arXiv:2303.06492v1 [math.DS] 11 Mar 2023

计算康利指标：一个警示故事*

Konstantin Mischaikow† 和 Charles Weibel‡

摘要。本文探讨在由连续映射生成的离散动力系统背景下，如何计算并识别整数系数上的（同调）康利指标。我们讨论相较于使用域系数，采用整数系数对非线性动力学的重要性。我们将这一问题转化为交换环论的语言。更确切地说，我们将有限生成阿贝尔群范畴中的移位等价，与底层阿贝尔群给定的 $\mathbb{Z}[t]$-模的分类联系起来。我们提供了处理这一分类问题的工具，同时也强调了相关的计算挑战。

关键词。 康利指 标、移位等价、模的局部化、皮卡 尔群。

MSC 分类号。68Q25, 68R10,68U05

1. 引言。本文探讨在由连续映射 $f\colon\ X \to X$生成的离散动力系统中，如何计算和识别（同调）康利指标。

康利指标[9, 27, 22, 30, 12, 21] 是分析非线性动力系统的一种强有力的代数拓扑不变量，至少有两个原因。首先，它可以利用有限数据计算，因此适用于计算动力学或数据驱动动力学。其次，有许多定理表明，了解康利指标能够揭示动力学结构的信息，例如非平凡不变集 [9], 异宿轨道 [10], 不动点 [28, 19], 周期轨道 [20], 混沌动力学 [21, 30, 11], 等等。

康利指标的计算始于确定一对紧集 $P_0 \subset P_1$，称为指标对 [27], 。为简便起见，我们假设$f(P_i) \subset P_i$, $i = 0, 1$。该指标对的（同调）康利指标是指标映射的移位等价类，即同调上的诱导映射

$$f_*\colon H_*(P_1, P_0; k) \to H_*(P_1, P_0; k).$$

（关于移位等价的定义，参见第 2 节。）指标之所以重要，是因为如果 (P_1, P_0) 和 (P_1', P_0') 是指标对，且它们在f 中 $P_1 \setminus P_0$ 和 $P_1' \setminus P_0'$ 下的最大不变集相同，那么相应的康利指标也相同。反之则未必成立。

指标对的计算识别相对容易 [1, 7, 6], ，但高度依赖于计算中采用的具体近似。因此，在

*提交给编辑：日期。经费支持： K.M. 部分获得美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1839294 和 HDR TRIPODS 项目编号 CCF-1934924；DARPA 合同编号 HR0011-16-2-0033；美国国立卫生研究院项目编号 R01 GM126555；以及美国空军科学研究办公室项目编号 FA9550-23-1-0011。K.M. 还获得了西蒙斯基金会的资助。C. W. 获得了美国国家科学基金会项目编号 2001417 的资助。

†罗格斯大学新不伦瑞克校区数学系，新泽西州（mischaik@math.rutgers.edu）。
‡罗格斯大学新不伦瑞克校区数学系，新泽西州（weibel@math.rutgers.edu）。

应用中会出现两个相关的挑战。首先，确定 $f_*\colon\ H_*(P_1,P_0;\ k) \to H_*(P_1,P_0;\ k)$和 $f_*\colon\ H_*(P_1',P_0';\ k) \to H_*(P_1',P_0';\ k)$所诱导的移位等价类是相同还是不同；其次，以最少的计算工作量确定 f_* 的移位等价类。我们将在下文回到这些挑战。

回忆一下，$k[t]$ 表示系数取自 k 的形式多项式环（见 [2]）。我们分析的出发点是以下观察：带有自同态 α 的 k-模 A 可以视为一个 $k[t]$-模，$M=(A,\alpha)$。事实上，给定一个 $k[t]$-模M，乘以 t 是其底层 k-模的一个自同态。反过来，给定 k-模 A的一个自同态 α，我们可以在 A 上定义一个 $k[t]$-模结构，令 t 通过 $t\cdot x=\alpha(x)$作用于$x\in A$。

以下是我们对移位等价的模论解释；证明见第2节。

命题1.1。设 $\alpha\colon\ A\to A$和 $\beta\colon\ B\to B$是有限生成阿贝尔群的自同态，并设 $M=(A,\alpha)$和 $N=(B,\ \beta)$是相应的 $\mathbb{Z}[t]$-模。那么，α和 β移位等价（记作 $\alpha\sim_s\beta$）当且仅当 $M\left[t^{-1}\right]\cong N\left[t^{-1}\right]$ 作为 $\mathbb{Z}\left[t,t^{-1}\right]$-模同构。

因此，判断两个指标对是否具有相同的同调 Conley 指数是可判定的，因为这可以归结为判断 $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-模是否同构；参见 [4]。

回到确定移位等价类这一挑战，先计算 f_* 在计算上通常更高效：当 k 是一个域时，$H_*(P_1,P_0;\ k)\to H_*(P_1,P_0;\ k)$。在这种情况下，众所周知，移位等价完全由 f_* 的有理标准形决定，但不包括幂零块，即特征值为 $t=0$ 的块。参见 [18, 7.3–7.5],。例如，Storjohann [29] 提出了一种高效的有理标准形算法，并在 [6] 中用于 Conley 指数计算。

H然而，若考虑域上的移位等价，可能会丢失关键信息 s.

例 1.2。考虑一维映射 f 的两个不变集：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。设第一个不变集由两个不稳定双曲不动点 $\{x_0,x_1\}$ 组成，例如 $f(x_k)=x_k$和$f'(x_k)=(-1)^k 2$ 对于 $k=1,2$。设第二个不变集由一个不稳定的保向周期二轨道 $\{y_0,y_1\}$ 组成，其中 $f(y_0)=y_1$, $f(y_1)=y_0$, 且 $(f^2)'(y_k)=2$。使用最简单的指标对（见 [21]），相应的指标映射在 H_1 上为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

分别。由于这两个矩阵的特征值都是 ±1，因此它们在任意域上都是移位等价的。然而，简单计算表明，它们在 $\mathbb{Z}$上并不移位等价（见引理3.1 和例 3.2，其中有更一般的分析）。这个例子表明，康利指标能够区分由两个不动点组成的不变集与一个周期二轨道——这显然是动力系统中一个值得关注的结果——但代价是必须使用整数系数。

这引出了两个问题：使用域系数进行计算会损失多少有关康利指标的信息？使用整数系数进行计算又有多困难？

要完整回答这两个问题，似乎需要极为专业的技术，而这超出了当前应用的需求。因此，本文旨在为读者提供一些希望有所裨益的见解，介绍如何进行整数计算，并让读者了解开展这类计算需要应对哪些代数难题。

为了进一步激发读者的兴趣，不妨再看一遍例子 1.2 。在第 3 节中，我们将证明，每个 2×2 特征值为 ± 1 的矩阵都与 $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ 或 $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ 移位等价，但不会同时与二者移位等价。这个结果的意义如下。假设指标映射在同调上的诱导映射已被确定，其特征多项式为 $x^n(x^2-1)$。在这种情况下，(1.1) 完整地确定了同调康利指数。遗憾的是，正如本文所阐明的，这类确定在一般情况下很困难。

本文结构如下。第 2 节简要讨论康利指标，并解释为何出于计算方面的考虑，我们将注意力限于同调康利指标。随后，我们将移位等价问题转化到交换环论的框架中，并给出命题 1.1 的证明。第 3 节中，我们将在自同态可逆的情形下给出一个初等结果，并将其应用于与例子 1.2 相关的矩阵代数。

这一结果的复杂性促使我们聚焦于 $M=(\mathbb{Z}^2,T)$ 的情形。我们采用特征多项式 $\chi(t)=\det(t\cdot I-T)$ 的形式来组织本文。在第 4 节中，我们考察 $\chi(t)$ 可分解为一次项的情形。如果 $\chi(t)$ 不可约，那么移位等价问题便分为另外两种情形： $\mathbb{Z}[t]/(\chi)$ 是戴德金整环，这一情形将在第 5 节中讨论；而 $\mathbb{Z}[t]/(\chi)$ 不是戴德金整环，这一情形将在第6节中探讨。在这两节中，我们分别介绍一种用于识别移位等价类的基本代数技术、展示该技术的应用示例，并简要指出考察高维情形（即 $M=(\mathbb{Z}^n,T)$）所面临的技术难点。

最后，我们在第 8 节简要讨论有限阿贝尔群背景下的移位等价。

2. 代数化。 本节旨在证明命题 1.1，该命题指出，确定一个 $\mathbb{Z}[t]$-模 M（由其底层阿贝尔群上的自同态 α 表示）的移位等价类问题，等价于确定相关模 $M[t^{-1}]$的同构类。我们先回顾所需的概念和记号。

定义 2.1。 在任意固定的范畴中，若存在态射 $\alpha\colon A\to A$和 $\beta\colon B\to B$，使得 移位等价，记作 $\alpha\sim_s\beta$，若存在态射 $r\colon A\to B$, $s\colon B\to A$，以及一个正整数 $m\in\mathbb{Z}^+$ 使得

$$(2.1)\quad (i)\ r\circ\alpha=\beta\circ r,\qquad (ii)\ s\circ\beta=\alpha\circ s,\qquad (iii)\ s\circ r=\alpha^m,\qquad and\qquad (iv)\ r\circ s=\beta^m.$$

例2.2。 在自由 k-模的范畴中，例如域 k上的向量空间，自同态由方阵表示。若存在矩阵 T_1 和 T_2 ，使得 R 和 S 在 k 上满足 $RT_1=T_2R$, $ST_2=T_1S$, $SR=T_1^m$以及 $RS=T_2^m$，则方阵

