arXiv:2303.06581v1 [math.AG] 12 Mar 2023

具有最大分歧不规则奇点的射影直线上的联络的显式构造

NEAL LIVESAY、DANIEL S. SAGE 和 BACH NG UYEN

摘要。Deligne–Simpson问题是一个关于具有指定局部行为的联络的存在性问题。此前几乎所有关于该问题的研究都将注意力限制在具有正则或非分歧奇点的联络上。最近，作者与 Kulkarni 和 Matherne 共同提出了 Deligne–Simpson问题的一个版本，允许存在某些分歧奇点，并解决了Coxeter连接这一情形，即在黎曼球面上零点处具有最大分歧奇点、且在无穷远点处可能另有一个正则奇点的联络。一个特定的矩阵补全问题在我们的解决方案中发挥了关键作用，我们将其称为上三角幂零补全问题。Krupnik 和 Leibman 已解决了这一问题，但他们的工作并未提供一种实用的方法来构造显式的矩阵补全。因此，我们此前的工作并未给出具有指定奇点的显式 Coxeter连接。在本文中，我们为生成 Coxeter连接理论中出现的某些矩阵的上三角幂零补全，提供了一种数值稳定且高效的算法。此外，我们还说明了如何利用该算法生成的矩阵，在每一种存在相应联络的情形下，显式构造具有任意幺单单值群的 Coxeter连接。

1. 引言

黎曼球面上线性微分方程亚纯系统理论中的一个基本问题 $\mathbb{P}^1$ 是：是否存在一个微分方程，使其在各奇点处具有指定的局部行为？考虑常微分方程 $Y' + A(z)Y = 0$，其中 $A(z)$是一个 $n \times n$ 矩阵，其系数是 $\mathbb{C}$上的有理函数。通过在 $\mathbb{P}^1$中的每一点处将 $A(z)$展开为Laurent级数，该常微分方程确定了一组局部微分方程。我们将这些局部微分方程视为系数属于单变量形式Laurent级数字段的常微分方程。亚纯常微分方程的局部行为，是其在奇点处的形式常微分方程同构类的集合。于是可以提出如下自然问题：给定 $\mathbb{P}^1$ 中的一个有限奇点子集，以及一组与之对应的形式常微分方程同构类，是否存在一个具有此局部行为的亚纯常微分方程？*Deligne–Simpson*问题是一个密切相关的问题 [27]。

2020 数学主题分类。 15A83，34M50（主要）；14D05，34M35（次要）。关键词和短语。 矩阵补全问题、Deligne–Simpson问题、亚纯联络、不规则奇点、幂零矩阵。

此前几乎所有关于Deligne–Simpson问题的研究都假定，每个奇点要么是正则奇异 [9]（即一个简单极点），要么是“非分歧” [15, 14]。[1] 最近，作者们与Kulkarni和Matherne共同提出了Deligne–Simpson问题的一个版本，其中允许存在“环面型”分歧奇点，并解决了黎曼球面上常微分方程的情形：在零点处有一个最大分歧奇点，并且在无穷远点处（可能）另有一个正则奇点 [24]。我们将这类微分方程称为*Coxeter*常微分方程，其中包括重要的超几何微分方程，例如艾里方程和Kloosterman（或Frenkel–Gross）方程 [19, 20, 10]。明确地说，如果令$\omega = \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,\ i+1} + ze_{n,\ 1}$——即，$\omega$是一个超对角线上为1、$z$左下角元素为1、其余位置均为零的矩阵——那么艾里方程为 $Y' + z^{-2}\omega^{-1}Y = 0$，而Kloosterman方程为 $Y' + z^{-1}\omega^{-1}Y = 0$。

在 Deligne–Simpson问题的这一特殊情形中，0 和 ∞ 处指定的局部行为由一个次数为 r 的多项式 $p(\omega^{-1})$（满足 $\gcd(r, n) = 1$）以及一个伴随轨道（或简单地说，一个若尔当标准形）给出。多项式 p 确定了 0 处非正则奇异点的“斜率为 r/n 的形式类型”，而伴随轨道对应于 ∞ 处正则奇点的留数。例如，对于 Kloosterman方程，$p(\omega^{-1}) = \omega^{-1}$、$r = 1$，其若尔当标准形是一个单幂零若尔当块。对于艾里方程，$p(\omega^{-1}) = (\omega^{-1})^{n+1}$、$r = n + 1$，且 ∞ 处的伴随轨道是零轨道（意味着 ∞ 不是奇异点）。

[24] 中的一项重要发现是：Coxeter常微分方程的 Deligne–Simpson问题与下面的矩阵补全问题之间存在联系，我们将其称为上三角幂零补全问题：

> 设 A 是一个幂零 $n \times n$ 矩阵，设 μ 是 n 的分拆，其各部分对应于 A的若尔当块大小，并设 λ 是一个支配 μ的 n 分拆。证明存在一个严格上三角矩阵 X，使得 $A + X$ 为幂零矩阵，且其若尔当块大小为 λ。

为描述其运作方式，我们限制在最简单的情形：其中 $0 < r < n$，$p(\omega^{-1}) = \omega^{-r}$，且该伴随轨道是幂零的，其若尔当形对应于 n的一个分拆 λ。在此情形下，我们在 [24] 中证明：当且仅当 λ 至多有 r 个部分时，存在具有指定局部行为的联络；等价地，当且仅当若尔当标准形至多有 r 个块时，存在这样的联络。例如，设 $A = N_r$，即在第 r条对角线的每个元素中均为 1、其余所有元素均为零的矩阵。一个具有 $A = N_r$ 的上三角幂零补全问题的（构造性）解，确定了一个具有给定局部行为的显式常微分方程。事实上，如果 X 是严格上三角的，使得 $N_r + X$ 是 λ型的幂零矩阵，那么 $Y' + z^{-1}(N_{n-r}^{\top} z^{-1} + N_r + X)Y = 0$便具有所需性质。

上三角幂零完备化问题最初由 Rodman 和 Shalom [25],提出，随后由 Krupnik 和 Leibman [22]解决。这一结果与将该问题推广到更一般轨道的解答共同构成了

[1]如果无需引入局部参数的根即可得到其 Levelt–Turrittin形式（若尔当标准形在常微分方程中的对应形式），则称该形式常微分方程为非分歧。

Krupnik [21], 在 [24]中发挥关键作用。然而，尽管 Krupnik 和 Leibman 描述了一种用于构造所需幂零完备化的算法，但据我们所知，该算法在实践中无法有效执行。事实上，即使在简单情形下，该算法也要求反复将矩阵变换为类似若尔当标准形的形式，而我们尚未发现任何数值稳定的方法来执行他们的算法。

在本文中，我们给出了一种数值稳定且高效的算法，用于为 $A = N_r$ 这一特殊情形构造上三角幂零补全问题的显式（以及二值和稀疏）解。如果 λ 是一个至多具有 r 个部分的 n 的分拆，则该算法的输出是一个严格上三角二进制矩阵 X_λ，使得 $N_r + X_\lambda$ 是 λ 型的幂零矩阵。因此，常微分方程 $Y' + z^{-1}(N_{n-r}^\top z^{-1} + N_r + X_\lambda)Y = 0$ 是显式的“齐次”Coxeter常微分方程，在 0 处具有斜率为 r/n 的最大分歧不规则奇点，并且在 ∞ 处具有 λ 型的幺幂单值性。

Deligne–Simpson问题通常以定义在 $\mathbb{P}^1$ 上的可平凡化向量丛上的联络这一等价语言来表述。带有 $A(z)$ 这一 $n \times n$ 矩阵的亚纯常微分方程 $Y' + A(z)Y = 0$，对应于秩为 n 的平凡向量丛上的亚纯联络 $d + A(z)dz$。在本文余下部分，我们将讨论联络而不是常微分方程。

致谢。 作者获得了美国数学研究所 SQuaRE项目的支持，并感谢 AIM 提供的热情接待。作者谨向美国数学研究所致谢，感谢其在 AIM SQuaRE 期间提供的热情接待；本文的大部分工作均在此期间完成。N.L. 获得了 Roux研究所和 Harold Alfond基金会的支持。D.S.S. 获得了 Simons合作基金 637367 的支持。B.N. 获得了 AMS–Simons旅行资助。

