arXiv:2303.06553v1 [math.RT] 12 Mar 2023

中山代数的幅度

沈大为、吴雅茹

Abstract. 代数的幅度是欧拉示性数的一种推广。我们研究中山代数的幅度。利用 Ringel 的分解箭图，给出了有理幅存在的条件及其取值。由此，我们证明了 Madsen 与第一作者提出的中山代数有限整体维数判据是等价的。

1. Introduction

设 R 为交换环。给定正整数 n，记 $u \in R^n$为列向量，其中对所有 $1 \leq i \leq n$均有 $u_i = 1$。设 C 为 R中的一个 $n \times n$矩阵。 C 上的赋权是一个列向量 α，满足 $C\alpha = u$。 C 上的余权是一个行向量 β，满足 $\beta C = u^*$，其中 u^* 是 u的转置。

按照 [3], 若一个矩阵 C 至少存在一个赋权 α 和至少一个余权 β，则称其具有幅度。 C 其幅度定义为

$$m(C) = \sum\nolimits_i \alpha_i = \sum\nolimits_i \beta_i.$$

一个矩阵具有幅度，当且仅当其转置具有幅度。若矩阵 C 具有幅度，则 C 的幅度与所选的赋权和余权无关。若 C 是可逆矩阵，则赋权和余权唯一，且 C 的幅度等于 C的逆矩阵所有元素之和。

设 A 是域 k上的有限维代数。若 A 具有有限整体维数，则 A 的 Cartan 矩阵 C_A 在整数环中可逆。 C_A 的幅度等于 A的欧拉示性数。若 A 具有无限整体维数，则欧拉示性数是一个无穷级数，而幅度可能存在于有理数域中。

本文研究任意中山代数的 Cartan 矩阵的幅度。利用 Ringel 的分解箭图，我们证明了幅度的存在性，并给出了其在有理数域中的取值。我们描述了简单模的 syzygy，并给出一种特殊的余权。因此，我们证明了 Madsen 与第一作者提出的中山代数有限整体维数判据是等价的。此外，我们计算了任意分次中山代数的分次 Cartan 行列式。

在本文中， k 是一个固定的域。所有模都是有限维右模。

Date: 2023年3月14日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 16E05；次要分类号 15A15。*Key words and phrases.* Nakayama 代数、Cartan 矩阵、幅度。

2. Magnitude of a Nakayama algebra

设 n 为正整数， Δ_n 为以下箭图

$$1 \underset{x_n}{\overset{x_1}{\rightleftarrows}} 2 \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}} n.$$

域 k 上的代数 A 称为阶为 n 的中山代数，若 A 同构于 $k\Delta_n$ 模去由有限个非平凡路径组成的集合 $\mathcal{R}$ 生成的理想所得的商代数。若 $\mathcal{R}$ 由长度为 ≥ 2的路径组成，则 A 是循环中山代数。若 $\mathcal{R}$中只有一支箭，则 A 是线性中山代数。我们也允许 $\mathcal{R}$中有多于一支箭。

设 A 是一个阶为 n的中山代数。对任意 $1 \leq i \leq n$，令 e_a 为幂等元， S_a 为单模， P_a 为投射模， I_a为 a处的内射模。对任意 $1 \leq a \leq n-1$，定义 $\tau(a) = a+1$，并定义 $\tau(n) = 1$。用 p_a 表示 P_a的维数。于是，对任意 a，有 $p_a \leq p_{\tau(a)} + 1$。序列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 称为 A的容许序列。

分解箭图 R_A 由 Ringel 在 [5]中引入。其顶点为 S_1， S_2， $\cdots$， S_n 并且对每个单模 S，都存在一条从 $\gamma(S) = \tau \mathrm{soc}\, P(S)$ 出发的唯一箭。 S 分解箭图 A 可以实现为 Gustafson 函数的函数图

$$\gamma(a) = \tau^{p(a)}(a)$$

对于任意 $1 \leq a \leq n$；参见 [1]。设 q_a 为 I_a的维数。函数

$$\psi(a) = \tau^{-q(a)}(a)$$

由此得到 A的余分解箭图 R_A^*。

分解箭图中的顶点若位于有向圈上，则称为循环顶点。给定 R_A中的一个有向圈 I， I 的周期 p 是 I中的顶点数。 I 的权 w 为 $\sum_a p_a/n$，其中 a 遍历 I中的所有顶点。事实证明， p 和 w 是互素整数。此外， p 和 w 与所选的有向圈无关；参见 [9]。