众所周知，在域 k（例如 $\mathbb{Q}$）上，移位等价完全由 T 的有理标准形决定，但不包括幂零块，即特征值为

$t = 0$的块。特别是，非零特征值是不变量；参见 [18, 7.3–7.5]。这反映了有限维 $k[T]$-模可由其有理标准形分类。因此，如果 (M_1, T_1) 和 (M_2, T_2) 在 k上移位等价，那么它们的特征多项式$\chi(t) = \det(t \cdot I - T_i)$ 仅相差 t 的幂，并且 T_i 具有相同的有理标准形。一种高效的有理标准形算法由 Storjohann 提出 [29]。

同伦论。 .....的联合研究 [30, 12] 表明，康利指标最一般的形式，是带基点拓扑空间上映射的同伦范畴中的移位等价。这意味着，同伦群（在群范畴中）的移位等价是康利指标的不变量。因此，在这一一般情形下，要判断两个指标对是否具有相同的康利指标，就必须能够判定两个有限生成群是否同构。众所周知，这是不可能的；参见 [2, 7。10]因此，从应用的角度来看，以同伦康利指标为切入点并不自然。有鉴于此，我们将重点放在同调 Conley 指数上。因此，我们关注有限生成阿贝尔群范畴中的移位等价。

更明确地说，设 (P_1, P_0) 和 (Q_1, Q_0) 是连续映射 f and$g$ 的指标对（ $f = g$ 可能成立）。我们想要了解 $f_*\colon H_*(P_1, P_0;\ k) \to H_*(P_1, P_0;\ k)$ 和 $g_*\colon H_*(Q_1, Q_0;\ k) \to H_*(Q_1, Q_0;\ k)$ 是否移位等价。留给读者验证： f_* and g_* 移位等价，当且仅当对每个 n， $f_n\colon H_n(P_1, P_0;\ k) \to H_n(P_1, P_0;\ k)$ 和 $g_n\colon H_n(Q_1, Q_0;\ k) \to H_n(Q_1, Q_0;\ k)$ 移位等价。

我们在引用 J. Bush 的一个结果后结束对康利指标的讨论： [5, 推论 4.7]每个 $n \times n$ 具有整数项的矩阵 T都可以实现为康利指标的一个代表。更准确地说，给定 T ，存在一个一维连续函数 f 和一个指标对（P_1， P_0），使得 T在 $\mathbb{Z}$ 上与 f_1移位等价： H_1（P_1， P_0） $\to H_1$（P_1， P_0）。

转向移位等价的代数表述，回顾一下， [3] 模$M[t^{-1}]$ 的局部化 $k[t]$是形式分数 x/t^i的等价类集合，其中$x \in M$、 $i \geq 0$，且当且仅当存在某个 $m > 0$使得 $t^{j+m}x = t^{i+m}y$ 时成立。

命题*1.1*的证明。假设 $\alpha \sim_s \beta$，并令 $r\colon A \to B$， $s\colon B \longrightarrow A$ 以及 m 如定义2.1所述。则 r是一个 $k[t]$-模同态，其定义域为 $M =$（A， α），陪域为 $N =$（B， β），因为对所有 $x \in A$:

$$r(t \cdot x) = r(\alpha(x)) = \beta(r(x)) = t \cdot r(x).$$

同样的论证表明， s 是一个 $k[t]$-模同态。条件 $sr = t^m$和 $rs = t^m$ 转化为 $sr(x) = \alpha^m(s(x)) = t^m \cdot x$ 以及 $rs(y) = \beta^m(r(y)) = t^m \cdot y$。转到 $M[t^{-1}]$和 $N[t^{-1}]$后，这等价于 $t^{-m} \cdot s(r(x)) = x$ 以及 $r \cdot (t^{-m} \cdot s)y = y$。因此， $t^{-m} \cdot s$是 r的逆，而 $t^{-m} \cdot r$是 s的逆。于是 $M[t^{-1}] \cong N[t^{-1}]$。

现在假设存在一个$k[t, t^{-1}]$-模同构 $f\colon M\left[t^{-1}\right] \to N\left[t^{-1}\right]$。由于 M 是有限生成的，设其生成元为 x_1,...,x_n，则存在 $d_i > 0$ 和 $y_i \in N$ ，使得$f(x_i) = y_i/t^{d_i}$。令 $d =$为 $\{d_1, \ldots, d_n\}$的最大值。设 $r(x) = t^d f(x)$，并注意到 $r\colon M \to N$是一个群同态，且 $f(x) = r(x)/t^d$。类似地，同构 $f^{-1}\colon N\left[t^{-1}\right] \to M\left[t^{-1}\right]$具有如下形式：对某个 $e > 0$， $f^{-1}(y) = s(x)/t^e$。于是对所有 $x \in M$，有$x = f^{-1}f(x) = r(s(x))/t^{d+e}$，即 $r(s(x)) = t^{d+e}x$；类似地，对所有$y \in N$，有 $s(r(y)) = t^{d+e}y$。因此， α 和 β 移位等价。 ∎

Remark 2.3. 该Bowen–Franks 群的 M是 $M/(1-t)M$；参见 [18, 7.4.15]。由于这是

有理数域 $M[t^{-1}]$ 的一个商，因此这个不变量弱于我们考虑的不变量。

正如我们在引言中指出的，大多数康利指标计算都将k 选为一个域，并使用有理标准形，以提高计算效率（参见 [2, 第 14 节。8]）。尽管使用整数系数进行同调计算的最坏计算复杂度界限比在域上进行计算的界限更差，但仍然可以在整数上进行计算。因此，本文余下部分假设 $k \cong \mathbb{Z}$，且 M 是一个$\mathbb{Z}[t]$-模，作为阿贝尔群有限生成，并且 t 作为底层阿贝尔群上的自同态作用。

注2.4。为简便起见，我们将讨论一个$\mathbb{Z}[t]$-模 M的移位等价类，即映射 $M \to M$，$m \mapsto tm$的移位等价类。我们称一个 $\mathbb{Z}[t]$-模 M 是有限生成的，如果它作为阿贝尔群有限生成；如果 M 作为阿贝尔群无挠，则称其为无挠。

我们首先关注 $\mathbb{Z}[t]$-模 M，它们作为阿贝尔群是有限生成且无挠的。也就是说，其底层阿贝尔群是 $\mathbb{Z}^m$，而 t 通过一个 $m \times m$ 整数矩阵T作用。与例2.2一样，特征多项式 $\chi_M(t) = \det(t \cdot I - T)$ 是$\mathbb{Z}[t]$ 中的一个不变量，除相差 t的幂次外不变。以下结果使我们可以假设，无挠的 $\mathbb{Z}[t]$-模M 没有 t-挠。

令 $M_{\mathrm{nil}} = \{x \in M : t^n x = 0, n \gg 0\}$。则 M/M_{nil} 也是一个 $\mathbb{Z}[t]$-模。

引理 2.5。若 M 是一个 $\mathbb{Z}[t]$-模，且作为阿贝尔群有限生成且无挠，则 M/M_{nil} 是无挠的，且 $M[t^{-1}] \xrightarrow{\cong} M/M_{\mathrm{nil}}[t^{-1}]$。

注2.6。命题1.1 和引理2.5 表明 (M, t) 与 $(M/M_{\mathrm{nil}}, t)$ 移位等价。

证明。若 $x \in M$ 并且存在 $a \in \mathbb{Z}$ 使得 $ax \in M_{\mathrm{nil}}$，则 $t^n(ax) = a(t^n x) = 0$。由于 M 是无挠的，这意味着 $t^n x = 0$，因此 $x \in M_{\mathrm{nil}}$。这意味着，若$x \in M/M_{\mathrm{nil}}$ 则 $ax \neq 0$ 对所有 $a \neq 0$，即 M/M_{nil} 作为阿贝尔群是无挠的。

最后，由于 M_{nil} 是有限生成的，存在一个 m 使得 $t^m \cdot M_{\mathrm{nil}} = 0$，因此映射 $s : M \to M$，$s(x) = t^m x$可分解为映射 $S : M/M_{\mathrm{nil}} \to M$，且 $S \circ q = t^m$，其中 q 是商映射 $q : M \to M/M_{\mathrm{nil}}$。（参见 [2, 14.1.6]。）因此，$q$ 和 S 构成了 M 与 M/M_{nil}之间的移位等价。 ∎

注记 2.7. M_{nil} 当且仅当关联矩阵 T 的行列式非零时，才为零。

注记 2.8. 与任意有限生成的 $\mathbb{Z}[t]$-模一样，M 具有伴随素理想$\wp_i$ 于 $\mathbb{Z}[t]$ 以及子模 Q_i 于 M，使得 $0 = Q_0 \cap \cdots \cap Q_n$。参见 [3, 4.20–22]。在这个初等分解中，Q_i 与 $\wp_i$ 相关，意义是

$$\wp_i = \{f \in \mathbb{Z}[t] : f^n \cdot M \subset Q_i \text{ for } n \gg 0\}.$$

定义 2.9. 设 M 是一个 $\mathbb{Z}[t]$-模，其底层阿贝尔群为 $\mathbb{Z}^n$。本文中始终令 $R = \mathbb{Z}[t]/I$，其中 I 是理想 $\{f \in \mathbb{Z}[t] : f(x) = 0 \text{在 } M\}$上的 $\mathbb{Z}[t]$。