2. 幂零轨道与支配序

2.1. 整数分拆。我们将正整数 n 的一个分拆定义为一个正整数的多重集，其和为 n。令 $\mathrm{m}_\lambda(x)$ 表示整数 x 的一个分拆 λ 中的重数。我们允许重数取零。定义分拆 λ 的支集 $\mathrm{Supp}(\lambda)$ 为 λ 中具有正重数的整数集合；即 $\mathrm{Supp}(\lambda) = \{x \in \mathbb{Z}_{>0} : \mathrm{m}_\lambda(x) > 0\}$。若 $\mathrm{Supp}(\lambda) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$，则将分拆 λ 表示为 $\{\lambda_1^{\mathrm{m}_\lambda(\lambda_1)}, \lambda^{\mathrm{m}_\lambda(\lambda_2)}2, \ldots, \lambda^{\mathrm{m}_\lambda(\lambda_k)}{}_k\}$。定义 $|\lambda|$ 为和 $\sum_{x\in\mathrm{Supp}(\lambda)} \mathrm{m}_\lambda(x)$。因此，若 λ 是 n 的一个分拆，则 $\sum_{x\in\mathrm{Supp}(\lambda)} \left(\sum_{i=1}^{\mathrm{m}_\lambda(} {}^{x} x\right) = n$）；该二重求和展开中的每一个 $|\lambda|$ 被加数都称为 λ 中的一个部分。

有时，将一个分拆 λ 视为其 λ中各部分组成的单调递减元组 $(\lambda_i)_{i=1}^{|\lambda|}$ 会更为方便。集合 n 的分拆上的支配序（也称为主序，例如 [22]）是由以下关系 $\trianglerighteq$ 定义的偏序：当且仅当 $|\lambda| \le |\mu|$ 且对所有 $j \in [1, |\lambda|]$都有$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \ge \sum_{i=1}^{j} \mu_i$。

2.2. 幂零轨道。若 R 是一个带单位元的交换环，则 R 上的 n 阶一般线性群 $\mathrm{GL}_n(R)$ 是由 R 上的行列式可逆的 $n\times n$ 矩阵组成的群。其李代数$\mathfrak{gl}_n(R) = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(R))$ 是 R上的 $n \times n$ 矩阵组成的向量空间，并配备由 $[X, Y] = XY - YX$定义的李括号$[\cdot, \cdot]$。我们还将 $\mathfrak{gl}_n(R)$ 的元素视为 R^n 的端omorphism。$\mathrm{GL}_n(R)$ 在 $\mathfrak{gl}_n(R)$ 上的伴随作用定义为 $\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$，其中任意 $g \in \mathrm{GL}_n(R)$ 和 $X \in \mathfrak{gl}_n(R)$ 均成立。在本文中，“ 伴随轨道 ”一词始终指复伴随轨道。我们将元素 $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 的伴随轨道记为 $\mathscr{O}_X$；即 $\mathscr{O}_X = \{\mathrm{Ad}_g(X) \mid g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$。

如果 $X^m = 0$ 对某个 $m > 0$ 成立，则元素 $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 是幂零的。幂零元素 $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 的伴随轨道 $\mathscr{O}_X$ 称为幂零轨道。任意幂零轨道 $\mathscr{O}$ 都包含一个若尔当标准形的分块对角代表元，该代表元除块的排列（称为“若尔当块”）外是唯一的。因此， $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 中幂零轨道的集合与 n 的分拆集合之间存在双射，其中每个幂零轨道对应于其若尔当块大小的多重集。如果 $\mathscr{O}$ 的若尔当块大小由分拆 λ 给出，我们称 $\mathscr{O}$——以及 $\mathscr{O}$ 中的每个元素——具有型 λ。

幂零轨道的集合带有偏序：当且仅当 $\mathscr{O}^1$ 包含于 $\mathscr{O}^2$ 的扎里斯基闭包中时， $\mathscr{O}^1$ 小于或等于 $\mathscr{O}^2$。这种偏序称为闭包序。上述幂零轨道与分拆之间的双射，在分别赋予闭包序和支配序 [8] 后，定义了一个偏序集同构。

接下来，我们定义两个在 Coxeter连接研究中出现的幂零矩阵（见第 3 节）。

定义 2.1。 设 $0 < r < n$。定义 $N_r \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$（分别为 $E_r \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$）为这样一个矩阵：第 r 条次对角线（分别为第 $(n-r)$ 条超对角线）的每个元素均为 1，其余所有元素均为 0。

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

图 1。 $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ 中的矩阵 N_1、 E_1、 N_2 和 E_2。

下面的引理表明， N_r 的轨道 $\mathscr{O}_{N_r}$ 是具有 r 个块的最小轨道，其闭包由所有至多具有 r 个块的轨道组成。证明见 [24, §2]。

引理 2.2。 设 $0 < r < n$。令 r' 为 n 除以 r 所得的余数。则：

(1) N_r是幂零的，且具有型 $\{\lceil n/r \rceil^{r'}, \lfloor n/r \rfloor^{r-r'}\}$；(2) 分拆 λ支配 n 当且仅当 $|\lambda| \leq r$。

3. Coxeter连接与Deligne–Simpson问题

3.1. 具有最大分歧奇点的联络。设 V 是黎曼球面 $\mathbb{P}^1$ 上的一个秩为 n 、可平凡化的向量丛，并赋有亚纯联络 ∇。固定一个平凡化后，该联络具有形式 $d + M(z)\frac{dz}{z}$，其中 $M(z) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}(z))$ 是一个由有理函数组成的 $n \times n$矩阵。在 $y \in \mathbb{P}^1$ 处的局部行为由 y处相应的形式联络决定。具体而言，将 $M(z)$ 按局部参数 u 在 y处展开为 Laurent级数即可得到：若 y 为有限值，则为 $z - y$；否则（即若 $y = \infty$），则为 z^{-1}。改变整体或形式向量丛的平凡化会对联络矩阵产生一种作用，称为规范变换。若 $d + A(u)\frac{dz}{z}$ 是一个形式联络，且 $A(u) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}((u)))$，则 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}((u)))$ 通过 $g \cdot (d + A(u))\frac{du}{u} = d + (gA(u)g^{-1})\frac{du}{u} - (dg)g^{-1}$ 作用于联络算子。在整体情形下，$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，因此非线性规范项为零。

设 y 是该联络的一个奇异点，并将 y 处诱导的形式联络记为

$$d + (M_{-r}u^{-r} + M_{-r+1}u^{-r+1} + \cdots)\frac{du}{u},$$

其中 $M_i \in \mathfrak{gl}_n$（$\mathbb{C}$）和 $r \geq 0$。当首项 M_{-r} 具有良好性质时，它会提供有关该联络的重要信息。例如，如果 M_{-r} 不是幂零的，那么整数 r 是该联络的一个不变量，称为在 y 处的斜率。斜率大致可以看作奇点不规则性的度量；若奇异点 y 的斜率为零，则称其为正则奇异，否则称为不规则。若 M_{-r} 是正则半单的（即可对角化且具有互异特征值），则 Wasow 的经典结果 [29] 表明，该联络局部规范等价于如下形式的联络

$$d + (D_{-r}u^{-r} + D_{-r+1}u^{-r+1} + \cdots + D_0)\frac{du}{u},$$

其中 $D_i \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 是对角的，且 D_{-r} 是正则半单的。这种形式的对角代表被称为正则非分歧形式类型。[2]

然而，对于许多奇点，无论选择何种形式平凡化，该展开式的首项都是幂零的。事实上，y 处的斜率可以是分母至多为 n 的任意非负有理数；如果该斜率不是整数，首项将始终是幂零的。例如，Frenkel–Gross连接 [10]

$$d + (E_1 z^{-1} + N_1)\frac{dz}{z}$$

有两个奇点：∞ 处的一个正则奇点，以及 0 处斜率为 $1/n$的不规则奇点。这是不规则奇点 [17]可能具有的最小斜率。Frenkel–Gross连接在 $y = 0$处是最大分歧的，这意味着斜率约分为最简分数时，其分母达到可能的最大值（即 n）。