设 $\mathbf{d}$ 是 A上的一个分次，即 $\mathbf{d}$ 是从箭的集合到 $\mathbb{Z}$的映射。对于任意 ℓ，我们用 A_ℓ 表示 A的次数为 ℓ 的部分。分次 Cartan 矩阵$C_A^{\mathbf{d}}(t)$ 是环 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 中的一个矩阵，该环由 $\mathbb{Z}$ 上的 Laurent 多项式构成，并且

$$c_{ab}(t) = \sum\nolimits_\ell \dim_k (e_b A_\ell e_a) t^\ell$$

对所有 $1 \leq a$、$b \leq n$。若 $\mathbf{d}$ 为零，则 $C_A^{\mathbf{d}}(t)$ 是 Cartan 矩阵 C_A。

给定 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个子集 I，我们用 $\epsilon_I \in \mathbb{Z}^n$ 表示 I 的特征向量。这里，$\epsilon_{I,\ a} = 1$，若 $a \in I$；否则，$\epsilon_{I,\ a} = 0$。

引理 2.1. 设 A 的 Cartan 矩阵为 C_A。

(1) 若 I 是 R_A 中的一个有向圈，则 ϵ_I / w 是 C_A 上的赋权；**(2)** 若 C_A 上的赋权为 α，且 a 不是循环的，则 $\alpha_a = 0$；**(3)** 若 C_A 上的赋权为 α，且 a、b 位于同一个有向圈上，则 $\alpha_a = \alpha_b$。

证明. **(1)** 用 $\dim M$ 表示模 M 的维数向量。设 a_1、a_2、$\cdots$、a_p 是 I 中的顶点。由于 I 是 R_A 中的一个有向圈，因此我们有

$$\mathbf{dim}\, P_{a_1} + \mathbf{dim}\, P_{a_2} + \cdots + \mathbf{dim}\, P_{a_p} = w \cdot (1, 1, \cdots, 1).$$

由此可得 $C_A \epsilon_I = w \cdot u$。

（2&3）由 [11, 4。1], 中环的数量 R_A 等于余秩 C_A+1。对 C_A 的任意赋权都是向量 ϵ_I/w的线性组合，其中 I 是一个有向圈。因此该陈述成立。□

同样，可以证明 C_A 在 $\mathbb{Q}$ 中有余权。

定理 2.2. 设 A 是一个中山代数， C_A 是 A 的 Cartan 矩阵。那么 C_A 在 $\mathbb{Q}$ 中有幅度。 C_A 的幅度为

$$m(C_A)=p/w$$

其中 p 是 R_A 的周期， w 是其权。

注 2.3. 由于 p、 w 互素，因此可得

$$p(R_A)=p(R_A^*),\quad w(R_A)=w(R_A^*).$$

这一点已在 [10] 中通过不同的方法得到证明。

设 d 是 A 上的正分次，即对于 $1\le i\le n$， d(x_i) 为正数。由于$C_A^{\mathbf{d}}$(0) 是单位矩阵，分次 Cartan 矩阵 $C_A^{\mathbf{d}}(t)$ 在 $\mathcal{Q}$ 上的有理函数域 $\mathbb{Q}(t)$ 中可逆。

记 $\alpha^{\mathbf{d}}(t)=(\alpha_a^{\mathbf{d}}(t))$ 为 $C_A^{\mathbf{d}}(t)$ 上唯一的赋权。于是， $\alpha_a^{\mathbf{d}}(t)$ 与单模 S_a的最小分次内射分解有关。对于分次模 M，记 $M(a)$ 为 M 的 a 次移位。令