引理 2.10。设 M 和 I 如定义 2.9所述。那么，M 是一个 R-模，而 I 是 $\mathbb{Z}[t]$的主理想，由一个首一多项式生成。

证明。我们采用标准术语；参见 [2, 3]。由于 $I \cap \mathbb{Z} = 0$ 和 I 包含首一多项式 $\chi(t)$， M 的每个伴随素理想都由一个首一多项式生成。由于 $\mathbb{Z}[t]$ 是唯一分解整环，我们可以将 $\chi(t)$分解为不可约多项式的乘积，而这些多项式必为首一多项式。设 $h(t)$表示 t在 M上作用时于 $\mathbb{Q}[t]$ 中的最小多项式。那么， $h(t)$是首一多项式，且整除 $\chi(t)$；清除分母后，我们可假设 h 是 $\mathbb{Z}[t]$中的本原多项式，即其系数是互素整数。由于 h 在 $\mathbb{Q}[t]$中整除$\chi(t)$，存在一个 $g(t)$，属于 $\mathbb{Z}[t]$ ，以及一个常数 c ，使得 $h(t)g(t) = c\chi(t)$； c 必定是其系数的最大公因数，也就是 g的内容。将 g 替换为 g/c 后，我们有$hg = \chi$。这意味着 $h(t)$是首一多项式的乘积，因此在 $\mathbb{Z}[t]$中是首一多项式。 ■

反过来，任意 R-模都可以视为一个 $\mathbb{Z}[t]$-模，令 $f \in \mathbb{Z}[t]$ 以其在 $R = \mathbb{Z}[t]/I$ 中的像作用；这种从 R-模到 $\mathbb{Z}[t]$-模的变换称为 标量限制 [3]。因此， R-模 M和 N当且仅当作为 $M[t^{-1}] \cong N[t^{-1}]$-模时 $R[t^{-1}]$移位等价。

注 2.11. 当 $\chi(t)$ 是一个次数为 2 的不可约多项式 f 时， M 是一个一维整环 $R = \mathbb{Z}[t]/I$ 上的模，而 R 的分式域是一个数域。此情形将在第 6 节和第 5节讨论。

3. 可逆矩阵。 众所周知，共轭矩阵是移位等价的： T与 RTR^{-1} 通过 R 和 $S = R^{-1}$ 移位等价。下面给出一个部分逆命题。回忆一下，整数矩阵 T 可逆，当且仅当 $\det(T) = \pm 1$。

引理 3.1. 假设 T_1 与 T_2 （通过 R 和 S）移位等价。如果 T_1 可逆，且$det(T_2) \neq 0$，那么 T_2， R 以及 S 均可逆，且 $T_2 = RT_1R^{-1}$。

证明. 公理 $SR = T_1^m$蕴含 $R\colon\ A \to B$ 是单射，且 $S\colon\ B \to A$ 是满射。因此，$B \cong R(A) \oplus \ker(S)$（见 [14, 定理 IV.1.18]） 。由于 $\det(T_2) \neq 0$，公理 $RS = T_2^m$蕴含 $\ker(S) = 0$。因此， R 和 S 可逆，且$S = T_1^m R^{-1}$。公理 $RT_1 = T_2R$ 蕴含 $T_2 = RT_1R^{-1}$。 ■

现在我们给出一系列由引理3.1推导出的例子；这些例子体现了后续各节所讨论的更具挑战性情形中所得结果的类型。

我们所知的唯一简单的一般性结果是， $n \times n$ 矩阵 $\pm I_n$ 不与任何其他 $n \times n$ 矩阵移位等价，因为它们位于 $GL_n(\mathbb{Z})$ 的中心。（这由引理3.1得出。）

例3.2。回到例1.2，我们断言 $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 与矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \end{smallmatrix}\right)$ 移位等价，当且仅当 x是奇数。为此，将 P与 $R = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ （其中 $\det(R) = \pm 1$）共轭，得到

$$\begin{bmatrix} bd - ac & a^2 - b^2 \\ d^2 - c^2 & ac - bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \end{bmatrix}.$$

解得 $a = \pm b$, $a(c \pm d) = \pm 1$, $a = \pm 1$ 和 $x = 1 \pm 2c$，因此 x 是奇数。 P 也通过 $R = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$与 $-P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 移位等价。

类似的论证表明，$Q=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ 与矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\c&-1\end{smallmatrix}\right)$ 移位等价当且仅当 c 是偶数，并且 $Q\sim_s -Q$。

例 3.3. 假设 $\chi(t)=t^2+1$。那么，旋转矩阵 $T=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ 与所有形如 $\left(\begin{smallmatrix}c&-1\\1+c^2&-c\end{smallmatrix}\right)$ 的矩阵均移位等价，其对应关系为 $R=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\-c&-1\end{smallmatrix}\right)$。特别地，$T\sim_s -T$。类似地，$T$ 与所有形如 $\left(\begin{smallmatrix}c&+1\\1-c^2&-c\end{smallmatrix}\right)$ 的矩阵均移位等价，且 $\left(\begin{smallmatrix}c&1+c^2\\-1&-c\end{smallmatrix}\right)$。

命题3.4。 每个整数矩阵 T 满足 $\chi(t)=t^2-1$，都移位等价于以下两者之一：$P=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 或 $Q=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$。

另一种证明见下文的例子6.3 。

证明。 设 $T(x,u,v)$ 表示矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}x&u\\v&-x\end{smallmatrix}\right)$，其中 $x^2+uv=1$且 $\chi(t)=t^2-1$

.

我们对 $|x|$进行归纳。当 $x=0$时，得到矩阵 P和 $-P$，即例3.2中的矩阵。当 $|x|=1$ 时，得到例 3.2中的三角矩阵，它们与 P 或 Q移位等价。

假设 $|x|\geq 2$。由于 $x^2-1=-uv$，$|u|$ 或 $|v|$ 小于 $|x|$，但两者不会同时小于 $|x|$；并且 u和 v符号相反。用 $E=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ 和 E^{-1}共轭，得到

$$ETE^{-1}=T(x-u,u,v-u+2x);\quad E^{-1}TE=T(x+u,u,v+u-2x).$$

若 $|u|<|x|$，则 $|x-u|<|x|$ 或 $|x+u|<|x|$，结论成立。同样，若 $|v|<|x|$，用 $\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ 共轭 T（或用其逆）得到 T（$x-v$，$u-v+2x$，v），分别得到T（$x+v$，$u+v+2x$，v），这种情况下结论也成立。 ■

采用 $T(x,\ u,\ v)$ $uv=1+x^2$进行类似分析可知，每个满足$\chi(t)=t^2+1$ 的整数矩阵都与旋转矩阵 $T=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$移位等价。下面的例5.5(1) 给出了另一种证明。

备注3.5. 将例1.2 扩展到周期性 n 轨道，会产生一个指标映射，其对应的特征多项式具有如下形式 t^n-1。正如例7.8所示，确定 $\mathbb{Z}$ 上的对应移位等价类并非易事。

4. 当 $\chi(t)$ 可分解为一次项时的移位等价。正如引言中所述，为简化讨论，我们将聚焦于 2×2 上矩阵之间的 $\mathbb{Z}$移位等价。首先处理简单情形，即特征多项式 $\chi(t)$ 在 $\mathbb{Z}[t]$中可分解，也就是说，$\chi(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$，且 T是一个下三角矩阵。

对于 $a\in\mathbb{Z}$，我们将 M_a记作 $\mathbb{Z}[t]$-模，它是具有 $T=\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1&0\\a&\lambda_2\end{smallmatrix}\right)$的阿贝尔群 $\mathbb{Z}^2$；也就是说，t通过 $t(x,y)=(\lambda_1 x,\lambda_2 y+ax)$ 作用。注意，M_a与 M_{-a} 以及 $(\mathbb{Z}^2,T')$ 都共轭，其中 $T'=\left(\begin{smallmatrix}\lambda_2&a\\0&\lambda_1\end{smallmatrix}\right)$。因此，$T$ 与 $\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1&0\\-a&\lambda_2\end{smallmatrix}\right)$ 和 T' 移位等价。

一般来说，$\mathbb{Z}[t]$-模映射 $h\colon M_a\to M_b$ 可以表示为映射 $\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2$，由下三角矩阵 $R=\left(\begin{smallmatrix}r&0\\u&s\end{smallmatrix}\right)$ 给出，使得

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\b&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r&0\\u&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r&0\\u&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\a&\lambda_2\end{pmatrix},$$

i.e,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 r & 0 \\ br + \lambda_2 u & \lambda_2 s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\lambda_1 & 0 \\ as + u\lambda_1 & s\lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

回忆命题 1.1 ，有 M_a 与 M_b 移位等价，当且仅当 $M_a[t^{-1}]$ 与 $M_b[t^{-1}]$同构。本节余下部分将确定满足以下条件的情形：$h[t^{-1}]$: $M_a[t^{-1}] \to M_b[t^{-1}]$ 给出这样一个同构。

我们先考虑 $\lambda_1 = \lambda_2$ 的情形，也就是 T 只有一个约当块的情形 .