[2]任何形式联络在经过 $\mathbb{C}((u))$ 的有限扩张后，都可以化为上三角形式。如果可以在基域上做到这一点，则称其为非分歧；否则称为分歧。

为了更好地理解具有非整数斜率的形式联络，Bremer 和 Sage 将首项推广为基本层 [6, 4, 7, 5]。每个形式联络都“包含”一个基本层 [6, 引理 4.5], ，并且联络的斜率等于其所包含的任一基本层的“深度”（[6, 定理 4.10],[7, 定理 2.14]）。正则半单首项由正则层推广，而 Wasow定理的一个推广表明，任何包含正则层的联络都可以“对角化”为分歧形式类型 [6, 5]。特别地，如果某个奇点的斜率等于 r/n ，其中 r 与n互质——即该奇点是最大分歧的——那么该联络局部规范等价于形如 $d + p(\omega^{-1})\frac{dz}{z}$ 的联络，其中 p是次数为 r 的多项式，并且 $\omega^{-1} = E_1 z^{-1} + N_1$[24, 定理 4.4]。一形式 $p(\omega^{-1})\frac{dz}{z}$ 称为“斜率为r/n的最大分歧形式类型”。

3.2. **模空间与 Coxeter连接**。研究亚纯联络时，一个重要问题是：一个全局定义的联络在多大程度上由其局部行为决定。此处，“局部行为”包括：

- 一个非空的有限不规则奇点集 $\{x_i\}_i$;
- 一个相应的形式类型集合 A $= (\mathscr{A}_i)_i$;
- 一个与 $\{x_i\}_i$不相交的正则奇点有限集 $\{y_j\}_j$ ；以及
- 一个相应的“非共振的”[4] 伴随轨道集合 O $= (\mathscr{O}_j)^j$ $\mathscr{O}_j$。

我们考虑联络的范畴 $\mathcal{C}$(A, O)，这些联络 ∇ 定义在秩为 n、可平凡化的向量丛 V上，且满足以下性质：

- ∇ 在每个 x_i处有一个不规则奇点，在每个 y_j处有一个正则奇异点，且没有其他奇点；
- 在每个 x_i处，∇ 都是“可框架化的”（例如参见 [26]），并具有形式类型 A_i；且
- 在每个 y_j处，∇的留数属于 $\mathscr{O}_j$。

Boalch 在每个形式类型均为对角型且具有正则半单首项 [3, 的情形下，给出了相应模空间 $\mathcal{M}$(A,O) 的一般构造1]命题 2.。Bremer 和 Sage 将这一构造扩展到包括“环面型”分歧形式类型的情形 [6,定理 5.6]。

这里，我们针对以下重要的特殊情形，给出这一构造的一个相对简单的版本：在 $\mathbb{P}^1$ 上具有位于 0 的最大分歧奇点、在 ∞ 处具有（可能存在的）正则奇异点，并且没有其他奇点 [24, 命题 5.3]。这类联络被称为*Coxeter*连接（原因将在 [18, 24] 中讨论）；它们包括 Frenkel–Gross 联络和 Airy连接。

[3]形式类型可以看作形式联络的有理标准形。更多详情请参见 [27] 。[4]如果一个伴随轨道中任意两个特征值之差都不是非零整数，则称该轨道为非共振的。

令 $B \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 为上三角矩阵组成的子群。其李代数 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 中上三角矩阵的集合。令 I 表示与 B 对应的 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[\![z]\!])$ 的“伊wahori子群”，并令 $\mathfrak{i}$ 表示其李代数。明确地说，这意味着 I（分别为 $\mathfrak{i}$）是通过“在零点取值”映射 $z \mapsto 0$ 所诱导的映射 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[\![z]\!]) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$（分别为 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}[\![z]\!]) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$）下 B（分别为 $\mathfrak{b}$）的原像。

回顾一形式（$\sum_{i=-r}^{\infty} M_i z^i$）$\frac{dz}{z}$ 的留数为 M_0，其中 $r \geq 0$。

命题 3.1 （ [24]中的命题 5.3）。 设 $\mathscr{A}$是一个最大分歧形式类型，且 $\mathscr{O}$ 是一个非共振伴随轨道。那么

$$\mathcal{M}(\mathscr{A}, \mathscr{O}) \cong \{(\alpha, Y) \mid \alpha \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}[z^{-1}])\frac{dz}{z}, Y \in \mathscr{O}, \alpha + \mathfrak{i} \subseteq \mathrm{Ad}(I)(\mathscr{A}) + \mathfrak{i}, \text{ and } \mathrm{Res}(\alpha) + Y = 0\}/B.$$

3.3. **Deligne–Simpson问题**。 当允许存在分歧奇点时，人们对这些模空间知之甚少。事实上，甚至尚不知道这些模空间何时非空；这就是*Deligne–Simpson*问题。最初的Deligne–Simpson问题涉及仅具有正则奇点的联络，由Crawley–Boevey在 2003 [9]中解决。无分歧版本，即允许存在非分歧奇点的情形，则是最近由Hiroe [14]解决的。最近，我们与Kulkarni和Matherne一起解决了Coxeter连接的Deligne–Simpson问题，见 [24, 定理 5.4] 。定理 3.2是这一结果在齐次*Coxeter*联络这一特殊情形下的重述，即形式类型 $\mathscr{A}$为单项式的Coxeter连接。不失一般性，我们可以假设 $\mathscr{A} = \omega^{-r}\frac{dz}{z}$（其中 $\gcd(r, n) = 1$） [18]。

定理 3.2。 设 r 和 n 为互素的正整数，并设 $\mathscr{O}_\lambda \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$为 λ型的幂零轨道。当且仅当 $|\lambda| \leq r$时，$\mathcal{M}(\omega^{-r}\frac{dz}{z}, \mathscr{O}_\lambda)$非空。特别地，当 $r > n$时，这始终成立。

尽管 [24] 的结果确切地确定了 $\mathcal{M}(\omega^{-r}\frac{dz}{z}, \mathscr{O}_\lambda)$何时非空，但并未给出模空间中的显式元素。当 $r > n$时，很容易找到这样的联络。事实上，如果 $X \in \mathscr{O}_\lambda$ 是严格上三角的（例如，当 X 是$\mathscr{O}_\lambda$的若尔当标准形时），那么 $d + (\omega^{-r} + X)\frac{dz}{z}$具有所需的局部行为。对于 $r < n$ 和 $|\lambda| \leq r$，在模空间中构造显式联络更加复杂，但这一问题可以转化为矩阵理论中的一个特定问题。

在线性代数中，“上矩阵补全问题”研究陪集 $A + \mathfrak{u}$ 的各种性质，其中 $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$，而 $\mathfrak{u}$ 是严格上三角矩阵空间。这些问题在矩阵理论界引起了极大关注；例如参见
[1, 11, 12, 30, 2, 23, 25, 22, 21], ，以及 [16, 第 35] 章中的综述。这里，我们感兴趣的是上三角幂零补全问题：给定 A 幂零，确定与陪集 $A + \mathfrak{u}$ 相交的幂零轨道。关于这一问题最一般的结果由 Rodman 和 Shalom [25] 提出猜想，并由 Krupnik 和 Leibman [22] 证明。该结果表明，如果 μ 是

n 的分拆，对应于 A 的幂零轨道，并且 λ 是一个支配 μ 的分拆，那么 $(A+\mathfrak{u})\cap\mathscr{O}_\lambda$ 中存在一个元素。

现在将范围限制在 $A=N_r$ 的情形，并令 μ_r 为相应的分拆。[24] 中证明了，支配 μ_r 的分拆恰好是至多具有 r 个部分的分拆。令 λ 为这样一个分拆。如果 X 是一个严格上三角矩阵，使得 N_r+X 是型为 λ 的幂零矩阵，则可以证明，$d+(\omega^{-r}+X)\frac{dz}{z}$ 对应于元素 $B\cdot(\alpha,Y)\in\mathcal{M}(\omega^{-r}\frac{dz}{z},\mathscr{O}_\lambda)$，其中 $\alpha=(\omega^{-r}+X)\frac{dz}{z}$ 且 $Y=-(N_r+X)$。Krupnik 和 Leibman 的结果保证了存在这样的 X。然而，尽管他们的证明在理论上具有构造性，但实际上似乎无法执行。事实上，他们的算法要求反复将矩阵变换为特殊的类 Jordan 形式；即使从 $A=N_r$ 开始，我们也不知道有何种数值稳定的方法可以执行这一算法。

在下一节中，我们将给出一种数值稳定且高效的算法，该算法为 N_r 的上三角幂零补全问题生成显式解，从而构造出具有任意指定局部行为的显式 Coxeter 联络。

4. 算法

本节将介绍我们的算法。算法的规范描述（见第4.3节）及其正确性证明（见第5节）建立在 Krupnik 和 Leibman [22] 所使用的许多相同的图论工具之上。第4.1节主要回顾 [22] 中的术语和一个关键结果（命题4.2）。第4.2节回顾 [22]，中的“图变换”概念，并介绍一类我们称为“嫁接变换”的图变换；嫁接变换是我们算法中的基本操作。

