-模由一组 G_i 和 $\phi_{i\to j}$组成，与上文相同，但我们只要求 $\phi_{i\to i}\doteq\mathrm{id}_{G_i}$ 和 $\phi_{j\to k}\circ\phi_{i\to j}=\phi_{i\to k}$，其中 $\doteq$ 表示在$\mathbf{k}$中乘以一个单位元后的相等。

如果 $(G_i,\ \phi_{i\to j})$ 是$\mathbf{k}$-模上的传递系统，其中， $(I\leqslant)$，则直接极限定义为以下$\mathbf{k}$-模

$$\varinjlim(G_i,\phi_{i\to j}):=\frac{\bigoplus_{i\in I}G_i}{\mathrm{Span}(x_i-\phi_{i\to j}(x_i):x_i\in G_i,i\leqslant j)}.\tag{4.1}$$

我们还将关注链复形的传递系统。定义4.1 在此情形下同样适用。我们要求态射 $\phi_{i\to j}$ 是链映射（在链级上指定，而不仅仅是差一个链同伦），并且关系 $\phi_{i\to i}=\mathrm{id}_{G_i}$ 和 $\phi_{j\to k}\circ\phi_{i\to j}=\phi_{i\to k}$ 必须在链级上成立（而不仅仅是相差一个链同伦）。极限本身是一个链复形。

我们回顾传递系统之间的如下态射概念：

定义 4.2. 设 $(I,\leqslant)$和 $(J,\leqslant)$是两个有向系统， $\mathscr{N}=(N_i,\phi_{i\to i'})$和$\mathscr{M}=(M_j,\psi_{j\to j'})$ 分别是定义在 I 和 J 上的两个由$\mathbf{k}$-模构成的传递系统。一个从 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{N}$的态射$\mathscr{F}$ 由以下数据组成：

(1) 一个单调不减函数 f: $I\to J$。(2) 对每个 $i\in I$，一个 $\mathbf{k}$-模态射 $F_{i,f(i)}$: $M_i\to N_{f(i)}$，使得若 $i\leqslant i'$ 则

$$F_{i',f(i')}\circ\phi_{i\to i'}=\psi_{f(i)\to f(i')}\circ F_{i,f(i)}.$$

4.2. **射影传递系统**。 我们需要传递系统概念的以下推广（参见 [BS15]）：

定义 4.3。 令 $(I, \leqslant)$ 为一个有向偏序集，并令 $\mathbf{k}$ 表示一个环。一个关于 $(I, \leqslant)$ 的射影传递系统 $\mathbf{k}$-模 由一族 $\mathbf{k}$-模 M_i以及指定的 $\mathbf{k}$-模同态 $\phi_{i\to j}$组成：当 $i \leqslant j$时， $M_i \to M_j$，并满足以下条件：

(1) $\phi_{i\to i} \doteq$恒等态射$_{M_i}$(2)

$\phi_{j\to k} \circ \phi_{i\to j} \doteq \phi_{i\to k}$。

在上述定义中， $\doteq$ 表示在乘以 $\mathbf{k}$ 中某个单位元的意义下相等。

类似地，我们将射影传递系统的 态射 定义为：将定义 =中的“4.2 ”替换为“$\doteq$”。

4.3. **极限与射影传递系统**。 给定一个关于 $(I, \leqslant)$ 的、性质足够良好的（具体含义见下一个定义）$\mathbf{k}$-模射影传递系统 $\mathscr{M}$，我们描述一种构造射影传递系统 $\mathscr{M}$的方法，该系统同样关于 $(I, \leqslant)$，并且具有每个态射 $\phi_{i\to j}$ 都是同构的性质。我们将 $\mathscr{M}$ 称为直接极限，并将产生 $\mathscr{M}$ 的过程称为校准 极限。

我们将范围限定在$\mathbf{k}$ 是一个域的情形，并且只考虑满足以下条件的射影传递系统：

定义 4.4. 设 $(I, \leqslant)$ 是一个有向预序集，且 $\mathscr{M} = (M_i, \phi_{i\to j})$ 是一个由$\mathbf{k}$-模构成的射影传递系统。若满足以下条件，我们称 $\mathscr{M}$ 弱非平凡： 每个 M_i 都不是零模，并且每个映射 $\phi_{i\to j}$: $M_i \to M_j$ 都非零。

在实际应用中，只需考虑存在某个非空子集 $J \subseteq I$ 的情形，其中该子集向上封闭，且 $\mathscr{M}|_J$ 是弱非平凡的。

若固定 $i_0 \in I$，令

$$U(i_0) = \{i \in I : j \geqslant i_0\}.$$

现在我们按如下方式在有向集 $(U(i_0), \leqslant)$ 上定义一个真正的传递系统 $\mathscr{M}_{(i_0)} = (M_i, \psi_{j\to k})$。群 M_i 与 $\mathscr{M}$ 中的相同（但限制在 $j \in U(i_0)$ 上）。对所有 $j \in U(i_0)$，我们定义 $\psi_{i_0\to j} = \phi_{i_0\to j}$。对于任意满足 $j \leqslant k$ 的 $j, k \in U(i_0)$，我们将 $\psi_{j\to k}$ 定义为 $\alpha \cdot \phi_{j\to k}$，其中 $\alpha \in \mathbf{k}^\times$ 是使下列图表可交换的唯一元素：

$$\begin{array}{ccc} & & M_{i_0} & & \\ & \swarrow^{\phi_{i_0\to j}} & & \searrow^{\phi_{i_0\to k}} & \\ M_j & & \xrightarrow{\alpha\cdot\phi_{j\to k}} & & M_k \end{array}$$

显然，这一构造给出了一个关于 $\mathbf{k}$ 的真正的传递系统。我们将这些态射视为来自 $\mathscr{M}$ 的态射的“校准”版本。

记作 $\hat{M}_{i_0}$ 表示通常意义下的极限。

若有 $i_0, j_0 \in I$ 和 $i_0 \leqslant j_0$，现在定义一个映射

$$\hat{\theta}_{i_0\to j_0} : \hat{M}_{i_0} \to \hat{M}_{j_0},$$

如下。首先，如果 $m \in U(i_0)$和 $n \in U(j_0)$，我们定义映射 $\theta^{i_0}{}_{m\to n}^{j_0}$： $M_m \to M_n$，令$\theta^{i_0}{}_{m\to n}^{j_0} = \alpha \cdot \phi_{m\to n}$，其中 $\alpha \in \mathbf{k}^\times$ 是使下图交换的唯一单位元：

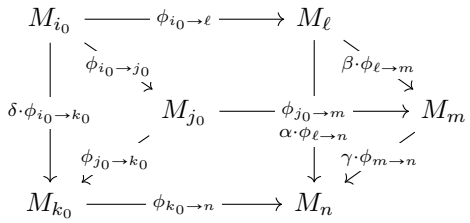
$$\begin{array}{ccc} M_{i_0} & \xrightarrow{\phi_{i_0\to m}} & M_m \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{i_0\to j_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\cdot\phi_{m\to n}} \\ M_{j_0} & \xrightarrow{\phi_{j_0\to n}} & M_n \end{array}$$

映射 $\theta^{i_0,\,j_0}_{m\to n}$ 在直接极限上诱导出一个映射，我们将其记为 $\hat{}\,\theta_{i_0\to j_0}$。

Lemma 4.5. 设 $\mathscr{M}$ 是一个弱非平凡的射影传递系统。

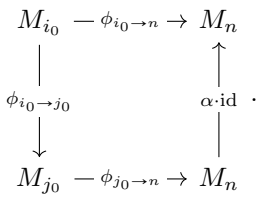
$\hat{}$ $\hat{}$ (1) 映射 $\theta_{i_0\to j_0}$ 使 $(M_{i_0})_{i_0\in I}$ 成为一个射影传递系统。$\hat{}$ (2) 每个 $\theta_{i_0\to j_0}$ 都是 $\mathbf{k}$-模的同构。

Proof. 第一个断言通过对下图进行图表追踪得到 :



其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\mathbf{k}^\times$。我们假设除后方面外，所有面都具有交换性。通过简单的图表追踪 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 可知后方面也具有交换性，从而得到 $\theta_{j_0\to k_0}\circ\theta_{i_0\to j_0}=\delta\cdot\theta_{i_0\to k_0}$。

下面考虑第二个断言。我们按如下方式构造一个反向的映射 $\hat{}\tau_{j_0\to i_0}$。映射 $\hat{}\tau_{j_0\to i_0}$ 定义在 M_n 上，对于 $n\geqslant j_0$，其取值为 $\alpha\cdot\mathrm{id}_{M_n}$，其中 $\alpha\in\mathbf{k}^\times$ 是使下图交换的唯一元素:



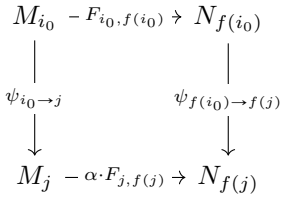
$\hat{}$ 简单地进行图表追踪可知，$\hat{}\tau_{j_0\to i_0}\circ\theta_{i_0\to j_0}$ 是直接极限上的映射，它将 $\mathrm{an}x\in M_n$ 映到 $\phi_{n\to m}(x)$，其中某个 $m\geqslant n$ 和 $m\geqslant j_0$ 满足条件（m 的选择可能取决于 n；但 $\hat{}$ 所诱导的元素 $\phi_{n\to m}(x)$ 与 m无关）。特别地，$\hat{}\tau_{j_0\to i_0}\circ\theta_{i_0\to j_0}$ 是直接极限上的恒等映射。□

注 4.6。上述构造同样适用于 $\mathscr{M}$ 是一个由链复形构成的射影传递系统的情形。仿照$\mathbf{k}$-模的情形构造极限，可得到一个由链复形构成的直接极限射影传递系统，其中每个态射都是链同构。

请注意，只要将范围限制为每个 $F_{i,\ f(i)}$ 都非零的态射，上述校准操作也适用于态射层面。事实上，若 $\mathscr{F}=(f,\ F_{i,\ f(i)})$ 是射影传递系统之间的态射，我们就可以定义一个真正的传递系统态射

$$\mathscr{F}_{(i_0)}=(f,F^{(i_0)}_{i,f(i)})\colon\mathscr{M}_{(i_0)}\to\mathscr{N}_{(f(i_0))}$$

如下定义 $F^{(i_0)}_{i_0,\ f(i_0)}=F_{i_0,\ f(i_0)}$。对于 $j\geqslant i_0$，我们设 $F^{(i_0)}_{j,\ f(j)}=\alpha\cdot F_{j,\ f(j)}$ 其中 $\alpha\in\mathbf{k}^\times$ 是使下图交换的唯一单位元



4.4. 自然性与结 Floer 同调直极限。本节将上一节的形式体系应用于缝合与单极子极限同调。我们回顾一下，这些理论是通过射影传递系统来定义的。以下内容基于 Baldwin 和 Sivek [BS15] 关于缝合单极子同调与瞬子同调的自然性结果：

命题 4.7。 按照第 4.3节的意义取极限，我们可以将 $KHI^-(K)$ 视为定义在 $\mathbb{N}$ 上的真正的传递系统的极限，该系统由 $\mathbb{C}$-向量空间构成。在 $KHI^-(K)$上有一个 U 的作用，其定义良好到相差一个单位元的倍数。过渡映射与 U 的作用可交换，但相差一个整体的单位元倍数。

我们注意到以下基本引理：

引理 4.8。 设 M 是 $\mathbf{k}[U_1,\dots,U_r]$ 上的一个模，其中 $\mathbf{k}$ 是一个域。假设它具有相对 r-分量 *Alexander* 分次，满足 $A_i(U_j) = -\delta_{i,j}$，其中 $\delta_{i,j}$ 是克罗内克 δ 函数。令 $\alpha_1,\dots,\alpha_r \in \mathbf{k}^\times$，并令 $\widetilde{M}$ 为通过令 U_i 按 $\alpha_i U_i$ 作用而得到的 $\mathbf{k}[U_1,\dots,U_r]$ 模。则 M 和 M 作为 $\mathbf{k}[U_1,\dots,U_r]$-模同构。

证明。我们通过以下公式定义一个从 M 到 M 的映射 ϕ

$$\phi(\mathbf{x}) = \alpha_1^{-A_1(\mathbf{x})} \cdots \alpha_r^{-A_r(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{x}.$$

由于 U_i 具有 Alexander 分次 $-\delta_{i,\,j}$ 不难验证，ϕ 与 $\mathbf{k}[U_1,\dots,U_r]$ 的作用可交换。□

注 4.9。若 M 不是分次的，上述引理便不成立。例如，考虑 $M = \mathbb{C}[U]/(U^n - 1)$。此时 U^n 的作用为 1，而 $(\alpha U)^n$ 的作用为 α^n，且可以令其不等于 1。特别地，$U' = (\alpha U)$ 确定了不同的模结构。

由于 U 在给定分次 -1 下是缝合线瞬子同调和单极子同调，我们得到以下推论：

推论 4.10。 $KHI^-(K)$ 的分次 $\mathbb{C}[U]$-同构类是良定义的。

5. Several tensor products

在本节中，我们回顾 $\mathbb{F}[U]$-模的导出张量积，以及证明连通和公式时出现的直接极限的张量积。

5.1. 在 $\mathbb{F}[U]$ 上的导出张量积。设 $\mathbb{F}$ 是一个域，M_1 和 M_2 是多项式环 $\mathbb{F}[U]$ 上的两个有限生成模。现在我们讨论 M_1 和 M_2 的导出张量积。为了定义导出张量积，引入两个 U 变量会很有帮助，并将 M_1 视为 $\mathbb{F}[U_1]$ 上的模，将 M_2 视为 $\mathbb{F}[U_2]$ 上的模。M_1 和 M_2 的导出张量积是以下链复形的同调

$$M_1 \,\widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]}\, M_2 := H_*\left(M_1 \otimes_{\mathbb{F}} M_2[1] \xrightarrow{U_1|1-1|U_2} M_1 \otimes_{\mathbb{F}} M_2 \right).$$

注意，$M_1 \,\widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]}\, M_2$ 是 $\mathbb{F}[U_1,U_2]$ 上的模，但很容易看出，U_1 和 U_2 在同调上的作用相同，因此我们将同调视为 $\mathbb{F}[U]$-模，其中 U 通过 U_1 或 U_2 作用。这里，$[1]$ 表示同调分次的平移；如果 M_1 和 M_2 带有分次（若它们不带分次，则忽略分次平移）。此外，我们遵循这样的约定：$M[1]$ 表示 $M \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_1$，其中 $\mathbb{F}_1$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个副本，支撑在同调分次 1 上。

下面的引理是初等且众所周知的，不过为完整起见，我们仍给出一个初等证明：

引理 5.1。 设 C_1 和 C_2 是定义在 $\mathbb{F}[U]$ 上的两个有限生成自由链复形。那么以下所有模均同构：

(1) $H_*(C_1 \otimes_{\mathbb{F}[U]} C_2)$.

(2) $H_*(C_1 \widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]} C_2)$.
(3) $H_*(H_*(C_1) \widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]} H_*(C_2))$.

证明。 我们首先证明（1）和（2）同构。为此，注意到存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow C_1 \otimes_{\mathbb{F}} C_2 \xrightarrow{U_1|1-1|U_2} C_1 \otimes_{\mathbb{F}} C_2 \xrightarrow{\Pi} C_1 \otimes_{\mathbb{F}[U]} C_2 \longrightarrow 0$$

这里 Π 是典范投影映射。可以如下定义上述正合序列的分裂（非典范地）。存在一个分裂

$$s\colon C_1 \otimes_{\mathbb{F}[U]} C_2 \to C_1 \otimes_{\mathbb{F}} C_2$$

由 $s(U^i\mathbf{x}|\mathbf{y}) = U_1^i\mathbf{x}|\mathbf{y}$给出。存在一个映射 $U_1|1-1|U_2$的分裂 p，其形式为

$$p(U_1^i\mathbf{x}|U_2^j\mathbf{y}) = U_1^i(U_1^{j-1} + U_1^{j-1}U_2 + \cdots + U_1U_2^{j-2} + U_2^{j-1})(\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

容易验证 $p \circ s = 0$。我们可以显式写出$C_1 \otimes_{\mathbb{F}[U]} C_2$ 与 $C_1 \widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]} C_2$之间的同伦等价。一个映射 Φ: $C_1 \widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]} C_2 \to C_1 \otimes_{\mathbb{F}[U]} C_2$ 由 Π 给出（作用于映射锥的余域）。反方向的映射 Ψ 由 $\Psi = (p\partial s,\ s)$给出。容易验证 $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ 和 $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id} + [\partial,\ H]$，其中 H是映射 p（视为映射锥的自同态）。注意， Φ 和 Ψ 也是 $\mathbb{F}[U_1]$-模的映射。

现在我们证明（2）与（3）同构。为此，首先注意，根据主理想整环上有限生成自由链复形的分类定理，复形 C_1 可分解为若干个一步和两步复形之和。特别地， C_1 可分解为 $C_1 \cong (X \xrightarrow{F} X')$，其中 X和 X' 是 $\mathbb{F}[U_1]$ 上的自由有限生成模（内部微分为零），并且F 是某个 $\mathbb{F}[U_1]$-等变映射。特别地，复形 C_1 存在一个拟同构 ϕ映到其同调上（对应于投影到 $X'/F(X)$）。完全类似地，存在一个拟同构 ψ: $C_2 \to H_*(C_2)$. 因此我们得到一个 $\mathbb{F}[U_1,\ U_2]$-等变链映射

$$\phi|\psi\colon C_1 \widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]} C_2 \to H_*(C_1) \widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]} H_*(C_2),$$

我们断言它是一个拟同构。为证明这一点，注意导出张量积有一个两步滤过，对应于 $U_1|1-1|U_2$ 方向。该滤过的关联分次复形是两份 $C_1 \otimes_{\mathbb{F}} C_2$ 或两份 $H_*(C_1) \otimes_{\mathbb{F}} H_*(C_2)$。映射 $\phi|\psi$显然在关联分次复形的同调上诱导出一个同构，因此根据谱序列论证，它在原复形的同调上也诱导出一个同构。□

关于上述导出张量积模型，还有另一种视角，即使用 Lipshitz、Ozsv´ath 和 Thurston [LOT18] [LOT15] 的类型-D 与 A 模语言。也就是说，我们可以定义一个类型-DD 双模 ${}^{\mathbb{F}[U]}\Lambda^{\mathbb{F}[U]}$，其中 $\Lambda = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(1,\ \theta)$ 并且

$$\delta^{1,1}(1) = U \otimes \theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta \otimes U \quad \text{and} \quad \delta^{1,1}(\theta) = 0.$$

Then

$$M_{F[U]} \widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]} N = M_{\mathbb{F}[U]} \boxtimes^{\mathbb{F}[U]} \Lambda^{\mathbb{F}[U]} \boxtimes_{\mathbb{F}[U]} N. \tag{5.1}$$

5.2. 张量积与传递系统。本节将证明一个关于张量积和传递系统的结果，该结果将用于主定理的证明。首先，设 $\mathscr{G} = (G_n,\ \phi_n)$ 和 $\mathscr{H} = (H_n,\ \psi_n)$ 是群的传递系统。给定 n 和 m，我们将考虑由下图表给出的链复形

$$\mathscr{S}_{n,m} := \left(\begin{array}{ccc} G_{n-1} \otimes H_m & & G_n \otimes H_{m-1} \\ & {\scriptstyle \phi_{n-1}|\,\mathrm{id}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{id}\,|\psi_{m-1}} & \\ & G_n \otimes H_m & \end{array} \right)$$

若 G 是一个 $\mathbb{Z}$-分次群，且 $\delta \in \mathbb{Z}$，则记 $G^{>\delta}$ 为分次大于 δ 的子群。

引理 5.2。 设 $(G_n、\ \phi_n)$ 和 $(H_n、\ \psi_n)$ 是传递系统，使得 G_n 和 H_n 具有相对于其而言 ϕ_n 和 ψ_n 保持分次的 $\mathbb{Z}$- 分次，并且对于每个 n，G_n 和 H_n 都有上界。此外，设对每个 $\delta \in \mathbb{Z}$，存在一个 N，使得若 $n、\ m > N$，则映射 $\psi_m\colon\ H_m^{>\delta} \to H_{m+1}^{>\delta}$ 和 $\phi_n\colon\ G_n^{>\delta} \to G_{n+1}^{>\delta}$ 是同构，则

$$H_*(\mathscr{S}_{n,m})^{>\delta} \cong (G_n \otimes H_m)^{>\delta}$$

对于所有充分大的 n 和 m。

证明。 假设 ϕ_n 和 ψ_n 在较高分次上是同构，且 G_n 和H_m 有上界，则映射 $\phi|\psi\colon \mathscr{S}_{n,\ m}^{>\delta} \to \mathscr{S}_{n+1,\ m+1}^{>\delta}$ 也是同构，前提是 n 和 m 充分大。

在这种情况下，我们可以写出$\mathscr{S}_{n,\ m}^{>\delta}$ 与 $(G_m \otimes H_n)^{>\delta}$之间的链同伦等价（其中我们令后一个复形的微分为零）。为此，我们定义如下映射：

$$\begin{aligned}\Psi_{n,m}&\colon G_n \otimes H_m \to \mathscr{S}_{n,m}\\ \Phi_{n,m}&\colon \mathscr{S}_{n,m} \to G_n \otimes H_m\\ J_{n,m}&\colon \mathscr{S}_{n,m} \to \mathscr{S}_{n+1,m+1}\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1,m+1} \circ \Psi_{n,m} &= \phi_n|\psi_m\\ \Psi_{n+1,m+1} \circ \Phi_{n,m} &= \phi|\psi + [\partial, J_{n,m}].\end{aligned} \tag{5.2}$$

映射 $\Phi_{n、\ m}$、 $\Psi_{n、\ m}$ 和 $J_{n、\ m}$ 如图5.1所示。（5.2）中的关系很容易验证，如图 5.1所示。

由于 $\phi_m|\psi_n$ 和 $\phi|\psi$ 是复形的 δ截断上的向量空间同构，证明完成。□

6. Hypercubes and generalized eigenspaces

缝合瞬子理论被定义为算子 $\mu(R)$在同调群 $I_*(Y)$中的一个广义特征空间。由于 $\mu(R)$ 与微分交换，链群 $CI_*(Y)$ 具有一个由微分保持的广义特征空间分解。本节将证明关于广义特征空间和超立方体的若干代数结果。本节的工作为在缝合瞬子背景下迭代映射锥奠定代数基础（因为这些映射锥使用特征空间定义）。

6.1. 超立方体。

我们将使用 Manolescu 和 Ozsv´ath 关于链复形超立方体的代数形式体系 [MO10, 第 5]节来表述我们的结果。定义

$$\mathbb{E}_n := \{0,1\}^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

约定 $\mathbb{E}_0 = \{0\}$。

若 $\epsilon,\ \epsilon' \in \mathbb{E}_n$，则当不等式对 ϵ 的每个坐标以及 ϵ' 都成立时，我们记作 $\epsilon \leqslant \epsilon'$。当 $\epsilon \leqslant \epsilon'$ 且至少有一个坐标满足严格不等式时，我们记作 $\epsilon < \epsilon'$。

定义 6.1。 一个n维链复形超立方体 $(C_\epsilon,\ D_{\epsilon,\ \epsilon'})_{\epsilon\in\mathbb{E}_n}$ 由以下部分组成：

(1) 对每个 $\epsilon \in \mathbb{E}_n$，都有一个群 C_ϵ。(2) 对于每一对指标 $\epsilon,\ \epsilon' \in \mathbb{E}_n$，使得 $\epsilon \leqslant \epsilon'$，有一个线性映射

$$D_{\epsilon,\epsilon'}\colon C_\epsilon \to C'_\epsilon.$$

Furt此外，我们假设只要 $\epsilon \leqslant \epsilon'$，以下相容性条件成立：

$$\sum_{\substack{\varepsilon'\in\mathbb{E}_n\\ \varepsilon\leqslant\varepsilon'\leqslant\varepsilon''}} D_{\varepsilon',\varepsilon''} \circ D_{\varepsilon,\varepsilon'} = 0 \tag{6.1}$$

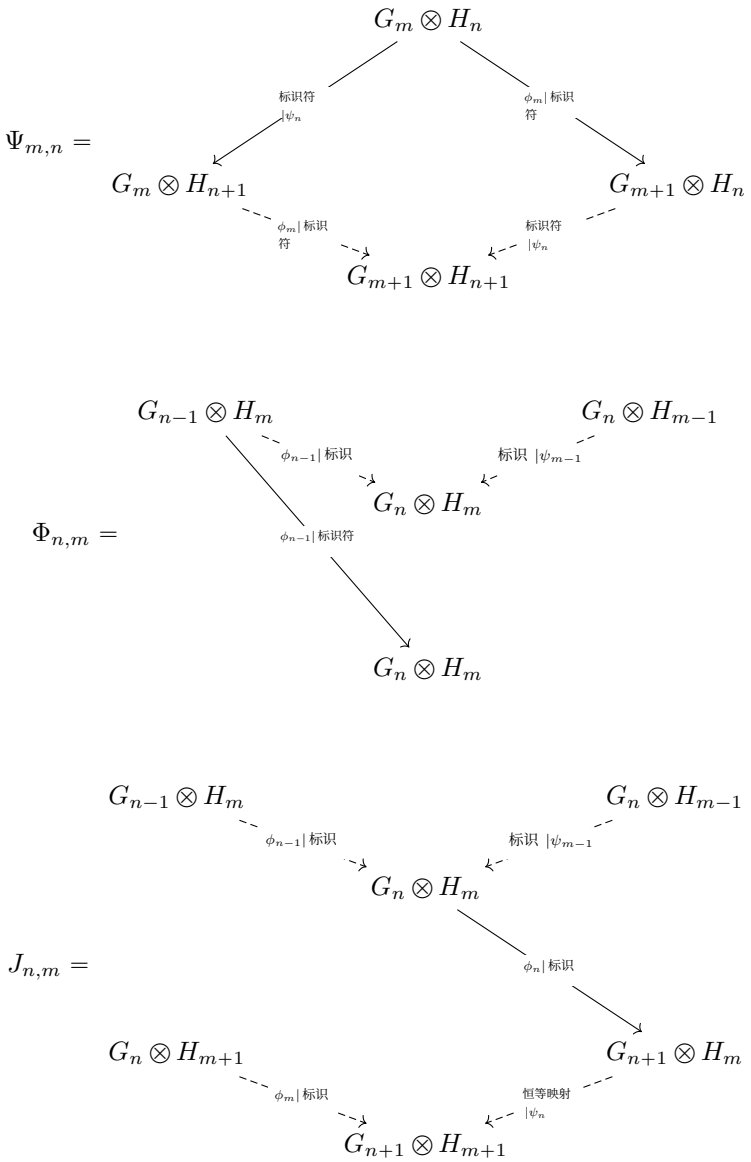


FIGURE 5.1. 态射$\Phi_{n,\,m}$、 $\Psi_{n,\,m}$ 和 $J_{n,\,m}$ （以实线箭头表示）。虚线箭头表示 $\mathscr{K}$ 的内部微分。

当然，如果我们赋予 $\bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n} C_\varepsilon$ 微分 $D := \sum_{\varepsilon\leqslant\varepsilon'} D_{\varepsilon,\,\varepsilon'}$，那么方程（6.1）等价于 $D^2 = 0$。

若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是 n 维超立方体，则超立方体的一个态射 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 由一族映射 $F_{\varepsilon,\,\varepsilon'}\colon C_\varepsilon \to C_{\varepsilon'}$ 构成，其中指标遍历 $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$。空间 $\mathbf{Hom}(\mathcal{C},\ \mathcal{C}')$ 是一个链复形，其微分为

$$\partial(F) = F\circ D + (-1)^{|F|+1} D'\circ F,$$

这里我们将 F 与其全映射 $\sum_{\varepsilon\leqslant\varepsilon'} F_{\varepsilon,\,\varepsilon'}$ 混为一谈。另外，$|F|$ 表示 F 的分次（注意，定义上述公式只需一个 $\mathbb{Z}_2$ 分次）。