命题 4.1. 、 的移位等价类与正整数的无限集合 $T_a = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ a & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $\lambda \neq 0$一一对应， a 满足 a 与 λ互素。

证明。 当 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ 时， h 是模映射的条件是 $as = br$。现在 h诱导出一个同构 $M_a[t^{-1}] \cong M_b[t^{-1}]$ 当且仅当 $\det(h) = rs$ 是 $\mathbb{Z}[\lambda^{-1}]$中的单位，也就是说，当且仅当 r 和 s 整除 λ^n ，其中某个 n。因此 M_a 和 M_b 移位等价当且仅当 $as = br$，其中 r 和 s 是整数，并且在 $\mathbb{Z}[\lambda^{-1}]$中成为单位。 ∎

例4.2. 若 b 整除 λ^n，则映射 $M_1 \xrightarrow{h} M_b$, $h(x, y) = (x, by)$诱导出移位等价。更一般地，若 $b = as$ 和 s 整除 λ^n，则映射 h: $M_a \to M_b$, $(x, y) \mapsto (x, sy)$是移位等价的一部分。

命题4.3. 有理数域 $\mathbb{Z}[t]$-模 M_a 和 M_b 移位等价，当且仅当存在整数 r,s ，它们与 $\lambda_1\lambda_2$ 有相同的素因子，且满足 $as - br$ 可被 $(\lambda_1 - \lambda_2)$整除。

证明。 由命题 4.1之前的矩阵等式（4.1）可知，充要条件是 $as - br = u(\lambda_2 - \lambda_1)$，且 $\det(h) = rs$ 是 $\mathbb{Z}[\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}]$中的一个单位。 ∎

例 4.4. 若 $|\lambda_1 - \lambda_2| = 1$ 则每个 M_a 都与 M_0移位等价，因为命题 4.3 中的条件对所有 a, b均成立。

若 $|\lambda_1 - \lambda_2| = 2$，则 λ_i 要么都是偶数，此时每个 M_a 都与 M_0移位等价；要么都是奇数，此时有两个移位等价类： M_a ，其中 a 为偶数；以及 M_a ，其中 a为奇数。

例 4.5. 若 $|\lambda_1 - \lambda_2| = p$ 是奇素数，且 λ_1 和 λ_2 与 p互素，问题在于整除 $\lambda_1\lambda_2$ 的素数是否生成了 $\mathbb{Z}/p$的单位循环群。无论如何， M_a与 M_0 不移位等价，因为 p 不能整除 λ_1 或 λ_2。

例如，若 $p = 17$ ，则 $\mathbb{Z}/17$ 的单位构成一个阶为 16 的循环群，由 6 生成，且 $6^2 \equiv 2$ (模 17)。若 $(\lambda_1, \lambda_2) = (2, 19)$，则 $M_a(a = 0, \pm 6, 2)$有 4 个移位等价类。若 (λ_1, λ_2) 为 $(1, 18)$ 或 $(3, 20)$，则 M_a(对于 $a = 0, 1$) 有 2 个移位等价类。

例4.6. 若（λ_1， λ_2） = （1， p）且 p 为素数，则 $M_a \sim_s M_b$ 当且仅当 $a \equiv \pm b$模（$p - 1$）。因此，若 p 为奇数，则有（$p - 1$）/2 个移位等价类；若 $p = 2$ 则只有一个移位等价类。

类似地，若（λ_1， λ_2） = （1， p^n），则 $M_a \sim_s M_b$ 当且仅当 $a \equiv \pm p^k b$ 模（$p^n - 1$），其中某个 $k < n$。

若 λ_1 与 λ_2互素，则对任意非零整数 a，对角矩阵 M_0 都不与 M_a移位等价。事实上， $as \neq 0$ 模 $\lambda_1 - \lambda_2$。

注4.7. 命题4.3可以推广到任意交换环 R。特别地，给定 λ_1、$\lambda_2 \in R$，令 M_a^R表示 $R[t]$-模，它作为 R-模时为 R^2，其中 t通过 $t(x,y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y + ax)$作用。于是，命题4.3的证明仍然成立，从而证明$M_a^R$与$M_b^R$移位等价，当且仅当 a与 b模$(\lambda_1 - \lambda_2)$相差 $R[\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}]$的一个单位。第8节将把这一结论用于 $R = \mathbb{Z}/p^n$ 和 $\lambda_1 = \lambda_2$。

当 $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m$ 时，每个 $T\colon\ M \to M$都可写成 $\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ a & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$，其中 $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ 和 a，$\lambda_2 \in \mathbb{Z}/m$。转到 $M \otimes \mathbb{Q}$ 和 M/mM 后，我们看到 λ_1 和 λ_2 是移位等价不变量。我们将这个 $\mathbb{Z}[t]$-模记为 M_a，并将 λ_1 在 $\mathbb{Z}/m$ 中的像记为 λ_1。注意，r 在 $\mathbb{Z}[\lambda_1^{-1}]$ 中是单位，当且仅当 $r \in \mathbb{Z}$ 与 λ_1 具有相同的素因子。利用（4.1），4.3 的证明可继续进行，从而得到：

推论4.8。当 $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m$，且 $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$，$\lambda_2 \in \mathbb{Z}/m$ 均非零时：
1. 当且仅当存在一个与 λ_1 具有相同素因子的 $r \in \mathbb{Z}$，以及一个与 λ_2 具有相同素因子的 $s \in \mathbb{Z}/m$，使得 $as \equiv br^{-}$ 模 $\lambda_1 - \lambda_2$ 时，M_a 和 M_b 才移位等价。2. 若 $\lambda_2 \equiv \lambda_1$（模 m），且 λ_1 与 m互素，则：当且仅当 a 和 b 相差一个 $\mathbb{Z}[\lambda_1^{-1}]/m$的单位时，$M_a$ 和 M_b 才移位等价。3. 特别地，若 m 是素数，则 $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m$ 上的移位等价类完全由 $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ 和 $\lambda_2 \in \mathbb{Z}/m$分类。

注4.9. 本节的讨论主要聚焦于以下对象之间的移位等价：2×2上的矩阵 $\mathbb{Z}$，其中特征多项式 $\chi(t)$ 可分解为一次项。运用类似的论证，可以分析将 2 个约当块替换为n 个约当块的一般情形。然而，确定移位等价类的复杂度会迅速增加。确定 h 需要满足一个包含 $n(n-1)/2$ 个丢番图方程的方程组，这些方程源自（4.1）的类比。对于具体例子，可以进行这些计算，但我们不知道有何简洁的闭式表达式能根据 T 的特征值确定移位等价类的数量。

5. 二次数域中的整数。仍假设 T是一个 2×2 矩阵，现在考察特征多项式 $\chi(T)$ 不可约的情形。这意味着$R = \mathbb{Z}[t]/(\chi)$ 是一个一维整环，作为阿贝尔群同构于 $\mathbb{Z}^2$ [2,第 15] 章。令 ξ 表示 t 在 R中的像。那么，$F = \mathbb{Q}(\xi)$ 是一个二次数域，即满足 $\dim_{\mathbb{Q}}(F) = 2$ 的域。由于 ξ 的最小多项式是二次多项式，(R, ξ) 是一个 $\mathbb{Z}[t]$-模，其中 t 的作用是乘以 ξ。

在本节余下部分，我们假设 $R = \mathbb{Z}[\xi]$ 是$F = \mathbb{Q}(\xi)$ 中的整数环，因此 R 是一个戴德金整环。我们将在下一节讨论非戴德金的情形。

回顾一下，若存在理想 J 使得 $IJ \cong R$ 作为模成立，则 R 的理想 I 称为可逆理想。

定义 5.1. 皮卡群 $\mathrm{Pic}(R)$ 是域 R 中可逆理想的同构类所构成的集合 R。在这个群中，$[I]$与 $[J]$的乘积是 $[IJ]$的类。

若 R 是戴德金整环，则每个非零理想都是可逆的，而 $\mathrm{Pic}(R)$ 是 R中非零理想的同构类集合。关于戴德金整环的基本事实，例如无挠 R-模完全由其秩及其在 $\mathrm{Pic}(R)$ 中的类分类，我们请读者参阅 [31, I.3] 。特别地，与 $\mathbb{Z}^2$ 作为阿贝尔群同构的 R-模

的秩为 1。关于计算 Pic(R) 的算法讨论，请读者参阅 [17, 第 5] 节以及 [8, 第 5] 章。

群 Pic($R[\xi^{-1}]$) 是 Pic(R) 除以由整除 ξ 的 R 的素理想生成的子群所得的商群；见 [31, Ex.I.3.8]。如果所有这些素理想都是主理想，则 Pic(R) ≅Pic($R[\xi^{-1}]$)。

由于 R 的每个非零理想 I 的底层阿贝尔群都是 $\mathbb{Z}^2$，因此每个 (I,ξ) 都与 (R,ξ) 具有相同的最小多项式。由此可证：

定理 5.2。 设 $R=\mathbb{Z}[\xi]$ 是二次数域 $\mathbb{Q}(\xi)$中的整数环，且$\chi(t)$是 ξ的最小多项式。则：

1. Pic(R) 的元素与具有 $\chi(T)=0$ 的 $\mathbb{Z}[t]$-模 $(\mathbb{Z}^2,T)$ 的同构类一一对应，其中 T 的作用为 ξ。理想 I（属于 R）的皮卡类对应于 (I,ξ)。2. Pic($R[\xi^{-1}]$) 的元素与满足 $\chi(T)=0$ 的矩阵 $T\in M_2(\mathbb{Z})$ 的移位等价类一一对应。

特别地，如果 R 中每个被 ξ 整除的素理想都是主理想，那么对于 R 的理想，移位等价与同构等价。

推论 5.3。 若 $d\neq 1$ （模 4）且 $\mathrm{Pic}(\mathbb{Z}[\sqrt{d},1/\sqrt{d}])=0$，则矩阵 $T\in M_2(\mathbb{Z})$ 满足 $\chi(T)=t^2-d$的移位等价类由 T的有理标准形决定。

备注 5.4。 更具体地说，两个 2×2 矩阵 T_1、T_2 若具有相同的特征多项式 $\chi(t)$，则确定的理想 I_1，I_2 在 $R=\mathbb{Z}[t]/(\chi)$ 中在同构意义下良定义。于是 T_1 与 T_2 移位等价，当且仅当 $I_1[t^{-1}]$ 与 $I_2[t^{-1}]$ 作为 $R[t^{-1}]$-模同构。

设 d 是一个非零整数，且 $|d|$ 无平方因子，并考虑 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 中的整数环。分两种情况：

Case 1: 若 $d\neq 1$ （模 4），则 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 中的整数环为 $R=\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$。令 t 作用为 $\xi=\sqrt{d}$，由定理 5.2 可知，特征多项式为 t^2-d 的移位等价类（$\mathbb{Z}^2$，T）与 Pic($R[1/\sqrt{d}]$) 中的元素一一对应。