4.1. 矩阵的图。 设 n 为一个正整数，并设 V 为一个含有 n 个元素的集合，称为顶点。固定一个双射 $\mathrm{n}:V\to[1,n]$，称为序数函数，它在 V 上规定了一个全序。我们将 $\mathfrak{gl}_n$-图定义为由以下各项组成的一对：

(1) 一个子集 $E\subseteq V\times V$，其元素称为有向边；以及 (2) 一个
权函数 $\alpha\colon E\to\mathbb{C}-\{0\}$。

我们定义 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 与 $\mathfrak{gl}_n$-图集合之间的双射对应图如下。设 $A=(\alpha_{i,\ j})_{i,\ j=1}^{n}$ 是 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 的一个元素。定义 graph(A) 为满足以下性质的 $\mathfrak{gl}_n$-图：当且仅当 $\alpha_{\mathrm{n}(v),\ \mathrm{n}(u)}\neq 0$ 时，两个顶点 u 和 v 之间由一条有向边 $u\mapsto v$ 相连，且每条有向边 $u\mapsto v$ 的权重为 $\alpha_{\mathrm{n}(v),\ \mathrm{n}(u)}$。定义 matrix 为函数 graph 的逆函数。

注记 4.1。 从第4.3节开始，我们只使用二元矩阵，即每个条目均为零或一的矩阵。二元矩阵的 $\mathfrak{gl}_n$-图中的每条箭头权重均为一。由于此类 $\mathfrak{gl}_n$-图将是我们的研究重点，为简单起见，我们假设任何 $u\mapsto v$ 缺少显式权重的箭头，其隐含权重均为一。

我们考虑将 $\mathfrak{gl}_n$-图——更准确地说，是其顶点集——嵌入到 $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0}$ 中。顶点 $v \in V$ 的像 $\phi(v) = (x, y)$ 具有位置 $x = x(v)$和层级 $y = y(v)$。今后，我们使用“图”一词来指代带有嵌入到 $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0}$ 中的 $\mathfrak{gl}_n$-图。我们经常通过坐标来指称图 Γ 中的顶点，并用 $\mathrm{n}_\Gamma(x, y)$ 表示 $\phi^{-1}((x, y))$ 的序数。

若顶点 v 在上方 （相应地，在下方）于顶点 w，则 $x(v) = x(w)$ 且 $y(v) = y(w) + 1$ （相应地，$y(v) = y(w) - 1$）。若有向边 $v \mapsto w$ 向下，则称其向下；若 $y(v) > y(w)$，且$x(v) \leq x(w)$，则称其向右下 。如果图 Γ 的每条有向边都向下，则称该图向下 。如果图 Γ 满足：适当向下，则：

- Γ 向下；
- 对于每个满足 $y(v) > 1$ 的顶点 v，存在一个位于 v 下方的顶点 w 以及一条有向边 $v \mapsto w$；并且
- 每个箭头 $v \mapsto w$，若满足 $y(v) = y(w) + 1$，则向右下方延伸。

我们将图 Γ （其顶点集为 V）的 定义域 $\mathrm{Dom}(\Gamma)$ 定义为 $\mathrm{Dom}(\Gamma) = \{x(v) \mid v \in V\}$。图中位于 i 处的列 Γ ——或者更简洁地说，图中的列 i Γ——为 $\{v \in V \mid x(v) = i\}$。如果 C 是图中的一列，则其高度为 C 的最大值为 $\max\{y(v) \mid v \in C\}$。如果 $i \in \mathrm{Dom}(\Gamma)$，则将 i 在 Γ 中的列的高度记为 $\mathrm{ht}_\Gamma(i)$，并将 Γ 中的高度多重集记为 $\mathrm{Part}(\Gamma)$。

命题 4.2 ([22, 命题 3.2])。 设 Γ 是一个具有 n 个顶点的图。如果 Γ 是向下的，则 $\mathrm{matrix}(\Gamma)$ 是幂零的。如果 Γ 是适当向下的，则 $\mathrm{Part}(\Gamma)$ 是 n 的一个分拆，并且 $\mathrm{matrix}(\Gamma)$ 是型为 $\mathrm{Part}(\Gamma)$ 的幂零矩阵。

我们称适当向下图 Γ 中的列 C 是 Γ 中的向下路径，如果满足以下条件：对于每个顶点 $v \in C$，存在箭头 $v \mapsto w$ 当且仅当 w 位于 v 下方，并且存在箭头 $w \mapsto v$ 当且仅当 w 位于 v 上方。

设 X 是图 Γ 的顶点集的一个子集。如果对于 X 中的每一对顶点 v、w，$\mathrm{n}(v) < \mathrm{n}(w)$ 当且仅当下列条件之一成立，则称 X 按打字机遍历排序：$y(v) > y(w)$，或者 $y(v) = y(w)$ 且 $x(v) < x(w)$。注意，从按打字机遍历排序的集合中移除任意顶点子集后，所得集合仍按打字机遍历排序。

引理 4.3。 设 $0 < r < n$。存在唯一的图 Γ，使得矩阵$(\Gamma) = N_r$、Γ 是适当向下的，顶点集按打字机遍历排序，并且满足以下条件：

(1) Γ的定义域为 $= [1, r]$；(2) 每一列都是一条向下路径；(3) 每一列的高度为 $\lfloor n/r \rfloor$ 或 $\lceil n/r \rceil$；以及 (4) 如果 $1 \leq i < j \leq r$，那么 $\mathrm{ht}_\Gamma(i) \leq \mathrm{ht}_\Gamma(j)$。

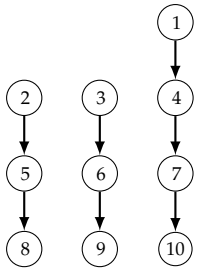


图2。引理 4.3 中所述的 $N_3 \in \mathfrak{gl}_{10}(\mathbb{C})$ 的图 Γ 。

4.2. **图的变换**。 设 Γ 为一个图，并设 ϕ 为将顶点集嵌入 $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0}$的关联嵌入。对 Γ 的顶点坐标进行任何改变，都称为 Γ的几何变换。换句话说， Γ 的几何变换就是用另一个嵌入 ϕ'替换 ϕ 。几何变换保持与 Γ关联的矩阵不变。更一般地， Γ 图的变换描述以下操作的任意有限序列：

- 添加或删除一个箭头 $u \mapsto v$;
- 改变箭头 $u \mapsto v$ 的权重 $\alpha_{\mathrm{n}(v),\ \mathrm{n}(u)}$ ；或
- 进行几何变换。

我们重点研究一类图变换，将其称为“嫁接变换”，定义见定义4.4。我们的算法（算法1）对这些嫁接变换执行有限次序列操作。

定义4.4。 嫁接变换的输入包括：

- 一个适当向下图 Γ;
- 定义域 Dom(Γ) 中的两个指标 s 和 c（分别称为接穗 和砧木），其满足：列 c 是一条向下路径，且 s $<$ c；以及
- 一个满足 $0 < m \leq \mathrm{ht}_\Gamma(\mathrm{c})$ 的整数 m （将要嫁接的顶点数）。

To 将嫁接 m 个顶点嫁接到 Γ 从 c 到 s，并对其执行以下两步变换： Γ:

步骤 1：添加一条箭头 $(\mathrm{c}, \mathrm{ht}_\Gamma(\mathrm{c}) - m + 1) \mapsto (\mathrm{s}, \mathrm{ht}_\Gamma(\mathrm{s}))$。步骤 2：将列 c 的顶部 m 个顶点“平移”到列 s 的顶部；即对于每个 $i \in [1, m]$, 将顶点 $(\mathrm{c}, \mathrm{ht}_\Gamma(\mathrm{c}) - m + i)$ 的嵌入改为 $(\mathrm{s}, \mathrm{ht}_\Gamma(\mathrm{s}) + i)$。

示例 4.5。 设 Γ 为引理 4.3 中所述的 $N_3 \in \mathfrak{gl}_{10}$ 图。图3展示了将 $m = 2$ 顶点从列 c $= 3$ 嫁接到列 s $= 2$ 中的 Γ 所涉及的步骤 1 和 2。