$$\xi\colon 0\to S_a\to I_{c_0}(b_0)\to I_{c_1}(b_1)\to\cdots$$

为 S_a 的最小分次内射分解。于是我们有

$$\alpha_a^{\mathbf{d}}(t)=\sum\nolimits_i(-1)^i t^{b_i}. \tag{2.1}$$

命题 2.4. 设 A 是具有正分次 d 的中山代数。
(1) 若 id S_a 为奇数，则 $\alpha_a^{\mathbf{d}}(1)=0$; (2) 若 id S_a 为偶数，则 $\alpha_a^{\mathbf{d}}(1)=1$; (3) 若 id S_a 为无穷大，则 $0<\alpha_a^{\mathbf{d}}(1)<1$; (4) 若 a 不是循环的，则 $\alpha_a^{\mathbf{d}}(1)=0$; (5) 若 a、 b 位于同一个有向圈上，则 $\alpha_a^{\mathbf{d}}(1)=\alpha_b^{\mathbf{d}}(1)$。

证明。(1&2) 这由公式（2.1）直接得出。

(3) 假设 id S_a 是无限的。由于 A 是有限表示型的，因此ξ 经过有限步后是周期的。由（2.1），存在 $f(t)$ 和 $g(t)$，使得

$$\begin{aligned}\alpha_a^{\mathbf{d}}(t)&=f(t)+g(t)/(1-t^{b_{2r+2s}-b_{2r}}),\\ f(t)&=t^{b_0}-x^{b_1}+\cdots+t^{b_{2r-2}}-t^{b_{2r-1}},\\ g(t)&=t^{b_{2r}}-t^{b_{2r+1}}+\cdots+t^{b_{2r+2s-2}}-t^{b_{2r+2s-1}}.\end{aligned}$$

由于 $\{b_i\}$ 严格递增，因此 $\alpha_a^{\mathbf{d}}(1)$ 是真分数。

(4&5) 由（1-3）可知， $\alpha^{\mathbf{d}}(1)$ 是 C_A上的一个赋权。因此，结论由引理2.1得出。□

令 d 为长度分次，即对任意 $1\le a\le n$， d(x_a) $=1$ 。那么$\alpha_a(t)$ $=\alpha_a^{\mathbf{d}}(t)$由单模 S_a 的余纤维维数决定。若 a 不是循环的，则 $\alpha_a(1)=0$。因此，只需计算分解箭图中任意循环顶点 a 的 $\alpha_a(1)$。

引理2.5 ([4, 3.7])。 设 a 是 R_A中的一个顶点。则 a 是循环的，当且仅当id S_a 是偶数或无穷大。

假设 A 的整体维数无穷大。由于 a 是循环的，因此 $\mathrm{id}\, S_a$ 为无穷大。设最小内射维数 ξ 在 $2r$之后呈周期性。可以证明，其周期为 $2p$。那么

$$\alpha_a(1) = \sum\nolimits_{0\leq i\leq p-1} \dim_k \Sigma^{2r+2i}(S_a)/nw.$$

设 n_a 为 R_A中包含 a 的连通分支的基数。

定理 2.6. 设 A 是一个带长度分次的中山代数。
(1) 若 a 不是循环的，则 $\alpha_a(1) = 0$;
(2) 若 a 是循环的，则 $\alpha_a(1) = n_a/nw$。

假设 A 具有有限整体维数。那么，根据 $w = 1$ 和 $n_a = n$，由 [11, 1可得。1]。由于 a 是循环的，因此 $\mathrm{id}\, S_a$ 是偶数。所以定理 2.6 在此情形下成立。我们研究简单模的 syzygy 模，并在下一节证明无限整体维数的中山代数的定理2.6 。

注 2.7。 在 [4], Madsen 证明，中山代数 A 具有有限整体维数，当且仅当 R_A 中存在一个内射维数为偶数的循环顶点。在[11], 中，证明了中山代数 A 具有有限整体维数，当且仅当 R_A 是权为 1 的连通代数。利用定理 2.6，可以证明这两个判据等价。

3. Syzygy of a simple module

设 A 是一个中山代数。若顶点 a 在 R_A 处没有箭指向它，则称其为叶子 a。由 [11, 3。3], a 是 R_A 中的叶子，当且仅当 $\mathrm{id}\, S_a = 1$。代数 A 是自内射的，当且仅当 R_A中没有叶子。