我们可以构造映射锥图表 $\mathbf{Cone}(F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}')$，将其视为一个维数为 $n+1$ 的立方体，其全空间为 $\mathcal{C}\oplus T^{|F|+1}\mathcal{C}'$，其中 T 表示链复形的平移函子，它

将分次平移 1，并将微分 D' 改为 $-D'$； $T^{|F|+1}$ 表示它的 $(|F|+1)$ 次迭代。我们赋予这个复形如下微分

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ F & (-1)^{|F|+1}D' \end{pmatrix}.$$

下面是一个关于超立方体同伦等价的重要且广为人知的引理：

引理 6.2。 设 $\mathcal{A} = (A_\varepsilon、 d_{\varepsilon,\ \varepsilon'})_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}$ 以及 $\mathcal{B} = (B_\varepsilon、 \delta_{\varepsilon,\ \varepsilon'})_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}$ 是链复形的超立方体，其中每个 A_ε 和 B_ε 都是有限维 $\mathbb{C}$ 向量空间。若 $F\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是满足 $\partial(F)=0$ 的超立方体态射，并且对于每个 ε，每个 $F_{\varepsilon,\ \varepsilon}$ 都是拟同构，则 F 是超立方体的同伦等价。

证明。 由于每个 A_ε 和 B_ε 都是域 $\mathbb{C}$上的有限维链复形，利用超立方体的同调扰动引理（参见 [HHSZ22，第 2.7]节），我们可以假设每个 A_ε 和B_ε 的内部微分 $d_{\varepsilon,\ \varepsilon}$ 以及 $\delta_{\varepsilon,\ \varepsilon}$均为零。特别地，我们可以假设映射 $F_{\varepsilon,\ \varepsilon}$都是同构。这意味着全空间映射 $F=\sum_{\varepsilon\leqslant\varepsilon'}F_{\varepsilon,\ \varepsilon'}$ 也是链同构。逆映射 F^{-1} 是 $\mathbb{E}_n$-过滤的，因此是超立方体态射。证明完毕。 □

6.2. **广义特征空间与超立方体**。 本节介绍一个关于超立方体算子的特征空间的重要结果。该结果涉及一个配备算子 $\mu\colon\ C\to C$（即超立方体的一个态射）的超立方体 $\mathcal{C}=(C_\varepsilon,\ d_{\varepsilon,\ \varepsilon'})$。我们将 $\mathcal{C}$ 的全空间 $\bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}C_\varepsilon$ 上算子 μ 的广义 λ-特征空间记为 $e^\lambda(\mathcal{C},\ \mu)$。

一般而言，空间 $e^\lambda(\mathcal{C},\ \mu)$ 不会是链复形超立方体，而只是一个由立方体 $\mathbb{E}_n$ 过滤的链复形（其中，如果不等式对所有坐标均成立，我们将 $\varepsilon,\ \varepsilon'\in\mathbb{E}_n$ 记为 $\varepsilon\leqslant\varepsilon'$）。本节将证明， $e^\lambda(\mathcal{C},\ \mu)$ 总是与一个链复形超立方体链同构，我们将其记为

$$E^\lambda(\mathcal{C},\mu)=(E^\lambda_\varepsilon,\delta_{\varepsilon,\varepsilon'})_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n},\quad \text{where}\quad E^\lambda_\varepsilon=e^\lambda(C_\varepsilon,\mu_{\varepsilon,\varepsilon}).$$

复形 $E^\lambda(\mathcal{C},\ \mu)$ 在链同构意义下是良定义的。此外，我们还将分析这一构造的一些其他性质。

首先，回顾一下， $\mathbb{E}_n$ 上的过滤向量空间由一个向量空间 Y 以及满足以下条件的子空间 $Y_{\geqslant\varepsilon}\subseteq Y$组成：若 $\varepsilon'\geqslant\varepsilon$，则

$$Y_{\geqslant\varepsilon'}\subseteq Y_{\geqslant\varepsilon}.$$

我们将 $Y_{>\varepsilon}$ 记作 $\sum_{\varepsilon'>\varepsilon}Y_{\varepsilon'}$。给定一个由 $\mathbb{E}_n$滤过的向量空间 Y，回顾一下，其关联分次空间定义为

$$\mathrm{gr}(Y):=\bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}Y_{\geqslant\varepsilon}/Y_{>\varepsilon}.$$

链复形超立方体 $\mathcal{C}=(C_\varepsilon,D_{\varepsilon,\varepsilon'})$ 自然确定了一个在 $\mathbb{E}_n$上的过滤链复形 $\mathcal{C}$，其中我们令

$$C_{\geqslant\varepsilon}:=\bigoplus_{\varepsilon'\geqslant\varepsilon}C_{\varepsilon'}.$$

引理 6.3。 设 $\mathcal{C}=(C_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}$ 是有限维 $\mathbb{C}$-向量空间的立方体，并且$\mu\colon\ C\to C$是一个关于立方体过滤的过滤映射。记 $e^\lambda(\mathcal{C}、\ \mu)$为 $\mathcal{C}$的全空间的广义 λ-特征子空间。则存在一个典范同构

$$\mathrm{gr}(e^\lambda(\mathcal{C},\mu))\cong\bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}E^\lambda_\varepsilon.$$

此外，还存在一个同构

$$\Phi\colon\ \bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}E^\lambda_\varepsilon\to e^\lambda(\mathcal{C},\mu)$$

它是经过过滤的，并且存在一个过滤逆映射。

证明。 记 $e^\lambda(\mathcal{C},\ \mu)$ 为 e^λ。我们首先断言，对于每个 ε，典范投影映射

$$e^\lambda_{\geqslant\varepsilon}/e^\lambda_{>\varepsilon}\to C_\varepsilon$$

是其像上的同构，而其像为 E^λ_ε。这可以通过对立方体的维数进行归纳来证明。一般而言，我们可以将一个 n 维立方体 X 视为一对 $n-1$ 维立方体 X_0 和 X_1。我们有一个正合序列

$$0\to X_0\to X\to X_1\to 0.$$

如果为 X 配备一个过滤端同态 μ，则映射 μ 限制为 X_0 和 X_1，且上述正合序列中的映射均与 μ交换。于是得到一个序列

$$0\to X_1^\lambda\to X^\lambda\to X_0^\lambda\to 0, \tag{6.2}$$

除了 X_0^λ. 处以外显然处处正合；在 X_0^λ处的正合性可以通过注意到 X 和 X_ε分解为广义特征空间的直和，然后利用维数计数证明最后一个映射满射来得到。由归纳法，X_1^λ 和 X_0^λ 具有陈述中所述的关联分次空间。结合上述方程（6.2）中的正合序列，关于 $\mathbf{gr}(e^\lambda)$的结论随之成立。

现在我们考虑这样的断言： $e^\lambda\cong\bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}E^\lambda_\varepsilon$ 是一个过滤向量空间。我们构造一个过滤映射

$$\Phi\colon\bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}E^\lambda_\varepsilon\to e^\lambda$$

如下。在 E^λ_ε上，我们定义 Φ 为该映射的任意一个分裂

$$e^\lambda_{\geqslant\varepsilon}\twoheadrightarrow e^\lambda_{\geqslant\varepsilon}/e^\lambda_{>\varepsilon}\cong E^\lambda_\varepsilon.$$

映射 Φ 显然是过滤的。映射 Φ 是一个同构。通过考虑以下一般且易于验证的事实，可以看出映射 Φ 的逆映射是过滤的：两个 $\mathbb{E}_n$-过滤空间之间的过滤映射 F是具有过滤逆映射的同构，当且仅当 $\mathbf{gr}(F)$ 是一个同构。由于 Φ 按构造在关联分次复形上诱导恒等映射，证明完成。□

将 C_{Tot} 记作链复形 $(\bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}C_\varepsilon、\sum_{\varepsilon\leqslant\varepsilon'}D_{\varepsilon、\varepsilon'})$。将 D_{Tot} 记作微分 $D_{\mathrm{Tot}}=\sum_{\varepsilon\leqslant\varepsilon'}D_{\varepsilon、\varepsilon'}$。因此，我们如下构造超立方体 $E^\lambda(\mathcal{C}、\ \mu)$。给定一个过滤映射的选择

$$\Phi\colon\bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}E^\lambda_\varepsilon\to e^\lambda(\mathcal{C},\mu)$$

该映射是一个同构，且其逆映射也是过滤的；我们定义 $E^\lambda(\mathcal{C}、\ \mu)$ 为这样的超立方体：其全空间为 $\bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}$，总体结构映射为 $\Phi^{-1}\circ D_{\mathrm{Tot}}\circ\Phi$。

注意，超立方体 $E^\lambda(\mathcal{C},\ \mu)$ 取决于 Φ的选取，如方程 (6.2) 所示。我们将映射 Φ 称为分裂映射。若要强调 Φ的选取，我们记作

$$E^\lambda(\mathcal{C},\mu;\Phi).$$

引理 6.4。 设 μ 是超立方体 $\mathcal{C}$ 上的一个算子，并记 $E^\lambda(\mathcal{C},\mu;\ \Phi)=(E^\lambda_\varepsilon,\delta_{\varepsilon,\ \varepsilon'})$ 为特征子空间超立方体。则：

(1) 内部微分 $\delta_{\varepsilon,\ \varepsilon}$ 是映射$D_{\varepsilon,\ \varepsilon}$ 在广义 λ- 特征子空间 C^λ_ε上的限制。*(2)* 若 $|\varepsilon'-\varepsilon|_{L^1}=1$，则

$$\delta_{\varepsilon,\varepsilon'}=D_{\varepsilon,\varepsilon'}+\delta_{\varepsilon,'\varepsilon'}\circ\Phi_{\varepsilon,\varepsilon'}-\Phi_{\varepsilon,\varepsilon'}\circ\delta_{\varepsilon,\varepsilon},$$

其中 $\Phi_{\varepsilon,\ \varepsilon'}$： $E^\lambda_\varepsilon\to C_{\varepsilon'}$ 是从 E^λ_ε 到 $C_{\varepsilon'}$的 Φ 分支

证明。关于长度为 0 的分支的断言是显然的，这是因为从 E^λ_ε 到 C_ε 的 Φ分支是规范包含。

现在假设 $|\varepsilon' - \varepsilon|_{L^1} = 1$。将 Φ 视为一系列映射 $\Phi_{\varepsilon,\ \varepsilon'}$的和会有所帮助，这些映射遍历 $\varepsilon' \geqslant \varepsilon$。记 $(x,\ y)$ 为 $E^\lambda_\varepsilon \oplus E^\lambda_{\varepsilon'}$中的元素。根据构造，$\Phi$ 将 $(x,\ 0)$ 映射到$(x,\ \Phi_{\varepsilon,\ \varepsilon'}(x))$。映射 D^{Tot} 将其映射为

$$(D_{\varepsilon,\varepsilon}(x), D_{\varepsilon,\varepsilon'}(x) + D_{\varepsilon',\varepsilon'}(\Phi_{\varepsilon,\varepsilon'}(x))).$$

映射 Φ^{-1} 将上式映射为

$$(D_\varepsilon(x), D_{\varepsilon,\varepsilon'}(x) + D_{\varepsilon'}(\Phi_{\varepsilon,\varepsilon'}(x)) - \Phi_{\varepsilon,\varepsilon'}(D_\varepsilon(x))).$$

从 E^λ_ε 到 $E^\lambda_{\varepsilon'}$ 的分量映射将 x 映射为

$$D_{\varepsilon,\varepsilon'}(x) + D_{\varepsilon'}(\Phi_{\varepsilon,\varepsilon'}(x)) - \Phi_{\varepsilon,\varepsilon'}(D_\varepsilon(x)).$$

如所声称的。 □

现在考虑分裂映射 Φ。显然，Φ 的选择不会影响超立方体 $E^\lambda(\mathcal{C},\ \mu)$的同伦类型。现在考虑将定义在子立方体上的给定分裂映射扩展的问题。

注意，若 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{E}_n$ 是一个子立方体（即 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{E}_n$ 是由若干个 $\{0\}$、$\{1\}$ 或 $\{0,\ 1\}$的副本构成的笛卡尔积），且 $\mathcal{C}$ 是一个 n 维链复形超立方体，那么就会诱导出一个维数为 $\dim(\mathbb{E})$ 的超立方体 $\mathcal{C}|_{\mathbb{E}}$。这个超立方体映射可以如下定义为一个子复形的商。考虑子复形

$$\mathcal{C}_{<\mathbb{E}} \subseteq \mathcal{C}_{\leqslant\mathbb{E}} \subseteq \mathcal{C}.$$

子复形 $\mathcal{C}_{\geqslant\mathbb{E}}$ 是由 C_ε 生成的滤子子空间，其中 $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$，对某个 $\varepsilon_0 \in \mathbb{E}$成立。空间 $\mathcal{C}_{>\mathbb{E}}$ 由满足 $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ 的 C_ε 张成，其中 $\varepsilon_0 \in \mathbb{E}$对某个值成立，但 $\varepsilon \notin \mathbb{E}$。于是

$$\mathcal{C}_{\mathbb{E}} := \mathcal{C}_{\geqslant\mathbb{E}}/\mathcal{C}_{>\mathbb{E}}.$$

算子 μ 在 $\mathcal{C}$ 上诱导出算子 $\mu_{\mathbb{E}}$ 在 $\mathcal{C}_{\mathbb{E}}$上。

注意，$(\mathcal{C},\ \mu)$ 上的分裂映射 Φ 会在 $(\mathcal{C}_{\mathbb{E}},\ \mu_{\mathbb{E}})$上诱导出分裂映射 $\Phi|_{\mathbb{E}}$。下面的技术引理之后会很有用，它表明我们可以归纳地构造分裂映射 Φ：从立方体的 0-胞腔开始，然后依次处理 1-胞腔，依此类推。

引理 6.5。考虑一个配备算子 μ 的 n 维超立方体 $\mathcal{C}$。设 $\phi_{\mathbb{E}}$ 是针对每个余维 *1* 子立方体 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{E}_n$ 的一组分裂映射；假设它们满足如下兼容性条件：如果 $\mathbb{E}_0$ 是 $\mathbb{E}_n$ 的一个子立方体，并且包含于两个余维 *1* 立方体 $\mathbb{E}'$ 和 $\mathbb{E}''$ 中，那么

$$\phi_{\mathbb{E}'}|_{\mathbb{E}_0} = \phi_{\mathbb{E}''}|_{\mathbb{E}_0}.$$

那么存在一个针对 $(\mathcal{C}, \mu)$ 的分裂映射 Φ，使得

$$\Phi|_{\mathbb{E}} = \phi_{\mathbb{E}}$$

对于每个余维 *1* 子立方体 $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{E}_n$。

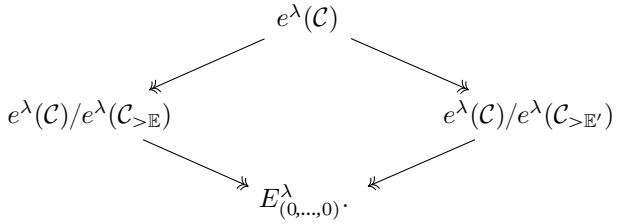
证明。我们可以将分裂 Φ 的选择看作一组分裂 Φ_ε：$E^\lambda(C_\varepsilon,\ \mu) \to e^\lambda_{\geqslant\varepsilon}(\mathcal{C},\ \mu)$；注意到定义并不要求不同的 Φ_ε 映射之间存在任何关系。映射 Φ_ε 由 $\varepsilon \neq (0,\ \ldots\ldots,\ 0)$ 的映射 $\phi_{\mathbb{E}}$ 唯一确定，因此只需定义 $\Phi_{(0,\ldots\ldots,\ 0)}$。

注意，如果 $(0,\ \ldots\ldots,\ 0) \in \mathbb{E}$，则 $\mathcal{C}_{\geqslant\mathbb{E}} = \mathcal{C}$。因此

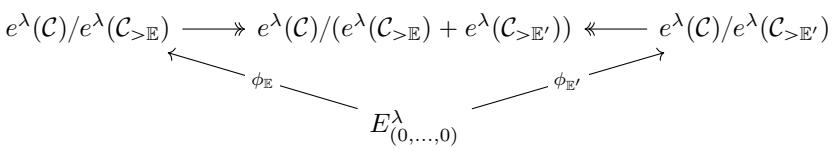
$$e^\lambda(\mathcal{C}_{\mathbb{E}}) = e^\lambda(\mathcal{C}/\mathcal{C}_{>\mathbb{E}}) \cong e^\lambda(\mathcal{C})/e^\lambda_{>\mathbb{E}}(\mathcal{C}).$$

第一个等式是定义，第二个同构由 e^λ 的正合性得到，证明见引理6.3 （见方程（6.2））。

对于每一对余维 1 子立方体 $\mathbb{E}$，$\mathbb{E}' \subseteq \mathbb{E}_n$，我们都有一个满态射的交换图



陈述中的分裂可纳入交换图中：



这样的图表唯一确定一个分裂

$$\phi_{\mathbb{E},\mathbb{E}'} \colon E^\lambda_{(0,\dots,0)} \to e^\lambda(\mathcal{C})/(e^\lambda(\mathcal{C}_{>\mathbb{E}}) \cap e^\lambda(\mathcal{C}_{>\mathbb{E}'})).$$

所有 $\phi_{\mathbb{E}}$（其中 $\operatorname{codim}(\mathbb{E}) = 1$）的集合共同唯一确定一个分裂

$$\Psi \colon E^\lambda_{(0,\dots,0)} \to e^\lambda(\mathcal{C})/\bigcap_{\substack{\operatorname{codim}(\mathbb{E})=1 \\ (0,\dots,0)\in\mathbb{E}}} e^\lambda(\mathcal{C}_{>\mathbb{E}}) = e^\lambda(\mathcal{C})/e^\lambda(\mathcal{C}_{(1,\dots,1)}).$$

将其与该映射的任意分裂复合

$$e^\lambda(\mathcal{C}) \twoheadrightarrow e^\lambda(\mathcal{C}_{(1,\dots,1)})$$

在陈述中给出 $\Phi_{(0,\ \dots,\ 0)}$ 的一种选择。 □

6.3. **特征子空间函子**。现在我们考虑在链复形上取特征子空间的运算，并将其视为具有函子性。首先，有几个与我们相关的范畴。第一个是带算子的链复形范畴 μ-**Kom**。对象是成对的 $(C,\ \mu)$，其中 C 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的有限生成链复形，而 $\mu\colon C \to C$ 是一个链映射。态射由成对的 $(f,\ h)$ 构成：$(C_1,\ \mu_1) \to (C_2,\ \mu_2)$，其中 $f\colon C_1 \to C_2$ 是一个链映射，且 $h\colon C_1 \to C_2$ 是一个链同伦

$$f \circ \mu_1 - \mu_2 \circ f = \partial(h).$$

等价地，f 和 h 可嵌入一个链复形超立方体中

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{f} & TC_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_0} & \overset{h}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle \mu_1} \\ TC_0 & \xrightarrow{-f} & T^2C_1 \end{array}$$

若两个态射 $(f,\ h)$ 和 $(g,\ j)$ 作为从 $\mathsf{Cone}(\mu_1) \to$ 到 $\mathsf{Cone}(\mu_2)$ 的超立方体态射是同伦的，则称它们是同伦的。（这里 T 表示链复形上的平移函子，它将分次平移 1，并将微分 ∂ 变为 $-\partial$。）

存在一个由配备算子的超立方体组成的相对范畴 μ-$\mathbf{Kom}_{\mathbb{E}}$ $\mathcal{C}$ μ（滤过链映射，满足 $\partial(\mu) = 0$）。态射的定义类似。

上述范畴也有同伦版本，记为 μ-$\mathbf{K}$ 和 μ-$\mathbf{K}_{\mathbb{E}}$。对象由成对的 $(\mathcal{C},\ \mu)$ 组成，其中 $\mathcal{C}$ 是一个链复形（分别为超立方体），而 μ 是一个算子（不是 算子的同伦类）。这些范畴中的态射由链复形范畴中的态射 $(f,\ h)$ 构成，它们是圈，并按同伦等价取商。

本节将证明以下内容：

命题 6.6。 广义特征空间构造给出了一个从 μ-$\mathbf{K}$ 到 $\mathbf{K}$ 的函子。它还给出了一个从 μ-$\mathbf{K}_{\mathbb{E}}$ 到 $\mathbf{K}_{\mathbb{E}}$ 的函子。

对于 $\mathsf{Kom}_{\mathbb{E}}$-$\mu$ 中的一个对象（即配备了算子 $(\mathcal{C},\mu)$ 的链复形超立方体），我们使用引理 6.4 构造一个 $E^\lambda(\mathcal{C},\mu)$ 的模型。（为了具体定义函子的取值，我们使用选择公理，为每个超立方体任意选取一个模型。）对于一个态射 $(f,h)\colon (\mathcal{C}_0,\mu_0)\to(\mathcal{C}_1,\mu_1)$ in μ-$\mathsf{Kom}_{\mathbb{E}}$，我们将特征子空间超立方体构造应用于 $\mathsf{Cone}(f,h)$。根据引理 6.5，映射锥的分裂映射可以选取得与用于构造 $E^\lambda(\mathcal{C}_0,\mu_0)$ 和 $E^\lambda(\mathcal{C}_1,\mu_1)$ 的任意分裂映射相容。

我们在态射 $(f、h)\colon (C_0、\mu_0)\to(C_1、\mu_1)$ in μ-$\mathbf{Kom}$ 的情形下说明这一构造。考察引理 6.4 的证明，映射

$$E^\lambda(f,h)\colon E^\lambda(C_0,\mu_0)\to E^\lambda(C_1,\mu_1)$$

等于对 $f+\partial(\Phi_{0,1})$ 的限制，其中 $\Phi_{0,1}\colon\ C_0^\lambda\to C_1$ 是任意一个线性映射（分次为 $+1$），使得 $(i,\Phi_{0,1})$ 将 $E^\lambda(C_0)$ 映射到 $E^\lambda(C_0\xrightarrow{f}C_1)$中。这里 i 表示包含映射。

现在我们 证明该构造在映射的链同伦类层面上是良定义的 :

引理 6.7。 在 μ-$\mathbf{Kom}$ 上，映射 E^λ 满足以下性质：

(1) 对于固定的态射 $(f,h)\colon(C_0,\mu_0)\to(C_1,\mu_1)$，态射 $E^\lambda(f,h)$ 是链映射，并且在链同伦意义下良定义。 (2) 若 $(f,h)\simeq(g,j)$，则 $E^\lambda(f,h)\simeq E^\lambda(g,j)$。 (3) 给定一列可复合态射

$$(C_0,\mu_0)\xrightarrow{(f,h)}(C_1,\mu_1)\xrightarrow{(g,j)}(C_2,\mu_2)$$

我们有

$$E^\lambda(g,j)\circ E^\lambda(f,h)\simeq E^\lambda((g,j)\circ(f,h)).$$

将 E 应用于超立方体时，同样的结论仍然成立。

证明。 我们重点讨论带有算子的链复形情形，因为关于超立方体的结论并无显著区别。先考虑第一个结论。唯一的歧义在于分裂映射 $\Phi_0\colon E^\lambda(C_0)\to e^\lambda(\mathsf{Cone}(f))$ 的选择。设 Φ 和 Φ' 是两个线性映射的选择。我们将 $e^\lambda(\mathsf{Cone}(f))$ 视为处于 $C_0\oplus C_1$ 中。

注意， $\Phi-\Phi'$ 将 $E^\lambda(C_0)$ 映射到 $E^\lambda(C_1)$，因为若 $x\in E^\lambda(C_0)$，则有

$$\Phi_0(x)=(x,\Phi_{0,1}(x))\quad\text{and}\quad\Phi_0'(x)=(x,\Phi_{0,1}'(x))$$

对于某些线性映射 $\Phi_{0,\ 1}$，$\Phi'_{0,\ 1}\colon\ E^\lambda(C_0)\to C_1$。由于 $e^\lambda(\mathrm{Cone}(f))\cap(0\oplus C_1)=0\oplus E^\lambda(C_1)$，我们仿照引理 6.4 第二部分的推理，得出

$$E^\lambda(f,h;\Phi)-E^\lambda(f,h;\Phi')=\partial(\Phi_{0,1}+\Phi'_{0,1}).$$

第二个结论同样由超立方体特征空间定理推出，该定理应用于与图表对应的三维超立方体

$$\begin{array}{ccc}(C_0,\mu_0) & \xrightarrow{(f,h)} & (TC_1,\mu_1)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}}\\ (TC_0,\mu_0) & \xrightarrow{-(g,h)} & (T^2C_1,\mu_1)\end{array}$$

（我们省略了立方体的一个方向，该方向“指向”页面内部。这就是 μ_i 算子的方向。）超立方体特征空间定理给出了如下形式的超立方体

$$\begin{array}{ccc}E^\lambda(C_0,\mu_0) & \xrightarrow{E^\lambda(f,h)} & E^\lambda(TC_1,\mu_1)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}}\\ E^\lambda(TC_0,\mu_0) & \xrightarrow{-E^\lambda(g,h)} & E^\lambda(T^2C_1,\mu_1)\end{array}$$

由此即可证明该断言。

第三个断言类似：我们将超立方体特征空间定理应用于下图：

$$\begin{array}{ccc} (C_0,\mu_0) & \xrightarrow{(f,h)} & (TC_1,\mu_1) \\ {\scriptstyle (g,j)\circ(f,h)}\downarrow & \searrow & \downarrow{\scriptstyle (g,j)} \\ (TC_2,\mu_2) & \xrightarrow{-\mathrm{id}} & (T^2C_2,\mu_2) \end{array}$$

□

6.4. **同时特征空间**。 现在我们考虑同时特征空间的情形。我们重点讨论链复形 C 上的两个算子 μ 和 μ' 满足 $\mu\circ\mu'\simeq\mu'\circ\mu$的情况。我们将同时广义特征空间定义为

$$E^{\lambda'}(E^{\lambda}(C,\mu),E(\mu')).$$

这个特征空间取决于 $\mu\circ\mu'$ 和 $\mu'\circ\mu$之间同伦的选择。如果 $\mathcal{C}$ 是一个超立方体，且 μ 和 μ' 是同伦交换的超立方体算子，构造同样成立。

引理 6.8. 设 μ 和 μ' 是超立方体 $\mathcal{C}$ 上的两个同伦交换算子（并且已选定 $[\mu、\ \mu']$ 的一个零同伦）。那么链复形之间存在一个同伦等价

$$E_{\lambda'}(E^{\lambda}(\mathcal{C},\mu),E(\mu'))\simeq E^{\lambda}(E_{\lambda'}(\mathcal{C},\mu'),E(\mu)).$$

证明。 我们可以定义一个从一个复形到另一个复形的映射。注意，给定作用在 μ 上的一个算子，存在包含映射和投影映射

$$i_\lambda\colon e^{\lambda}(\mathcal{C},\mu)\hookrightarrow\mathcal{C}\quad\text{and}\quad\pi_\lambda\colon\mathcal{C}\twoheadrightarrow e^{\lambda}(\mathcal{C},\mu).$$

当 μ 是一个超立方体算子时，直接验证可知 i_λ 和 π_λ 都是 $\mathbb{E}_n$-滤过映射。将这些映射与滤过同构 $e^{\lambda}(\mathcal{C},\ \mu)\ \cong\ E^{\lambda}(\mathcal{C},\ \mu)$ 复合后，我们得到包含映射和投影映射

$$E^{\lambda}(\mathcal{C},\mu)\to\mathcal{C}\quad\text{and}\quad\mathcal{C}\to E^{\lambda}(\mathcal{C},\mu)$$

因此我们得到链映射

$$E_{\lambda'}(E^{\lambda}(\mathcal{C},\mu),E(\mu'))\to E^{\lambda}(\mathcal{C},\mu)\to\mathcal{C}\to E_{\lambda'}(\mathcal{C},\mu')\to E^{\lambda}(E_{\lambda'}(\mathcal{C},\mu'),E(\mu)).$$