例5.5. 1) 若 $\chi(t)=t^2-d$ 对于 $d=2$、3、6、7、11、14、19 或 $d=-1$、-2、-7，则 $R=\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$，且 Pic(R) $=0$ [26][1]。对于这些 d 的取值，在（$\mathbb{Z}^2$，T）上满足 $\chi(t)=t^2-d$ 的移位等价类只有一个，即 $T=\left(\begin{smallmatrix}0&d\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 的等价类；（$\mathbb{Z}^2$，T）为（R，$\sqrt{d}$）。

2) 如果 $\chi(t)=t^2+5$，那么 Pic(R) $=\mathbb{Z}/2=\{R,I\}$，其中 $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ and $I=(2,1+\sqrt{-5})$ R。由于 $\sqrt{-5}\notin I$，可得 Pic($R[(\sqrt{-5})^{-1}]$) $=\mathbb{Z}/2$ 也成立。因此，在 $\mathbb{Z}^2$ 上，特征多项式为 t^2+5 的移位等价类有两个不同构类：R和 I。对应于基底 $\{1,\sqrt{-5}\}$ 和 $\{2,\sqrt{-5}\}$ 的 T 矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&-5\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad\begin{pmatrix}-1&-3\\2&1\end{pmatrix}.$$

3）如果 $d=-6$ 或 $d=-10$，Pic($\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$)≅ $\mathbb{Z}/2$ 但 Pic($\mathbb{Z}[\sqrt{d},1/\sqrt{d}]$) $=0$。（参见 [26, 第 636]。）在这种情况下，理想 $I=(2,\sqrt{d})$ 与 R不同构，但模 R 和 I 移位等价

[1]或者，读者也可以使用 Mathematica[24]中的命令 NumberFieldClassNumber[$\sqrt{d}$]来确定皮卡群的阶。

。相应的移位等价矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 & d/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

情形 2：若 $d \equiv 1$ （模 4），则 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 中的整数环不是 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$，而是 $\overline{R} = \mathbb{Z}[\omega]$，其中 $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$。我们令 t 作为 $\xi = \omega$。ω 的最小多项式为 $t^2 - t - c$，其中 $c = (d-1)/4$。

根据定理 5.2，同构类和移位等价类（$\mathbb{Z}^2$，T）与特征多项式 $t^2 - t - c$ 分别与 Pic($\overline{R}$) 和 Pic($\overline{R}[1/\omega]$) 中的元素一一对应。

例 5.6。若 d 为 5、13、17、21、29 或 $-3, -7, -11, -19$，则 $\overline{R} = \mathbb{Z}[\omega]$ 的 Pic($\overline{R}$) 为 $= 0$，因此 Pic($\overline{R}[1/\omega]$) 为 $= 0$，所以特征多项式为 $t^2 - t - c$ 的移位等价类只有一个，即 $\overline{R}$ 的移位等价类，也就是 $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -c \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，其中 $c = (d-1)/4$。

注记 5.7. 对于次数为 ≥ 3 的不可约多项式，我们所知甚少。例如，我们对 $R = \mathbb{Z}[t]/(\chi)$ 在 $\chi(t)$ 为 $t^n + 5t + 10$ (一个由艾森斯坦判别法判定为不可约的多项式) 时的情况知之甚少。一般来说，当R变得更大时，计算 Pic(n) 会变得难以处理。

6. 数域的非戴德金子环。当 T 是一个 2×2 矩阵，且其特征多项式 $\chi(t)$ 不可约时，环 $R = \mathbb{Z}[t]/(\chi)$ 通常不是整闭的；R 的整闭包 $\overline{R}$ 是戴德金环 [3]。回想一下，若存在一个 R-模 N' 使得 $N \otimes_R N' \cong R$，则 R-模 N 是可逆的。如果 $R/(\chi)$ 不是整闭的，那么并非每个与 $\mathbb{Z}^2$ 同构的 R-模都是可逆的。（例如，$\overline{R}$ 不是可逆的R-模。）

在这种情况下，我们需要在定理 $\overline{R}$中对皮卡群 Pic(5.2 补充另一个¯不变量：导子理想。其定义为 $\mathfrak{c} = \operatorname{ann}_R(\overline{R}/R) = \{r \in R \mid r\overline{R} \subseteq R\}$，它是包含于 $\overline{R}$ 中的最大理想 R。

设 M和 M'是 $\overline{R}$的 R-子模。由于 $\overline{R}$作为阿贝尔群是 $\mathbb{Z}^2$，因此 M和 M'作为阿贝尔群也都是 $\mathbb{Z}^2$。我们希望找到不变量来判定 (M, t) 和 (M', t) 是否移位等价。

一个不变量是 $(M \otimes_R \overline{R}, t)$ 的移位等价类。由于 $M \otimes_R \overline{R}$ 是一个秩为 1 的 $\sim\overline{R}$-模，它同构于 $\overline{R}$的一个理想 I；同构 $\phi\colon M \otimes_R \overline{R} \xrightarrow{\sim} I$ 在相差一个 $\overline{R}$中的单位因子的意义下是良定义的。因此，(M, t) 的一个不变量是 $\overline{R}$上 (I, t) 的移位等价类~。给定 I以及一个同构 $\phi\colon M \otimes_R \overline{R} \xrightarrow{\sim} I$，下面我们证明 $\overline{M} = M/\mathfrak{c}I$ 的类给出了另一个不变量。由于我们可以根据这些数据重构 M，因此得到与 $\mathbb{Z}^2$同构的 R-模的分类。

定理 6.1。若 M 是一个 R-模，与 $\mathbb{Z}^2$ 作为阿贝尔群同构，且给定 $\phi\colon M \otimes_R \sim\overline{R} \xrightarrow{\sim} I$，则存在典范的 R-模包含 $\mathfrak{c}I \subseteq M \subseteq I$。因此，与 R-模同构的 $\mathbb{Z}^2$，在同构意义下由

1. Pic($\overline{R}$)的元素 $[I]$，以及 2. 对每个 $[I]$，非零 R-子模 $\overline{M} = M/\mathfrak{c}I$ 在 $I/\mathfrak{c}I \cong \overline{R}/\mathfrak{c}$ 中的等价类，其中若存在 $\overline{R}$ 中的元素 r，使得 $r\overline{M} = \overline{N}$ 或 $r\overline{N} = \overline{M}$，则 $\overline{M} \simeq \overline{N}$。

证明。 考虑短正合列 $0 \to R \to \overline{R} \to \overline{R}/R \to 0$。与 M作张量积，得到正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(M,\overline{R}) \to \mathrm{Tor}_1^R(M,\overline{R}/R) \xrightarrow{\partial} M \otimes_R R \to M \otimes_R \overline{R} \to M \otimes_R (\overline{R}/R) \to 0.$$

存在一个典范同构 $M \cong M \otimes_R R$，且项 $M \otimes_R \overline{R}$ 同构于 I，其映射为ϕ。由于 M 是无挠阿贝尔群，而 Tor 模是挠的，因此映射 ∂ 为零。这给出了包含 $M \subseteq I$。

类似地，从短正合列 $0 \to \mathfrak{c} \to R \to R/\mathfrak{c} \to 0$ 出发并与 M取张量积，同样的论证得出断言 $\mathfrak{c}I \subseteq M$，因为

$$M \otimes_R \mathfrak{c} \cong M \otimes_R (\overline{R} \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{c}) \cong (M \otimes_R \overline{R}) \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{c} \cong I \otimes_{\overline{R}} \mathfrak{c} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{c}I.$$

~此构造取决于同构 $\phi : M \otimes \overline{R} \to I$的选择。若 $N = rM$对于非零$r \in \overline{R}$成立，则 $N \cong M$，但 $\phi(N) = r\phi(M)$。由于 $\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(I,I) = \overline{R}$， ϕ的选择将 $R/\mathfrak{c}$-模确定到相差一个$\overline{R}$中元素的倍数。 ■

备注 6.2. 定理 6.1 为移位等价类的数量给出了一个简单的上界估计，即 $\mathrm{Pic}(\overline{R})$ 的阶与 [24], 的同构类数量的乘积；前者很容易计算 R-模 M 满足 $\mathfrak{c} \subseteq M \subseteq \overline{R}$；根据命题 6.5 ，后者至多为四。推论 6.6 表明它至少为二。

接下来的示例族讨论满足 $T^2 = dI$ 的 T，也就是 $R = \mathbb{Z}[t]/(t^2 - d)$ 上满足 T 作用为 $\sqrt{d}$ 的模。

例 6.3. ($t^2 = 1$)。如果 $R = \mathbb{Z}[t]/(t^2-1)$，那么 $\overline{R} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，且导子为 $2\overline{R}$。定理 6.1 适用，并指出这些等价类对应于 $\overline{R}/2 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ 的四个子群的等价类，其中 $\overline{R}/2$ 对应于 $\overline{R}$，由 (1, 1) 生成的子群对应于 R。由 (0, 1) 和 (1, 0) 生成的子群分别对应于 $\overline{R}$ 的 R- 模 $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ 和 $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，二者都同构于 $\overline{R} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$。因此，移位等价类只有两个，分别对应于 R 和 $\overline{R}$。这为例 3.2 提供了另一种计算方法。