令 $e = \sum_{a\in \mathrm{Im}\,\gamma} e_a$ 为所有非叶子顶点处幂等元之和，并令 $\epsilon(A) = eAe$。那么 $\epsilon(A)$ 是一个顶点数少于 A 的中山代数。此外， $\epsilon(A) = A$ 当且仅当 A 是自内射的。若 A 是循环中山代数，则 $\epsilon(A)$ 与 Sen 的 ϵ-构造 [7, 8]一致。

令 $\mathrm{mod}\, A$ 为 A 上有限维模所成的范畴。根据 [2,3.6], , 存在一对正合函子的伴随对

$$\mathrm{mod}\, A \underset{F=(-)e}{\overset{G=(-)\otimes_{eAe} eA}{\longleftrightarrow}} \mathrm{mod}\, \epsilon(A).$$

记 $\mathcal{F}$ 为函子 GF 的像，对 R_A 中每个 a ，记 $E(S_a)$ 为 S_a 的像。则 $\{E(S_a) \mid a \in \mathrm{Im}\,\gamma\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中简单对象的完备集。此外， $\mathcal{F}$ 是 $\mathrm{mod}\ A$ 的正合子范畴，且 $\mathcal{F}$ 在投射覆盖下封闭。

(1) 若 $a \notin \mathrm{Im}\,\gamma$，则 $E(S_a) = 0$; (2) 若 $a \in \mathrm{Im}\,\gamma$，则 $\mathrm{top}\ E(S_a) = S_a$; (3) $\sum_a \dim\ E(S_a) = (1, 1, \cdots, 1)$; (4) 对任意 $\mathrm{mod}\ A$ 中的 M，均有 $\Omega^2(M) \in \mathcal{F}$。

引理 3.1. 设 M 是一个不可分解模。
(1) [5, 3。2] 或者 投射维数 $M \leq 1$ 又或者 顶 $\Omega^2(M) = \gamma$(顶 M)。
(2) [6, A。1] 映射 $\gamma\colon \mathrm{Im}\ \psi \to \mathrm{Im}\,\gamma$ 是双射，其逆映射为 ψ。

引理 3.2。 [4, 3。1] 设 S_a 和 S_b 是满足以下条件的简单模： S_a 不是投射模。那么 S_b 是 $\Omega^2(S_a)$ (重数为 1) 的子因子，当且仅当 $\psi(b) = a$。

命题 3.3. 设 S_a 和 S_b 是单模。
(1) 若 $a \in \operatorname{Im}\gamma$，则 S_b 是 $E(S_a)$ 的子因子，当且仅当 $\psi(b) = \psi(a)$。(2) 若 $\operatorname{pd} S_a \geq 2$，则 $\Omega^2(S_a) \cong E(S_{\gamma(a)})$。

证明. (1) 设 $S_b \neq S_a$ 是 $E(S_a)$的子因子，则 $\operatorname{id} S_b = 1$。序列

$$0 \to S_b \to I_b \to I_{\tau^{-1}b} \to 0$$

是正合的。因此 $\psi(b) = \psi(\tau^{-1}b)$。若 $\tau^{-1}(b) = a$，则结论成立。若 $\tau^{-1}(b) \neq a$，则我们可以重复这一过程。因此 $\psi(b) = \psi(a)$。注意到

$$\sum_{a\in\operatorname{Im}\gamma} \dim_k E(S_a) \leq \sum_{a\in\operatorname{Im}\gamma} |\psi^{-1}(\psi(a))| = \sum_{a'\in\operatorname{Im}\psi} |\psi^{-1}(a')|.$$

最后一个等式由引理3.1(2) 得出。因此结论成立。

（2）由引理 3.1（1），模 Ω^2（S_a）和 E（$S_{\gamma(a)}$）具有相同的顶。由于 $\operatorname{pd} S_a \geq 2$，因此 $a = \psi\gamma$（a）。单模 S_b 是 Ω^2（S_a）的子因子，当且仅当 ψ（b）$= \psi\gamma$（a）。于是 Ω^2（S_a）和 E（$S_{\gamma(a)}$）具有相同的合成列。它们同构。□

反复移除叶子后，我们得到一个序列

$$\operatorname{mod} A \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \operatorname{mod}\epsilon(A) \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \cdots \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \operatorname{mod}\epsilon^r(A)$$