我们断言，上述一系列超立方体映射的复合，在每个点处的复形上都诱导出一个同伦等价 $\varepsilon\in\mathbb{E}_n$。记 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 和 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 分别为 $\varepsilon\in\mathbb{E}_n$ 中 $E_{\lambda'}(E^{\lambda}(\mathcal{C}))$ 和 $E^{\lambda}(E_{\lambda'}(\mathcal{C}))$在 $H_*(\mathcal{A}_\varepsilon)$ 处的复形，我们注意到 $H_*(\mathcal{B}_\varepsilon)$ 都与 $H_*(\mathcal{C}_\varepsilon)$ 关于同调上的交换算子 μ_* 和 μ'_* 的普通同时特征空间相同。此外，上述一系列映射所诱导的从 $H_*(\mathcal{A}_\varepsilon)$ 到 $H_*(\mathcal{B}_\varepsilon)$ 的映射是一个同构。因此，引理 6.2 推出了该断言。

□

如果我们有一列算子 $\mu_1,\ldots,\mu_n$，只要存在一个 n 维超立方体，其中长度为 1 的映射是 μ_i 映射，我们的分析便同样成立。引理 6.8 有一个显而易见的推广。

6.5. **比较特征空间**。 现在我们来考察一个技术性结果，它在研究瞬子群上的分次平移时会派上用场。

命题 6.9。 假设 $\mathcal{C}=(C_\varepsilon,D_{\varepsilon,\varepsilon'})_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}$ 是一个超立方体，且 μ 和 μ' 是作用在 $\mathcal{C}$上的两个同伦交换算子。进一步假设，在每个 $H_*(C_\varepsilon)$ 上，都有 $\mu'=\mu+\alpha\cdot\mathrm{id}$ （等价地，对于所有 λ， $H_*(E^{\lambda}(C_\varepsilon,\mu))=H_*(E^{\lambda+\alpha}(C_\varepsilon,\mu'))$）。那么

$$E^{\lambda}(\mathcal{C},\mu)\simeq E^{\lambda+r}(\mathcal{C},\mu').$$

我们先给出一个直接的引理：

引理 6.10。 设 μ 是超立方体 $\mathcal{C} = (C_\varepsilon, D_{\varepsilon,\,\varepsilon'})_{\varepsilon\in\mathbb{E}_n}$ 上的一个算子，其中各向量空间均为有限维，并且存在一个 λ，使得对所有 ε均有 $E^\lambda(H_*(C_\varepsilon), \mu) = H_*(C_\varepsilon)$。那么

$$E^r(\mathcal{C}, \mu) \simeq \begin{cases} \mathcal{C} & \text{if } r = \lambda \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 存在一个包含映射 $E^r(\mathcal{C},\ \mu) \to \mathcal{C}$类似于引理 6.8 的证明。该映射在每个顶点处都限制为一个拟同构，因此引理 6.2 表明，当 $r = \lambda$时，它是一个同伦等价。如果 $r \neq \lambda$，那么每个 $E^r(C_\varepsilon,\ \mu)$ 的同调都是平凡的，因此类似的论证表明 $E^r(\mathcal{C},\ \mu)$ 同伦等价于零复形。□

命题 *6.9* 的证明。 由引理 6.10，我们得到

$$E^{\lambda+\alpha}(E^\lambda(\mathcal{C}, \mu), E(\mu')) \simeq E^\lambda(\mathcal{C}, \mu) \quad \text{and} \quad E^\lambda(E^{\lambda+\alpha}(\mathcal{C}, \mu'), E(\mu)) \simeq E^{\lambda+\alpha}(\mathcal{C}, \mu'). \tag{6.3}$$

结合方程（6.3）与引理 6.8，我们得到

$$E^\lambda(\mathcal{C}, \mu) \simeq E^{\lambda+r}(\mathcal{C}, \mu')$$

证明完成。 □

7. Connected sums in direct limit Heegaard knot Floer homology

本节将说明我们如何在直极限 Heegaard 结 Floer 同调的背景下证明连通和公式。尽管 Heegaard 结同调的连通和公式早已建立 [OS04], ，但此处给出的论证可作为瞬子和单极子情形的有用模型。本节中，我们在特征 2 下工作。

7.1. 概述。令 $K_1 \subseteq Y_1$ 和 $K_2 \subseteq Y_2$ 为零同调结。分别令 M_1 和 M_2 表示 $Y_1\backslash\nu(K_1)$ 和 $Y_2\backslash\nu(K_2)$。令 Γ_m 和 Γ_n 分别表示 M_1 和 M_2 上斜率为 m 和 n 的纵向缝合线。首先，在 ∂M_1 和 ∂M_2 上附加一个三维 1-柄，将两个缝合流形的 R_+ 连接起来。我们还附加一个 1-柄，将 R_- 连接起来。假设这些 1-柄与缝合线不相交。见图7.1。将所得流形记为 Y，并将缝合线记为 $\Gamma_{m,\ n}$。

流形 Y 并非紧致，因为可以沿附加的 1-把手的余核对其进行压缩。特别是，

$$SFH(Y, \Gamma_{n,m}) = 0. \tag{7.1}$$

考虑闭曲线 L_1 和 L_2，它们位于 ∂Y 中，如图 7.1所示。我们假设 L_1 和 L_2 中沿着 ∂M_i 延伸的部分与 K_1 的子午线平行，且 K_2。

注意，若沿 L_1 和 L_2 附加接触 2-柄，则得到与 $K_1\#K_2$ 互补的缝合流形，其纵向缝合线的斜率为 $n + m$。记 $(M^\#,\ \Gamma^\#_{m+n})$。利用引理 2.8 中的拓扑描述，我们也可以将接触把手附着视为先进行四维 2-柄附着，再沿乘积圆盘切开。为方便起见，我们也用 L_1 和 L_2 表示将 L_1 和 L_2 推入 Y 内部后得到的带框结，并采用与边界平行的框架。记 $Y_{0,\ 0}(L)$ 为手术流形，由此可得

$$SFH(Y_{0,0}(L), \Gamma_{n,m}) \cong SFH(M^\#, \Gamma^\#_{n+m}),$$

其中，该同构通过沿两个乘积圆盘切割得到（即使用接触1-手柄映射的逆映射）。

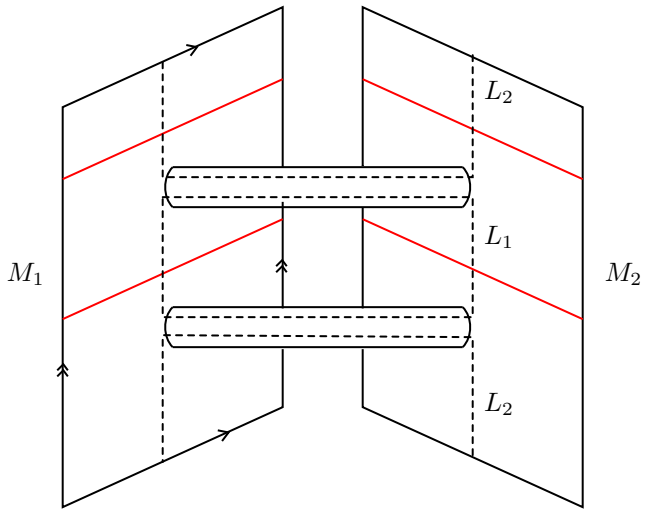


FIGURE 7.1. 流形 $Y = Y_{\infty,\infty}(L)$ 以及 L的分支 L_1 和 L_2 。

我们考虑应用于带框链环 L 的迭代映射锥构造。这意味着存在一个具有以下形式的拟同构：

$$CF(Y_{0,0}(L)) \simeq \begin{array}{ccc} CF(Y_{1,1}(L)) & \xrightarrow{F_{W(L_1^*)}} & CF(Y_{\infty,1}(L)) \\ \downarrow{\scriptstyle F_{W(L_2^*)}} & \searrow & \downarrow{\scriptstyle F_{W(L_2^*)}} \\ CF(Y_{1,\infty}(L)) & \xrightarrow{F_{W(L_1^*)}} & CF(Y_{\infty,\infty}(L)) \end{array} \tag{7.2}$$

这里 L_i^* 表示 -1-框架的 L_i的对偶。由于每个链复形都是由 $\mathbb{F}$-向量空间构成的，我们可以用其同调群替换这些复形。此外，长度为 1 的箭头（即实线箭头）被同调上的诱导映射所替换。利用（7.1），还可以进一步简化该立方体。由此，我们得到如下结果：

命题 7.1。 存在一个同伦等价

$$SFH(Y_{0,0}(L)) \simeq \begin{array}{ccc} SFH(Y_{1,1}(L)) & \xrightarrow{F_{W(L_1^*)}} & SFH(Y_{\infty,1}(L)) \\ \downarrow{\scriptstyle F_{W(L_2^*)}} & & \\ SFH(Y_{1,\infty}(L)) & & \end{array}$$

这里 L_i^* 表示 L_i的 (-1)-框架对偶。

在下一节中，我们将证明如下结论：

引理 7.2。图表与超立方体之间存在同伦等价

$$\begin{array}{ccc} SFH(Y_{1,1}(L)) & \xrightarrow{F_{W(L_1^*)}} & SFH(Y_{\infty,1}(L)) \\ \downarrow{\scriptstyle F_{W(L_2^*)}} & & \\ SFH(Y_{1,\infty}(L)) & & \end{array} \tag{7.3}$$

以及图表

$$\begin{array}{ccc} C_n \otimes D_{m-1} \oplus C_{n-1} \otimes D_m & \xrightarrow{\mathrm{id}\,|\phi_m^- \oplus \phi_n^-|\,\mathrm{id}} & C_n \otimes D_m \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\,|\phi_m^+ \oplus \phi_n^+|\,\mathrm{id}} & & \\ C_n \otimes D_m & & \end{array} \tag{7.4}$$

在上文中， C_n 表示 $SFH\,(M_1,\ \Gamma_n)$ 而 D_m 表示 $SFH\,(M_2,\ \Gamma_m)$。

作为最后一步，我们将在第7.3 节证明如下内容：

引理 7.3。 方程 (7.4) 中的复形的直接极限，其同调与传递系统的直接极限的同调一致

$$C_n \otimes D_m \xrightarrow{\phi_n^-|\phi_m^+ + \phi_n^+|\phi_m^-} C_{n+1}|D_{m+1}.$$

此外，该系统的直接极限与导出张量积 $HFK^-(K_1)\,\widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]} HFK^-(K_2)$一致，我们将其认定为

$$\mathrm{Cone}\left(U_1 + U_2 \colon HFK^-(K_1) \otimes_{\mathbb{F}} HFK^-(K_2) \to HFK^-(K_1) \otimes_{\mathbb{F}} HFK^-(K_2)\right).$$

7.2. **分解迭代映射锥**。 本节中，我们证明引理 7.2。我们利用 Heegaard 图来解释命题 7.1 中出现的映射和复形。尽管从逻辑上说，这与我们稍后在瞬子和单极子背景下所考虑的一些更形式化的论证有所重复，但我们认为这一分析颇具启发性。

还有一种构造 $K_1\#K_2$ 在 $Y_1\#Y_2$ 中的补集的方法，其纵向缝合的斜率为 Γ_{m+n}。具体而言，我们可以沿着缝合线附加一个连接 M_1 与 M_2 的接触 1-柄。然后附加一个单独的接触 2-柄，使其两次穿过该接触 1-柄。这一构造在 [GLW19 的图 3] 中进行了讨论。在 Heegaard 图层面上的效果如图 7.2 所示。注意，为了得到 $Y_{0,\ 0}(L)$，我们必须再附加两个接触 1-柄。

有了这个 Heegaard 图，(7.2) 中迭代映射锥复形所出现的图表如图 7.3 所示。注意，$Y_{\infty,\ \infty}(L)$ 不是紧致的这一事实，反映在该图表没有交点这一点上（通过选取 $(M_1,\ \Gamma_m)$ 和 $(M_2,\ \Gamma_n)$ 的可容许图，可以将其选为可容许图）。注意，每个图表顶部的 α 弧通过图表的其他部分与底部的 α 弧相连，所示 β 弧也是如此。特别地，图中所示的是一条 α 曲线，而不是两条 α 曲线。

引理 7.4。 存在同构：

(1) $SFH(Y_{\infty,\ 1}(L)) \cong SFH\,(M_1,\ \Gamma_n) \otimes SFH\,(M_2,\ \Gamma_m)$*(2)* $SFH(Y_{1,\ \infty}(L)) \cong SFH\,(M_1,\ \Gamma_n) \otimes SFH\,(M_2,\ \Gamma_m)$。*(3)* $SFH(Y_{1,\ 1}(L)) \cong SFH\,(M_1,\ \Gamma_{n-1}) \otimes SFH\,(M_2,\ \Gamma_m) \oplus SFH\,(M_1,\ \Gamma_n) \otimes SFH\,(M_2,\ \Gamma_{m-1})$。

证明。 先考虑断言（1）和（2）。我们考虑图 7.3 所示的图表7.3。这两个图表都是通过在 [JZ20，第 2 节2]中所述意义下的复合稳定化，$(M_1,\ \Gamma_m) \sqcup (M_2,\ \Gamma_n)$，由附加两个接触 1-柄得到的图表。由于复合稳定化和接触 1-柄对同调没有影响，断言得证。

现在我们考虑断言（3）。在此情况下，令 α_0 和 β_0 表示图表 7.3 中所示的 α 曲线和 β 曲线，该图表对应流形 $Y_{1,\ 1}(L)$。设 $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ 位于 $Y_{1,\ 1}(L)$ 的图表上，并令 x_0 表示 α_0 中的分量，令 x_0' 表示 β_0 中的分量。我们声称恰好存在两种可能的情形：

(1) x_0 和 x_0' 都位于 Heegaard 图的左侧。(2) x_0 和 x_0' 都位于 Heegaard 图的右侧。

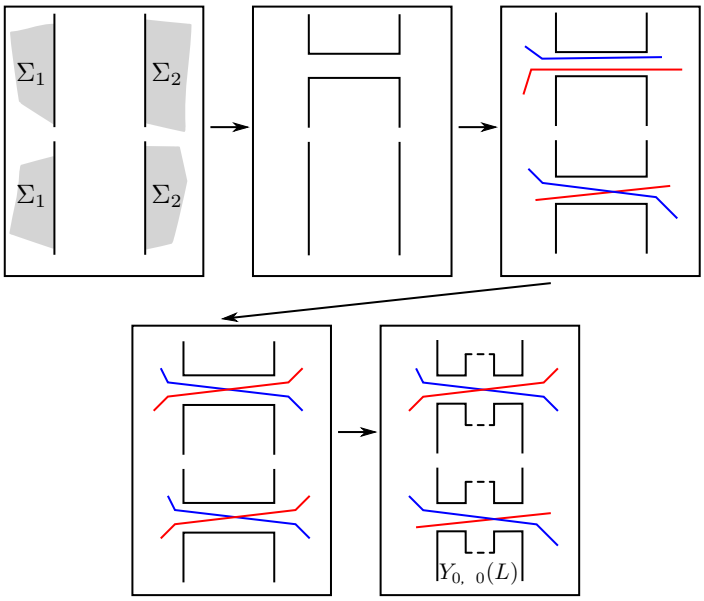


FIGURE 7.2. 从 M_1 和 M_2 的图表构造 $Y_{0,\ 0}(L)$。第一条箭头是一个接触 1-柄。第二条箭头是一个接触 2-柄。第三条箭头是一个同伦。第四条箭头是两个接触 1-柄。注意，在每个框架中，两个 α 弧属于同一条 α 曲线；β 弧也是如此。

特别地，不可能形成一个交点，使得 x_0 和 x_0' 位于图表的相对两侧（这是由形成有效交点时的组合约束所致）。给定一个满足情形 (1) 的交点 $\mathbf{x}$，按照图 7.4所示切割图表后，我们可以自然地将 $\mathbf{x}$ 视为以下图表上的一个交点：$(M_1,\ \Gamma_{m-1}) \sqcup (M_2,\ \Gamma_n)$。类似地，任何满足 (2) 的交点，都可以视为以下图表上的一个交点：$(M_1,\ \Gamma_n) \sqcup (M_2,\ \Gamma_{m-1})$。此外，我们在链级上得到一个直和分解

$$CF(Y_{1,1}(L)) \cong CF(M_1, \Gamma_{n-1}) \otimes CF(M_2, \Gamma_m) \oplus CF(M_1, \Gamma_n) \otimes CF(M_2, \Gamma_{m-1}).$$

由于图 7.3 中的图表存在边界 $\partial\Sigma$，全纯圆盘无法进入其中所示的 $Y_{1,\ 1}(L)$ 区域。特别地，上述链级分解受到微分保持，证明完成。□

引理 7.5。我们可以在 K 上选取一个定向，使得关于引理 7.4 中的同构，以下结论成立：

$$F_{W(L_1^*)} = \phi_{m-1}^+ |\,\mathrm{id} \oplus \mathrm{id}\,| \phi_{n-1}^+ \qquad and \qquad F_{W(L_2^*)} = \phi_{m-1}^- |\,\mathrm{id} \oplus \mathrm{id}\,| \phi_{n-1}^-.$$

证明。我们首先关注关于映射 $F_{W(L_1^*)}$ 的断言。考虑图表顶部沿着 $Y_{1,\ \infty}(L)$ 的特殊交点 c。由于 c 是稳定化的 α 曲线与任何 β 曲线的唯一交点，因此，对于由 $F_{W(L_1^*)}$ 计数的任意全纯三角形而言，c 必须是一个出射交点。全纯三角形映射的定义域在 c 附近恰有以下两种构型：

(Δ-1) 定义域支撑在 c 的左侧，但不支撑在右侧。(Δ-2) 定义域支撑在 c 的右侧，但不支撑在左侧。

这两种构型见图7.5。相对于引理7.4中的同构，满足情形（Δ-1）的全纯三角形的入射交点必须位于 $CF(M_1,\ \Gamma_{m-1}) \otimes CF(M_2,\ \Gamma_n)$ 的直和项中，该直和项属于 $CF(Y_{1,\ 1}(L))$。类似地，入射交点

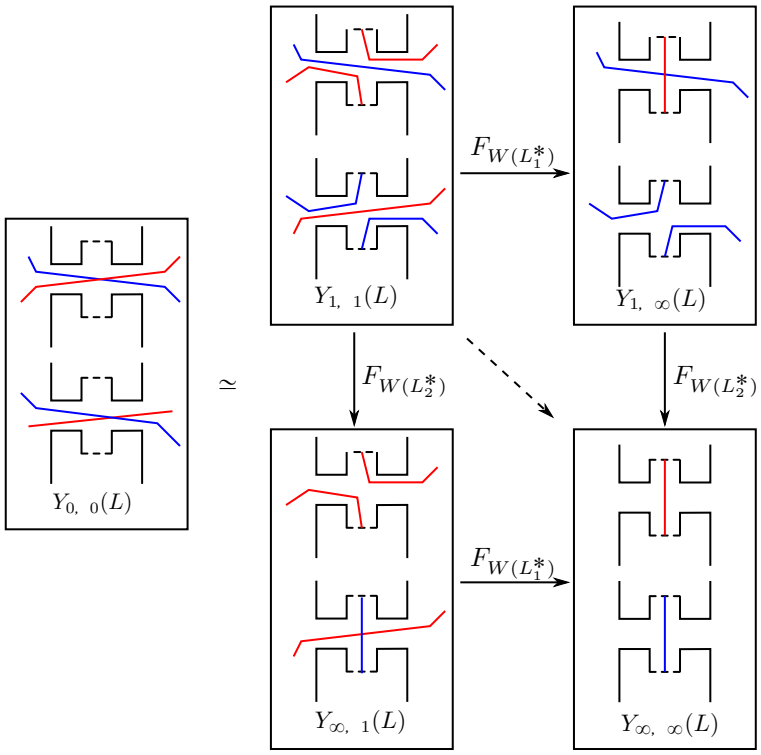


FIGURE 7.3. 式（7.2）中出现的流形的 Heegaard 图。

满足情形（Δ-2）的全纯三角形的入射交点必须位于直和项 $CF(M_1,\ \Gamma_m)\otimes CF(M_2,\ \Gamma_{n-1})$中。此外，图7.4 中的图切割操作也可以在用于映射 $F_{W(L_1^*)}$的 Heegaard 三元组上执行。利用引理 2.8中通过全纯三角形描述接触 2-手柄映射的方法，我们得到如下识别

$$F_{W(L_1^*)}|_{CF(M_1,\Gamma_{m-1})\otimes CF(M_2,\Gamma_n)} = \phi_{m-1}^{\pm}|\,\mathrm{id} \quad \text{and} \quad F_{W(L_1^*)}|_{CF(M_1,\Gamma_m)\otimes CF(M_2,\Gamma_{n-1})} = \mathrm{id}\,|\phi_{n-1}^{\pm},$$

其中，$\pm$ 在各个表达式之间保持一致。

对 $F_{W(L_2^*)}$完全类似地进行论证，即可得到

$$F_{W(L_2^*)}|_{CF(M_1,\Gamma_{m-1})\otimes CF(M_2,\Gamma_n)} = \phi_{m-1}^{\mp}|\,\mathrm{id} \quad \text{and} \quad F_{W(L_2^*)}|_{CF(M_1,\Gamma_m)\otimes CF(M_2,\Gamma_{n-1})} = \mathrm{id}\,|\phi_{n-1}^{\mp},$$

其中，上述 $\mp$ 与 $F_{W(L_1^*)}$的表达式中的 $\pm$ 保持一致。

正旁路与负旁路之间的区别等价于对 K进行定向。作出选择后，即得到引理的结论。□

7.3. **获得导出张量积**。 在本节中，我们证明引理 7.3，并证明复形的直接极限

$$\begin{array}{ccc} C_n\otimes D_{m-1}\oplus C_{n-1}\otimes D_m & \xrightarrow{\ \mathrm{id}\,|\phi_m^-\oplus\phi_n^-|\,\mathrm{id}\ } & C_n\otimes D_m \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\,|\phi_m^+\oplus\phi_n^+|\,\mathrm{id}} & & \\ C_n\otimes D_m & & \end{array} \tag{7.5}$$

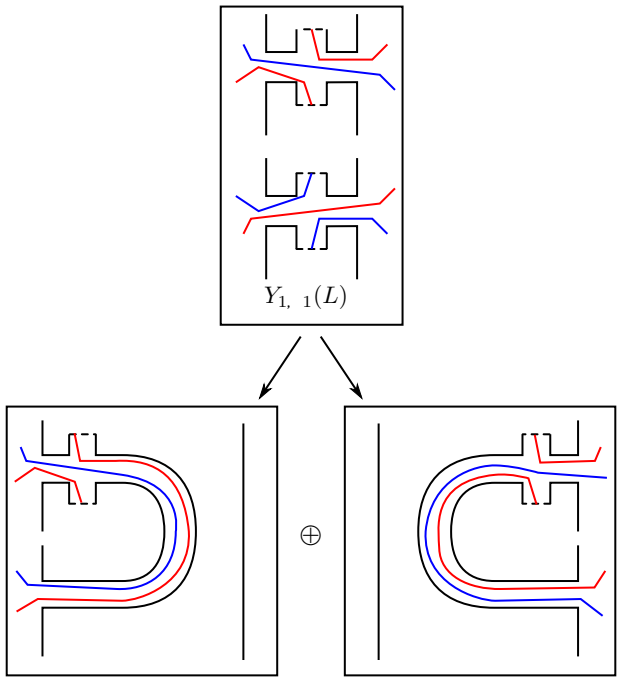


FIGURE 7.4. 引理 7.4 的图表第（3）部分

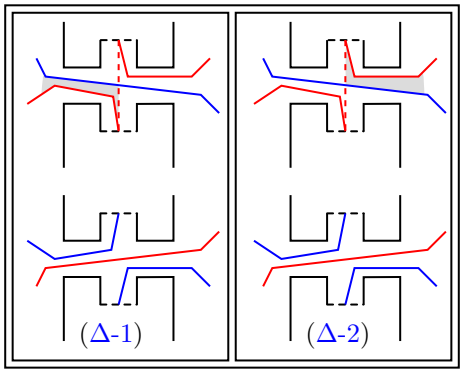


FIGURE 7.5.引理 7.5 中全纯三角形的两种可能构型。

与这些复形的直接极限具有相同的同调

$$C_n \otimes D_m \xrightarrow{\phi_n^-|\phi_m^+ + \phi_n^+|\phi_m^-} C_{n+1}|D_{m+1}.$$

证明可通过将二维复形视为从左列到右列的映射锥来完成。引理 5.2给出了一个从 $C_{n-1} \otimes D_{m-1}$ 到左列的映射。这给出了一个从

$$C_{n-1} \otimes D_{m-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}^-|\phi_{m-1}^+ + \phi_{n-1}^+|\phi_{m-1}^-} C_n|D_m$$

到方程（7.5）中的复形。类似地，从上面的二维复形到

$$C_n \otimes D_m \xrightarrow{\phi_n^- | \phi_m^+ + \phi_n^+ | \phi_m^-} C_{n+1} \otimes D_{m+1}. \tag{7.6}$$

很容易看出，这些映射在直接极限上诱导出同构。

最后，为了将这些复形与导出张量积对应起来，注意到极限群 $HFK^-(K_1)$ 和 $HFK^-(K_2)$ 具有一个有上界的 Alexander 分次。此外，若 $q \in \mathbb{Z}$ 固定，则当 $n \gg 0$充分大时，$(C_n)_{>q} \cong HFK^-(K_1)_{>q}$。特别地，若 q 固定且 $n \gg 0$ 和 $m \gg 0$，则方程（7.6）中的复形与分次高于 q的导出张量积复形同构。证明完成。

8. Connected sums in the setting of instantons and monopoles

在本节中，我们将第 7节中连通和公式的证明调整到瞬子和单极 Floer 同调的情形。为具体起见，我们完全在瞬子的情形下进行讨论，但我们的证明同样适用于 Heegaard Floer 同调和单极 Floer 同调的情形。

8.1. 构造迭代映射锥。

现在，我们将第 7 节中的论证重新表述为一种避免使用 Heegaard 图、仅使用关于缝合 Floer 同调的形式性质的方式。

类似于方程（7.2），我们有如下结果

定理 8.1。 存在一个同伦等价

$$SHI(Y_{0,0}(L)) \simeq \begin{array}{ccc} SHI(Y_{1,1}(L)) & \xrightarrow{-F_{W(L_1^*)}} & SHI(Y_{\infty,1}(L)) \\ \downarrow{\scriptstyle F_{W(L_2^*)}} & \searrow & \downarrow{\scriptstyle F_{W(L_2^*)}} \\ SHI(Y_{1,\infty}(L)) & \xrightarrow{-F_{W(L_1^*)}} & SHI(Y_{\infty,\infty}(L)) \end{array}$$

这里，L_i^* 是 L_i的一个 0-框架对偶。（这里我们将 $SHI(Y_{9,0}(L))$ 视为一个导数为零的链复形。）

现在，我们概述定理 8.1 证明的主要思路。第一步是将迭代映射锥构造应用于这些闭包的瞬子 Floer 同调。这给出了一个涉及瞬子链群 C_* 的迭代映射锥公式。瞬子同调背景下的迭代映射锥构造由 Scaduto [Sca15，第 6] 节描述。接下来，我们注意到，瞬子 Floer 同调上的 $\mu(R)$ 和 $\mu(p)$ 算子可以与迭代映射锥构造交织进行。这是因为根据备注 2.2，这些算子可以用普通协边映射来解释。由于 R 与用于构造迭代映射锥的 2-柄附着球面不相交，用于构造迭代映射锥的度量构造可以延拓，从而在迭代映射锥上得到超立方体态射 $\mu(R)$ 和 $\mu(p)$ 。此外，从 $SFH(Y_{0,0}(L))$ 到迭代映射锥的同构，将 $\mu(R)$ 和 $\mu(p)$ 与这些超立方体算子交织在一起。接下来，我们使用第 6.4节中的构造，关于这些超立方体态射取广义特征空间。这就得到陈述中的超立方体。

为方便起见，我们通常也会选择在每个顶点处取同调。我们可以通过以下论证做到这一点：由于每个瞬子链群都是在 $\mathbb{C}$ 上的有限维向量空间，因此它与其同调同伦等价。（事实上，很容易看出，如果 C 是在 $\mathbb{C}$ 上的有限维链复形，那么 C 到其同调之间存在强形变收缩。）我们可以利用超立方体的同调微扰理论（参见 [HHSZ22，第 2.7] 节），找到一个同伦等价的超立方体，并在每个顶点处取同调。