引理 4.6。 设 Γ^1 是一个适当向下图，且 c、s 是 Dom(Γ^1) 中的指标，并满足列 c 是一条向下路径且 s $<$ c。设 Γ^2 是从 c 到 s 嫁接 m 个顶点所得的图，其中 $0 < m \leq \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{c})$。则：

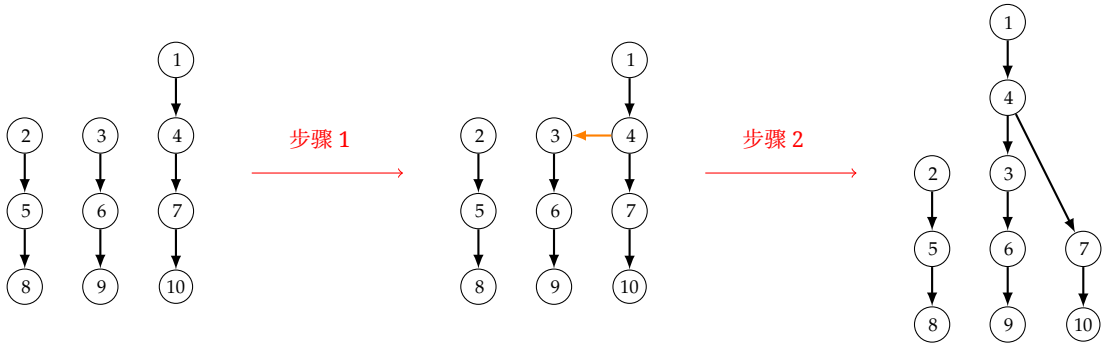


图3。左侧是引理 4.3中所述的图 $\Gamma\ N_3 \in \mathfrak{gl}_{10}$。右侧是将 $m = 2$ 个顶点从列 c $= 3$ 嫁接到列 s $= 2$ 后的结果（见定义4.4）。

(1) 若 $m = \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{c})$，则 $\mathrm{Dom}(\Gamma^2) = \mathrm{Dom}(\Gamma^1) - \{\mathrm{c}\}$；否则 $\mathrm{Dom}(\Gamma^2) = \mathrm{Dom}(\Gamma^1)$。(2) $\mathrm{ht}_{\Gamma^2}(\mathrm{c}) = \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{c}) - m$，$\mathrm{ht}_{\Gamma^2}(\mathrm{s}) = \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{s}) + m$，并且对于所有满足 $i \notin \{\mathrm{s}, \mathrm{c}\}$ 的 $i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^2)$，都有 $\mathrm{ht}_{\Gamma^2}(i) = \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(i)$。(3) 如果列 i 在 Γ^1 中是一条向下路径且 $i \notin \{\mathrm{s}, \mathrm{c}\}$，那么列 i 在 Γ^2 中是一条向下路径。(4) 对于每个 $i \in [1, m]$，$\mathrm{n}_{\Gamma^2}(\mathrm{s}, \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{s}) + i) = \mathrm{n}_{\Gamma^1}(\mathrm{c}, \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{c}) - m + i)$。特别地，$\mathrm{n}_{\Gamma^2}(\mathrm{s}, \mathrm{ht}_{\Gamma^2}(\mathrm{s})) = \mathrm{n}_{\Gamma^1}(\mathrm{c}, \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{c}))$。如果 (x, y) 是 Γ^2 中满足 $x \neq \mathrm{s}$ 的一个顶点，那么 (x, y) 是 Γ^1 中的一个顶点，并且 $\mathrm{n}_{\Gamma^1}(x, y) = \mathrm{n}_{\Gamma^2}(x, y)$。(5) 如果 $\mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{s}) > \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{c}) - m$，那么 Γ^2 是适当向下的。(6) 如果 $\mathrm{n}_{\Gamma^1}(\mathrm{s}, \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{s})) < \mathrm{n}_{\Gamma^1}(\mathrm{c}, \mathrm{ht}_{\Gamma^1}(\mathrm{c}) - m + 1)$，那么 $\mathrm{matrix}(\Gamma^2)$ 可由 $\mathrm{matrix}(\Gamma^1)$ 将一个上三角元素从零改为一得到。

4.3. 算法。 我们的算法，即算法1，具体如下。该算法以两个正整数 r 和 n （满足 $r < n$）以及 n 的一个分拆 λ 作为输入，该分拆至多有 r 个部分。该算法由以下对象组成，每个对象都有一个状态，并在执行过程中发生变化：

- 一个图 Γ;
- 两个整数 s 和 c（我们称之为“列指针”）；以及
- 两个多重集 T 和 S。

Γ 的初始状态是引理 4.3中所述的 $N_r \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$的图。列指针和多重集在第 1–8 行中初始化。该算法对多重集使用三种操作：$+$、$-$和最大值。为定义这些操作，设 λ 和 μ 为多重集。和 $\lambda + \mu$ 是一个多重集，其重数函数为 $\mathrm{m}^{\lambda+\mu}(x) = \mathrm{m}_\lambda(x) + \mathrm{m}^\mu(x)$，对所有 x均成立。差 $\lambda - \mu$是多重集

其重数函数为 $\mathrm{m}^{\lambda-\mu}(x) = \max\{0, \mathrm{m}_\lambda(x) - \mathrm{m}^\mu(x)\}$，对所有 x均成立。最后，max(λ)是 Supp(λ) 中的最大值。

初始化后，循环 *1* （第 9–30 行）和循环 *2* （第 31–53 行）将被执行。我们将这两个循环称为主循环 （相对于第 32–34 行定义的“小循环”而言）。主循环的每次迭代都会对 Γ 至少执行一次嫁接变换，使 S 和/或 T 的基数减少 1，并使列指针 c 增加（同时 s 也可能增加）。在第 5 节中，我们证明算法1在主循环经过有限次迭代后终止，并且 Γ 的终止状态满足指定的后置条件。

我们已在 SageMath 计算机代数系统 [28], 以及用于 Python编程语言的 NumPy 数组和矩阵计算库 [13] 中实现了算法1。[5] 我们已针对所有正整数 r 和 n，以及所有满足 $0 < r < n \leq 30$ 和 $|\lambda| \leq r$的分拆 λ of$n$，测试了我们的 SageMath 实现。

[5]我们的 Python 实现已公开发布于 https://github.com/neallivesay/nilpotent-completions .

算法1

要求： r 和 n 是正整数，满足 $r < n$； r' 是 n 除以 r所得的余数，
Γ 是 $N_r \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$的图，如引理 4.3 所述，
λ 是 n 的一个分拆，至多有 r 个部分
确保： 矩阵(Γ) $= N_r + X$ 其中 X 是严格上三角的，
矩阵(Γ) 是二值且幂零的，型为 λ

T $\leftarrow \{x^{\mathrm{m}_\lambda(x)} \mid x \in \mathrm{Supp}(\lambda)\ x > \lceil n/r \rceil\}$
若 $r' \neq 0$ **且** $\mathrm{m}_\lambda(\lceil n/r \rceil) > r'$ **则**
    T $\leftarrow$ T $+ \{\lceil n/r \rceil^{\mathrm{m}_\lambda(\lceil n/r \rceil)-r'}\}$
S $\leftarrow \{x^{\mathrm{m}_\lambda(x)} \mid x \in \mathrm{Supp}(\lambda)\ x < \lfloor n/r \rfloor\}$
若 $\mathrm{m}_\lambda(\lfloor n/r \rfloor) > r - r'$ **则**
    S $\leftarrow$ S $+ \{\lfloor n/r \rfloor^{\mathrm{m}_\lambda(\lfloor n/r \rfloor)-(r-r')}\}$
s $\leftarrow \min\{\mathrm{m}_\lambda(\lfloor n/r \rfloor)\ r - r'\} + 1$
c $\leftarrow$ s $+ 1$
当 S 非空**执行** ▷ 循环 1
    如果 max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) $= \mathrm{ht}_\Gamma$(c) $-$ max(S) $+ 1$ **且** ht_Γ(c) $< \mathrm{ht}_\Gamma$(c $+ 1$) **那么** ▷情形 1a
        将 ht_Γ(c $+ 1$) $-$ max(S) 个顶点从列 c $+ 1$ 嫁接到列 s
        S $\leftarrow$ S $-$ {最大值(S)}
        T $\leftarrow$ T $-$ {max(T)}
        s $\leftarrow$c
        c $\leftarrow$ c $+ 2$
    否则如果 max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) $> \mathrm{ht}_\Gamma$(c) $-$ max(S) **那么** ▷ 情况 1b
        将 ht_Γ(c) $-$ max(S) 个顶点从列 c 嫁接到列 s
        S $\leftarrow$ S $-$ {max(S)}
        c $\leftarrow$ c $+ 1$
    否则如果 max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) $= \mathrm{ht}_\Gamma$(c) $-$ max(S) **则** ▷情形 1c
        将 ht_Γ(c) $-$ max(S) 个顶点从列 c 嫁接到列 s
        S $\leftarrow$ S $-$ {max(S)}
        T $\leftarrow$ T $-$ {max(T)}
        s $\leftarrow$ c $+ 1$
        c $\leftarrow$ c $+ 2$
    否则如果 max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) $< \mathrm{ht}_\Gamma$(c) $-$ max(S) **那么** ▷情况 1d
        将 max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) 个顶点从列 c 嫁接到列 s
        T $\leftarrow$ T $-$ {max(T)}
        s $\leftarrow$c
        c $\leftarrow$ c $+ 1$