由伴随对构成的正合函子序列，使得 $\epsilon^r(A)$ 是自内射的。

令 $\mathcal{F}^m$ 为 $\operatorname{mod}\ \epsilon^m(A)$ 在 $\operatorname{mod}\ A$ 中的像，并令 $E^m(S_a)$ 为任意 $1 \leq m \leq r$ 对应的 S_a 的像。则 $\{E^m(S_a) \mid a \in \operatorname{Im}\gamma^m\}$ 是 $\mathcal{F}^m$ 中简单对象的完备集。此外， $\mathcal{F}^m$ 是 $\operatorname{mod}\ A$ 的正合子范畴，并且在投射覆盖下封闭。

(1) 若 $a \notin \operatorname{Im}\gamma^m$，则 $E^m(S_a) = 0$；(2) 若 $a \in \operatorname{Im}\gamma^m$，则顶 $E^m(S_a) = S_a$；(3) $\sum_a \dim E^m(S_a) = (1,1,\cdots,1)$；(4) 对任意 $M \in \operatorname{mod}\ A$，$\Omega^{2m}(M) \in \mathcal{F}^m$。

引理 3.4. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 M 是不可分解模。
(1) [5, 3。3] 或者 投射维数 $M \leq 2m-1$ 否则 顶 $\Omega^{2m}(M) = \gamma^m$(顶 M)。
(2)[6, A。1] 映射 $\gamma^m : \operatorname{Im}\psi^m \to \operatorname{Im}\gamma^m$ 是双射，其逆为 ψ^m。

命题 3.5. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 S_a, S_b 是简单模。
(1) 若 $a \in \operatorname{Im}\gamma^m$，则 S_b 是 $E^m(S_a)$ 的子因子，当且仅当 $\psi^m(b) = \psi^m(a)$。
(2) 若投射维数 $S_a \geq 2m$，则 $\Omega^{2m}(S_a) \cong E^m(S_{\gamma(a)})$。

证明。（1）设 S_b 是 $E^m(S_a)$ 的子因子。如果 $m = 1$，则根据命题 3.3(1)，$\psi(b) = \psi(a)$。如果 $m \geq 2$，则 S_b 是某个 $E^{m-1}(S_{a'})$ 的子因子，且 $\psi(a') = \psi(a)$。根据归纳假设，$\psi^{m-1}(b) = \psi^{m-1}(a')$。于是

$$\psi^m(b) = \psi\psi^{m-1}(b) = \psi\psi^{m-1}(a') = \psi\psi^{m-1}(a') = \psi^m(a).$$

根据引理3.4 可得

$$\sum_{a\in \operatorname{Im}\gamma^m} \dim_k E^m(S_a) \leq \sum_{a\in \operatorname{Im}\gamma^m} |\psi^{-m}(\psi^m(a))| = \sum_{a'\in \operatorname{Im}\psi^m} |\psi^{-m}(a')|.$$

于是等式成立。

(2) 由引理3.4(1)，$\Omega^{2m}(S_a)$和 $E^m(S_{\gamma^m(a)})$的顶相等。对于任意 $k\in\mathbb{N}$，运算 Ω^2 将 $\mathcal{F}^{k-1}$ 中的简单对象映射为 $\mathcal{F}^k$ 中的简单对象或零。因此，$\Omega^{2m}(S_a)$与 $E^m(S_{\gamma^m(a)})$同构□

设 $m\in\mathbb{N}$。根据 [6, 3。5]，我们得到投射维数$\operatorname{pd} S_a \neq 1,\ 3,\ \cdots,\ 2m-1$ 当且仅当 $a\in \operatorname{Im}\psi^m$。

命题3.6. 设 $m\in\mathbb{N}$ 和 S_a 是单模。若$\operatorname{pd} S_a \geq 2m-1$，则 S_b 是$\Omega^{2m}(S_a)$的子因子，当且仅当 $\psi^m(b) = a$。