定理 8.1 中的超立方体还可以进一步简化，因为 $Y_{\infty,\infty}(L) = Y$ 不是紧致的，因此其 SHI是平凡的。有关所涉及流形的 Heegaard 图，请参见图 7.3 。

一个重要的观察是，$Y_{1,1}(L)$、$Y_{1,\infty}(L)$ 和$Y_{\infty,1}(L)$ 作为 3-流形都与 Y 微分同胚，但其缝合线有所不同：沿 L的每个分支分别进行一次 Dehn 扭转，框架为 $+1$。这是因为，对具有相对于边界框架的 $+1$框架的边界平行纽结进行 Dehn 手术，相当于沿纽结平行方向进行一次边界 Dehn 扭转。示意图见图8.1。

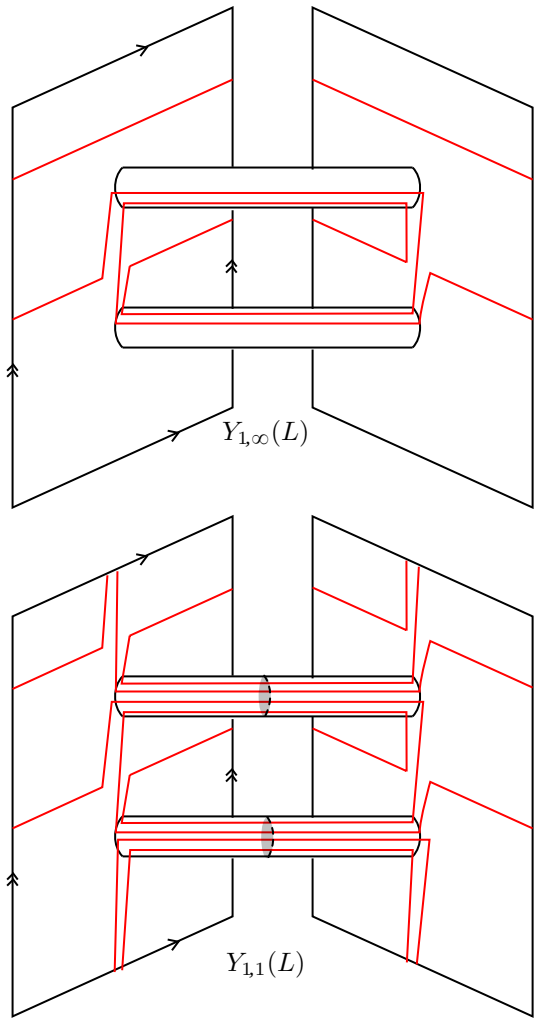


FIGURE 8.1. 流形 $Y_{\infty,1}(L)$ 和 $Y_{1,1}(L)$。图中还展示了分解圆盘 D_1 和 D_2（位于下图中）。

8.2. **分解圆盘。** 现在我们计算定理8.1的迭代映射锥中出现的群和映射。类似引理 7.2，我们有如下结论：

引理 8.2。 图表之间存在超立方体的同伦等价

$$\begin{array}{ccc} SHI(Y_{1,1}(L)) & \xrightarrow{F_{W(L_1^*)}} & SHI(Y_{\infty,1}(L)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F_{W(L_2^*)}} & & \\ SHI(Y_{1,\infty}(L)) & & \end{array} \tag{8.1}$$

和图表

$$\begin{array}{ccc} C_n \otimes D_{m-1} \oplus C_{n-1} \otimes D_m & \xrightarrow{\mathrm{id}\,|\phi_m^- \oplus \phi_n^-|\,\mathrm{id}} & C_n \otimes D_m \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\,|\phi_m^+ \oplus \phi_n^+|\,\mathrm{id}} & & \\ C_n \otimes D_m & & \end{array} \tag{8.2}$$

在上述内容中， C_n 表示 $SHI\,(M_1,\ \Gamma_n)$ 而 D_m 表示 $SHI\,(M_2,\ \Gamma_m)$。

证明。 首先，我们注意到，缝合流形 $Y_{\infty,\,1}(L)$ 和 $Y_{1,\,\infty}$ 可通过向 $(M_1,\ \Gamma_n) \sqcup (M_2,\ \Gamma_m)$附加接触 1-柄得到。特别地，它们的同调群分别与 $SHI(M_1,\ \Gamma_n) \otimes SHI\,(M_2,\ \Gamma_m)$同构。我们将陈述中的超立方体映射从 $SHI(Y_{1,\,\infty})$ 到 $C_n \otimes D_m$ 的分量定义为沿接触 1-柄切割所得到的同构映射。从 $SHI(Y_{\infty,\,1})$ 出发的映射类似地是接触 1-柄映射的逆映射。

定义从 $SHI\,(Y_{11}(L))$ 到 $C_n \otimes D_{m-1} \oplus C_{n-1} \otimes D_m$ 的态射更加复杂。在$Y_{1,\,1}$中，有两个圆盘，它们分别都与分界集相交于四个点。见图 8.1。可以沿这两个圆盘进行分解，但它们与 L_1^* 和 L_2^*相交，这使得分析超立方体微分颇具挑战性。

相反，我们先修改 3-流形，再进行分解。首先，如图 8.2 所示，将四个接触 1-手柄附加到 $Y_{1,\,1}(L)$ 上，并将所得流形记为 $Y'_{1,1}(L)$。类似地，分别将四个接触 1-手柄附加到 $Y_{1,\infty}(L)$ 和 $Y_{\infty,1}(L)$ 上，得到 $Y'_{1,\infty}(L)$ 和 $Y'_{\infty,1}(L)$。为了确定接触 1-手柄的位置，将 $Y'_{\infty,1}(L)$ 看作 $Y'_{1,1}(L)(L_1^*)$ 会比较方便。

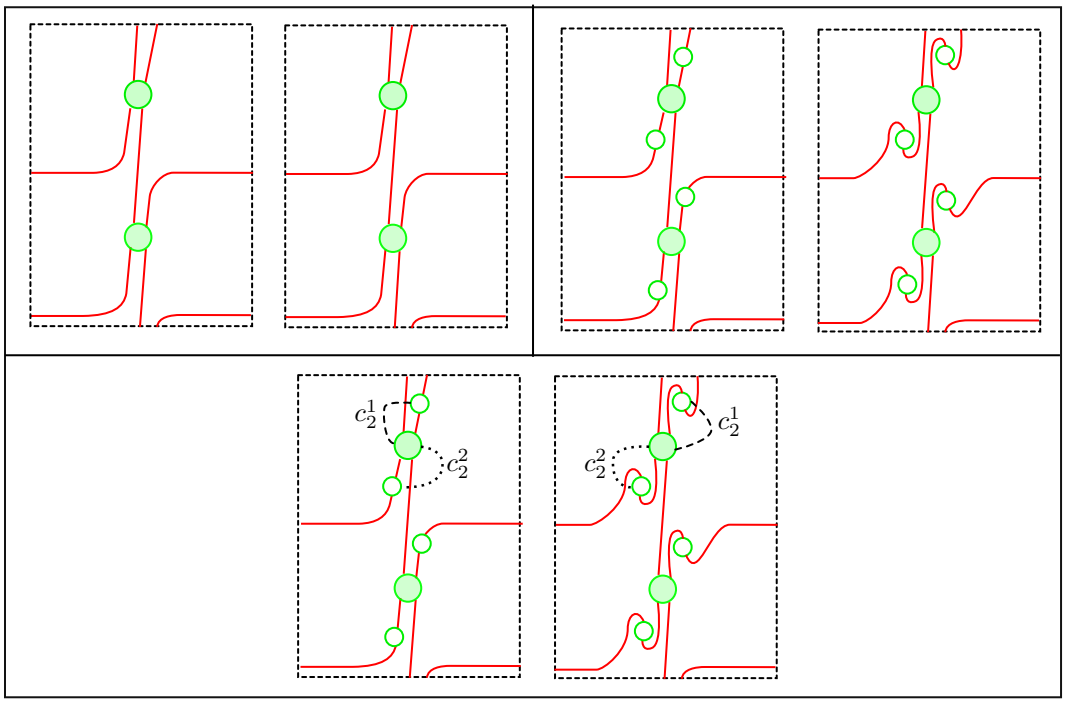


FIGURE 8.2. 左上：$Y_{1,\,1}(L)$。右上：$Y'_{1,\,1}(L)$。底部：一个消去其中一个接触 1-手柄的接触 2-柄。这些把手通过关于竖直轴的镜面反射进行粘合。

由于接触 1-手柄在 Floer 同调上诱导的同构与协边映射相交换，方程（8.1）中的链复形与下面的链复形链同构

$$\begin{array}{ccc} SHI(Y'_{1,1}(L)) & \xrightarrow{-F_{W(L_1^*)}} & SHI(Y'_{\infty,1}(L)) \\ \downarrow{\scriptstyle F_{W(L_2^*)}} & & \\ SHI(Y'_{1,\infty}(L)) & & \end{array}$$

接下来，我们注意到可以用接触 2-柄消去接触 1-柄。接触 2-柄映射定义为一个 4 维 2-手柄映射与一个接触 1-手柄映射的逆映射的复合。由于消去接触 1-柄的接触 2-柄所对应的映射是同构，因此我们可以让 L 穿过接触 2-柄映射进行柄滑动，而不改变超立方体的同伦类型。具体来说，c_2^1，c_2^2，c_2^3，c_2^4 是用于消去前面接触 1-柄的接触 2-柄。令 F_{C_2} 为对全部四个 2-柄进行手术所对应的协边映射，再与 4 个接触 1-柄映射的逆映射复合。因此，下图交换

$$\begin{array}{ccc} SHI(Y'_{1,1}) & \xrightarrow{F_{C_2}} & SHI(Y_{1,1}) \\ \downarrow{\scriptstyle F_{W(J_2)}} & & \downarrow{\scriptstyle F_{W(L_2^*)}} \\ SHI(Y'_{1,\infty}) & \xrightarrow{F_{C_2}} & SHI(Y_{1,\infty}) \end{array}.$$

在上文中，J_2 是通过让 L_2^* 穿过两个接触 2-柄进行柄滑动得到的，如图 8.4 所示。上述图表交换，因为复合映射 $F_{W(L_2^*)} \circ F_{C_2}$ 和 $F_{C_2} \circ F_{W(J_2)}$ 表示拓扑等价的协边。对于 $W(L_2^*)$ 也有类似的图表，并且有类似的映射 $F_{W(J_1)}$。

在 $Y'_{1,1}$ 中，内有两个圆盘 D_1 和 D_2，它们分别与 J_1 和 J_2 不相交，并且每个圆盘都与分界集相交于四个点。根据 [GL19，第 4 条推论3], [BLY20，命题 33]，我们可以沿这两个圆盘进行分解。这样，$Y'_{1,1}$ 的缝合 Floer 同调分解为四个直和项，分别对应于 $D_1 \sqcup D_2$上的四种定向选择。其中两种定向下得到的流形不是紧致的，因此缝合 Floer 同调为零。显然，去掉接触 1-把手后，剩下的两个缝合流形是$(M_1, \Gamma_{n-1}) \sqcup (M_2, \Gamma_m)$和 $(M_1, \Gamma_n) \sqcup (M_2, \Gamma_{m-1})$。见图 8.3。

事实上，Kronheimer 和 Mrowka 构造了一个包含映射 [KM10b，第 6 条定理。 8]

$$C_n \otimes D_{m-1} \hookrightarrow SHI(Y'_{1,1}(L)).$$

他们的工作表明，缝合流形 $(M_1, \Gamma_n) \sqcup (M_2, \Gamma_{m-1})$ 和 $SHI(Y'_{1,1}(L))$ 具有一个公共闭包，并且该包含映射是 Spin^c 结构的限制。我们断言，以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} C_n \otimes D_{m-1} & \hookrightarrow & SHI(Y'_{1,1}) \\ & {\scriptstyle \mathrm{id}\,|\phi_m^+|} \searrow & \downarrow{\scriptstyle F_{W(J_2)}} \\ & & SHI(Y_{\infty,1}) \cong C_n \otimes D_m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_{n-1} \otimes D_m & \hookrightarrow & SHI(Y'_{1,1}) \\ & {\scriptstyle |\phi_n^+|\,\mathrm{id}} \searrow & \downarrow{\scriptstyle F_{W(J_2)}} \\ & & SHI(Y_{\infty,1}) \cong C_n \otimes D_m \end{array},$$

并且与之类似的图表具有交换性 $F_{W(J_1)}$（但使用负旁路映射而非正旁路映射）。上述图表的交换性通过图8.4所示的操作得以证明。在图中，我们展示了沿 J_1 和 J_2 分解后纽结分支 D_1 和 D_2的情形。我们按照箭头所示对接触 1-柄进行柄滑动。完成这些操作后，J_1 变为负旁路的 2-手柄的附着圈，而 J_2 变为正旁路的附着圈。□

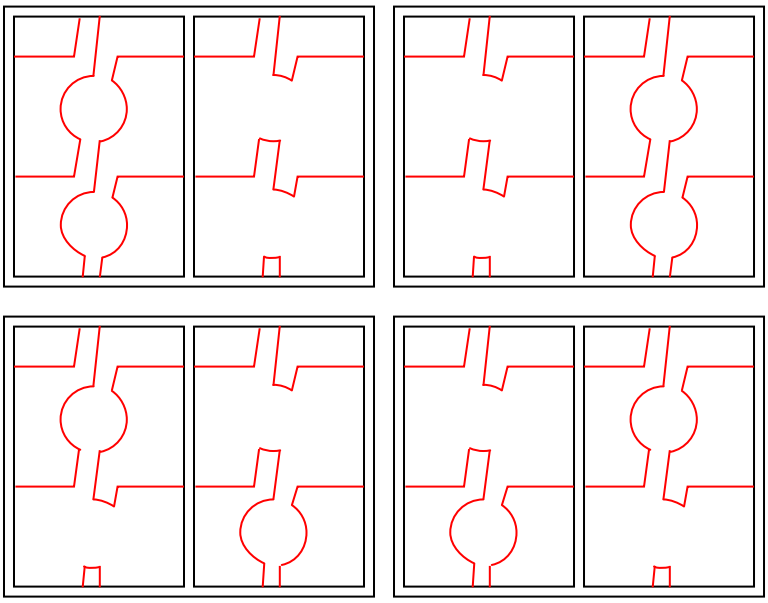


FIGURE 8.3. 将 $Y_{11}(L)$ 在 D_1和 D_2上分解后可能得到的分界集。底部的两个分界集包含零伦闭曲线，因此不是紧致的。

注8.3。将特定的 2-手柄映射认定为正旁路或负旁路，需要选择纽结 K的定向。注意，引理8.2中的复形与 K_i的定向选择无关，因为正旁路和负旁路以对称方式出现。

9. GRADINGS

本节的主定理如下：

定理 9.1。 （瞬子、单极子、*Heegaard Floer*）极限 *Floer* 同调 $HFK^-(K_1\#K_2)$与导出张量积相同

$$HFK^-(K_1)\,\widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]}\,HFK^-(K_2)$$

作为分次群。

在上述情形中，若 M 和 N 是 $\mathbb{F}[U]$上的 Alexander 分次模，则赋予导出张量积 $M\,\widetilde{\otimes}\,N$ Alexander 分次

$$\mathrm{Cone}(U\otimes \mathrm{id}-\mathrm{id}\otimes U'\colon M\otimes N[-1]\to M\otimes N).$$

上述定理证明中的主要技术步骤是以下结果：

命题 9.2。 关于下述分次以及方程 (9.2)所给出的以下移位，拟同构

$$X_{n,\,m}=\ SHI\left(Y_{0,\,0},\ \Gamma_{n+m},\ S^{\tau(n+m)}_{n+m}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} & & (C_n\otimes D_{m-1}\oplus C_{n-1}\otimes D_m)[-1] & \longrightarrow & C_n\otimes D_m \\ & & \downarrow & & \\ & & C_n\otimes D_m[-1] & & \end{array} \tag{9.1}$$

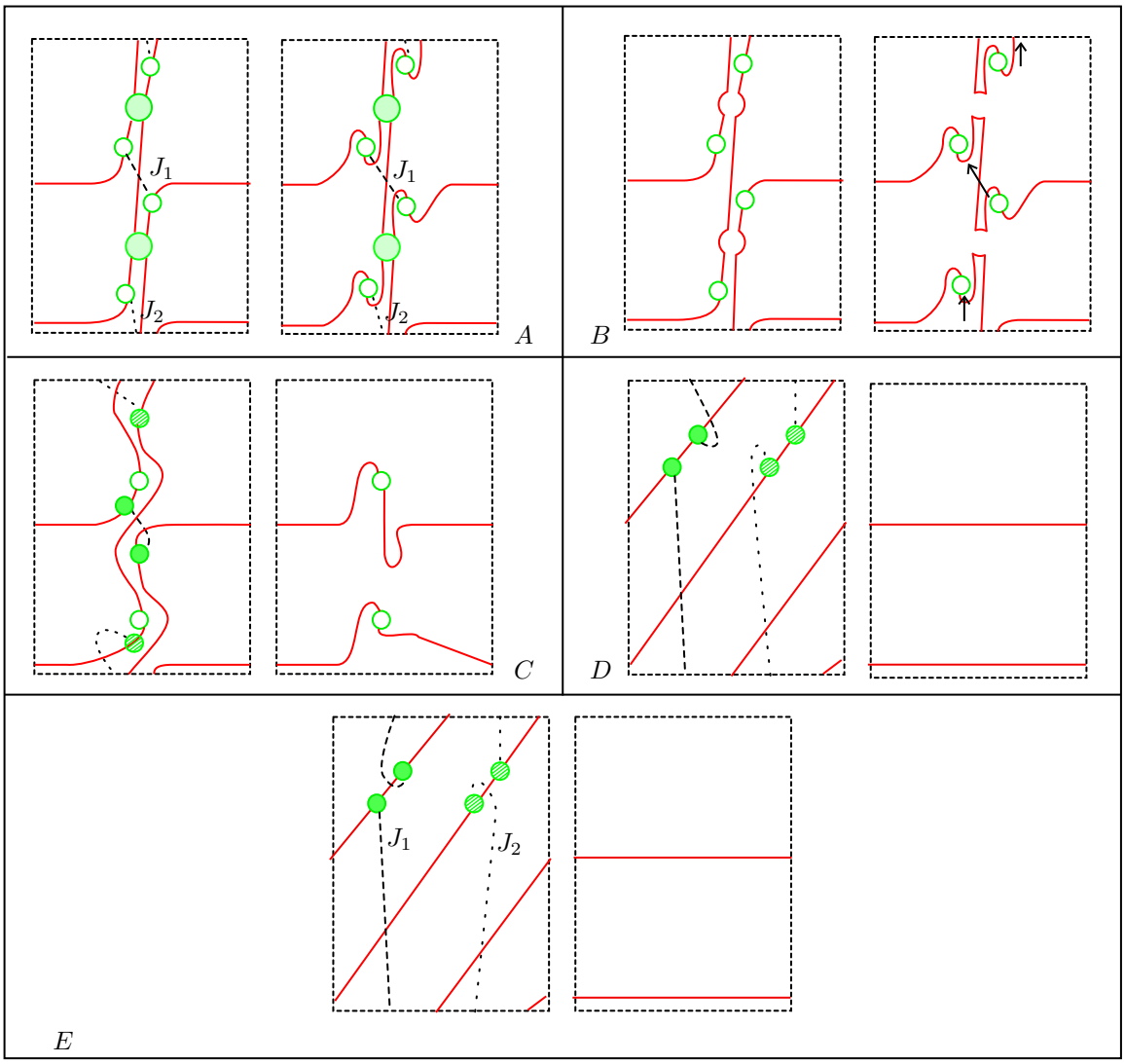


FIGURE 8.4. 圆圈表示 1-柄。空心圆圈始终与镜像行圆圈粘合。A：流形 $Y'_{1,1}(L)$ 以及纽结 J_1 和 J_2。B：沿 D_1 和 D_2分解 $Y'_{1,1}(L)$ 后得到的流形。箭头表示对 1-柄进行柄滑动的方向。C：对 1-柄进行柄滑动后的结果。D：通过同伦和删除接触 1-柄得到的表示。E：沿接触 1-柄的子午线进行 Dehn 扭转，将曲面框架 -1 改为曲面框架 0。

由迭代映射锥构造得到的映射保持分次。在上述内容中，$\tau\colon\ \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 是函数 $\tau(x)=0$，当 x 为奇数时，而当 $\tau(x)=1$ 为偶数时则为 x。

在上述内容中，如果 M是一个向量空间，则 $M[n]$表示分次向量空间 $M\otimes\mathbb{F}_{(n)}$，其中$\mathbb{F}_{(n)}\cong\mathbb{F}$，集中在分次 n。

现在我们描述 $SHI(Y_{0,0}(L),\Gamma_{n+m})$ 上的一种分次，它与引理 8.2中的同构相容。回顾

$$C_n := SHI(Y\backslash\nu(K_1),\Gamma_n) \quad \text{and} \quad D_m := SHI(Y\backslash\nu(K_2),\Gamma_m).$$

根据 [Li21]，$SHI(Y_{0,0}(L), \Gamma_{n+m})$、$C_n$、$C_{n-1}$、$D_n$ 和 D_{n-1} 中的每一个都具有自然的 Alexander 分次，并且与直极限构造相容，即正旁路映射保持分次，而负旁路映射将分次平移 -1。特别地，$\varinjlim C_n \cong HFK^-(Y, K)$ 作为一个分次 $\mathbb{F}[U]$-模，以及类似地，对于 D_n 和 $SHI(Y_{0,0}(L), \Gamma_{n+m})$。

更一般地回顾一下，Li 的构造为任意选定的 Seifert 曲面定义了 Alexander 分次。如果 $n \geqslant 0$，我们将 $S_n \subseteq Y \backslash \nu(K)$ 记作一个与 Γ_n 交于 $2n$ 个点且各交点均为正的 Seifert 曲面。如果 $\tau \in \mathbb{Z}$，我们将 S_n^τ 记作曲面 S_n，它经过 τ 次代数稳定化。更多背景请参见第 9.1 小节。

9.1. 分次背景。 Baldwin 和 Sivek [在 BS22 第 3]节中定义了一个与适当嵌入曲面 $S \subseteq M$相关的缝合单极子同调和瞬子同调分次，其中∂S 是连通的，且与缝合线交于两点。Li[在 Li21 第 3] 节中将他们的构造推广到 ∂S 连通且与缝合线交于 $2n$ 个点的情形。Kavi[在 Kav19] 中进一步将这一构造推广到 ∂S 不连通的情形。本节回顾分次的一些性质。

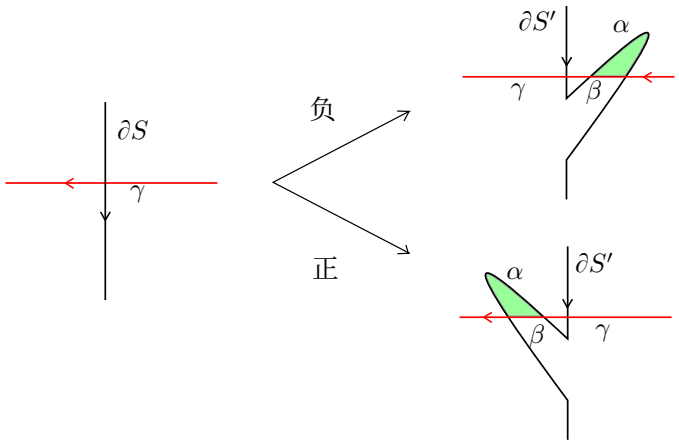


FIGURE 9.1. S的正稳定化和负稳定化。此处，α 和 β 构成阴影双边形的边界。

定义9.3。 设 (M, γ) 是一个平衡缝合流形，且 S 是一个定向的适当嵌入曲面。S 的一个稳定化是另一个曲面 S'，它通过对 S 施行同伦以产生一对新的交点而得到，使得

$$\partial S' \cap \gamma = (\partial S \cap \gamma) \cup \{p_+, p_-\}.$$

我们要求存在弧 $\alpha \subseteq \partial S'$ 和 $\beta \subseteq \gamma$，它们分别相对于$\partial S'$ 和 γ具有一致的定向，并且满足以下条件：

(1) 我们有 $\partial\alpha = \partial\beta = \{p_+, p_-\}$。
(2) 曲线 α 和 β 围成一个圆盘 D，使得 $\mathrm{int}(D) \cap (\gamma \cup \partial S') = \varnothing$。

如果可以对 D 进行定向，使得 $\partial D = \alpha \cup \beta$ 作为定向曲线，则称该稳定化为负 稳定化。如果 $\partial D = (-\alpha) \cup \beta$，则称其为正 稳定化。

记 $S^{\pm k}$ 为对 S进行 k 次正稳定化或负稳定化后的结果。有时我们将用 S^- 表示 S^{-1}，用 S^+ 表示 S^{+1}。

引理 9.4 ([Li21，引理 4。2])。设 (M, γ) 是一个平衡缝合流形，且 S 是一个适当嵌入的定向曲面。则下列结论成立：

（*1*）如果沿着 S 或 S^+ 分解 (M, γ)，那么所得的两个平衡缝合流形是微分同胚的。

（2）如果沿着 S^- 分解 $(M、\gamma)$，那么所得的平衡缝合流形 $(M'、\gamma')$ 不是紧致的，因为 $R_+(\gamma')$ 和 $R_-(\gamma')$ 都是可压缩的。

定义9.5。设 (M,γ) 是一个平衡缝合流形，且 $S\subseteq M$ 是一个适当嵌入的曲面。进一步设 ∂S 与 γ 横截相交。若 S 满足 ∂S 的每个分支都与 γ 相交，且数值 $(\frac{1}{2}|S\cap\gamma|-\chi(S))$ 为偶整数，则称其为可容许的。

Kavi [Kav19]和 Li [Li21 的定理5.5] 证明了，对于固定的定向可容许曲面$S\subseteq M$，分次 $SHI(M,\gamma,S)$ 是良定义的。

现在考虑 M 为结补空间且 γ 为纵向缝合线的情形。为了在 $HFK^-(Y,K)$ 上构造 Alexander 分次，Li [Li21] 定义了如下分次平移：

$$SHI(Y\backslash\nu(K),\Gamma_n,S_n^{\tau(n)})[\sigma(n)]$$

其中，

$$\sigma(n)=-\frac{n-1+\tau(n)}{2}. \tag{9.2}$$

当 n 为偶数时为 $\tau(n)=1$，当 n 为奇数时为 $\tau(n)=0$。在此平移下，正旁路映射ϕ_n^+保持分次，而负旁路映射 ϕ_n^- 使分次平移 -1。Li [Li21]将 $HFK^-(Y,K)$ 定义为以下有向系统的直接极限：

$$\cdots SHI(Y\backslash\nu(K),\Gamma_n,S_n^{\tau(n)})[\sigma(n)]\xrightarrow{\phi_n^+}SHI(Y\backslash\nu(K),\Gamma_{n+1},S_n^{\tau(n+1)})[\sigma(n+1)]\cdots.$$

负旁路映射 ϕ_n^-在 $HFK^-(Y$上诱导 $K)$ U作用。

现在回顾正稳定化和负稳定化对分次的影响，相关结果证明于[Li21，命题 4.17] 以及 [GL19，命题 4.1]：

定理 9.6。设 S 是平衡缝合流形 $(M$中的一个容许曲面 $\gamma)$。假设 T由 S经过 p 次正稳定化和 q 次负稳定化得到，其中 $p-q=2k$。那么对于任意 $i\in\mathbb{Z}$,

$$SHI(M,\gamma,S,i)=SHI(M,\gamma,T,i+k).$$

我们还将使用上述结果的一个推广，该推广归功于 Wang [Wan20，引理 4.42]：

定理 9.7。设 S 和 T 是平衡缝合流形 $(M$中的容许曲面 $\gamma)$，且二者属于同一个相对同调类。假设 ∂T 和 ∂S 不相交，并且 $\partial T-\partial S$ 是 F的一个子曲面 ∂M的边界，其中 F的定向与 ∂M的定向一致。那么 S和 T在 $SHI(M,\gamma)$上确定相同的相对 $\mathbb{Z}$-分次。特别地

$$SHI(M,\gamma,S,i)=SHI(M,\gamma,T,i+k)$$

其中 $k=\chi(F\cap R_-(\gamma))-\chi(F\cap R_+(\gamma))$.