31: **当**T 非空**时，执行** ▷ 循环 2
32: **当**max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) $> \lceil n/r \rceil$ **时，执行** ▷ 小循环
33: 将 ht_Γ(c) 个顶点从列 c 嫁接到列 s
34: c $\leftarrow$ c $+1$
35: **如果** max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) $>\mathrm{ht}_\Gamma$(c) **且** ht_Γ(c $+1$) $= \lceil n/r \rceil$ **那么** ▷情况2a
36: 将 ht_Γ(c $+1$) 个顶点从列 c $+1$ 嫁接到列 s
37: s $\leftarrow$c
38: c $\leftarrow$ c $+2$
39: **否则如果** max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) $>\mathrm{ht}_\Gamma$(c) **且** ht_Γ(c $+1$) $= \lfloor n/r \rfloor$ **则** ▷ 情况 2b
40: 将 ht_Γ(c) 个顶点从列 c 嫁接到列 s
41: c $\leftarrow$ c $+1$
42: 将一个顶点从列 c 嫁接到列 s
43: s $\leftarrow$c
44: c $\leftarrow$ c $+1$
45: **否则如果** max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) $=\mathrm{ht}_\Gamma$(c) **则** ▷情况 2c
46: 将 ht_Γ(c) 个顶点从列 c 嫁接到列 s
47: s $\leftarrow$ c $+1$
48: c $\leftarrow$ c $+2$
49: **否则如果** max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) $<\mathrm{ht}_\Gamma$(c) **则** ▷情况 2d
50: 将 max(T) $-\mathrm{ht}_\Gamma$(s) 个顶点从列 c 嫁接到列 s
51: s $\leftarrow$c
52: c $\leftarrow$ c $+1$
53: T $\leftarrow$ T $-$ {max(T)}

5. 正确性证明

在本节中，我们证明算法1是正确的。换言之，我们证明：对于任意有效输入，该算法均定义良好并会终止，并且与图 Γ 的终止状态相关联的矩阵满足指定的后置条件。为此，设 r和 n 为满足 $r < n$的正整数，设 r' 为 n 除以 r所得的余数，并设 λ 为一个至多含有 r 个部分的分拆。按照第1—8行中的规定，初始化一个图 Γ、多重集 T 和 S，以及列指针 s 和 c。

我们的证明采用归纳法，归纳对象是主循环执行的次数 k；也就是说， k 等于循环 1（第 9–30 行）执行的次数与循环 2（第 31–53 行）执行的次数之和。对于每个对象（即图、多重集或指针） Z，令 Z^k 表示 Z 在第 k次迭代结束时的状态，其中 Z^0 表示 Z 初始化后的状态

（即执行第 1–8 行之后）。固定一个常数列指针 $\mathrm{end} = r - \min\{r', \mathrm{m}_\lambda(\lceil n/r \rceil)\}$。

证明对以下关于 k 的命题函数进行同步归纳：

$P_1(k)$：每条指令在迭代 k 中都有明确定义。$P_2(k)$：矩阵(Γ^k) = 矩阵(Γ^{k-1}) + X 对于某个严格上三角矩阵 X。$P_3(k)$：$\mathsf{S}^k \subseteq \mathsf{S}^{k-1}$ 且 $\mathsf{T}^k \subseteq \mathsf{T}^{k-1}$，其中至少有一个子集关系是严格的。$P_4(k)$：$\Gamma^k$ 是适当向下的。$P_5(k)$：$\{$高$_{\Gamma^k}(i) \mid i \in$ 定义域(Γ^k) $i \notin [\mathsf{c}^k$，结束 $]$，$i \neq \mathsf{s}^k\} = \lambda - (\mathsf{T}^k + \mathsf{S}^k)$。$P_6(k)$：如果 i 满足 $\mathsf{c}^k \le i \le$ 结束，则：(1) $i \in$ 定义域(Γ^k)；(2) 列 i 是向下路径；(3) 高$_{\Gamma^k}(i) = \lfloor n/r \rfloor$ 或高$_{\Gamma^k}(i) = \lceil n/r \rceil$；(4) 如果 $i < j \le$结束，则高$_{\Gamma^k}(i) \le$高$_{\Gamma^k}(j)$；(5) 如果 S^k 非空，则高$_{\Gamma^k}(i) >$ max(S^k)，且如果 T^k 非空，则高$_{\Gamma^k}(i) <$max(T^k)。此外，满足 $\mathsf{c}^k \le x(v) \le$结束的顶点集合 v 按打字机遍历排序。$P_7(k)$：$\mathsf{s}^k < \mathsf{c}^k$。如果 T^k 非空，则 s^k、$\mathsf{c}^k \in$定义域(Γ^k) 和 $\mathsf{c}^k \le$结束。$P_8(k)$：如果 S^k 非空，则 n$_{\Gamma^k}$(s^k, 高$_{\Gamma^k}$(s^k)) < n$_{\Gamma^k}$(c^k, max(S^k) + 1)。如果 T^k 非空，则 n$_{\Gamma^k}$(s^k, 高$_{\Gamma^k}$(s^k)) < n$_{\Gamma^k}$(c^k, max$\{1,$高$_{\Gamma^k}(\mathsf{c}^k) - (\max(\mathsf{T}^k) -$高$_{\Gamma^k}(\mathsf{s}^k)) + 1\}$)。$P_9(k)$：如果 S^k 非空，则高$_{\Gamma^k}$(s^k) > max(S^k)。$P_{10}(k)$：如果 S^k 非空，则 T^k 非空。

对于所有 $i \in [1,3]$（分别地，对于所有 $i \in [4,10]$），P_i 的定义域是满足 S^{k-1} 或 T^{k-1} 非空的所有 $k \ge 1$（分别地，所有 $k \ge 0$）构成的集合。引理 5.1 确立了上述命题函数的全称量化对于证明算法1正确性的充分性。

引理 5.1。如果对于所有 $4 \le i \le 10$，$P_i(0)$ 成立，并且对于所有满足 S^{k-1} 或 T^{k-1} 非空这一性质的 $1 \le i \le 10$ 和所有 $k \ge 1$，$P_i(k)$ 成立，那么算法经过若干步 k_{last} 后终止。此外，对于某个严格上三角矩阵 X，矩阵($\Gamma^{k_{\text{last}}}$) $= N_r + X$，并且矩阵($\Gamma^{k_{\text{last}}}$) 是型为 λ 的幂零矩阵。

证明。假设引理 5.1 的假设成立。定义 $X_{\mathsf{S}} = \{k \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \mathsf{S}^{k-1}$ 非空$\}$且 $X_{\mathsf{T}} = \{k \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \mathsf{T}^{k-1}$ 非空$\}$。命题 $P_1(k)$ 成立，因此对于所有迭代 $k \in X_{\mathsf{S}} \cup X_{\mathsf{T}}$，算法都会运行。由于对于所有 $k \in X_{\mathsf{S}} \cup X_{\mathsf{T}}$，$P_{10}(k)$ 成立，因此可得 $X_{\mathsf{S}} \subseteq X_{\mathsf{T}}$。由于对于所有 $k \in X_{\mathsf{S}} \cup X_{\mathsf{T}}$，$P_3(k)$ 成立，因此 max(X_{S}) $\le$max(X_{T}) $< \infty$；循环 1 对所有 $k \in X_{\mathsf{S}}$ 进行迭代，循环 2 对所有 $k \in X_{\mathsf{T}} - X_{\mathsf{S}}$ 进行迭代，并在迭代 $k_{\text{last}} =$ max(X_{T}) 后终止执行。命题 $P_4(k_{\text{last}})$ 表明，图的终止状态 $\Gamma^{k_{\text{last}}}$ 是恰当的向下状态。因此，根据命题 4.2 和 $P_5(k_{\text{last}})$，矩阵($\Gamma^{k_{\text{last}}}$) 是 λ 型幂零矩阵。由于