证明。若 $\operatorname{pd} S_a = 2m-1$，则 $a\notin \operatorname{Im}\psi^m$ 且 $\Omega^{2m}(S_a)$ 为零。若 $\operatorname{pd} S_a \geq 2m$，则 $a\in \operatorname{Im}\psi^m$ 且 $\psi^m\gamma^m(a) = a$。由于 $\Omega^{2m}(S_a)$ 与 $E^m(S_{\gamma^m(a)})$ 同构，因此 S_b 是 $\Omega^{2m}(S_a)$ 的子因子，当且仅当 $\psi^m(b) = a$。□

定理3.7。设 A是一个中山代数，S_a 是一个单模。假设 S_a 的极小投射分解在 $2r$之后呈周期性。那么

$$\sum\nolimits_{0\leq i\leq p-1} \dim_k \Omega^{2r+2i}(S_a) = n'_a$$

其中 p是 R^*_A 的周期，n'_a 是 R^*_A中包含 a的连通分支的基数。

注意，定理2.6 可由本定理的对偶版本推出。

证明。根据命题3.6，单模 S_b 是 Ω 的子因子$^{2r+2i}(S_a)$，当且仅当 $\psi^{r+i}(b) = a$。于是

$$\sum\nolimits_{0\leq i\leq p-1} \dim_k \Omega^{2r+2i}(S_a) = \sum\nolimits_{0\leq i\leq p-1} |\psi^{-r-i}(a)| = n'_a.$$

证明完成。□

4. Graded Cartan determinant

我们计算带有分次的中山代数的分次 Cartan 矩阵的行列式。

设 A 是一个中山代数。假设 A 不是自内射的。那么分解箭图 R_A 有一个叶子。设 n 是一个叶子，并令 $e' = 1-e_n$。代数 $A' = e'Ae'$ 是一个阶为 $n-1$ 的中山代数。

对于 A 上的任意分次 $\mathbf{d}$，令 $\mathbf{d}'$ 为 A' 上的分次，其中

$$\mathbf{d}'(x_a) = \begin{cases} \mathbf{d}(x_a)+\mathbf{d}(x_{a+1}) & \text{if } a = n-1 \\ \mathbf{d}(x_a) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

引理 4.1 ([2, 3.8]). 设 n 是 R_A中的一个叶子。(1) $R_{A'}$ 等于移除 n 后的 R_A；(2) $R_{A'}$ 和 R_A 的权相同；(3) $R_{A'}$ 和 R_A 的连通分支数相同。

引理 4.2. 我们有 $\det C^{\mathbf{d}}_A(t) = \det C^{\mathbf{d}'}_{A'}(t)$。

证明。由于 n 是一个叶子， S_n 的内射维数等于 1。存在一个分次模的正合列

$$0 \to S_n \to I_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} I_{n-1}(\mathbf{d}(x_{n-1})) \to 0.$$

记 r_a 为 $C_A^{\mathbf{d}}(t)$ 的第 a 行。它是内射模 I_a 的分次维数向量。由上述序列可知

$$r_n - t^{\mathbf{d}(x_{n-1})} r_{n-1} = \epsilon_n.$$

将 $-t^{\mathbf{d}(x_{n-1})}$ 倍的 r_{n-1} 加到 r_n 上，得到一个初等变换

$$C_A^{\mathbf{d}}(t) \to \begin{pmatrix} C_1(t) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们有 $\det C_A^{\mathbf{d}}(t) = \det C_1(t)$。容易验证， $C_1(t)$ 正是 A' 在分次 $\mathbf{d}'$ 下的分次 Cartan 矩阵。□

设 R_A 为 A 的分解箭图。记 c 为 R_A 中分支的数量，记 w 为 R_A 的权。

引理 4.3. 设 $A = k\Delta_n/\mathrm{rad}^{\ell}$ 为一个自内射 Nakayama 代数。设 $\mathbf{d}$ 是 A 上的一个分次，且 d 为所有箭的次数之和。则

(1) $\det C_A^{\mathbf{d}}(t) = (1 - t^{d\ell/(n,\ell)})^{(n,\ell)}/(1 - t^d)$;

(2) $w = \ell/(n,\ell)$ 和 $c = (n,\ell)$。

证明。（1）令 D 为 $n \times n$ 矩阵

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{\mathbf{d}(\alpha_n)} \\ t^{\mathbf{d}(\alpha_1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t^{\mathbf{d}(\alpha_2)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t^{\mathbf{d}(\alpha_{n-1})} & 0 \end{pmatrix}$$