例 6.4（$t^2 = -4$）。在这种情形下， $|d|$ 不是无平方因子的，因此不属于第 5 节的情形 1。这里 $R = \mathbb{Z}[2i]$，且 $\xi = 2i$； $\overline{R} = \mathbb{Z}[i]$，$\mathrm{Pic}(\overline{R}) = 0$， $\mathfrak{c} = 2\overline{R}$ 和_ $R/\mathfrak{c} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$。由于 $R/\mathfrak{c}$ 有 4 个非零子群，因此具有 $M \otimes_R \overline{R} \cong \overline{R}$ 的 R-模有三个同构类，即 $R \cong iR$、 $J_1 = (2, 1+i)R$ 和 $\overline{R}$。（关于 R和 J_1 为何不同构，见下文。）相对于这些 R-模的 $\mathbb{Z}$-基 $\{1, 2i\}$、 $\{2, 1+i\}$ 和 $\{1, i\}$， $t = 2i$ 由以下矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

作为$R[t^{-1}] = \mathbb{Z}[1/2, i] = \overline{R}[t^{-1}]$，这些矩阵均为移位等价。

相比之下， $t = 1 + 2i$ 在 R、 J_1 和 $\overline{R}$ 上的表示分别由矩阵给出

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

相比之下， $t = 1 + 2i$ 在 R、 J_1 和 $\overline{R}$ 上的表示分别由矩阵给出

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

这三个矩阵属于不同的移位等价类，尽管它们具有相同的标准形和特征多项式 $t^2 - 2t + 5$。

为了解释原因 $R \ncong J_1$，假设 $f\colon R \to J_1$ 具有 $f(1) = 2x + (1 + i)y$，因此 $f(2i) = -2(2x + 2y) + (1 + i)(4x + 2y)$。映射 f 由以下矩阵表示

$$A = \begin{bmatrix} x & -(2x + 2y) \\ y & 4x + 2y \end{bmatrix},$$

且 $\det A = 4x^2 + 4xy + 2y^2 \neq \pm 1$。因此 f 不可能是同构。

当 $d \equiv 1$ (模 4)时， $d \neq 1$，那么 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 的整闭包是 $\overline{R} = \mathbb{Z}[\omega], \omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$。使用参数 $c = (d - 1)/4$很方便，因为 $\omega^2 - \omega - c = 0$。

命题 6.5（$t^2 = d$）。当 $d \equiv 1 \pmod 4$ 时， $d \neq 1$，至多有四个具有 $\mathfrak{c} \subseteq M \subseteq \overline{R}$ 的 R-模 M 的同构类，即： R、 $J_0 = (2, \omega)R$、 $J_1 = (2, 1 + \omega)R$ 和 $\overline{R}$。（模 $\mathfrak{c}$ 意义下，这些是 $\overline{R}/\mathfrak{c}$ 的非零线性子空间。）相对于 R、 J_0、 J_1 和 $\overline{R}$ 的 $\mathbb{Z}$-基 $\{1, \sqrt{d}\}$、$\{2, \omega\}$、$\{2, 1 + \omega\}$ 和 $\{1, \omega\}$，乘以 $t = \sqrt{d}$ 可由以下矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & c - 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \textit{and} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2c & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $t = \sqrt{d}$ 在 R 中与 $\mathfrak{c}$ 互素，它们之中不同构的 R-模在 $R[t^{-1}] = R[1/\sqrt{d}]$ 上仍然是不同构的模。也就是说，它们不是移位等价的。

证明。 导子理想为 $\mathfrak{c} = 2\bar{R} = (2, 1 + \sqrt{d})$，且 $|\overline{R}/\mathfrak{c}| = 4$。（若 c 为偶数，$\overline{R}/\mathfrak{c} = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$，其中 $\mathbb{F}_2$ 为二阶有限域；若 c 为奇数，则 $\overline{R}/\mathfrak{c}$ 为阶为 4 的域 $\mathbb{F}_4$。）

根据定理 6.1， R-模 M 至多有四个同构类，满足 $\mathfrak{c} \subseteq M \subseteq \overline{R}$，分别为： R， J_0， J_1，以及 $\overline{R}$。模 $\mathfrak{c}$掉 $\overline{R}/\mathfrak{c}$后，它们是 $\overline{R}/\mathfrak{c}$的非零线性子空间。（若 c为偶数， $\overline{R}/\mathfrak{c} = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$，其中 $\mathbb{F}_2$ 为二阶有限域；若 c 为奇数，则 $\overline{R}/\mathfrak{c}$ 为 $\mathbb{F}_4$ 阶为 4 的域。）

推论 6.6。 若 $d \equiv 1$ (模 4)， $d \neq 1$，则 $\overline{R}$ 不同构于 R， J_0 或 J_1。因此至少存在两个移位等价类。

证明。 $\overline{R}/\mathfrak{c}$ 有 4 个元素，而 $R/\mathfrak{c}$、 $J_0/\mathfrak{c}$ 和 $J_1/\mathfrak{c}$ 只有 2 个元素。因此， $\overline{R}$不可能与 R、J_0 或 J_1同构。结论由命题 6.5 得出。

下面给出一个简单的例子，说明如何应用命题 6.5。在下一节中，我们将发展一些工具，以便更广泛地应用命题 6.5 。

例 6.7。 （$t^2 = 5, c = 1$）。 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$中的整数环为 $\overline{R} = \mathbb{Z}[\omega]$， $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是基本单位，且 $\mathrm{Pic}(\overline{R}) = 0$。在此情形下， R、 $\omega R \cong J_0$ 和$\omega^2 R \cong J_1$ 作为 R-模都同构。由定理 6.1 和命题 6.5 可知，特征多项式为 $t^2 - 5$的移位等价类恰有两个。它们分别由矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和$\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 表示（对应于 R-模 R和$\overline{R}$）；矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $\left(\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ 都与 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$移位等价。

7. 寻找同构。利用命题6.5 和推论6.6 的第一步，是确定 R， J_0和 J_1 是否同构 R-模，这取决于非零整数 c。

1. 给定命题 $\mathbb{Z}$ 的基6.5，任意 R-模映射 $f\colon R \to J_0$ 由下式确定：$f(1) = 2x + \omega y$，因为 $f(\sqrt{d}) = \sqrt{d} \cdot f(1) = 2(-x + yc) + \omega(4x + y)$ 在 J_0中。映射f 表示为 $A \in M_2(\mathbb{Z})$，其中

$$A = \begin{bmatrix} x & -x + cy \\ y & 4x + y \end{bmatrix},$$

当且仅当二次型

$$\det(A) = Q(x, y) = 4x^2 + 2xy - cy^2 = \pm 1 \tag{7.1}$$

在 $\mathbb{Z}$ 上有解。也就是说， R 和 J_0 是同构的 R-模，当且仅当$Q(x, y) = \pm 1$ 在 $\mathbb{Z}$ 上有解。

2. 类似地，映射 $f\colon R \to J_1$ 由 $f(1) = 2x + (1 + \omega)y$ 和 确定

$$f(\sqrt{d}) = \sqrt{d} f(1) = [(c - 2)y - 3x]2 + (4x + 3y)(1 + \omega).$$

因此，它表示为 $A \in M_2(\mathbb{Z})$，其中

$$A = \begin{bmatrix} x & -3x + (c - 2)y \\ y & 4x + 3y \end{bmatrix}.$$

因此，当且仅当（x， y）是该二次型的解时， f 是同构

$$\det(A) = Q(x, y) = 4x^2 + 6xy + (2 - c)y^2 = \pm 1. \tag{7.2}$$

备注 7.1. R 同构于 J_0 当且仅当 R 同构于 J_1。事实上，映射$f_0\colon R \to J_0$满足 $f_0(1) = 2x + \omega y$是同构，当且仅当映射 $f_1\colon R \to J_1$是同构，其中 $f_1(1) = 2x + (1 - \omega)y$。

3. 我们可以使用类似的计算方法，利用这些 R-模的给定基来比较 J_0 和 J_1。令

$$\begin{aligned} f_2(2) &= x \cdot 2 + y(1 + \omega) \\ f_2(\omega) &= u \cdot 2 + v(1 + \omega) \end{aligned}$$

那么，将 J_1 视为 $\overline{R}$ 的子群，我们有

$$\begin{aligned} f_2(2\omega) = \omega f_2(2) &= x \cdot 2\omega + y(1 + \omega)\omega \\ &= 2x\omega + y\omega + \frac{y}{4}(1 + 2\sqrt{d} + d) \\ &= 2x\omega + y\omega + \frac{y}{4} + \frac{y}{2}\sqrt{d} + \frac{y}{4}(4c + 1) \\ &= 2(x + y)\omega + cy \\ &= 2(x + y)(1 + \omega) + cy - 2(x + y) \\ &= \left(\left(\frac{c}{2} - 1\right)y - x\right) \cdot 2 + 2(x + y) \cdot (1 + \omega) \end{aligned}$$

因此

$$v = x + y$$
$$4u = (c-2)y - 2x.$$

$M_2(\mathbb{Z})$ 的 f_2 表示为

$$A_2 = \begin{bmatrix} x & \frac{1}{4}\left((c-2)y - 2x\right) \\ y & x+y \end{bmatrix}.$$

注意， u 必须是一个整数，这等价于对某个整数 k，有 $(c-2)y - 2x = 4k$。要使 f_2 成为同构，必须满足

$$\det(A_2) = Q(x,y) = x^2 + \frac{3}{2}xy - \frac{c-2}{4}y^2 = \pm 1,$$

这等价于求解

$$4x^2 + 6xy - (c-2)y^2 = \pm 4.$$

利用约束条件 $2x = (c-2)y - 4k$，我们得出： f_2 是同构，当且仅当存在整数 k 和 y 满足

$$c(c-2)y^2 - 4(2c-1)ky + 16k^2 = \pm 4. \tag{7.3}$$

引理 7.2。 若 c 为偶数或 $c \le -3$，则 R 不同构于 J_0 或 J_1。若 $c \le -5$，则J_0 不同构于 J_1。

若 $c = -4$，则 J_0 与 J_1 同构。由命题 *6.5* 可知， R-模 M 且具有 $M \otimes_R \overline{R} \cong \overline{R}$.的同构类有 3 个