对于所有满足 T^{k-1} 非空的 k，$P_2(k)$ 均成立，因此存在某个严格上三角矩阵 X，使得矩阵$(\Gamma^{k_{\text{last}}}) = N_r + X$。□

本节余下部分将通过同时归纳来证明引理 5.1 的假设。我们先建立归纳基础。命题 $P_4(0)$、$P_6(0)$、$P_7(0)$、$P_8(0)$和 $P_9(0)$显然成立（主要是引理 4.3 的推论）。命题 $P_5(0)$成立，因为 $\{\mathrm{ht}_{\Gamma^0}(i) \mid i \in$定义域$(\Gamma^0)\ i \notin [\mathsf{c}^0, \text{end}\,], i \neq \mathsf{s}^0\} = \{\mathrm{ht}_{\Gamma^0}(i) \mid i \in [1, \mathsf{s}^0) \cup (\text{end}\ \ r]\} = \{\lfloor n/r \rfloor^{\min\{\mathrm{m}_\lambda(\lfloor n/r \rfloor)\ r-r'\}}, \lceil n/r \rceil^{\min\{r', \mathrm{m}_\lambda(\lceil n/r \rceil)\}}\} = \lambda - (\mathsf{T}^0 + \mathsf{S}^0)$。为证明 $P_{10}(0)$，反设 S^0 非空而 T^0 为空。则 λ 中至多有 r' 个部分等于 $\lceil n/r \rceil$。其余部分至多为 $\lfloor n/r \rfloor$，且至少有一个部分严格小于该值。但这意味着$n = \mathrm{sum}(\lambda) < (r - r')\lfloor n/r \rfloor + r' \lceil n/r \rceil = n$，矛盾。

为证明归纳步骤，令 k 为满足 S^{k-1} 非空或 T^{k-1} 非空的正整数。假设算法执行主循环 $k-1$ 个定义良好的迭代，并假设对于每个 $1 \leq j < k$ 和每个 $1 \leq i \leq 11$，$P_i(j)$ 均成立。我们将证明，对于所有 $1 \leq i \leq 11$，$P_i(k)$ 均为真。在第 k 次迭代开始时，以下两种情形之一成立：

情形 1：S^{k-1} 非空；或情形 2：S^{k-1} 为空且
T^{k-1} 非空。

情形 1 在第 5.1 节中讨论，情形 2 在第 5.2 节中讨论。

5.1. **假设在迭代 k 开始时情形 1 成立**。也就是说，假设 S^{k-1} 非空。那么第 k 次迭代是循环 1 的一次迭代。考虑以下四个条件表达式：

情形 1a：$\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{s}^{k-1}) = \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}) - \max(\mathsf{S}^{k-1}) + 1$且 $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}) < \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1} + 1)$；情形 1b：$\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{s}^{k-1}) > \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}) - \max(\mathsf{S}^{k-1})$，且不满足情形 1a；情形 1c：$\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{s}^{k-1}) = \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}) - \max(\mathsf{S}^{k-1})$；以及情形 1d：$\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{s}^{k-1}) < \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}) - \max(\mathsf{S}^{k-1})$。

注意到 $P_{10}(k-1)$ 意味着 T^{k-1} 非空。因此，情形 1b、1c 和 1d 中的每个条件表达式都有定义。为验证情形 1a 中的条件表达式有定义，只需证明当满足以下条件时 $\mathsf{c}^{k-1} + 1 \leq \mathsf{end}$，

$$\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1}) = \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(c^{k-1}) - \max(\mathsf{S}^{k-1}) + 1. \tag{1}$$

反设 (1) 成立但 $\mathsf{c}^{k-1}+1 > \mathsf{end}$。则 $P_6(k-1)$ 意味着 $\mathsf{c}^{k-1}=\mathsf{end}$。因此

$$\begin{aligned} n &= \textstyle\sum_{\{i \mid i\in \mathrm{Dom}(\Gamma^{k-1}), i\notin[c^{k-1},end], i\neq s^{k-1}\}} \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(i) + \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1}) + \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(c^{k-1}) \\ &= \mathrm{sum}(\lambda - (\mathsf{T}^{k-1}+\mathsf{S}^{k-1})) + \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1}) + \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(c^{k-1}) && \text{(by } P_5(k-1)\text{)} \\ &< \mathrm{sum}(\lambda - (\mathsf{T}^{k-1}+\mathsf{S}^{k-1})) + \max(\mathsf{T}^{k-1}) + \max(\mathsf{S}^{k-1}) && \text{(by (1))} \\ &\le n, \end{aligned}$$

矛盾。因此 $\mathsf{c}^{k-1}+1 \le \mathsf{end}$ if (1) 得到满足，这意味着情形 1a 的条件表达式定义良好。

不难验证，情形 1a–d 的条件表达式彼此互斥且完备。对于这四种情形中的每一种，都会执行一组不同的指令。现在我们证明情形 1a 的归纳步骤；情形 1b–d 的证明类似，因而略去。

5.1.1. 假设在迭代 k 开始时，情形 *1a* 得到满足。如上所述，可推出 $\mathsf{c}^{k-1}+1 \le \mathsf{end}$。由于 $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}) < \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}+1)$，因此根据 $P_6(k-1)$ 可知，$\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}) = \lfloor n/r \rfloor$，$\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}+1) = \lceil n/r \rceil$，以及 $\lfloor n/r \rfloor \neq \lceil n/r \rceil$。

我们来逐步说明情形 1a 的指令（即第 11–15 行）的执行过程。通过将 $\Gamma^{k-1}(\mathsf{c}^{k-1}+1) - \max(\mathsf{S}^{k-1})$ 个 Γ^{k-1} 中的顶点从列 $\mathsf{c}^{k-1}+1$ 嫁接到列 s^{k-1}，形成图 Γ^k。由于 Γ^{k-1} 是适当向下的，且列 $\mathsf{c}^{k-1}+1$ 是 Γ^{k-1} 中的一条向下路径（根据 $P_6(k-1)$），因此该嫁接操作定义良好。最后，重新分配多重集和列指针——得到 $\mathsf{S}^k = \mathsf{S}^{k-1} - \{\max(\mathsf{S}^{k-1})\}$、$\mathsf{T}^k = \mathsf{T}^{k-1} - \{\max(\mathsf{T}^{k-1})\}$、$\mathsf{s}^k = \mathsf{c}^{k-1}$ 以及 $\mathsf{c}^k = \mathsf{c}^{k-1}+2$——迭代 k 结束。由于在迭代 k 期间计算的每个表达式和执行的每条指令都有明确定义，故 $P_1(k)$ 成立。命题 $P_3(k)$ 显然成立。

情形 1a 的其余证明主要依赖于引理 4.6。根据 $P_9(k-1)$，可得 $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{s}^{k-1}) > \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}) - (\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{c}^{k-1}) - \max(\mathsf{S}^{k-1}))$。因此，引理 4.6(5) 蕴含 $P_4(k)$。不难验证 $P_6(k)$。由于 $\mathsf{s}^k = \mathsf{c}^{k-1} \in$定义域$(\Gamma^k)$ 且 $\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(\mathsf{s}^k) = \lfloor n/r \rfloor$，命题 $P_9(k)$ 立即成立。

命题 $P_2(k)$ 由引理 4.6(6)以及以下事实推出：

$$\begin{aligned} \mathrm{n}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1}, \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1})) &< \mathrm{n}_{\Gamma^{k-1}}(c^{k-1}, \max(\mathsf{S}^{k-1})+1) && \text{(by } P_8(k-1)\text{)} \\ &< \mathrm{n}_{\Gamma^{k-1}}(c^{k-1}+1, \max(\mathsf{S}^{k-1})+1) && \text{(by } P_6(k-1)\text{)} \\ &= \mathrm{n}_{\Gamma^{k-1}}(c^{k-1}, \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(c^{k-1}) \\ &\qquad -(\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(c^{k-1}) - \max(\mathsf{S}^{k-1}))). \end{aligned}$$