9.2. 定理 9.2 的证明概述。现在我们概述定理 9.2 的证明。回想一下，陈述中出现的拟同构 $X_{n,m}$ 是两个映射 $F_{n,m}$ 和 $I_{n,m}$ 的复合。映射 $F_{n,m}$ 是定理 8.1 中描述的同伦等价，而映射 $I_{n,m}$ 是定理 8.2 中描述的同伦等价。我们将在这些映射的定义域和余域上定义分次平移，使这些映射保持分次。为定义这些平移，回想一下，$\sigma\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 是公式（9.2）中定义的函数。定义 $\zeta(n,m)=\sigma(n)+\sigma(m)$。

命题 9.8。 映射 $F_{n,\ m}$（在下图中以虚线箭头表示）相对于下方所示的分次保持分次：

$$F_{n,m} = \begin{array}{ccccc} SHI(Y_{0,0}(L))[\sigma(n+m)] & & & & \\ & \searrow^{F} & & \searrow^{h} & \\ & & SHI(Y_{1,1}(L))[\sigma(n+m)] & \longrightarrow & SHI(Y_{1,\infty}(L))[\sigma(n+m)] \\ & \searrow_{j} & \downarrow & & \\ & & SHI(Y_{\infty,1}(L))[\sigma(n+m)] & & \end{array} \tag{9.3}$$

在方程 (9.3)中的每个缝 *Floer* 复形上，我们使用由 *Seifert* 曲面 $S^{\tau(n+m)}_{n+m}$ 诱导的适当嵌入曲面 $K_1\#K_2$来定义分次，该曲面与缝合线 Γ_{n+m} 相交于$2(n+m+\tau(n+m))$ 个点。

接下来，我们考虑映射 $I_{n,\ m}$:

命题 9.9。 映射 $I_{n,\ m}$（如下图中的虚线箭头所示）相对于下方所示的分次平移保持分次：

$$\begin{array}{ccccc} SHI(Y_{1,1}(L))[\sigma(n+m)] & & \longrightarrow & & SHI(Y_{1,\infty}(L))[\sigma(n+m)] \\ \downarrow & \searrow^{i_{1,1}} & & & \\ SHI(Y_{\infty,1}(L))[\sigma(n+m)] & & & \searrow^{i_{1,\infty}} & \\ & \searrow_{i_{\infty,1}} & & & \\ & & C_n\otimes D_{m-1}[\zeta(n,m-1)-1]\oplus C_{n-1}\otimes D_m[\zeta(n-1,m)-1] & \rightarrow & C_n\otimes D_m[\zeta(n,m)] \\ & & \downarrow & & \\ & & C_n\otimes D_m[\zeta(n,m)-1] & & \end{array} \tag{9.4}$$

在方程 (9.4)中 $i_{1,\ 1}$、 $i_{\infty,\ 1}$ 和 $i_{1,\ \infty}$ 的映射定义域上，我们使用由 *Seifert* 曲面 $S^{\tau(n+m)}_{n+m}$ 诱导的分次。在 $i_{1,\ 1}$的余域上，我们在直和项 $C_{n-1}\otimes D_m$ 上使用分次曲面 $S^{\tau(n-1)}_{n-1}\sqcup S^{\tau(m)}_m$，在直和项 $C_n\otimes D_{m-1}$上使用分次曲面 $S^{\tau(n)}_n\sqcup S^{\tau(m-1)}_{m-1}$。在 $C_n\otimes D_m$上，我们使用分次曲面 $S^{\tau(n)}_n\sqcup S^{\tau(m)}_m$。

命题 9.8 和 9.9 的证明将在第9.3节和第 9.4节分别给出。假设命题 9.8 和 9.9成立，我们可以将方程 (9.3) 和 (9.4) 中的图表叠放起来，并使用方程 9.2 中的移位，从而得到映射 $X_{n,\ m}$ 相对于定理 9.2中所述的移位保持分次。我们的证明将聚焦于 m 和 n 为奇数的情形。其他奇偶性也可以类似处理。

9.3. **分次与** $F_{n,\ m}$。 在本小节中，我们证明命题 9.8。引理 9.10 中，我们将描述用于定义方程 ($F_{n,\ m}$ 中的映射的配边 9.3)。命题 9.8 将很快由此描述推出。

引理 9.10. 设 F， j 和 h 是 $F_{n,\ m}$的分支，如方程 (9.3)中所标记。

(1) 映射 F 计算的是相对于在通过沿 L_1 和 L_2 的子午线 L^*_1 和 L^*_2 上附加两个 -1 带框架的 *2*-柄而得到的协边上的固定度量而言的指标 0 瞬子。*(2)* 映射 j 是两个映射之和。这两个直和项都是两个映射的复合。每个映射计算的是某些 *2*-柄协边上的指标 *0* 或 -1 瞬子。在两个直和项中，相应协边的复合都是自然配边

从 $Y_{0,\ 0}$ 到 $Y_{1,\ \infty}$，其构造为：沿 L_1 的一条子午线 L_1^* 附加一个 -1 带框架的 *2*-柄，沿 L_2 的一条子午线 L_2^* 附加一个 -1 带框架的 *2*-柄，并沿 L_2^* 附加一个 -1 带框架的子午线 L_2^*。*(3)* 映射 h 是两个映射的复合，其中每个映射都计算某些 *2*-柄协边上的指标 *0* 或指标 -1 瞬子。相应协边的复合是从 $Y_{0,\ 0}$ 到 $Y_{\infty,\ 1}$的自然配边，其构造为：沿 L_2 的一条子午线 L_2^* 附加一个 -1 带框架的 *2*-柄，沿 L_1 的一条子午线 L_1^* 附加一个 -1 带框架的 *2*-柄，并沿 L_1^* 的一条子午线 L_1^* 附加一个 -1 带框架的 *2*- 柄。

证明。 方程（$F_{n,\ m}$ 中的映射 9.3）是两个拟同构的复合，

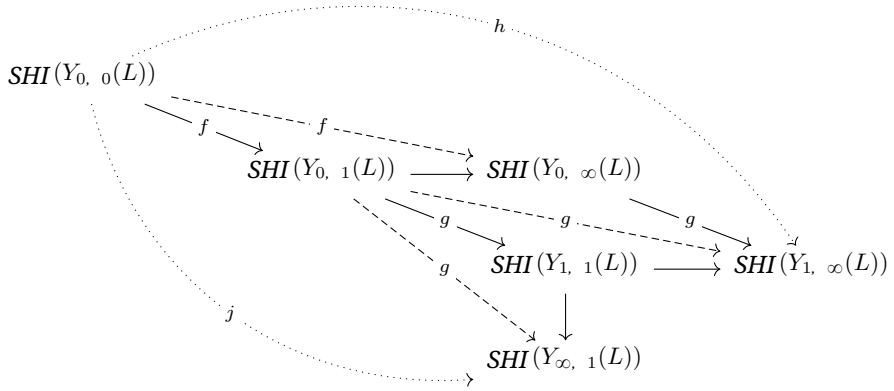
$$f\colon SHI(Y_{0,0}(L)) \to \mathrm{Cone}\left(SHI(Y_{1,0}(L)) \longrightarrow SHI(Y_{\infty,0}(L)) \right) \tag{9.5}$$

and

$$g\colon \mathrm{Cone}\left(SHI(Y_{1,0}(L)) \longrightarrow SHI(Y_{\infty,0}(L)) \right) \to \mathrm{Tot}\begin{pmatrix} SHI(Y_{1,1}(L)) \longrightarrow SHI(Y_{1,\infty}(L)) \\ \downarrow \\ SHI(Y_{\infty,1}(L)) \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

这里，Tot 表示图表的全空间，也就是说，我们将整个图表视为一个单独的链复形。因此，我们可以将 $F_{n,\ m}$ 视为如下图所示的复合：

$F_{n,m} =$



(9.7)

在方程 (9.7) 中，实线箭头表示在固定度量下，计数相应协边中指标为 0 的单极子（分别为瞬子）的映射；虚线箭头表示在单参数度量族下，计数相应协边中指标为 -1 的单极子（分别为瞬子）的映射。 □

注 9.11. 在 Heegaard Floer 情形中， F 是全纯三角形映射的复合。映射 h 和 j 是全纯四边形映射与全纯三角形映射的复合之和。

现在我们可以证明命题9.8：

命题的证明 *9.8*。 考虑来自方程（9.5）的映射 f。映射 f 是两个映射之和，即 $f_{(0,\ 0),\ (0,\ 1)}$ 和 $f_{(0,\ 0),\ (0,\ \infty)}$，如下图表所示

$$f = \begin{array}{ccc} & SHI(Y_{0,0}(L)) & \\ & \Big| \quad \searrow^{f_{(0,0),(0,\infty)}} & \\ \swarrow_{f_{(0,0),(0,1)}} & & \\ SHI(Y_{0,1}(L)) & \longrightarrow & SHI(Y_{0,\infty}(L)) \end{array} \tag{9.8}$$

映射$f_{(0,\ 0),\ (0,\ 1)}$是通过沿 L_2的子午线 L_2^* 附加一个 -1 带框架的 2-柄而得到的协边映射。可以很容易地使 2-柄的附加圆与分次曲面 $S_{n+m}^{\tau(n+m)}$ 不相交。因此，该曲面在底层配边中得以保留，结果映射 $f_{(0,\ 0),\ (0,\ 1)}$ 保持分次。更多详细信息请参见 [GLW19，命题 1。12]

现在我们考虑映射

$$f_{(0,0),(0,\infty)}\colon SHI(Y_{0,0}(L)) \to SHI(Y_{0,\infty}(L)).$$

尽管映射 $f_{(0,\ 0),\ (0,\ \infty)}$ 是通过对多个协边上的解进行计数得到的，但我们注意到，每个协边在拓扑上都是通过沿着与分次曲面 $S_{n+m}^{\tau(n+m)}$ 不相交的纽结附加四维 2-手柄而得到的。因此，我们关于普通协边映射 $f_{(0,\ 0),\ (0,\ 1)}$ 的论证同样适用于映射 $f_{(0,\ 0),\ (0,\ \infty)}$。类似地，我们可以论证，方程（9.6）中的映射也保持分次。因此，映射$F_{m,\ n}$ 保持分次，因为它是通过复合保持分次的映射得到的。 □

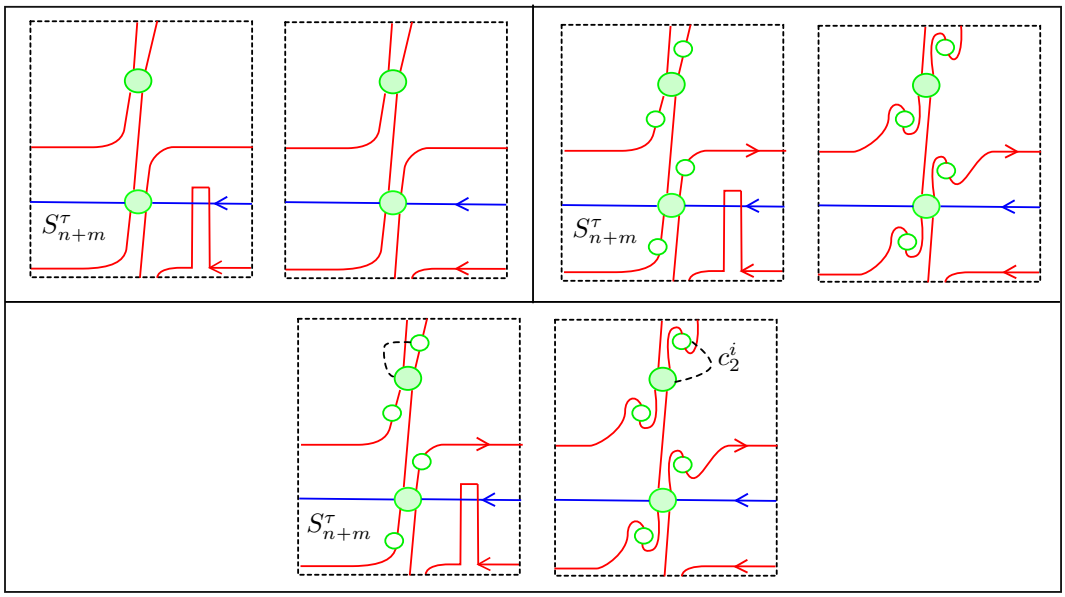


FIGURE 9.2. 图 8.2 中接触手柄操作所涉及的分次曲面 8.2 用于构造 $SHI(Y_{1,\ 1}(L),\ S^{\tau}_{n+m})$ 与$SHI(Y'_{1,\ 1}(L),\ S^{\tau}_{n+m})$之间的同构。在图表中，$n$和 m均为奇数，因此 $\tau = 1$。

9.4. **分次与** $I_{n,\ m}$。 现在我们计算映射 $I_{n,\ m}$ 所引起的分次变化，并证明命题 9.9。

命题 9.9的证明。 方程（$I_{n,\ m}$）中的每个分量9.4都是两个映射的复合。每个分量中的第一个映射对应于用于将 $SHI\,(Y_\varepsilon(L))$ 与 $SHI\,(Y'_\varepsilon(L))$识别的接触手柄操作，其中 $\varepsilon \in \{(1,\ 1),\ (\infty,\ 1),\ (1,\ \infty)\}$。每个复合中的第二个映射是由圆盘分解导出的同构。

我们首先注意到，从 $SHI\,(Y_\varepsilon(L),\ S^{+}_{n+m})$ 到 $SHI\,(Y'_\varepsilon(L),\ S^{+}_{n+m})$ 的同构是保持分次的，因为它们是通过附加与分次曲面 S^{+}_{n+m}不相交的接触 1-柄得到的。见图9.2。

现在我们考虑定义 $I_{n,\ m}$ 中由圆盘分解产生的映射。我们首先关注映射 $i_{1,\ 1,\ }$。我们只讨论映射到余域的直和项$C_{n-1} \otimes D_m$ 的分量的分次。映射到 $C_n \otimes D_{m-1}$ 的分量的分次将在

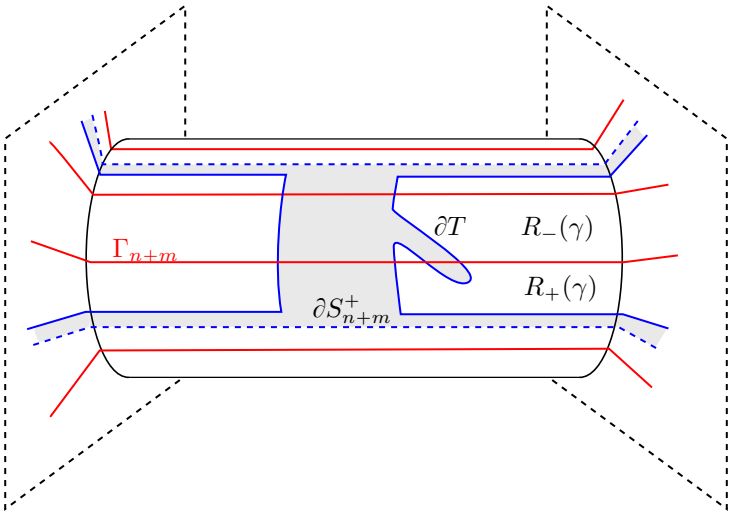


FIGURE 9.3. 管状区域中分级曲面 S^+_{n+m}（实线蓝色）和 T（蓝色虚线）的边界。阴影区域是子曲面 F，其边界为 $\partial T - \partial S^+_{n+m}$。

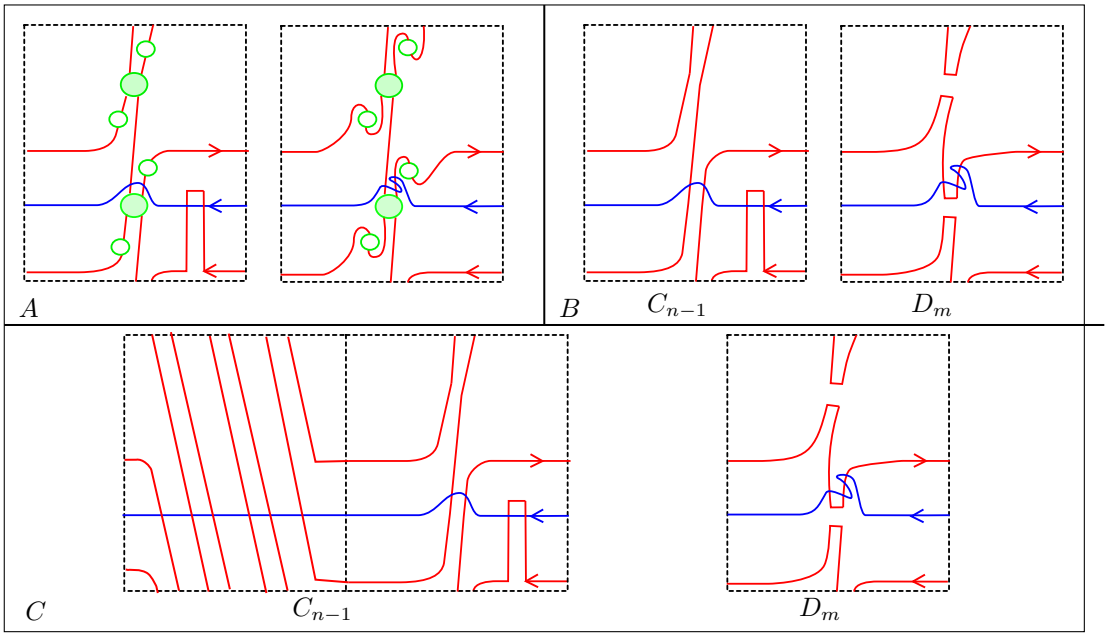


FIGURE 9.4. 蓝色表示曲面 T 在图 9.3 中的边界，红色表示缝合线。A：图 T 9.3中的分级曲面的同伦。B：沿着 $Y'_{1,1}(L)$ 中与 T 不相交的 1-柄的余核圆盘进行分解。C：在 C_{n-1} 和 D_m 处得到的分级曲面。在 C_{n-1} 的图表中，左侧方框表示缝合线的 n 次正扭转，右侧方框表示缝合线的一次负扭转 Γ_{n-1}。该图展示的是 $n = 3$ 的情形。

类似地进行分析。此外，我们着重讨论 n 和 m 均为奇数的情形，其他奇偶性则留给读者处理。注意，如果 n 和 m 均为奇数，那么 $\tau(n+m) = 1$。因此，曲面

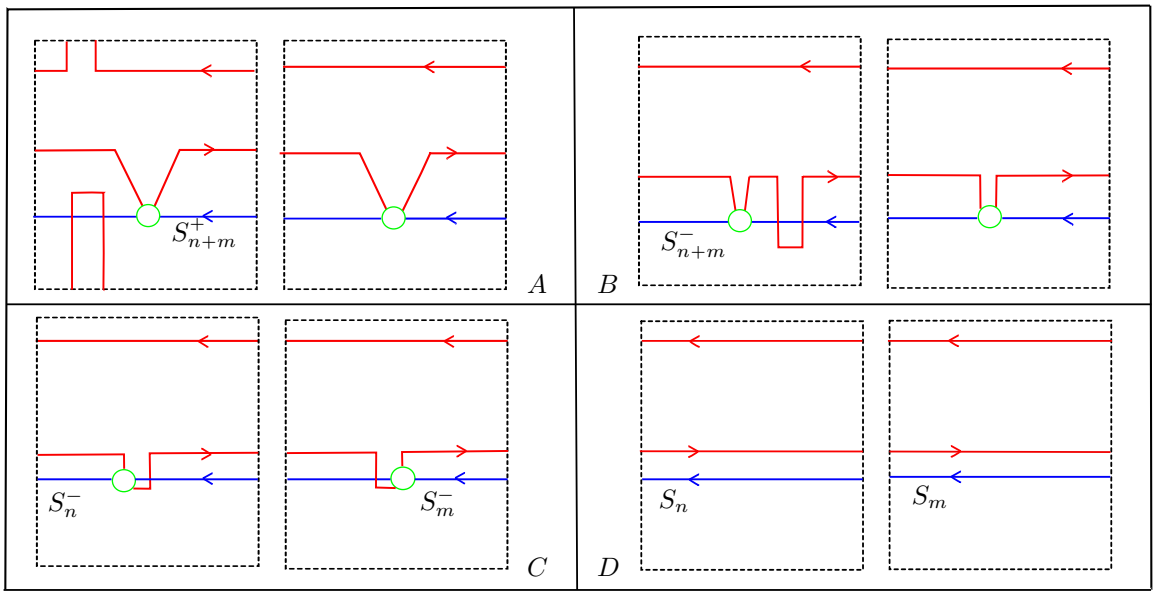


FIGURE 9.5. 映射的分次平移$i_{\infty,\ 1}$ 可以通过上面所示的操作计算得到。从 A 到 B 的分次平移为 -1。从 B 到 C 的分次平移为 0。从 C 到 D 的分次平移为 $+1$。

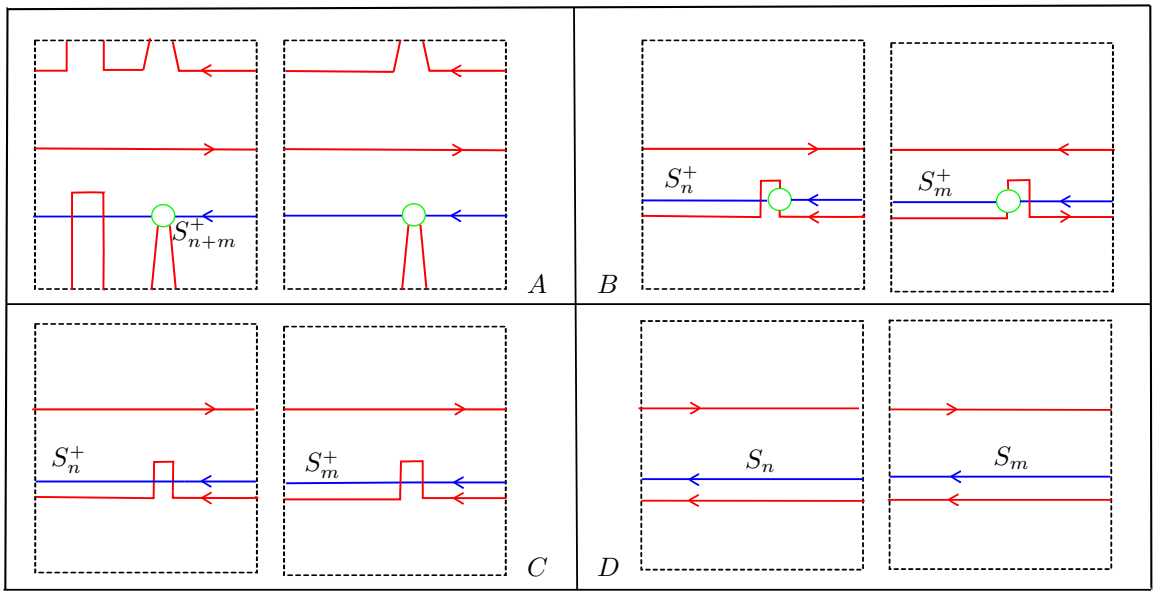


FIGURE 9.6. 映射的分次平移$i_{1,\ \infty}$ 可以通过上面所示的操作计算得到。从 A 到 B 的分次平移为 0。从 B 到 C 的分次平移为 0。从 C 到 D 的分次平移为 -1。

$S^{\tau(n+m)}_{n+m}$ 通过一次正稳定化从 S_{n+m} 得到。我们将此曲面记为 S^+_{n+m}。此外，$\zeta(n,\ m) = 1$。

现在，我们在管状区域内，对分次曲面 S^+_{n+m} 附近的 $\partial Y'_{1\text{进行}1}(L)$ 局部修改，如图 9.3所示。我们将这个新曲面称为 T。我们通过附加一个曲面来构造 T。该曲面

F 到 S^+_{n+m}。曲面 F 是 $\partial Y'_{1\text{的一个子曲面},\,1}(L)$ 其边界为 $\partial T - \partial S^+_{n+m}$。由于 $\chi(F \cap R_-(\gamma)) - \chi(F \cap R_+(\gamma)) = 0$，根据定理 9.7，由 T 诱导的分次与由 S^+_{n+m} 诱导的分次相差 0。

现在我们考察用于定义 $i_{1,\,1}$ 的圆盘分解。原始分次曲面 S^+_{n+m}经过了一次正稳定化，我们假设这发生在复形C_n 和 C_{n-1}对应图表的一侧

我们沿 1-柄的余核切开；此时它们已与分次曲面 T不相交。这见图 9.4的图框 B。图表 C_{n-1} 上的分次曲面与缝合线在同调意义下相交 $2(n-1)$ 次。如果 $n > 0$，它还经过两次正稳定化和一次负稳定化。其中一次正稳定化来自我们对 S^+_{n+m}所做的原始稳定化；另一对稳定化则是由于进行圆盘分解后，缝合线沿负方向多出了一次扭转。见图 9.4的图框 C。

为得到 $S^+_{n-1} \sqcup S_m$，我们对图 9.4 的图框 C 左侧的曲面进行一次正稳定化和一次负稳定化。此外，我们对图表的 D_m 侧进行一次正稳定化和一次负稳定化。因此，根据定理 9.6，相对于分次曲面 $S^+_n \sqcup S_m$，i_1，1 的总分次平移为 0。

现在我们考虑方程（9.4）中的映射 i_∞。我们从流形 Y'_∞开始，$_1(L)$ 并移除与分次曲面不相交的接触 1-手柄 S^+_{n+m}。结果如图 9.5 的图框 A 所示。和之前一样，这不会改变分次。接下来，我们通过删除一次正稳定化并添加一次负稳定化来改变分次曲面。所得曲面 S^-_{n+m} 如图 9.5 的图框 B 所示。根据定理 9.6，从图框 A 到图框 B，分次改变了 -1。接下来，我们对分次曲面的边界进行同伦，以得到图框 C。从图框 B 到图框 C 的分次平移为 0，因为二者同伦。删除接触 1-手柄并撤销两次负稳定化后得到图框 D。删除接触 1-手柄对分次没有影响，因为存在一个闭包，同时也是连接 1-手柄前后流形的闭包，其中两个曲面 S^-_{n+m}和 $S^-_n \sqcup S^-_m$ 延拓为同一个闭曲面。最后，根据定理 9.6，撤销两次负稳定化会使分次平移 1。因此，映射 i_∞，1 是保持分次的。见图 9.5。

考虑方程 $i_{1,\,\infty}$ 中的映射（9.4）。现在从流形 $Y'_{1,\,\infty}(L)$ 开始，去除与分次曲面不相交的接触 1-柄 S^+_{n+m}。结果如图 9.6中的图框 A 所示。与之前一样，这不会改变分次。接下来，我们对分次曲面的边界进行同伦，得到图框 B。从图框 A 到图框 B 的分次平移为 0，因为二者同伦。删除接触 1-柄后得到图框 C。删除接触 1-柄不会影响分次，因为存在一个闭包，它同时是附加 1-柄前后流形的闭包，而两个曲面S^+_{n+m} 和 $S^+_n \sqcup S^+_m$ 都延伸为同一个闭曲面。最后，根据定理 9.6，撤销两次正稳定化会使分次平移 -1。因此，映射 $i_{1,\,\infty}$ 会使分次平移 -1。见图 9.6。

最后，为了完成证明，我们考虑映射 $I_{n,m}$ 的定义域和陪域中由构造直接极限所产生的分次平移。我们将 $\mathrm{SHI}(Y_{1,1}(L),\Gamma_{n+m})$、$\mathrm{SHI}(Y_{\infty,1}(L),\Gamma_{n+m})$ 和 $\mathrm{SHI}(Y_{1,\infty}(L),\Gamma_{n+m})$ 的分次平移 $\sigma(n+m)$。见公式（9.2）。在 $C_n \otimes D_m$ 上，我们将分次平移 $\zeta(n,m) = \sigma(n) + \sigma(m)$。在 $C_n \otimes D_{m-1}$ 上，我们将分次平移 $\zeta(n, m-1)$，而在 $C_{n-1} \otimes D_m$ 上，我们将分次平移 $\zeta(n-1,m)$。我们注意到，当 n 和 m 为奇数时，

$$\sigma(n+m) = \sigma(n) + \sigma(m) - 1, \qquad \sigma(m) = \sigma(m-1), \quad \text{and} \quad \sigma(n) = \sigma(n-1).$$

因此，就直接极限所产生的分次平移而言，映射 $i_{\infty,\,1}$ 和 $i_{1,\,1}$ 使分次平移 1，从而导致主定理中的平移。

与上述关于 $i_{\infty,1}$ 的论证类似，可以看出 $i_{1,\infty}$ 相对于来自 S^+_{n+m} 和 $S_n \sqcup S_m$的分次将分次降低 -1。因此，相对于结 Floer 同调直极限构造中的移位，映射$i_{1,\infty}$ 保持分次不变，从而得到陈述中的移位。这就完成了证明。□

注 9.12。 在本文中，我们取关于正旁路映射的直接极限。在 [Li21], 中，作者取的是关于负旁路映射且缝合线定向相反的直接极限。当我们反转缝合线的定向时，旁路的符号也会随之改变。

现在我们终于可以证明本节的主定理9.1；回顾一下，该定理断言同构

$$HFK^-(K_1\#K_2) \cong HFK^-(K_1) \widetilde{\otimes}_{\mathbb{F}[U]} HFK^-(K_2)$$

在分次群的层面成立。

定理 9.1 的证明。令 $q \in \mathbb{Z}$ 为一个固定整数。若 G 是分次群，记 $G_{>q}$ 为集中在高于 q的分次中的子群。注意，纽结 Floer 群 HFK^- 的 Alexander 分次有上界，且 U 通过 -1作用。我们将证明，对每个$q \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{HFK}^-(K_1\#K_2)_{>q}$同构于 $(\mathrm{HFK}^-(K_1) \widetilde{\otimes} \mathrm{HFK}^-(K_2))_{>q}$。首先，假设选取 N，使得若 $n > N$，则正旁路映射 ϕ_n^+: $\mathrm{SHI}(Y_1\backslash\nu(K_1), \Gamma_n) \to \mathrm{SHI}(Y_1\backslash\nu(K_1), \Gamma_{n+1})$ 在高于 q的分次上是同构。类似地，选取 M，使得若 $m > M$，则对 K_2也有类似结果。此外，我们可以假设 N 和 M 足够大，从而当框架至少为 $N + M$时， $K_1\#K_2$ 对应的正旁路映射在高于 q 的分次上也是同构。

我们已经证明，$SHI(Y_1\#Y_2\backslash\nu(K_1\#K_2))$ 与该图表之间存在分次同构

$$\begin{array}{ccc} C_{n-1}\otimes D_m \oplus C_n \otimes D_{m-1} & \xrightarrow{\phi^-_{n-1}|\,\mathrm{id}\oplus\mathrm{id}\,|\phi^-_{m-1}} & C_n \otimes D_m \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi^+_{n-1}|\,\mathrm{id}+\mathrm{id}\,|\phi^+_{m-1}} & & \\ C_n \otimes D_m & & \end{array} \tag{9.9}$$

其中 $C_n = SHI(Y_1\backslash\nu(K_1),\ \Gamma_n)$ 以及 $D_m = SHI(Y_2\backslash\nu(K_2))$.