证明。 (7.1) 与 (7.2) 的奇偶性表明，若 c 为偶数，则不可能有解。使用 Mathematica 的 **FindInstance** [25] 可知，若 $c \le -3$ ，则无解；事实上，在这些范围内，相应的 Q 均为正定。

当 $c = -4$ 时， $(x,y) = (1,1)$ 定义了一个同构 $J_0 \cong J_1$。 ■

注 7.3. 再次使用 Mathematica，我们发现若 $c \ge 9$ ，则 $J_0 \ncong J_1$，因为方程 (7.3) 无解，并且 Q 在此范围内为正定。我们还发现，似乎有无穷多个 c 值满足 $J_0 \cong J_1$，也有无穷多个 $c < 0$ 值满足 $J_0 \ncong J_1$。

例 7.4 ($t^2 = -15$, $c = -4$)。 $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ 中的整数环 $\overline{R} = \mathbb{Z}[\omega]$ 的 $\mathrm{Pic}(\overline{R}) = \mathbb{Z}/2$ ，对应于 $I = (2, \omega)\overline{R}$ 的类，其中 $\omega = \frac{1+\sqrt{-15}}{2}$。根据定理 6.1、命题 6.5、注 7.1 和引理 7.2， $R \ncong J_0$ 和 $J_0 \ncong J_1$。因此，存在 6 个非同构的R-模 M，其底层群为 $\mathbb{Z}^2$：其中 3 个具有 $M \otimes \overline{R} \cong \overline{R}$，另外 3 个具有 $M \otimes \overline{R} \cong I$。

由于 $I[1/\omega] \cong \overline{R}[1/\omega]$，我们有 $\mathrm{Pic}(\overline{R}[1/\omega]) = 0$。与命题 6.5 中一样，它们表示具有 $\chi(t) = t^2 + 15$ 的 4 个不同的移位等价类。

注记7.5. 当 $d < -3$， $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 是一个虚数域，且$\mathbb{Z}[\omega]$ 的唯一单位是 ± 1。当 $d > 0$时，存在一个无限阶的“基本单位” η ，且 $\mathbb{Z}[\omega]$ 的每个单位都可以表示为 $\pm\eta^n$ ，其中 n为整数。可以使用 Mathematica 命令NumberFieldFundamentalUnits。

例7.6 ($t^2 = 101$, $c = 25$)。在 $\mathbb{Q}(\sqrt{101})$ 中的整数环为 $\overline{R} = \mathbb{Z}[\omega]$，其中$\omega = \frac{1+\sqrt{101}}{2}$且 $\omega^2 - \omega - 25 = 0$。现在 $\mathrm{Pic}(\overline{R}) = 0$，基本单位为 $\eta = 10+\sqrt{101}$。

令$R = \mathbb{Z}[\sqrt{101}]$，并注意到 $\eta \in R$。由定理6.1、推论6.6 和注记7.3可知，具有底层群 $\mathbb{Z}^2$ 的 R-模有 4 个同构类 R。因此，具有 $t = \sqrt{101}$的 R-模有 4 个移位等价类。对于命题 $\mathbb{Z}$6.5 中的-基，其矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 101 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 25 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 23 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 50 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于每个首一不可约二次多项式 f，其根为 r、$\bar{r} \in R$，都有 4 个同构类的矩阵 T，它们作用为 r。如果 r 与 $\mathfrak{c} = (2, \sqrt{101})R$互素，这些矩阵将有 4 个不同的移位等价类。例如，$\eta = 10 + \sqrt{101}$ 是多项式 $f(t) = t^2 - 20t - 1$的一个根。因此，具有 $t = \eta$的 $\mathbb{Z}[t]$-模 $\mathbb{Z}^2$ 有 4 个不同的移位等价类。

现在我们可以得到一个著名的结果；参见 [23, 第81]页。令 $J_0 = (2, \omega)R$。
引理7.7。 矩阵 $T = \left(\begin{smallmatrix} 19 & 5 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 与其转置 $T^t = \left(\begin{smallmatrix} 19 & 4 \\ 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$不移位等价。

证明。 矩阵 T表示 $t = \eta$在基 $\{5, -9 + \sqrt{101}\}$ 上的 J_0，而 T^t是 $t = \eta$ 在基 $\{2, -2+\sqrt{101}\}$ 上的 R的矩阵。根据定理 6.1 和例 7.6，有4个 R-模的移位等价类，其满足 $t = \eta$。由于 $R \ncong J_0$， $\mathbb{Z}[t]$-模J_0 与 R 不移位等价。 ∎

当 $\chi(t)$ 是次数大于 2 的多项式时，计算难度会急剧增加。我们给出一个简单的例子，其中包含 $\mathbb{C}$ 上的3个若尔当块，以说明所涉及的一些技巧。

例 7.8. 考虑情形 $\chi(t) = t^3 - 1$，它既是 T （旋转矩阵）的特征多项式，也是 T_2 和 T_3 的特征多项式：

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

环 $R = \mathbb{Z}[t]/(\chi)$ 的整闭包是 $\overline{R} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\omega]$，其中 $\omega = \sqrt[3]{1}$；映射 $R \to \overline{R}$将 t映射为 $(1, \omega)$。注意， $\mathfrak{c} = (3, \omega - 1)\overline{R}$。由于 $R/\mathfrak{c} = \mathbb{F}_3$和 $\overline{R}/\mathfrak{c} \cong \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$，与 $\mathbb{Z}^2$ 同构的 R-模对应于 $V = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$的 5 个非零一维子空间 $\mathbb{F}_3$。

有 3 个移位等价类满足 $\chi(t) = t^3 - 1$. 更具体地说，定理 6.1 表明， $V = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ 对应于 $\overline{R}$，其矩阵为 T_2 （基为 $\{(3, 0), (0, 1), (0, \omega)\}$）；而 $(1, 1)$ 上的对角子空间对应于 R，其矩阵为 T（基为 $\{1, t, t^2\}$）。 V的两个一维子空间，即 $\mathbb{F}_3(1, 0)$ 和 $\mathbb{F}_3(0, 1)$，分别对应于 R-模$\mathbb{Z} \times (\omega - 1)\mathbb{Z}[\omega]$ 和 $3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\omega]$，二者都与 $\overline{R}$同构。 V的最后一个一维子空间$\mathbb{F}_3(1, 2)$对应于 R-子模 M，其基为 $\{(2, 1), (0, \omega - 1), (1, 2)\}$；关联矩阵为 T_3。

8. 有理数域上的移位等价 $\mathbb{Z}/p^n$。我们简要考察当M， T）的移位等价，其中 M是有限 p群，即有理数域上的移位等价。对所有 $\mathbb{Z}/p^n[t]$ 而言， n 上的有限阿廷模的分类等价于有限（p-主）阿廷

模在 $\mathbb{Z}_p[t]$上，其中 $\mathbb{Z}_p$ 是 p进整数 [3]。这些模的伴随素理想包含 p ，并与 $\mathbb{Z}/p[t]$中的素理想一一对应，例如（p， $t-\lambda$）。我们可以忽略子群 M_{nil} ，在该子群上 t 幂零地作用，因为 M_{nil} 与 0 移位等价，且 M 与 M/M_{nil}移位等价；参见引理2.5。因此，我们将讨论范围限制在 t 是 M的自同构这一情形。

在这种情形下，我们不知道移位等价是否存在一组完备的不变量。通过观察到 M决定了 $\overline{M}_j := M/p^jM$，可以得到一份部分清单，因此 $\overline{M}_j$对 $j=1$、.....、n 的移位等价给出一族不变量。为了说明相关计算，我们指出 $\overline{M}_1 = M/pM$，因此 T模 p的有理标准形是 M 的移位等价类的不变量。

设 M 是 $(\mathbb{Z}/p^n)^2$, 因此 T是一个 2×2 上方的矩阵 $\mathbb{Z}/p^n$，其特征多项式为$\chi(t)$。因此，要么有一个块（且 $M/pM \cong \mathbb{F}_{p^2}$），要么有两个一维块（且 $M/pM \cong \mathbb{F}_p^2$）。分析由第 4节中的考量所支配。

例 8.1。设 M_a是 $(\mathbb{Z}/p^n)^2$，其中 $T = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ a & \lambda\end{smallmatrix}\right)$ 对某个 $a \in \mathbb{Z}/p^n$成立，并且 λ不是幂零的（即不能被 p整除）。由于 $\mathbb{Z}/p^n$ 中的每个元素要么是单位，要么是幂零元，因此 λ 必定是 $\mathbb{Z}/p^n$中的一个单位。与命题 4.1 中一样，由 (4.1) 可知， M_a 和 M_b 移位等价，当且仅当对于单位 r、s，有 $as = br$；也就是说， a 和 b 相差 $\mathbb{Z}/p^n$中的一个单位因子。

由于每个非零的 $a \in \mathbb{Z}/p^n$ 都可表示为单位 u 与唯一的 k, $0 \le k \le n-1$的乘积，因此每个 M_a都与 $M_0, M_1, M_p, M_{p^2}, \ldots, M_{p^{n-1}}$ 中的恰好一个移位等价。

与例 8.1 中所用论证类似的推理 $\chi(t)$ 可分解为 $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$，其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 是 $\mathbb{Z}/p^n$ 的元素。与命题 4.3一样，移位等价类的分类更为复杂，因为它取决于 $\lambda_1 - \lambda_2$。再次回到 (4.1)，可知 M_a与 M_b移位等价，当且仅当 $br - as = u(\lambda_1 - \lambda_2)$ 对某些单位 $r, s \in \mathbb{Z}/p^n$成立。因此，例如，若 $(\lambda_1 - \lambda_2) = 1$，则只有一个移位等价类，因为可以自由选择 $u = br - as$。