并令 $\mathbb{I}$ 为 $n \times n$ 单位矩阵。则

$$C_A^{\mathbf{d}}(t) = \mathbb{I} + D + \cdots + D^{\ell-1} = \frac{\mathbb{I} - D^{\ell}}{\mathbb{I} - D}.$$

对于任意 $k \geq 1$，我们有 $\det(\mathbb{I} - D^k) = (1 - t^{dm/(n,k)})^{(n,k)}$。由此可得

$$\det C_A^{\mathbf{d}}(t) = (1 - t^{d\ell/(n,\ell)})^{(n,\ell)}/(1 - t^d).$$

（2） A 的容许序列为 $(\ell, \ell, \cdots, \ell)$。则 R_A 由 (n,ℓ) 个大小为 $n/(n,\ell)$ 的有向圈组成。我们有 $w = \ell(n,\ell)$ 和 $c = (n,\ell)$。□

定理 4.4。设 A 是一个分次为 $\mathbf{d}$ 的中山代数。则分次 Cartan 矩阵 $C_A^{\mathbf{d}}(t)$ 的行列式为

$$\det C_A^{\mathbf{d}}(t) = (1 - t^{dw})^c/(1 - t^d)$$

其中 d是所有箭的次数之和。

证明。 如果 A 是自内射的，那么结论由引理4.3得出。

假设 A 不是自内射的。存在一个 Nakayama 代数 A'，其分次为$\mathbf{d}'$。根据引理 4.2， $C_A^{\mathbf{d}}$ 和 $C_{A'}^{\mathbf{d}'}$ 的行列式相等。

根据引理 4.1 R_A ， $R_{A'}$ 具有相同的权和环数。注意，$\mathbf{d}'$ 和$\mathbf{d}$ 具有相同的总次数。重复这一过程，我们得到一个自内射 Nakayama 代数 B ，其分次为 $\mathbf{f}$。于是

$$\det C_A^{\mathbf{d}}(t) = \det C_B^{\mathbf{f}}(t) = (1-t^{d\cdot w})^c/(1-t^d).$$

证明至此完成。 □

推论 4.5. 设 A 是一个阶为 n 且带有长度分次的中山代数。那么分次 Cartan 矩阵 $C_A(t)$ 的行列式为

$$\det C_A(t) = (1-t^{nw})^c/(1-t^n)$$

Acknowledgements

作者受国家自然科学基金委员会项目（编号：11801141）资助。

References

[1] W.H. Gustafson, *Global dimension in serial rings*。《代数杂志》97 (1985) 14-16。[2] E.J. Hanson, K. Igusa,*Resolution quiver and cyclic homology criteria for Nakayama algebras* 553 2020 138 153 。《代数杂志》( ), -。[3] *The Magnitude of Metric Spaces* 18 2013 857 905 T. [4] *Projective dimensions and Nakayama algebras* Leinste, 。《数学文献》( ), - D. Madsen, 。《菲尔兹研究所通讯》45。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005。247-265。[5] C.M. Ringel, *The Gorenstein projective modules for the Nakayama algebras. I*。《代数杂志》385 (2013), 241-261。[6] C.M. Ringel, *The finitistic dimension of a Nakayama algebra*。《代数杂志》576 (2021), 95-145。[7] E. Sen, *The φ-dimension of cyclic Nakayama algebras*。《通讯代数》49 (2021), 第6期, 2278-2299。[8] E. Sen, *Syzygy filtrations of cyclic Nakayama algebras*。arXiv 1903.04645 (2019)。[9] D. Shen, 《关于分解箭图的一则注记》。《代数及其应用杂志》13 (2014), 1350120。[10] D. Shen, *The singularity category of a Nakayama algebra*。《代数杂志》429 (2015), 1-18。[11] D. Shen, *A note on homological properties of Nakayama algebras*。《数学档案》108 (2017), 251-261。

School of mathematics and statistics Henan University Kaifeng Henan , ,, , 475004 P. R. China
Email address: sdw12345@mail.ustc.edu.cn

School of mathematics and statistics Henan University Kaifeng Henan , ,, , 475004 P. R. China
Email address: wyr39@qq.com