由引理 5.2，存在一个保分次链映射

$$\Phi\colon C_{n-1}\otimes D_{m-1} \to \mathrm{Cone}\left(C_{n-1}\otimes D_m \oplus C_n \otimes D_{m-1} \xrightarrow{\phi^+_{n-1}|\,\mathrm{id}+\mathrm{id}\,|\phi^+_{m-1}} C_n \otimes D_m \right),$$

以及一个反向的保分次链映射 Ψ （严格来说，映射到 $C_n \otimes D_m$），它们在高于 q的次数上诱导同调同构。由于微分保持 Alexander 分次，我们得出结论：方程（9.9）中分次高于 q 的子复形与该复形同伦等价

$$\text{锥}\big(\ (\quad HFK^-(K_1)\otimes_{\mathbb{F}} HFK^-(K_2))_{>q+1} \xrightarrow{U_1\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes U_2} (HFK^-(K_1)\otimes_{\mathbb{F}} HFK^-(K_2))_{>q}\big)$$

这与 $(HFK^-(K_1) \widetilde{\otimes} HFK^-(K_2))_{>q}$相一致。证明至此完成。 □

注记 9.13。 请注意，在上文中，我们使用 $\mathrm{Cone}(U_1 + U_2)$ 作为导出张量积的一个模型，而通常考虑的是 $\mathrm{Cone}(U_1 - U_2)$。请注意，旁路映射 $\phi_n^\pm$ 本身也只在相差一个 $\mathbb{C}^\times$. 的非零元乘法意义下才定义良好。我们可以将把 U_2 替换为$-U_2$ 视为改变 $KHI^-(K_2)$ 上的模结构所得的结果， U_2 规定其作用改为αU_2，其中 $\alpha \in \mathbb{C}^\times$。引理 4.8 说明所得的模同构。特别地，$\mathrm{Cone}(U_1 + U_2)$ 与 $\mathrm{Cone}(U_1 - U_2)$同构。

10. Oriented skein exact triangle

在本节中，我们证明瞬子链环同调负版本的 skein 精确三角。这一关系早已在 Heegaard 结与链环 Floer 同调的背景下得到确立[OS04, 定理 8.2]。在瞬子 Floer 同调的背景下，Kronheimer 和 Mrowka [KM10a,

定理 3.1] 证明了瞬子 Floer $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$同调版本中存在类似的正合三角，该版本类似于HFK （在本文中记作KHI）。

本节讨论 [Li21] 和 [GL19 第 6 节2] 中定义的瞬子结与链环 Floer 同调的负版本。对于同调球 Y 中的一个 r 分支链环 L，它具有模 $KHL^-(Y,\ L)$ 上的形式，其中模是定义在 $\mathbb{C}[U_1,\dots,U_r]$ 上的。该模是配备纵向斜率的 $Y\backslash\nu(L)$ 的缝合 Floer 同调的直接极限。U_i 的作用由边界上的负旁路给出，该边界对应于第 i 个链环分支。

skein 正合三角关注 L_+、L_- 和 L_0 内的一组三个链环 Y；它们除一个三维球内的部分外均相同，而在该球内的形态如图 10.1 所示。

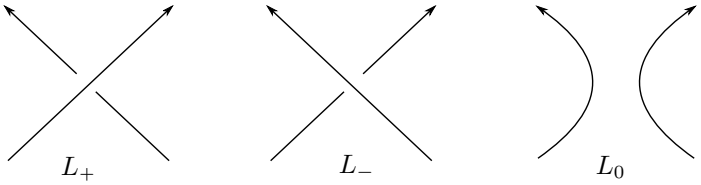


FIGURE 10.1. skein 三元组。正交叉、负交叉及其定向平滑的图表。

定理 10.1。设 L_+、L_- 和 L_0 是如上所述的 Y 中的定向链环。若 L_+ 中指定交叉处相交的两条股属于同一个分支，使得在定向平滑中，与 L_0 的两个不同分支相对应的两条股，则存在一个正合三角

$$\cdots KHI^-(L_+)\xrightarrow{f^-}KHI^-(L_-)\xrightarrow{g^-}KHI^-(L_0)\tilde{\otimes}\mathbb{C}[U_1,U_2]/(U_1-U_2)\xrightarrow{h^-}KHI^-(L_+)\cdots.$$

若它们属于不同的分支，则存在一个正合三角

$$\cdots KHI^-(L_+)\xrightarrow{f^-}KHI^-(L_-)\xrightarrow{g^-}KHI^-(L_0)\otimes W\xrightarrow{h^-}KHI^-(L_+)\cdots$$

其中，$W=\oplus_{s\in\mathbb{Z}}W_s$ 是由下式给出的 *Alexander* 分次模

$$W_s=\begin{cases}\mathbb{C}, & if\ s=0,\ 1\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

此外，f^-、g^- 和 h^- 均保持 *Alexander* 分次。在此，我们赋予 $\mathbb{C}[U_1$ 和 $U_2]$ 由设定 $A(1)=0$ 和 $A(U_1)=A(U_2)=-1$ 所确定的 *Alexander* 分次。

10.1. 瞬子链环同调上的 Alexander 分次。设 L 是闭定向三维流形 Y 中具有 r 个分支的定向零同调链环。设 $L_1,L_2,\dots,L_r$ 是 L 的分支，并设 T_i 是 $Y\backslash\nu(L)$ 中与分支 L_i 对应的边界分支，其中 $i=1,\dots,r$。链环 L 的 Seifert 曲面 S 为每个 T_i 诱导一个框架。我们将由 S 诱导的经线记为 λ_i，并将子午线记为 μ_i。注意，λ_i 与 L_i 的定向方式相同，而 μ_i 的定向满足 $\#(\lambda_i\cap\mu_i)=1$。若 $\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{Z}^r$，令 $\Gamma_{\mathbf{n}}$ 为 $Y\backslash\nu(L)$ 上的缝合线，使得 $\Gamma_{\mathbf{n}}\cap T_i$ 由类为 $\lambda_i-n_i\cdot\mu_i$ 的两条平行简单闭曲线组成。

与纽结情形类似，我们记 $S_{\mathbf{n}}$ 为与缝合线相交于 $\Gamma_{\mathbf{n}}$个 $2(\sum_{i=1}^r n_i)$ 点的 Seifert 曲面。根据 Li [Li21，第 5], 节，若 $(\sum_{i=1}^r n_i)+r-1$ 为奇数，则曲面 $S_{\mathbf{n}}$ 按照定义9.5的意义是可容许的。令 $\mathbf{e}_i$ 为 $\mathbb{Z}^r$中的标准单位向量。于是，我们有如下命题。

命题 10.2。固定任意 $i\in\{1、\dots\dots、r\}$ 以及 $\mathbf{n}=(n_1、\dots\dots、n_r)\in\mathbb{Z}^r$。那么，如果 $(\sum_{i=1}^r n_i)+r-1$ 为偶数，对于任意 $j\in\mathbb{Z}$，有

$$\phi^{\pm}_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}(SHI(Y\backslash\nu(L),\Gamma_{\mathbf{n}},S^{\pm}_{\mathbf{n}},j))\subseteq SHI(Y\backslash\nu(L),\Gamma_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i},S_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i},j)$$

并且如果 $(\sum_{i=1}^r n_i)+r-1$ 为奇数，那么对于任意 $j\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\phi^{\pm}_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}(SHI(Y\backslash\nu(L),\Gamma_{\mathbf{n}},S^{\pm 2}_{\mathbf{n}},j))\subseteq SHI(Y\backslash\nu(L),\Gamma_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i},S^{\pm}_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i},j)$$

证明。 $S_{\mathbf{n}}$ 是可容许的，当且仅当 $(\sum_{i=1}^{r} n_i) + r - 1$ 为奇数。证明现在与 [Li21 的命题 5.5]完全相同。□

现在我们将 τ 的定义从 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 公式（9.2）扩展到 $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ 并定义：

$$\tau(\mathbf{n}) = \begin{cases} 0, & \text{if } (\sum_{i=1}^{r} n_i) + r - 1 \text{ is odd} \\ 1, & \text{if } (\sum_{i=1}^{r} n_i) + r - 1 \text{ is even.} \end{cases} \tag{10.1}$$

根据公式（10.1），令 $S_{\mathbf{n}}^{\tau}$ 为 $S_{\mathbf{n}}$，如果 $\tau(\mathbf{n}) = 0$，并令 $S_{\mathbf{n}}^{\tau}$ 为对 $S_{\mathbf{n}}$进行的正稳定化 T_i，如果 $\tau(\mathbf{n}) = 1$。我们可以利用 $S_{\mathbf{n}}^{\tau}$ 在$SHI\,(Y\backslash\nu(L)$上定义 ***Alexander*** 分次$\Gamma_{\mathbf{n}})$。为了在$KHI^{-}(Y$上定义 ***Alexander*** 分次 $L)$，我们定义如下分次平移：

$$SHI(Y\backslash\nu(L), \Gamma_{\mathbf{n}}, S_{\mathbf{n}}^{\tau(\mathbf{n})}, i)[\sigma(\mathbf{n})]$$

其中：

$$\sigma(\mathbf{n}) = \begin{cases} -\frac{(\sum_{i=1}^{r} n_i)+r-2}{2} + r - 1, & \text{if } \tau(\mathbf{n}) = 0 \\ -\frac{(\sum_{i=1}^{r} n_i)+r-1}{2} + r - 1, & \text{if } \tau(\mathbf{n}) = 1 \end{cases} \tag{10.2}$$

引理 10.3。 在此平移下，正旁路映射 $\phi^{+}_{\mathbf{n},\ \mathbf{n}+\mathbf{e}_i}$ 保持分次，而负旁路映射 $\phi^{-}_{\mathbf{n},\ \mathbf{n}+\mathbf{e}_i}$ 使分次平移 -1。

证明。令 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r$，则有两种可能性：$(\sum_{i=1}^{r} n_i)+r-1$ 为偶数或奇数。假设$(\sum_{i=1}^{r} n_i)+r-1$ 为偶数，则 $\phi^{+}_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}$：SHI $(Y\backslash\nu(L), \Gamma_{\mathbf{n}}, S_{\mathbf{n}}^{\tau(\mathbf{n})}, j) \to$ SHI $(Y\backslash\nu(L), \Gamma_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} S_{+\ i}^{\tau(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i)}$ n e， $j)$根据命题 10.2 保持分次。在考虑公式（10.2）中的平移后，ϕ^{+} n $_i$ 的定义域和余域分别获得相同的平移。现在假设 $(\sum_{i=1}^{r} n_i) + r - 1$ 为奇数，则 $\phi^{+}_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}$：SHI $(Y\backslash(\nu(L), \Gamma_{\mathbf{n}}, S_{\mathbf{n}}^{\tau(n)}, j) \to$ SHI $(Y\backslash\nu(L), \Gamma_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i} S_{+\ i}^{\tau(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i)}$ n e， $j)$ 使分次平移 1。在考虑公式（10.2）中的平移后，我们注意到，相对于定义域，$\phi^{+}_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}$ 的余域获得了-1 平移。因此，在公式（10.2）的平移下，正旁路映射 $\phi^{+}_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}$ 保持分次。类似地，可以论证负旁路映射 all$\phi^{-}_{\mathbf{n},\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}$ 在平移后都 -1使分次平移。因此，引理得证。□

第一作者和 Li [GL19，第 6 节2] 证明了直极限构造定义了一个从范畴 $(\mathbb{N}^r, \leqslant)$ 到群的函子。这里 $(\mathbb{N}^r, \leqslant)$ 表示这样一个范畴，其对象是元组 $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$，并且当且仅当 $n_i \leqslant n_i'$ 对所有 i成立时，存在从 $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ 到 $\mathbf{n}' = (n_1', \ldots, n_r')$的态射。第一作者和 Li 将函子在从 $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ 到 $\mathbf{n}' = (n_1', \ldots, n_r')$ 的态射上的取值定义为正旁路映射的复合。第一作者和 Li 将 $KHI^{-}(Y, L)$ 定义为该系统的直接极限。 U_i 的作用由负旁路附着 ϕ^{-} $_{\mathbf{n}\ i}$给出。

命题 10.4。 利用 $SHI\,(Y\backslash\nu(L), \Gamma_n, S_n^{\tau(\mathbf{n})})[\sigma(\mathbf{n})]$ 上的分次，我们可以在 $KHI^{-}(Y, L)$ 中构造一个 $\mathbb{Z}$ 分次。

证明。 该命题直接由引理 10.3 得出。 □

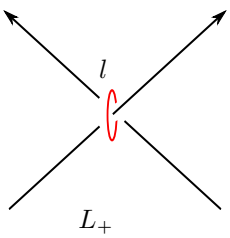


FIGURE 10.2. 链环 L_+，其中一个平凡结 l 环绕着一个交叉，链接数为零。

10.2。 **定理 10.1 的证明**。 设 l 是一个环绕 L_+ 的两条股、且总链接数为零的平凡结，如图 10.2所示。设 Y_{-1} 和 Y_0 是对 Y 分别进行 -1-手术和 0-手术得到的三维流形。我们把 L_- 和 L_0 看作对 L_+ 进行手术 l后得到的纽结。我们注意到，对于任意 $(Y_{-1}\backslash\nu(L_+),\ \Gamma_{\mathbf{n}}) = (Y\backslash\nu(L_-),\Gamma_{\mathbf{n}})$以及 $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^r$，手术正合三角立即给出

$$\cdots SHI(Y\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}}) \to SHI(Y\backslash\nu(L_-),\Gamma_{\mathbf{n}}) \to SHI(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}}) \to SHI(Y\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}})\cdots$$

由于直接极限保持正合性，我们得到一个正合三角

$$\cdots KHI^-(Y,L_+) \to KHI^-(Y,L_-) \to\ KHI^-(Y_0,L_+) \to KHI^-(Y,L_+)\cdots$$

命题 10.5. 设 L_+、 L_- 和 L_0 如 *skein* 正合三角中所述。

(1) 若从 L_0 出发的两条股分别属于不同的链环分支，记作 L_1 和 L_2，则

$$KHI^-(Y_0,L_+) \cong \mathrm{Cone}(U_1-U_2\colon KHI^-(Y,L_0)[-1] \to KHI^-(Y,L_0)).$$

(2) 若从 L_0 出发的两条股属于同一个链环分支，则

$$KHI^-(Y_0,L_+) \cong KHI^-(L_0)\otimes W$$

其中 $W=\oplus_{s\in\mathbb{Z}}W_s$ 是由下式给出的 *Alexander* 分次模

$$W_s = \begin{cases}\mathbb{C}, & \textit{if } s=0,\ 1\\ 0, & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

证明。由于 $\mathrm{KHI}^-(Y_0,L_+)\simeq\varinjlim(\mathrm{SHI}\ (Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}})$，我们进一步注意到，从拓扑上看，缝合流形 $(Y\backslash\nu(L_0),\Gamma_{\mathbf{n}})$ 可由缝合流形 $(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}})$沿一个环带分解得到。这一观察最初由 Kronheimer 和 Mrowka [KM10a] 提出，也是他们证明 [KM10a, 定理 3.1]的关键要素。参见 [KM10a, 图 4]。在使用经向缝合线时，这个环带成为一个乘积环带，因此沿该环带分解可得到相应缝合 Floer 同调之间的同构。在我们的情形中，可以考虑缝合链环补集 $(Y\backslash\nu(L_0),\Gamma_{\mathbf{n}})$，并应用第 7 节中的构造，通过粘合这个环带得到 $(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}''})$。如果来自 L_0 的两条股属于不同的链环分支，那么根据定理 10.7，存在一个保持分次的同构

$$SHI(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}''}) \simeq \mathrm{Cone}\left(\begin{array}{ccc} C_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1}\oplus C_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_2}[-1] & \xrightarrow{\phi^-_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1,\mathbf{n}}\oplus\phi^-_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_2,\mathbf{n}}} & C_{\mathbf{n}}\\ \downarrow{\scriptstyle \phi^+_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1,\mathbf{n}}\oplus\phi^+_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_2,\mathbf{n}}} & & \\ C_{\mathbf{n}}[-1] & & \end{array}\right), \quad (10.3)$$

其中 $\mathbf{n}=(n_1,n_2)$，与定理 1.1 的证明中一样，公式 (10.3) 中的复形可以化简为一个更简单的复形。令 $q\in\mathbb{Z}$ 为一个固定整数，并且像之前一样，如果 G 是一个分次群，则用 $G_{>q}$ 表示集中在高于 q 的分次中的子群。注意，链环 Floer 群 KHI^- 根据命题 10.4 带有 Alexander 分次；根据 Li21 定理 1.1] 的证明中相同的论证，该分次有上界。此外，每个 U_i 都会将分次平移 -1。我们将证明，对每个 $q\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{KHI}^-(Y_0,L_+)_{>q}$ 同构于 $(\mathrm{KHI}^-(L_0)\otimes\mathbb{C}[U_1,U_2]/(U_1-U_2))_{>q}$。首先，我们假设 N 的选取满足：若 $\mathbf{n}>\mathrm{N}$，则正旁路映射$\phi^+_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_i,\mathbf{n}}\colon\mathrm{SHI}\ (Y\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_i}) \to \mathrm{SHI}\ (Y\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}})$ 在高于 q 的分次上是同构，其中$i=1,2$。根据引理 5.2，存在一个保分次链映射

$$\Phi\colon C_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2} \to \mathrm{Cone}(\ C_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_2}\oplus C_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1} \xrightarrow{\phi^+_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_1,\mathbf{n}}\oplus\phi^+_{\mathbf{n}-\mathbf{e}_2,\mathbf{n}}} C_{\mathbf{n}}\ ),$$

以及一个保持分次的链映射 Ψ，方向相反，并且在高于 q 的分次上是同构。由于微分保持 Alexander 分次，我们得出结论：方程（10.3）中分次高于 q 的子复形与该复形同伦等价

$$\mathrm{Cone}\big((C_{\mathbf{n}})_{>q+1} \xrightarrow{U_1-U_2} (C_{\mathbf{n}})_{>q}\big)$$

这恰好是 $(KHI^-(L_0)\otimes\mathbb{C}[U_1,\ U_2]/(U_1-U_2))_{>q}$。因此，定理 1.1 的证明可以相应调整，从而证明

$$KHI^-(Y_0,L_+)\cong \mathrm{Cone}\big(KHI^-(Y,L_0)[-1] \xrightarrow{U_1-U_2} KHI^-(Y,L_0)\big)\ ,$$

其中 U_1 和 U_2 对应于链环 Floer 同调 KHI $^-(Y,\ L_0)$ 上的两个 L_1 -作用，分别对应于 B 内分支 L_2 的两条股线。但这恰好就是$KHI^-(K_0,\ s)\otimes\mathbb{C}[U_1,\ U_2]/(U_1-U_2)$。我们指出，$U_i$ 作用只在相差 $\mathbb{C}^\times$的元素倍乘的意义下定义。尽管如此，根据引理 4.8，将每个 U_i 乘以$\mathbb{C}^\times$中的元素后，得到的 $KHI^-(Y,\ L_0)$模结构彼此同构，因此我们的论证仍能在分次群层面上将映射锥与导出张量积对应起来。

如果来自 L_0 的两条弦属于同一个链环分支，我们将在定理10.7（下文）中证明存在一个保分次同构

$$SHI(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}})\simeq \mathrm{Cone}\left(\begin{array}{ccc} C_{\mathbf{n}'}\oplus C_{\mathbf{n}'} & \xrightarrow{\phi^-_{\mathbf{n}',\mathbf{n}''}\oplus\phi^-_{\mathbf{n}',\mathbf{n}''}} & C_{\mathbf{n}''}[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \phi^+_{\mathbf{n}',\mathbf{n}''}\oplus\phi^+_{\mathbf{n}',\mathbf{n}''}} & & \\ C_{\mathbf{n}''} & & \end{array}\right), \tag{10.4}$$

其中 $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3,\dots,n_r)$、$\mathbf{n}'=(n_1+n_2-1,n_3,\dots,n_r)$、$\mathbf{n}''=(n_1+n_2,n_3,\dots,n_r)$。

与上述情形类似，定理 1.1 的证明可作相应调整，从而证明

$$KHI^-(Y_0,L_+)\cong \mathrm{Cone}\big(KHI^-(Y,L_0) \xrightarrow{U_1-U_2} KHI^-(Y,L_0)[+1]\big)\ . \tag{10.5}$$

现在我们注意到，U_i 作用对应于对 L_0的同一个链环分支进行的正旁路附着。因此，对于某个 $\alpha\in\mathbb{C}^\times$，有 $U_1=\alpha U_2$。我们断言 α 必须为 1。

为了证明 $\alpha=1$，我们考察充分负的 Alexander 分次下映射锥的同调。上述论证表明

$$KHI^-(Y_0,L_+,\mathbf{i})\cong \mathrm{Cone}((1-\alpha)U_1\colon KHI^-(Y,L_0,\mathbf{i})\to KHI^-(Y,L_0,\mathbf{i}+\mathbf{e})) \tag{10.6}$$

其中 $\mathbf{e}$ 是对应于 L_0的分量中的单位向量。我们将在下文的引理 10.6中证明

$$KHI^-(Y_0,L_+,\mathbf{i})\cong I^\#(Y\#^r S^1\times S^2)$$

如果$\mathbf{i}$ 的所有分支都足够负。另一方面，利用 U_i 映射的旁路正合三角，可以直接看出，当 $i_1\ll 0$ 时，映射 U_i 在每个 Alexander 分次上都是同构。特别地，如果 $\alpha\neq 1$，那么方程（10.6）在 Alexander 分次$\mathbf{i}$上的同调将是平凡的，这就产生了矛盾。

因此，方程（10.5）化简为$KHI^-(L_0)\otimes W$，其中 $W=\bigoplus_{s\in\mathbb{Z}}W_s$ 是分次模 le

$$W_s=\begin{cases}\mathbb{C}, & \text{if s=0, 1}\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

□

引理 10.6. 设 L 是闭定向三维流形 Y 中的一个 r 分支链环。令 $\mathbf{i}=(i_1、\dots\dots、i_r)$ 表示 $KHI^-(Y,L,\mathbf{i})$ 中的多重分次。记 $Y(r)$ 为由 Y

删除 r 3 个球并在每个球面分支上放置一条简单闭曲线作为缝合线而得到的缝合流形。于是

$$KHI^-(Y,L,\mathbf{i}) \cong SHI(Y(r)) \cong I^{\#}(Y\#^{r-1}S^1\times S^2)$$

如果$\mathbf{i}$ 足够小。

证明。 注意，对于纽结，该引理已在 [GLW19 的命题 1.13] 中证明。令$\mathbf{n} = (n_1,\dots,n_r)$，并令$\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_r)$。存在一个映射

$$C\colon SHI(Y\backslash\nu(L),\Gamma_{\mathbf{n}}) \to SHI(Y(r))$$

它对应于沿着 L 各分支的子午线附加 r 接触 2-柄。我们声称，如果$\mathbf{i}$ 固定且足够小，并且$\mathbf{n}$ 足够大，那么 C 限制为从$SHI(Y\backslash\nu(L),\Gamma_{\mathbf{n}},\mathbf{i})$ 到$SHI(Y(r))$的同构。

为说明这一点，可以使用 Li 和 Ye 的技巧进行归纳论证，下面略述其思路。我们略述证明。令$\mathbf{n}' = (n_2,\dots,n_r)$，并令 $\mathbf{i}' = (i_2,\dots,i_r)$。存在一个接触 2- 手柄映射

$$C'\colon SHI(Y\backslash\nu(L),\Gamma_{\mathbf{n}}) \to SHI(Y(1)\backslash\nu(L'),\Gamma_{\mathbf{n}'})$$

其中 $L' = L_2\cup\cdots\cup L_r$。由 [LY21，第 4.6] 条命题可知， C'将分次 $\mathbf{i}$映射到分次$\mathbf{i}'$。

接下来，利用与 [LY22，引理 4.26] 中相同的技巧可知：若固定 $i_1 \ll 0$，则对于所有充分大的 n_1，2-手柄映射 C' 将成为从分次 $\mathbf{i}$ 到分次$\mathbf{i}'$的同构。通过归纳即可得到该断言。□

10.3. 分次。现在我们证明定理 10.7，并描述 SHI $(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{m}})$上的一个分次，该分次与定理 10.7 中的同构相容，其中 $m = (m_1,m_2,\dots,m_k)$。令$C_{\mathbf{n}} :=$ SHI $(Y\backslash\nu(L_0),\Gamma_{\mathbf{n}})$，其中 $\mathbf{n} = (n_1,n_2,\dots,n_r)$。注意到 $k-r = \pm1$。随后，我们考虑由粘合一个来自第 7 节的环带所产生的迭代映射锥构造中的同构。根据 [GL19] 和命题 10.4， SHI $(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{m}})$ 和 $C_{\mathbf{n}}$中的每一个都具有自然的 Alexander 分次，该分次与直极限构造相容，即正旁路映射保持分次，而负旁路映射 U_i 使分次移动 -1。特别地，$\varinjlim C_{\mathbf{n}} \cong$ KHI $^-(Y,L_0)$ 作为一个分次的 $\mathbb{C}[U_1,U_2,\dots,U_r]$-模，并且 SHI $(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{m}})$也同样如此。