我们以窥探一下 $\mathbb{Z}/p^3$ 上的模丛林，为这个警示故事画上句号。考虑 $\mathbb{Z}_p[t]$ 的如下商环：

$$R_\lambda = \mathbb{Z}_p[t]/(p^3, (t-\lambda)^2, p^2(t-\lambda)).$$

根据 [15, 6.1][16, 3.2]， R_λ 是“有限长度野性”的：任何关于有限 R_λ-模的描述，都必须包含对有限 $\mathbb{Z}/p$-代数上所有有限维模的描述。一般认为这几乎无法实现，因为这是一项复杂到不切实际的计算任务。野性这一概念可追溯至 [13]。

例 8.2. 考虑 $M = (\mathbb{Z}/p^3) \oplus (\mathbb{Z}/p^2)$ 配备 $t(x,y) = ((\lambda + up^2)x, \lambda y + px)$; $\overline{M} = M_p$无法还原 u。事实上， M 是环 R_λ上的一个模。

附录 A. 简单的 Mathematica 代码。 以下 Mathematica 代码提供了关于同构是否存在的信息，涉及 R, J_0 和 J_1 ，如第 7 节所述，针对 $100 \le c \le 100$。

对于[c = -101, c < 99, c++; 打印["c=",c, " R 同构于 J0 ", !And [ResourceFunction ["EmptyQ"] [FindInstance [4x^2 + 2x*y - c*y^2 == 1,

{x, y},整数]] ,ResourceFunction["EmptyQ"][FindInstance[4x^2 + 2x*y - c*y^2 == -1, {x, y},整数]]," R 同构于J1 ", !And[ResourceFunction["EmptyQ"][FindInstance[4x^2+6x*y+(2-c)*y^2 == 1, {x, y},整数]] ,ResourceFunction["EmptyQ"][FindInstance[4x^2+6x*y+(2-c)*y^2 == -1, {x, y},整数]]," J0 同构于J1 ", !And[ResourceFunction["EmptyQ"][FindInstance[c*(c-2)*y^2-4*(2*c-1)*k*y+16*k^2 == 4, {k, y},整数]] ,ResourceFunction["EmptyQ"][FindInstance[c*(c-2)*y^2-4*(2*c-1)*k*y+16*k^2 == -4, {k, y},整数]]]

致谢。 我们感谢 A. Kontorovich 协助求解第 7 节中讨论的丢番图方程。

参考文献

[1] Z. Arai, W. Kalies H. Kokubu K. Mischaikow H. Oka and P. Pilarczyk *A database , , , , schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems* 8 , , SIAM J. Appl. Dyn. Syst., (2009), pp. 757–789, https://doi.org/10.1137/080734935, https://doi-org.proxy.libraries.rutgers.edu/ 10.1137/080734935. [2] M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, Inc., 恩格尔伍德克利夫斯, 新泽西州, 1991.[3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., 雷丁, 马萨诸塞州-伦敦-唐米尔斯, 安大略省, 1969.
[4] P. A. Brooksbank and E. M. Luks, *Testing isomorphism of modules*,《代数杂志》, 320 (2008), pp. 4020– 4029, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.07.014, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.07.014.[5] J. Bush, *Shift equivalence and a combinatorial-topological approach to discrete-time dynamical systems*, ProQuest LLC, 安娜堡, 密歇根州, 2015. 论文（哲学博士）–罗格斯新泽西州立大学新不伦瑞克分校.[6] J. Bush, W. Cowan S. Harker and K. Mischaikow *Conley-Morse databases for the angular dy- , , , , namics of Newton's method on the plane* 15 2016 736 766, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., ( ), pp. – https:// doi.org/10.1137/15M1017971, https://doi-org.proxy.libraries.rutgers.edu/10.1137/15M1017971.[7] J. Bush, M. Gameiro, S. Harker, H. Kokubu, K. Mischaikow, I. Obayashi, and P. Pilarczyk, *Combinatorial-topological framework for the analysis of global dynamics*,《混沌》, 22 (2012), https://doi.org/10.1063/1.4767672. [8] H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Graduate Texts in Mathematics 第138卷, 施普林格出版社, 柏林, 1993, https://doi.org/10.1007/978-3-662-02945-9, https://doi-org.proxy.libraries.rutgers.edu/10.1007/978-3-662-02945-9.[9] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*,《数学区域会议系列》, 罗得岛州：美国数学会, 1978. [10] C. C. Conley and J. A. Smoller, *The existence of heteroclinic orbits, and applications*, (1975), pp. 511–524. Lecture Notes in Phys., Vol. 38.[11] S. Day, and R. Frongillo, *Shift shifts via Conley index theory: computing lower bounds on recurrent dynamics for maps* 18 2019 1610 1642, 10 1137 , SIAM J. Appl. Dyn. Syst., ( ), pp. – https://doi.org/ . / 18M1192007, https://doi-org.proxy.libraries.rutgers.edu/10.1137/18M1192007. [12] J. Franks and D. Richeson, *Shift equivalence and the Conley index*,《美国数学会汇刊》, 352

(2000), pp. 3305–3322. [13] I. M. Gel'fand and V. A. Ponomarev, *Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite-dimensional space* 3 1969 81 82 , Funkcional. Anal. i Prilo˘zen., ( ), pp. – . [14] T. W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 第73卷, 施普林格出版社, 纽约-柏林, 1980。1974年原版重印。[15] L. Klingler and L. S. Levy, *Representation type of commutative Noetherian rings. I. Local wildness*, Pacific J. Math., 200 (2001), pp. 345–386, https://doi.org/10.2140/pjm.2001.200.345, https://doi-org. proxy.libraries.rutgers.edu/10.2140/pjm.2001.200.345. [16] L. Klingler, R. Wiegand and S. Wiegand *Tame–wild dichotomy for commutative noetherian rings* , , , — *a survey* 382 载于《环、幺半群与模论》, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 第 卷 , Springer, 新加坡 , 2021. [17] H. W. Lenstra, Jr., *Algorithms in algebraic number theory*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 26 (1992), pp. 211–244, https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1992-00284-7, https://doi-org.proxy. libraries.rutgers.edu/10.1090/S0273-0979-1992-00284-7. [18] D. Lind and B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge Mathematical Library, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2021. 第二版 [, 1369092]的版本。[19] C. McCord, *Mappings and homological properties in the Conley index theory*, Ergodic Theory Dy- nam. Systems, 8* (1988), pp. 175–198, https://doi.org/10.1017/S014338570000941X, https://doi-org. proxy.libraries.rutgers.edu/10.1017/S014338570000941X. [20] C. McCord, K. Mischaikow, and M. Mrozek, *Zeta functions periodic trajectories and the Conley* , , , J. Differential *index* 121 1995 258 292, 10 1006 1995 1129, Equations, ( ), pp. – https://doi.org/ . /jdeq. . https://doi.org/10.1006/jdeq.1995.1129. [21] K. Mischaikow and M. Mrozek, *Conley index*, 载于 Handbook of dynamical systems, 第2卷, North-Holland, 阿姆斯特丹, 2002, pp. 393–460, https://doi.org/10.1016/S1874-575X(02)80030-3, http:// dx.doi.org.proxy.libraries.rutgers.edu/10.1016/S1874-575X(02)80030-3. [22] M. Mrozek, *Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems*, 《美国数学会汇刊》, 318 (1990), pp. 149–178, https://doi.org/10.2307/2001233, https://doi-org.proxy. libraries.rutgers.edu/10.2307/2001233. [23] W. Parry and S. Tuncel, *Classification problems in ergodic theory*, Statistics: Textbooks and Monographs 第41卷, 剑桥大学出版社, 剑桥-纽约, 1982. [24] W. Research, *NumberFieldClassNumber*, *Wolfram Language function*, 2007, https://reference.wolfram. com/language/ref/NumberFieldClassNumber.html. [25] W. Research, *Findinstance*. https://reference.wolfram.com/language/ref/FindInstance.html, 2017. 访问日期：2023 年 1 月 19 日。[26] P. Ribenboim, *Classical theory of algebraic numbers*, Universitext, 施普林格出版社, 纽约, 2001, https://doi.org/10.1007/978-0-387-21690-4, https://doi.org/10.1007/978-0-387-21690-4. [27] J. W. Robbin and D. Salamon, *Dynamical systems, shape theory and the Conley index*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 8* (1988), pp. 375–393, https://doi.org/10.1017/S0143385700009494, https://doi. org/10.1017/S0143385700009494. [28] R. Srzednicki, *On rest points of dynamical systems*, Fund. Math., 126 (1985), pp. 69–81, https://doi. org/10.4064/fm-126-1-69-81, https://doi-org.proxy.libraries.rutgers.edu/10.4064/fm-126-1-69-81. [29] A. Storjohann, *An* $O(n^3)$ *algorithm for the Frobenius normal form*, 载于 Proceedings of the 1998 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation（罗斯托克）, ACM, 纽约, 1998, pp. 101–104, https://doi.org/10.1145/281508.281570, https://doi-org.proxy.libraries.rutgers.edu/10. 1145/281508.281570. [30] A. Szymczak, *The Conley index and symbolic dynamics*, Topology, 35 (1996), pp. 287–299. [31] C. A. Weibel, *The K-book*, Graduate Studies in Mathematics 第145卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2013, https://doi.org/10.1090/gsm/145, https://doi-org.proxy.libraries.rutgers. edu/10.1090/gsm/145. 代数 K理论导论。