我们更一般地回顾一下，第一作者与 Li 的构造为任意选择的 Seifert 曲面给出了一个 Alexander 分次。和之前一样，我们用 $S_{\mathbf{n}}\subseteq Y\backslash\nu(K_0)$ 表示一个与 $\Gamma_{\mathbf{n}}$ 几何相交于 $2(\sum_{i=1}^r n_i)$ 个点的 Seifert 曲面。如果 $\tau\in\mathbb{Z}$，我们用 $S^{\tau}_{\mathbf{n}}$ 表示曲面 $S_{\mathbf{n}}$，它在代数意义下稳定化了 τ 次。

本节的主定理如下：

定理 10.7。 设 L_+、 L_- 和 L_0 如 *skein* 正合三角中所述。

（*1*）如果来自 L_0 的两条股线属于不同的链环分支，记为 L_1 和 L_2，则相对于上述分次以及方程 （10.2） 所给出的如下平移，拟同构

$$X_{n_1,\,n_2} = \mathit{SHI}\left(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}''},S^{\tau(\mathbf{n}'')}\right)_{\mathbf{n}''} \tag{10.7}$$

$$\begin{array}{ccc} & & C_{\mathbf{n}} \\ & \nearrow & \\ C_{\mathbf{n}-\mathbf{e_2}}\oplus C_{\mathbf{n}-\mathbf{e_1}}[-1] & & \\ & \searrow & \\ & & C_{\mathbf{n}}[-1] \end{array}$$

由迭代映射锥构造得到的映射保持分次。上述 $\tau\colon \mathbb{Z}^r\to\mathbb{Z}$是方程 (10.2) 中定义的函数，$\mathbf{n} = (n_1,n_2,n_3,\dots,n_r)$, $\mathbf{n}'' = (n_1+n_2,n_3,\dots,n_r)$,$\mathbf{e_1} = (1,0,\dots,0)$ 以及 $\mathbf{e_2} = (0,1,\dots,0)$。

(2) 如果来自 L_0 的两条股属于同一个链环分支，则相对于上述分次以及方程 (10.2)中的以下平移，该拟同构

$$SHI\left(Y_0\backslash\nu(L_+),\Gamma_{\mathbf{n}},S^{\tau(\mathbf{n})}_{\mathbf{n}}\right)$$

$$X_{n_1,n_2}=\qquad\qquad (C_{\mathbf{n}'}\oplus C_{\mathbf{n}'})\longrightarrow C_{\mathbf{n}''}[+1] \tag{10.8}$$
$$\qquad\qquad\qquad

注11.2。 如果将 K 和 K' 替换为链环，我们的证明便不成立。在这种情况下，瞬子链环 Floer 复形对每个链环分支都有一个 U_i 作用。正确的陈述应涉及$KHI^-(L)$上的 A_∞-模结构。

11.1. 代数动机。 本节讨论一个纯代数结果，我们将其用作证明 U 在张量积上的作用公式的模型。尽管我们的证明并不直接调用这一结果，但它是我们论证的概念基础。在此，我们假设读者熟悉 A_∞ 模和双模的概念。关于介绍，请参见 [Kel01]；关于使用我们当前记号的阐述，请参见 [LOT15]。

引理 11.3。 记 $\mathcal{A} = \mathbb{F}[U]$。设 $M_{\mathcal{A}}$ 和 ${}_{\mathcal{A}}N$ 是 A_∞ 模，且 ${}_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{A}}$ 是一个 A_∞-双模，并具有一个严格含单位元的双模态射

$$f_{i,1,j} \colon {}_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{A}} \to {}_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{A}}$$

此外，设以下条件成立：

(1) $P \cong \mathbb{F}[U]$ 作为一个向量空间。此外，P 配备了 *Alexander* 分次，并且结构映射保持 *Alexander* 分次。*(2)* 结构映射 m_0*,1,0* 和 m_1*,1,1* 在 P 上为零，而 m_1*,1,0* 和 m_0*,1,1* 与乘以 U 的普通乘法一致。*(3)* 态射 f_i*,1,*$_j$ 满足 f_0*,1,*$_0 = U$ 、 f_1*,1,*$_0 = 0$ 和 f_0*,1,*$_1 = 0$。

Then

$$M_{\mathcal{A}} \widetilde{\otimes}\, {}_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{A}} \widetilde{\otimes}\, {}_{\mathcal{A}}N \simeq M_{\mathcal{A}} \widetilde{\otimes}\, {}_{\mathcal{A}}N.$$

此外，诱导映射 $\mathrm{id} \widetilde{\otimes} f \widetilde{\otimes} \mathrm{id}$ 与 U 在同调上的作用一致。

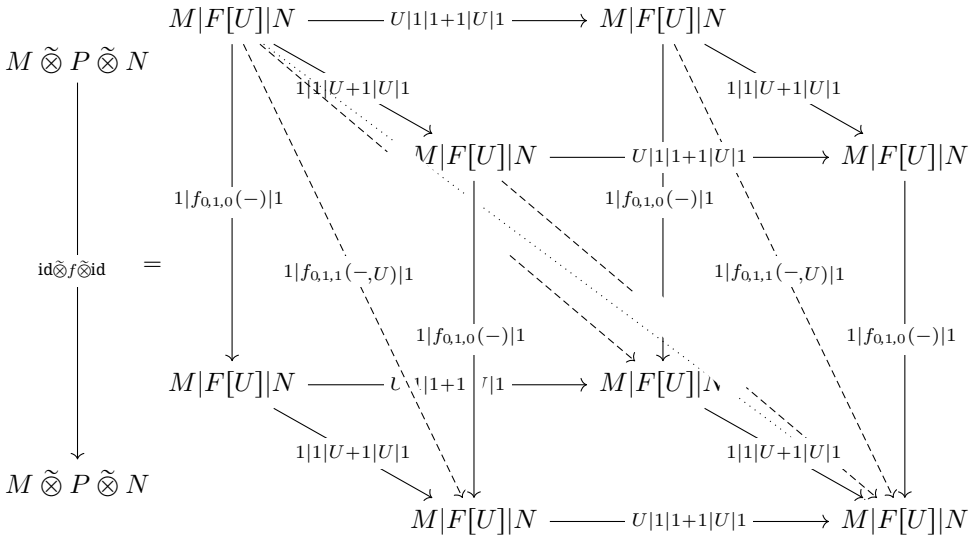
证明。 这里，我们使用了方程（DD 5.1）中所述的导出张量积的类型-DD 模解释，同时相应地将 id id 视为态射的盒式张量积（参见 LOT15，第 节）。通过观察 作为群，可以看出关于 的陈述。底层复形显然同构，而我们关于结构映射 ,$_{1,j}$ 的假设表明微分相同。然而，$M \widetilde{\otimes} \mathbb{F}[U] \simeq M$ 作为 $\mathcal{A}$上的右模，因此结论成立。

现在我们考虑关于 id $\widetilde{\otimes} f \widetilde{\otimes}$id 的断言。我们将证明 id $\widetilde{\otimes} f \widetilde{\otimes}$id 在同调上的作用与 id $\widetilde{\otimes} U \widetilde{\otimes}$id 相同，而这显然足够了。

我们可以将 $M \widetilde{\otimes} P \widetilde{\otimes} N$ 视为如下二维立方体：

$$\begin{array}{ccc} M \otimes \mathbb{F}[U] \otimes N & \xrightarrow{U|1|1+1|U|1} & M \otimes \mathbb{F}[U] \otimes N \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1|1|U+1|U|1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1|1|U+1|U|1} \\ M \otimes \mathbb{F}[U] \otimes N & \xrightarrow{U|1|1+1|U|1} & M \otimes \mathbb{F}[U] \otimes N \end{array}$$

（张量积在 $\mathbb{F}$上取）。根据这一描述，映射 id $\tilde{\otimes}$ f $\tilde{\otimes}$id 具有如下形式：



长虚线箭头为$1|f_{1,1,1}(U,-,U)|1$。注意，我们的假设意味着 $f_{0,1,1}(-,U)$和 $f_{1,1,0}(U,-)$ 均为零。

我们将链复形 $M \tilde{\otimes} P \tilde{\otimes} N$ 视为如下形式

$$M \tilde{\otimes} P \tilde{\otimes} N = (C_2 \to C_1 \to C_0),$$

其中， q 在 C_q 中的指标表示立方体分次。然而，显然映射 $C_2 \to C_1$ 是单射。因此，每个圈都可以写成 C_1 和 C_0中元素的和。关于 f 的假设意味着

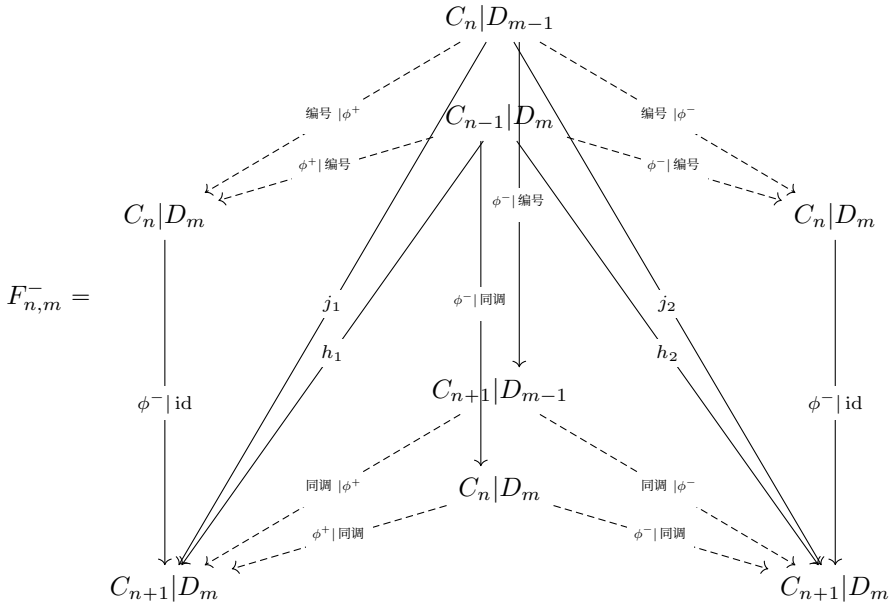
$$(\mathrm{id} \tilde{\otimes} f \tilde{\otimes} \mathrm{id})|_{C_1 \oplus C_0} = (\mathrm{id} \tilde{\otimes} U \tilde{\otimes} \mathrm{id})|_{C_1 \oplus C_0},$$

因此，特别是这两个映射在所有圈上都相同，进而在同调上也相同。 □

11.2. **关于 U作用于连通和**。 本节将介绍一些初步结果，为研究 U 作用于连通和 $K\#K'$的 Floer 同调11.1定理提供铺垫，但这还不足以完成该定理的证明。我们在对应于 K的那部分边界上附加一条正旁路。在复形层面上，这可以理解为沿该方向迭代映射锥时增加一个额外维度。记 ϕ^- 为 $K\#K'$（纵向框架为 $n+m$）的缝合 Floer 同调上的负旁路映射。仿照8.1定理中的论证，可得

$$X_{n+1,m} \circ \phi^- \simeq F^-_{n,m} \circ X_{n,m}$$

其中 $F^-_{n,\ m}$ 的形式如下面图表中的实线箭头所示：



在上文中，

(1) j_1 是 $(1|\phi^+)\circ(\phi^-|1)$ 与 $(\phi^-|1)\circ(1|\phi^+)$之间的同伦。(2) j_2 是 $(\phi^-|\,\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\,|\phi^-)$ 与 $(\mathrm{id}\,|\phi^-)\circ(\phi^-|\,\mathrm{id})$之间的同伦。(3) h_1 是 $(\phi^-|1)\circ(\phi^+|1)$ 与 $(\phi^+|1)\circ(\phi^-|1)$之间的同伦。(4) h_2 是 $(\phi^-|1)\circ(\phi^-|1)$的两个复合之间的同伦。（注意，由于 ϕ^+ 的这两个副本是通过两个不同的把手附加实现的，因此该同伦对应于把手重排。）

接下来，我们观察到上述结论相对于闭包的选择是自然的。也就是说，通过为 K 和 K'选择不同的闭包，我们可以得到两个按上述方式构造的图表之间的同伦等价。通过选择一个非连通闭包

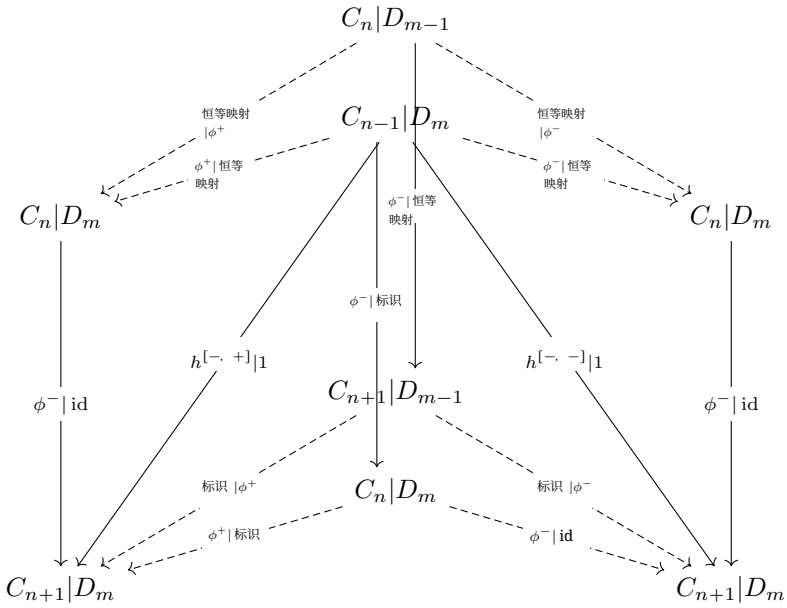
$$(Y\backslash\nu(K))\sqcup(Y'\backslash\nu(K')),$$

我们可以直接令 j_1 和 j_2 为零。事实上，它们都对应于重新排列附着在缝合三流形不同分支上的 4 维把手。因此，可以取一个将这两种把手附着方式联系起来的一参数度量族，并令其为常值族。特别是，基于横截性方面的考量，不会计入任何解。

此外， h_1 和 h_2 对应于对底层三流形的单个分支上的2-手柄进行重新排序。因此，我们可以写成 $h_1 = h^{[+,\ -]}|1$ 和 $h_2 = h^{[+,\ +]}|1$，其中 $h^{[+,\ -]}$ 和 $h^{[+,\ +]}$ 是对应于 $Y\backslash\nu(K)$上把手重排的典范同伦。

我们得到，$F^-_{n,\ m}$ 可以简化为以下图表。

$F^-_{n,m} =$



应用第 5.2 节中顶面与导出张量积之间的同伦等价，我们得到

$$\mathrm{Cone}(F^-_{n,m}) \simeq \begin{array}{ccccc} C_n|D_m & \longrightarrow & & \xrightarrow{\phi^+|\phi^- - \phi^-|\phi^+} & C_{n+1}|D_{m+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi^-|1} & & \searrow{\scriptstyle h^{[-,+]}|\phi^- + h^{[-,-]}|\phi^+} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^-|1} \\ C_{n+1}|D_m & \longrightarrow & & \xrightarrow{\phi^+|\phi^- - \phi^-|\phi^+} & C_{n+2}|D_{m+1} \end{array}$$

11.3. **定理 11.1 的证明。** 我们将 $K\#K'$ 视为 K、平凡结u和 K'的三重张量积。我们对 u应用 U 作用（即附加一个正旁路）。我们将 $\mathcal{U}_\ell$ 记作 u 带有纵向框架 ℓ的对应缝合复形。

将第 11.2 节中的论证执行两次，我们得到图表

$$\begin{array}{ccccc} C_n|\mathcal{U}_\ell|D_m & \longrightarrow & & \xrightarrow{\phi^+|\phi^-|1 - \phi^-|\phi^+|1} & C_{n+1}|\mathcal{U}_{\ell+1}|D_m \\ \downarrow{\scriptstyle 1|\phi^+|\phi^- - 1|\phi^-|\phi^+} & & \searrow{\scriptstyle \begin{array}{l}\phi^+|h^{[-,+]}|\phi^- \\ +\phi^+|h^{[-,-]}|\phi^+ \\ +\phi^-|h^{[-,+]}|\phi^+ \\ +\phi^-|h^{[+,+]}|\phi^-\end{array}} & & \downarrow{\scriptstyle 1|\phi^+|\phi^- - 1|\phi^-|\phi^+} \\ C_n|\mathcal{U}_{\ell+1}|D_{m+1} & \longrightarrow & & \xrightarrow{\phi^+|\phi^-|1 - \phi^-|\phi^+|1} & C_{n+1}|\mathcal{U}_{\ell+2}|D_{m+1} \end{array} \tag{11.1}$$

我们选取线性映射

$$\pi_n \colon C_n \to H_*(C_n), \quad i_n \colon H_*(C_n) \to C_n \quad \text{and} \quad h_n \colon C_n \to C_n$$

从而 i_n 和 π_n 是链映射（将 $H_*(C_n)$ 视为微分为零），

$$\pi_n \circ i_n = \mathrm{id} \quad i_n \circ \pi_n = \mathrm{id} + [\partial, h_n], \quad h_n \circ h_n = 0, \quad h_n \circ i_n = 0 \quad \text{and} \quad \pi_n \circ h_n = 0. \tag{11.2}$$

我们为每个 $\mathcal{U}_\ell$ 和 D_m选取类似的同伦等价。之所以可以这样做，是因为上述复形是域上的有限生成链复形。

我们可以利用这些同伦等价构造满足相同关系的类似同伦等价 $C_n|\mathcal{U}_\ell|D_m \simeq H_*(C_n)|H_*(\mathcal{U}_\ell)|H_*(D_m)$。例如，对于包含映射和投影映射，可以取 $i_n|i_\ell|i_m$ 和 $\pi_n|\pi_\ell|\pi_m$。对于同伦，我们取

$$h_n|i_\ell\pi_\ell|i_m\pi_m + 1|h_\ell|i_m\pi_m + 1|1|h_m.$$

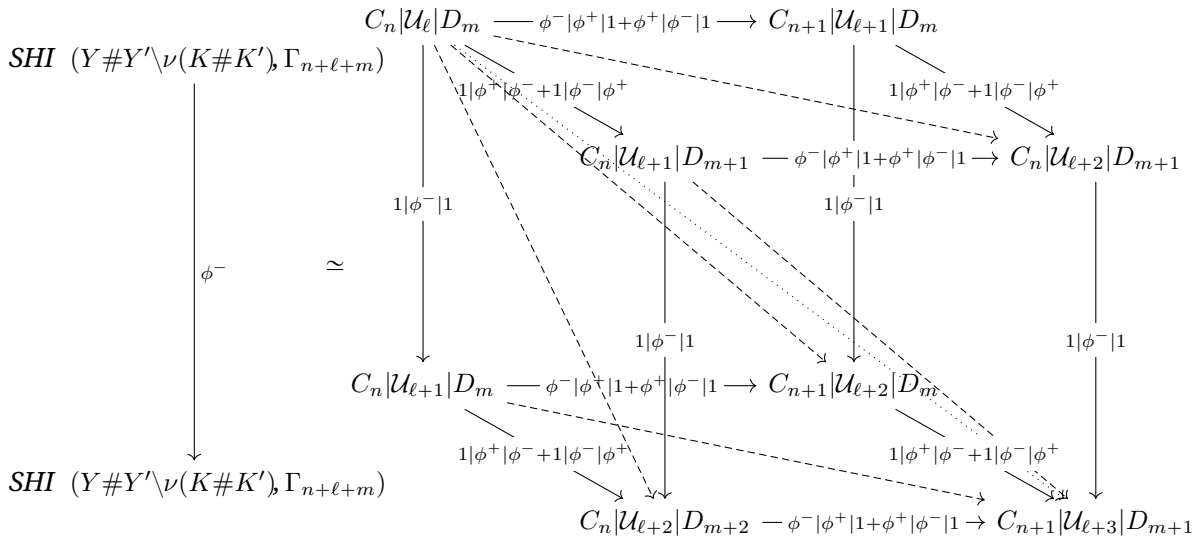
注意，这些映射仍满足方程（11.2）。

接下来，我们对上述图表应用超立方体的同调扰动。参见 [HHSZ22，第 2.7] 节。我们注意到 $H_*(\mathcal{U}_\ell)$ 具有模2同调分次。这是因为该闭包的瞬子复形具有模8分次，而特征空间算子 $\mu(pt)$ 和$\mu(R)$ 分别是齐次4分次和2分次。特别地，它们的广义特征空间具有模2分次。空间 $H_*(\mathcal{U}_\ell)$ 仅支撑于单一模2分次。此外，映射 $h^{[\circ,\ \circ']}$ 使模2同调分次平移1；类似地，我们可以假设同伦h_ℓ: $\mathcal{U}_\ell \to \mathcal{U}_\ell$ 也使模2分次平移1。此外， $\mathcal{U}_\ell$ 上的映射 $\phi^\pm$ 保持模2分次不变。特别地，经过超立方体的同调扰动后，不会有同伦项保留下来，因此我们得到一个与该图表同伦等价的映射

$$\begin{array}{ccc}
H_*C_n|H_*\mathcal{U}_\ell|H_*D_m & \xrightarrow{\phi^+_*|\phi^-_*|1+\phi^-_*|\phi^+_*|1} & H_*C_{n+1}|H_*\mathcal{U}_{\ell+1}|H_*D_m \\
\downarrow{\scriptstyle 1|\phi^+_*|\phi^-_*+1|\phi^-_*|\phi^+_*} & & \downarrow{\scriptstyle 1|\phi^+_*|\phi^-_*+1|\phi^-_*|\phi^+_*} \\
H_*C_n|H_*\mathcal{U}_{\ell+1}|H_*D_{m+1} & \xrightarrow{\phi^+_*|\phi^-_*|1+\phi^-_*|\phi^+_*|1} & H_*C_{n+1}|H_*\mathcal{U}_{\ell+2}|H_*D_{m+1}
\end{array} \tag{11.3}$$

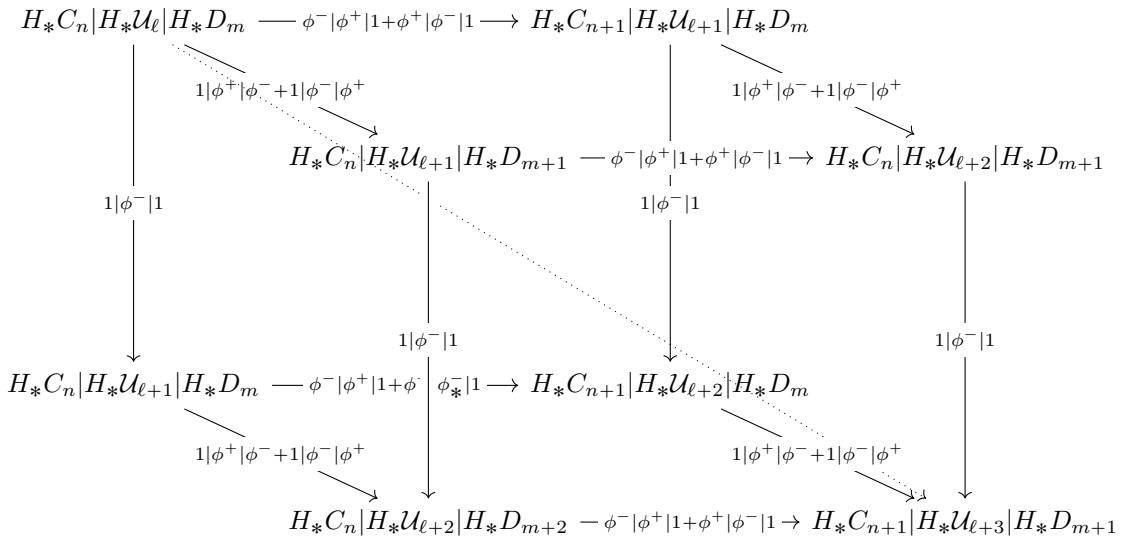
注意，对于某个固定 q的 Alexander 分次，若 n、 ℓ 和 m 都足够大，那么上述结果便与三重导出张量积$KHI^-(K) \tilde{\otimes} \mathbb{C}[U] \tilde{\otimes} KHI^-(K')$一致。参见引理11.3的第一部分。

现在我们为 U 映射增加一个额外维度。沿用上述论证的自然推广，我们得到以下复形之间的同伦等价：



这里，顶面和底面上的长度为 2 的箭头与方程 (11.1) 中的相同，侧面上的长度为 2 的箭头也类似。长度为 3 的箭头统计解的张量，例如 $\phi^+|p^{[-,-,-]}|\phi^-$，其中 $p^{[-,-,-]}$ 统计关联三种把手排列方式的解。具体而言， $p^{[-,-,-]}$ 统计二维置换多面体（即六边形）上的解，其各个面对应于长度 3 超立方体关系中的项。关于如何构造以置换多面体为指标的度量族，更多内容请参见 [Blo 11] 。

通过将方程(11.1) 转换为 (11.3) 的相同逻辑，我们看到，方程 (11.3) 右侧作为超立方体同伦等价于以下形式的超立方体：



也就是说，我们可以消去复形中的所有长度为 2 的箭头（但长度为 3 的映射可能无法消去）。通过与引理 11.3 相同的论证，我们看到，从立方体顶端到底端所诱导的映射在圈上的作用与 $1|\phi^-|1$ 相同，因此它们在同调上相同。证明至此完成。

12. On the bypass exact triangle

现在我们考虑瞬子理论中的旁路正合三角，见 [Li21，定理 1.1]。其形式为

$$\begin{array}{ccc} KHI^-(Y,K) & \xrightarrow{U} & KHI^-(Y,K) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & \widehat{KHI}(Y,K) & \end{array} \tag{12.1}$$

上述三角是对 $Y\backslash\nu(K)$ 的某个适当选取的闭包进行手术所得到的手术正合三角。

标记为 U 的箭头对应于正合三角中的一个 2-手柄映射；然而，根据定义，这个 2-手柄映射与 U 在结 Floer 同调的直接极限模型上的作用相同。上述正合三角中的其他映射，无法像这样直接用 $KHI^-(Y,\ K)$ 上的模结构作代数描述。本节将用 $KHI^-(Y,\ K)$ 上的 $\mathbb{C}[U]$-模结构来描述其他映射。

为描述其他映射，我们首先选取一个关于 $C^-(K)$ 的自由分解 $KHI^-(Y,\ K)$ 在 $\mathbb{C}[U]$上的自由分解。存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow C^-(K) \xrightarrow{U} C^-(K) \xrightarrow{\pi} C^-(K)/UC^-(K) \to 0.$$

取同调后，我们得到一个与方程（12.1）形式相同的正合三角。我们称这个三角为 *KHI* 的代数正合三角 $^-(Y,\ K)$.

定理12.1。 方程 （12.1）中的旁路正合三角与 *KHI* 的代数正合三角 $^-(Y$同构， $K)$.

在证明定理 12.1之前，先给出正合三角的另一种描述会很有帮助。我们先考虑短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[U] \xrightarrow{U} \mathbb{C}[U] \xrightarrow{U\mapsto 0} \mathbb{C}[U]/U \longrightarrow 0$$

这给出了两个 $\mathbb{C}[U]$-模拟同构

$$\mathrm{Cone}\,(U\colon \mathbb{C}[U]\to\mathbb{C}[U])\to\mathbb{C}[U]/U$$

$$\mathbb{C}[U]\to \mathrm{Cone}\,(U\mapsto 0\colon \mathbb{C}[U]\to\mathbb{C}[U]/U)\,.$$

我们用 π 表示映射 $U\mapsto 0$。事实上，还有第三个等价关系，但写出它要复杂得多。为了陈述这一等价关系，在 A_∞-模的框架下工作比在 $\mathbb{C}[U]$-链复形的框架下更为方便。它的形式是一个 A_∞-模映射 $f_j\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}[U]$，当 $j\neq 2$ 时由$f_j=0$ 给出，并且

$$f_2(U^i,1)=\begin{cases} U^{i-1} & \text{if } i>0\\ 0 & \text{if } i=0.\end{cases}$$

上述态射可通过将态射 Cone$(U\colon \mathbb{C}[U]\to\mathbb{C}[U])\to\mathbb{C}[U]/U$作为 A_∞-态射求逆而得到（例如，使用同调扰动引理）。映射 f_* 是从 $\mathbb{C}[U]/U$ 映射到 Cone$(\mathbb{C}[U]\to\mathbb{C}[U])$的定义域部分的分量。我们注意到存在一个 A_∞-模同构

$$\mathbb{C}[U]\simeq \mathrm{Cone}(f_*\colon \mathbb{C}[U]/U\to\mathbb{C}[U]).$$

事实上，右侧是一个真正的 $\mathbb{C}[U]$-模，与 $\mathbb{C}[U]$.同构

引理12.2。 *KHI* $^-(Y,K)$ 的代数正合三角同构于以下正合三角：

$$\begin{array}{ccc} KHI^-(Y,K)\,\tilde{\otimes}\,\mathbb{C}[U] & \xrightarrow{\mathrm{id}\tilde{\otimes}U} & KHI^-(Y,K)\,\tilde{\otimes}\,\mathbb{C}[U] \\ & {\scriptstyle \mathrm{id}\tilde{\otimes}f_*}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\tilde{\otimes}\pi} & \\ & KHI^-(Y,K)\,\tilde{\otimes}\,\mathbb{C}[U]/(U) & \end{array}$$

上述引理留给读者，因为直接证明它是简单的。

我们注意到，正合三角中出现的每个模都具有 Alexander 分次，其中 U 的分次为 -1，并且序列中的每个映射都是齐次分次的。将 $KHI^-(Y,K)\,\tilde{\otimes}\,\mathbb{C}[U]$ 的第一个副本向下平移 1 后，正合三角中的映射便保持 Alexander 分次。我们有以下基本代数引理：

引理12.3。 设 A、 A'、 B、 B'、 C 和 C' 是有限生成的 $\mathbb{C}[U]$ -模，且都带有 *Alexander* 分次。假设我们有两个 $\mathbb{C}[U]$-模的正合三角

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ & \nwarrow\ \swarrow & \\ & C & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & B' \\ & \nwarrow\ \swarrow & \\ & C'. & \end{array}$$

进一步假设，对于每个 $q\in\mathbb{Z}$，在分次 $>q$ 下的截断同构。那么这两个三角同构。

证明。 这些假设保证正合三角按 Alexander 分次分裂。有限生成意味着，分次 q 中的子空间与分次 $q-1$ 中$q\ll 0$的子空间同构。因此，我们只需将某个分次 $q\ll 0$ 中的同构平移至分次 $q-1$，即可进一步延拓该同构。□

证明中，我们考虑 K 的结补空间对应的缝合流形，其上带有某个 $n \gg 0$的 n-框架纵向缝合线。我们将其与一个带框架为 ℓ的平凡结作连通和，并对该平凡结应用负旁路三角的映射。由此得到一个正合三角

$$\begin{array}{ccc} H_*\text{锥}(C_n|\mathcal{U}_\ell \to C_{n+1}|\mathcal{U}_{\ell+1}) & \longrightarrow & H_*\text{锥}(C_n|\mathcal{U}_{\ell+1} \to C_{n+1}|\mathcal{U}_{\ell+2}) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & H_*\text{锥}(C_n|\mathcal{U}_\mu \to C_{n+1}|\mathcal{U}_\mu) & \end{array}$$

（每个锥中的映射为 $\phi^+|\phi^- + \phi^-|\phi^+$）。与之前一样，我们应用同调扰动引理，对每个 C_n 和 $\mathcal{U}_\ell$ 取同调。得到如下形式的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cone}(H_*C_n|H_*\mathcal{U}_\ell \to H_*C_{n+1}|H_*\mathcal{U}_{\ell+1}) & \xrightarrow{F} & \mathrm{Cone}(H_*C_n|H_*\mathcal{U}_{\ell+1} \to H_*C_{n+1}|H_*\mathcal{U}_{\ell+2}) \\ & \overset{H}{\nwarrow} \quad \overset{G}{\swarrow} & \\ & \mathrm{Cone}(H_*C_n|H_*\mathcal{U}_\mu \to H_*C_{n+1}|H_*\mathcal{U}_\mu) & \end{array}$$

对每个顶点取同调后，该图表是正合的。

若固定 q 和 $n \gg 0$，则前两个复形在 Alexander 分次 $> q$ 下可与导出张量积 $HFK^-(Y,\ K) \tilde{\otimes} \mathbb{C}[U]$ 识别。在底行中，我们注意到 ϕ^+ 在 $H_*\mathcal{U}_\mu$ 上消失，因此底行在分次 $> q$ 下可与 $KHI^-(Y,\ K) \tilde{\otimes} \mathbb{C}[U]/U$ 识别。

引理 12.4。设固定 q，且有 n、$\ell \gg 0$。限制到 *Alexander* 分次 $> q$ 后，我们有如下结论：

(1) 映射 F 在同调上等于 恒等映射 $\tilde{\otimes} U$。（*2*）映射 G 是 恒等映射 $\tilde{\otimes} \pi$。（*3*）映射 H 是 恒等映射 $\tilde{\otimes} f_*$。

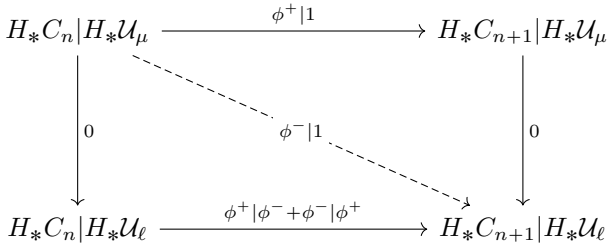
证明。关于 F 和 G 的计算与我们对连通和上的 U-作用的证明并无不同，因此略去这些计算，集中讨论映射 H。在这种情况下，我们考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc} C_n|\mathcal{U}_\mu & \xrightarrow{\phi^+|\phi^- + \phi^-|\phi^+} & C_{n+1}|\mathcal{U}_\mu \\ \downarrow{\scriptstyle 1|F_W} & \searrow^{\phi^+|h^{[-,W]} + \phi^-|h^{[+,W]}} & \downarrow{\scriptstyle 1|F_W} \\ C_n|\mathcal{U}_\ell & \xrightarrow{\phi^+|\phi^- + \phi^-|\phi^+} & C_{n+1}|\mathcal{U}_{\ell+1} \end{array}$$

现在我们可以对上述图表应用同调微扰。映射 F_W 在 $\widehat{\quad}$ 同调上为零，因为它对应于平凡结的旁路正合三角中从 $KHI(u)$ 到 $KHI^-(u)$ 的映射。类似地，映射 $h^{[-,W]}$和 $h^{[+,W]}$都是齐次 Alexander 分次。另一方面，$\mathcal{U}_\mu$ 仅支撑在 Alexander 分次 0 上，而 $\mathcal{U}_\ell$ 的最高 Alexander 分次为 0。映射 $h^{[-,W]}$的 Alexander 分次为 $+1$，而 $h^{[+,W]}$的 Alexander 分次为 0。特别地，应用同调微扰后，$h^{[-,W]} = 0$，而 $h^{[+,W]}$要么为 0，要么将 1 映射到 1。还要注意，这一计算具有普适性，因为它只取决于 μ 和 ℓ，而不取决于 K 或 n。

$h^{[+,\ W]} = 0$ 这种可能性是不成立的，因为这意味着对所有纽结而言，正合序列都会分裂，而众所周知事实并非如此（例如，考虑右手三叶结）。特别是，我们必须有 $h^{[+,\ W]}(1) = 1$。

然而，图表



在高于 q 的分次中等于 $\mathrm{id} \otimes f_*$。 □

13. Free models

如引言中所述，我们的技术给出了 $KHI^-(Y,\ K)$ 它在 $\mathbb{C}[U]$ 上是自由且有限生成的模型：

$$CKI^-(K,n) := \mathrm{Cone}\left(SHI(Y\backslash\nu(K),\Gamma_n)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[U] \xrightarrow{\phi^-|\,\mathrm{id}\,-\phi^+|U} SHI(Y\backslash\nu(K),\Gamma_{n+1})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[U] \right).$$

注 13.1。 尽管 ϕ^- 和 ϕ^+ 仅在 $\mathbb{C}$ 中乘以一个单位元后才有良好定义，将映射 ϕ^- 和 ϕ^+ 分别乘以一个单位元并不会改变锥的 $\mathbb{C}[U]$-模同构类型，参见引理 4.8。

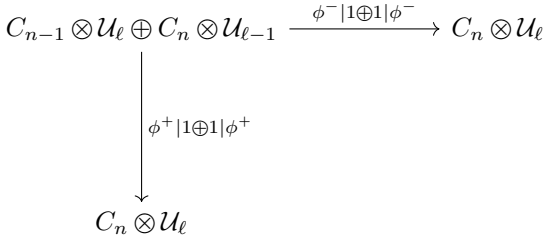
定理 13.2。 存在一个 $\mathbb{C}[U]$-模同构

$$H_*CKI^-(K,n) \cong KHI^-(Y,K)$$

对于所有 n。

证明。 其思路是将我们关于连通和公式的证明应用于这样的情形：其中一个纽结是K，另一个是平凡结 u。我们令 K 的框架保持不变，同时令u的框架趋近于 8。

更具体地，固定 $n\in\mathbb{Z}$。当 8.2 中的 K 是一个取纵向框架 n的纽结，且 $K'=u$ 是一个 ℓ框架的平凡结时，我们应用引理，其中 $\ell \gg 0$。由此得到 $SHI(Y\backslash\nu(K),\ \Gamma_{n+\ell})$ 与图表同伦等价



其中 $C_n = SHI(Y\backslash\nu(K),\ \Gamma_n)$ 以及 $\mathcal{U}_\ell = SHI\left(Y\backslash\nu(u),\ \Gamma_\ell\right)$。我们注意到

$$\mathrm{Cone}(\phi^+|1\oplus 1|\phi^+ : C_{n-1}\otimes\mathcal{U}_\ell\oplus C_n\otimes\mathcal{U}_\ell)_{\geqslant q} \simeq (C_{n-1}\otimes\mathcal{U}_\ell)_{\geqslant q}$$

如果 ℓ 足够大。注意，这并不取决于 n 的值，除了 ℓ 必须

相对于

而言足够大。这一点可以看出，因为子复形

$$\mathrm{Cone}(1|\phi^+ : C_n\otimes\mathcal{U}_{\ell-1}\to C_n\otimes\mathcal{U}_\ell)_{\geqslant q}$$

是无圈的，因为 ϕ^+: $(\mathcal{U}_{\ell-1})_{\geqslant q}\to(\mathcal{U}_\ell)_{\geqslant q}$ 是同构。

特别地，如果 $\ell\gg 0$，则上述复形在 Alexander 分次至少为 q 时的截断，与子复形 $CKI^-(K,\ n)_{\geqslant q}$ 同伦等价。令 $\ell\to\infty$，，我们得到$SHI(Y\backslash\nu(K),\ \Gamma_{n+\ell})_{\geqslant q}$与该截断拟同构

$$\mathrm{Cone}(\phi^+|\phi^-+\phi^-|\phi^+ : C_n\otimes\mathcal{U}_\ell\to C_{n+1}\otimes\mathcal{U}_{\ell+1})_{\geqslant q}.$$

上述内容与截断 $CKI^-(K,\ n)_{\geqslant q}$ 完全相同，这表明该陈述在分次向量空间层面上给出了同构。

该同构是 $\mathbb{C}[U]$-模的论断，遵循与我们证明定理11.1 时相同的逻辑。 □

作为一个直接推论：

推论 13.3。 定理 *13.2* 在 *Heegaard Floer* 情形下也成立。

13.1. **链环的自由模型**。 上述瞬子结弗洛尔复形的自由模型可以完全形式化地推广到链环的情形。现在我们描述两分支链环的模型。在这种情形下，将 Γ_{n_1,n_2} 记作一个框架，它由分别位于两个链环分支上的 n_1 和 n_2 带框架经线组成。为陈述公式，我们记 $C_{n_1,n_2} = SHI(Y\backslash\nu(L), \Gamma_{n_1,n_2})$。我们的模型形式如下：

$$
CLI^-(L, n_1, n_2) = \begin{tikzcd}
C_{n_1,n_2} \otimes \mathbb{C}[U_1, U_2] \arrow[rr, "\phi_1^+|U_1+\phi_1^-|1"] \arrow[d, "\phi_2^+|U_2+\phi_2^-|1"'] \arrow[drr, "\begin{array}{c}\phi^{[+_1,+_2]}|U_1U_2\\ +\phi^{[+_1,-_2]}|U_1\\ +\phi^{[-_1,+_2]}|U_2\\ +\phi^{[-_1,-_2]}|1\end{array}"] & & C_{n_1+1,n_2} \otimes \mathbb{C}[U_1, U_2] \arrow[d, "\phi_2^+|U_2+\phi_2^-|1"] \\
C_{n_1,n_2+1} \otimes \mathbb{C}[U_1, U_2] \arrow[rr, "\phi_1^+|U_1+\phi_1^-|1"] & & C_{n_1+1,n_2+1} \otimes \mathbb{C}[U_1, U_2]
\end{tikzcd}
$$

我们通过考察自然瞬子 Floer 复形上的迭代映射锥构造来得到上述结果。随后，我们应用第 6 节中的超立方体特征子空间技术，得到一个涉及缝合瞬子复形的复形。接着，我们使用超立方体的同调扰动引理（参见 [HHSZ22，引理 2。10]）。

上述描述可以直接推广到同调 3-球面中含有 n个分量的链环情形。

为简洁起见，我们不尝试证明以下猜想：

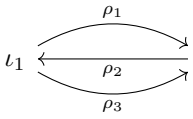
猜想 13.4。 若 L 是同调 *3*-球面中的一个 n 分量链环，且 $\mathbf{n}$ 是所选的框架，则 $CLI^-(L,\ \mathbf{n})$ 的同伦类型定义良好，且与 $\mathbf{n}$ 无关。此外，其同调群作为 $\mathbb{C}[U_1,\ \ldots\ldots,\ U_n]$-模，与 [GL19 第 6 节2] 中的直接极限构造同构。最后，这些链环群在链环的连通和下满足张量性，并且也满足猜想 *1.3*中所述的 *skein* 正合三角。

请注意，若要与 [GL19], 中的模取导出张量积，就需要为其赋予 A_∞-模结构，因为它们不是自由的；而上文定义的复形 $CLI^-(L,\ \mathbf{n})$ 是自由的，因此适合取张量积。假设上述猜想成立，我们的自由模型 $CLI^-(L,\ \mathbf{n})$ 将通过针对 A_∞-模的同调扰动引理，为 [GL19] 中的直接极限模型赋予 A_∞- 模结构。

13.2. **Heegaard Floer 理论中的自由模型**。 本节将证明，定理 13.2 的类似结果在 Heegaard Floer 理论中成立。我们的证明基于对 Etnyre、Vela-Vick 和 Zarev 的工作的重新诠释。

我们首先回顾 Etnyre、Vela-Vick 和 Zarev 证明 [EVVZ17] 两者同构的部分内容：$HFK^-(Y, K)$ 与结 Floer 同调的直接极限构造。他们的证明是一项利用带边 Floer 同调 [LOT18] 和带边缝合 Floer 同调 [Zar09]进行的局部计算。我们回顾 Lipshitz、Ozsv´ath 的 Thurston 环面代数，并将其记为

$\mathcal{A}$。这个代数有两个幂等元 ι_1 和 ι_2，并且是带关系的路径代数。



$/(\rho_2\rho_1 = \rho_3\rho_2 = 0).$

我们用 ${}^{\mathcal{A}}M_n$ 表示 Etnyre、Vela-Vick 和 Zarev 所考察的、对应于 $(T^2\backslash D^2)\times[0,1]$ 的带边缝合型-D 模。具体的缝合线和参数化并不重要，但基本上，$(\mathbb{T}^2\backslash D^2)\times\{0\}$ 按照 [LOT18], 中的方式参数化，而 $(\mathbb{T}^2\backslash D^2)\times\{1\}$ 上有两条平行缝合线，其相对于带边框架的斜率为 n。其中一条缝合线与 ∂D^2 相交，并延伸至 $(T^2\backslash D^2)\times\{0\}$ 的一侧。示意图见 [EVVZ17 的图 27]。

对于我们目前的表述，具体的缝合线和参数化并不重要。相反，重要的是，如果 $CFA(Y\backslash\nu(K))_{\mathcal{A}}$ 是结补空间的型-A 模，那么

$$\widehat{CFA}(Y\backslash\nu(K))_{\mathcal{A}}\boxtimes{}^{\mathcal{A}}M_n\simeq SFH(Y\backslash\nu(K),\Gamma_n).$$

Etnyre、Vela-Vick 和 Zarev 定义了正旁路映射和负旁路映射。它们具有类型-D 模映射的形式

$$\phi^1_+,\phi^1_-\colon {}^{\mathcal{A}}M_n\to{}^{\mathcal{A}}M_{n+1}.$$

对于一个纤维 $S^1\subseteq S^1\times D^2$，存在一个自然的双重点 Heegaard 结图。参见[EVVZ17，图表 18]。我们将 ${}^{\mathcal{A}}\mathscr{K}^{\mathbb{F}[U]}$ 记作对应的类型-DD 模。这个模只有一个生成元 $\mathbf{x}$，其微分由下式给出

$$\delta^1(\mathbf{x})=\rho_{23}\otimes\mathbf{x}\otimes U.$$

对我们而言，这个模的重要性质是

$$\widehat{CFA}(Y\backslash\nu(K))_{\mathcal{A}}\boxtimes{}^{\mathcal{A}}\mathscr{K}^{\mathbb{F}[U]}\simeq HFK^-(Y,K)^{\mathbb{F}[U]}.$$

Etnyre、Vela-Vick 和 Zarev 证明了

$$\varinjlim{}^{\mathcal{A}}M_n\cong{}^{\mathcal{A}}\mathscr{K}^{\mathbb{F}[U]}\boxtimes\mathbb{F}[U]$$

其中，直接极限上的 $\mathbb{F}[U]$ 作用由负旁路映射 ϕ^1_-诱导。使用标量扩张也很有帮助，这样可以将每个 M_n 视为 ${}^{\mathcal{A}}M_n^{\mathbb{F}[U]}$上的类型-$DD$ 模（因此 δ^1没有非零的 U次幂）。

现在我们证明以下 [EVVZ17，定理 1.1], 的类似结果，它不涉及直接极限：

命题 13.5. 对于任意 n，存在一个同伦等价

$${}^{\mathcal{A}}\mathscr{K}^{\mathbb{F}[U]}\simeq\mathrm{Cone}(\phi^1_+\otimes U+\phi^1_-\otimes 1\colon {}^{\mathcal{A}}M_n^{\mathbb{F}[U]}\to{}^{\mathcal{A}}M_{n+1}^{\mathbb{F}[U]})$$

证明。 将陈述右侧的映射锥复形记为 ${}^{\mathcal{A}}C^{\mathbb{F}[U]}$。我们使用 EVVZ17 第 7.2] 节中对 [的计算。首先注意，与用于改变边界参数化的双模做张量积，与正旁路映射和负旁路映射相交换。因此，只需对 $n=0$ 证明该结论。

类型-D 模 M_0 有一个生成元 a，集中于幂等元 2。结构映射 δ^1 为零。模 M_1 有两个生成元 a 和 b，其中 a 属于幂等元 2，而 b 属于幂等元 1。结构映射满足

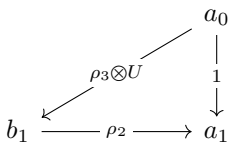
$$\delta^1(b)=\rho_2\otimes a\otimes 1$$

参见 EVVZ17 第 7.2.1] 节 [。

Etnyre、Vela-Vick 和 Zarev 还计算了正、负旁路映射 [EVVZ17，第 7 节.3]。这些映射由以下公式给出（作为从 M_0 到 M_1的映射）：

$$\phi^1_+(a)=\iota_2\otimes a\quad\text{and}\quad\phi^1_-(a)=\rho_2\otimes b.$$

因此，陈述中的映射锥变为



（上述记号中， a_i 和 b_i 的下标表示它们来自 M_0 还是 M_1。）给出一个同伦等价

$$\mathcal{A}\mathscr{K}^{\mathbb{F}[U]} \underset{\Pi}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}C^{\mathbb{F}[U]} \circlearrowright H$$

如下：

$$\begin{aligned} I(b_1) &= 1 \otimes b_1 \otimes 1 + \rho_2 \otimes a_0 \otimes \\ \Pi(b_1) &= 1 \otimes b_1 \otimes 1 \\ \Pi(a_1) &= \rho_3 \otimes b_1 \otimes U \\ \Pi(a_0) &= 0 \\ H(a_1) &= 1 \otimes a_0 \otimes 1 \\ H(a_0) &= H(b_1) = 0. \end{aligned}$$

容易计算得出， $\Pi \circ I = \mathrm{id}$ 和 $I \circ \Pi = \mathrm{id} + \partial(H)$。 □

References

[Blo11] Jonathan M. Bloom, *A link surgery spectral sequence in monopole Floer homology*, 《数学进展》226（2011年），第4期，3216–3281。[BLY20] John A. Baldwin、Zhenkun Li 和 Fan Ye, *Sutured instanton homology and Heegaard diagrams*, 2020年。电子预印本, arXiv:2011.09424。[BS15] John A. Baldwin 和 Steven Sivek, *Naturality in sutured monopole and instanton homology*, 《微分几何杂志》100（2015年），第3期，395–480。[BS16], *A contact invariant in sutured monopole homology*, 《数学论坛·西格玛》4（2016年），论文编号 e12，共82页。[BS21], *On the equivalence of contact invariants in sutured Floer homology theories*, 《几何与拓扑》25（2021年），第3期，1087–1164。[BS22], *Khovanov homology detects the trefoils*, 《杜克数学杂志》171（2022年），第4期，885–956。[CGH10] Vincent Colin、Paolo Ghiggini 和 Ko Honda, *Embedded contact homology and open book decompositions* 2010 arXiv:1008.2734, 电子预印本, [CGH12a], *The equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology via open book decompositions I* 2012 arXiv:1208.1074, 电子预印本, [CGH12b], *The equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology via open book decompositions II* 2012 arXiv:1208.1077, 电子预印本, [CGH12c], *The equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology via open book decompositions III: from hat to plus* 2012 arXiv:1208.1526, 电子预印本, [DK97] S. Donaldson 和 P. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, 牛津大学出版社，1997年。[EVVZ17] John B. Etnyre、David Shea Vela-Vick 和 Rumen Zarev, *Sutured Floer homology and invariants of Legendrian and transverse knots* **21** 2017 3, 1469 1582, 《几何与拓扑》 (), 第–期。[Flo95] A. Floer, *Instanton homology and Dehn surgery*, 《Floer 纪念文集》，1995年，第77–97页。[Gab83] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, 《微分几何杂志》18（1983年），445–503。[Gir91] Emmanuel Giroux, *Convexité en topologie de contact*, 《瑞士数学评论》66（1991年），第4期，637–677。[GL19] Sudipta Ghosh 和 Zhenkun Li, *Decomposing sutured monopole and instanton Floer homologies*, 2019年。电子预印本, arXiv:1910.10842。[GLW19] Sudipta Ghosh、Zhenkun Li 和 C.-M. Michael Wong, *Tau invariants in monopole and instanton theories* 2019 arXiv:1910.01758, 电子预印本。[Gol15] Marco Golla, *Comparing invariants of Legendrian knots*, 《量子拓扑》6（2015年），第3期，365–402。[HHSZ22] Kristen Hendricks、Jennifer Hom、Matthew Stoffregen 和 Ian Zemke, *An involutive dual knot surgery formula* 2022 arxiv:2205.12798, 电子预印本, [HKM08] Ko Honda、William Kazez 和 Gordana Matić, *Contact structures, sutured Floer homology and TQFT*, 电子预印本, 2008 arXiv:0807.2431。

[HKM09] Ko Honda、William H. Kazez 和 Gordana Mati´c, *The contact invariant in sutured Floer homology*, 《数学发明》176（2009年），637–676。[Hon00] Ko Honda, *On the classification of tight contact structures. I*, 《几何与拓扑》4（2000年），309–368。[Juh06] Andr´as Juh´asz, *Holomorphic discs and sutured manifolds*, 《代数几何与拓扑》6（2006年），1429–1457。[Juh16]，*Cobordisms of sutured manifolds and the functoriality of link Floer homology*, 《数学进展》299（2016年），940–1038。[JZ20] Andr´as Juh´asz 和 Ian Zemke, *Contact handles, duality, and sutured Floer homology*, 《几何与拓扑》24（2020年），第1期，179–307。[Kav19] Nithin Kavi, *Cutting and gluing surfaces*（2019年）。电子预印本，1910.11954 [math.GT]。[Kel01] Bernhard Keller, *Introduction to A-infinity algebras and modules*, 《同调、同伦及其应用》3（2001年），第1期，1–35。[KM10a] Peter Kronheimer 和 Tom Mrowka, *Instanton Floer homology and the Alexander polynomial*, 《代数几何与拓扑》10（2010年），第3期，1715–1738。[KM10b] Peter Kronheimer 和 Tomasz Mrowka, *Knots, sutures, and excision*, 《微分几何杂志》84（2010年），第2期，301–364。[KM11] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka, *Khovanov homology is an unknot-detector*, 《高等科学研究所数学出版物》113（2011年），97–208。[Li21] Zhenkun Li, *Knot homologies in monopole and instanton theories via sutures*, 《辛几何杂志》19（2021年），第6期，1339–1420。[LOT15] Robert Lipshitz、Peter S. Ozsv

´ *Bimodules in bordered Heegaard Floer ho-* ath 和 Dylan *mology* **19** 2015 2, 525 724
P. Thurston, , 《几何与拓扑》（），第–期。[LOT18] Robert Lipshitz、Peter S. Ozsvath 和 Dylan P. Thurston, *Bordered Heegaard Floer homology*, 《美国数学会回忆录》254（2018年），第1216期，viii+279。[LY21] Zhenkun Li 和 Fan Ye, *Instanton floer homology, sutures, and Euler characteristics*, 2021 年。电子预印本，arxiv:2101.05169。[LY22]，*Instanton Floer homology, sutures, and Heegaard diagrams*, 《拓扑学杂志》15（2022年），第1期，39–107。[MO10] Ciprian Manolescu 和 Peter S. Ozsv´ath, *Heegaard Floer homology and surgeries on links*, 2010年。电子预印本，arXiv:1011.1317。[OS04] Peter Ozsv

´ ´ ´ *Holomorphic disks and knot invariants* **186** 2004 1, ath 和 Zoltan
58 116
Szabo, 《数学进展》（），第–期。[OS05] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o, *On the Heegaard Floer homology of branched double-covers*, 《数学进展》194（2005年），第1期，1–33。[OS07] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o, *On the skein exact squence for knot floer homology*, 2007年。电子预印本，arXiv:0707.1165。[Ozb11] Burak Ozbagci, *Contact handle decompositions*, 《拓扑学及其应用》158（2011年），第5期，718–727。[Sca15] Christopher W. Scaduto,

Instantons and odd khovanov homology **8** 2015 3, , 《拓扑学杂志》
744 810
（），第–期。[Tau10] Clifford Henry Taubes, *Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology V*, 《几何与拓扑》14（2010年），第5期，2961–3000。[Wan20] Joshua Wang, *The cosmetic crossing conjecture for split links*, 2020年。电子预印本，arXiv:2006.01070。[Zar09] Rumen Zarev, *Bordered Floer homology for sutured manifolds*, 2009年。电子预印本，arXiv:0908.1106。[Zem19] Ian Zemke, *Connected sums and involutive knot Floer homology*, 《伦敦数学会会刊》（3）119（2019年），第1期，214–265。

Department of Mathematics, University of Notre Dame, South Bend, IN, USA
Email address: sghosh7@nd.edu

Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ, USA
Email address: izemke@math.princeton.edu