命题 P_5（k）由以下事实推出：

$$\begin{aligned}
&\{\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k), i \notin [c^k, end], i \neq s^k\} \\
&= \{\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^{k-1}), i \notin [c^{k-1}, end], i \neq s^{k-1}\} + \{\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(s^{k-1}), \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(c^{k-1})\} \\
&= \lambda - (\mathsf{T}^{k-1} + \mathsf{S}^{k-1}) + \{\max(\mathsf{S}^{k-1}), \max(\mathsf{T}^{k-1})\} \\
&= \lambda - ((\mathsf{T}^{k-1} - \max(\mathsf{T}^{k-1})) + (\mathsf{S}^{k-1} - \max(\mathsf{S}^{k-1}))) \\
&= \lambda - (\mathsf{T}^k + \mathsf{S}^k),
\end{aligned}$$

第二个等式由 $P_5(k-1)$ 得出。要证明 $P_7(k)$，只需证明当 T^k 非空时 $\mathsf{c}^k \leq \mathsf{end}$。反设 T^k 非空且 $\mathsf{c}^k > \mathsf{end}$。于是

$$\begin{aligned}
n &= \textstyle\sum_{i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k)} \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \\
&= \mathrm{sum}(\lambda - (\mathsf{T}^k + \mathsf{S}^k)) + \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(s^k) && \text{(by } P_5(k)\text{)} \\
&\leq n - \max(\mathsf{T}^k) + \lfloor n/r \rfloor && \text{(since } \mathsf{T}^k \text{ is nonempty)} \\
&< n && \text{(since } \max(\mathsf{T}^k) > \lfloor n/r \rfloor\text{)}.
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾，因此 $P_7(k)$ 成立。然后，由引理 4.6 和 $P_6(k-1)$ 可得 $P_8(k)$。

最后，我们证明 $P_{10}(k)$。设 S^k 非空。为导出矛盾，假设 T^k 为空。于是

$$\begin{aligned}
|\lambda - (\mathsf{T}^k + \mathsf{S}^k)| + |\mathsf{S}^k| &= |\lambda| = r = |\mathrm{Dom}(\Gamma^k)| \\
&= |\{i \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k), i \notin [c^k, end], i \neq s^k\}| + |\{s^k\} \cup [c^k, end]| \\
&= |\{\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k), i \notin [c^k, end], i \neq s^k\}| + |\{s^k\} \cup [c^k, end]| \\
&= |\lambda - (\mathsf{T}^k + \mathsf{S}^k)| + |\{s^k\} \cup [c^k, end]|.
\end{aligned}$$

由此可得

$$|\{s^k\} \cup [c^k, end]| = |\mathsf{S}^k|. \tag{2}$$

此外，由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{sum}(\lambda - (\mathsf{T}^k + \mathsf{S}^k)) + \mathrm{sum}(\mathsf{T}^k + \mathsf{S}^k) &= \mathrm{sum}(\lambda) = n = \textstyle\sum_{i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k)} \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \\
&= \textstyle\sum_{i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k), i \notin [c^k, end], i \neq s^k} \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) + \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(s^k) + \sum_{i=c^k}^{end} \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \\
&= \mathrm{sum}(\lambda - (\mathsf{T}^k + \mathsf{S}^k)) + \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(s^k) + \textstyle\sum_{i=c^k}^{end} \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i),
\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{sum}(\mathsf{S}^k) = \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(s^k) + \sum_{i=c^k}^{end} \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i). \tag{3}$$

注意 $\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(s^k) > \max(\mathsf{S}^k)$ 由 $P_9(k)$ 得出。此外，对于所有 $i \in [c^k, \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) > \max(\mathsf{S}^k)$，结尾为 $]$。因此 e

$$\begin{aligned}
\max(\mathsf{S}^k) \cdot |\mathsf{S}^k| &< \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(s^k) + \textstyle\sum_{i=c^k}^{end} \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) && \text{(by (2))} \\
&= \mathrm{sum}(\mathsf{S}^k) && \text{(by (3))} \\
&\leq \max(\mathsf{S}^k) \cdot |\mathsf{S}^k|,
\end{aligned}$$

一个矛盾。命题 $P_{10}(k)$得证。

5.2. **假设在迭代 k 开始时满足情形 2**。 也就是说，假设 S^{k-1} 为空且 T^{k-1} 非空。那么，主循环的第 k 次迭代是循环 2 的一次迭代。在此情形下，三个命题函数具有更为简洁且逻辑等价的表述：

$P_3(k)$：S^k 为空且$\mathsf{T}^k \subsetneq \mathsf{T}^{k-1}$。$P_5(k)$： $\{\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \mid i \in$定义域$(\Gamma^k)\ i \notin [\mathsf{c}^k$，结束 $],\ i \neq \mathsf{s}^k\} = \lambda - \mathsf{T}^k$。
$P_8(k)$：如果T^k非空，则 $\mathrm{n}_{\Gamma^k}(\mathsf{s}^k, \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(\mathsf{s}^k)) < \mathrm{n}_{\Gamma^k}(\mathsf{c}^k, \max\{1, \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(\mathsf{c}^k) - (\max(\mathsf{T}^k) - \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(\mathsf{s}^k)) + 1\})$。

注意，如果S^k 为空，则 $P_9(k)$和 $P_{10}(k)$显然成立。

执行循环 2的指令集的第一步，是执行小循环 （第32–34行）。令 $\Gamma^{k-1,\ \ell}$ （分别为$^{k-1}$列指针，$^{\ell}$）表示在第 k次迭代期间小循环第 ℓ次迭代结束时的图状态（分别为列指针），并令 $\Gamma^{k-1,\ 0}$ （分别为$^{k-1}$列指针，^{0}）表示初始图状态 Γ^{k-1} （分别为列指针$^{k-1}$）。定义以下命题函数：

$Q_1^k(\ell)$：在小循环的迭代 k 期间，迭代 ℓ 中的每条指令都有明确定义。$Q_2^k(\ell)$：矩阵$(\Gamma^{k-1,\ell})$ $=$ 矩阵$(\Gamma^{k-1,\ell-1}) + X$，其中某个矩阵 X 为严格上三角矩阵。$Q_3^k(\ell)$：$\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1}) >$ht $_{\Gamma^{k-1},\ell-1}(\mathsf{s}^{k-1})$。$Q_4^k(\ell)$： $\Gamma^{k-1,l}$ 是适当向下的。$Q_5^k(\ell)$： $\{\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(i) \mid i \in$ 定义域$(\Gamma^{k-1,\ell})\ i \notin [\mathsf{c}^{k-1,\ell}$， end$], i \neq \mathsf{s}^{k-1}\} = \lambda - \mathsf{T}^{k-1}$。$Q_6^k(\ell)$：如果 i 满足 $\mathsf{c}^{k-1,\ell} \leq i \leq$ end，则：(1) $i \in$ 定义域$(\Gamma^{k-1,\ell})$；(2) 列 i 是一条向下路径；(3) $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(i) = \lfloor n/r \rfloor$ 或 $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(i) = \lceil n/r \rceil$；(4) 如果 $i < j \leq$end，则 $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(i) \leq \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(j)$；以及 (5) 如果 T^k 非空，则对于所有 $i \in [\mathsf{c}^{k-1,\ell}$， end$]$，$\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(i) <max(\mathsf{T}^k)$。

顶点 v with $\mathsf{c}^{k-1,\ \ell} \leq x(v) \leq$ end 按打字机遍历排序。
$Q_7^k(\ell)$：如果 $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1}) <$ max(T^{k-1})，那么 $\mathsf{c}^{k-1,\ell} \leq$ end.$Q_8^k(\ell)$：$\mathrm{n}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1},$ $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1})) < \mathrm{n}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{c}^{k-1,\ell}, \max\{1, \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{c}^{k-1,\ell}) - (\max(\mathsf{T}^k) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1}))$ $+ 1\})$。

我们对所有 $i \in [4, 8]$ 证明 $Q_i^k(0)$，并对所有 $i \in [1, 8]$ 以及满足 $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1}) > \lceil n/r \rceil$ 的所有 ℓ 证明 $Q_i^k(\ell)$。由 $P_i(k-1)$ 立即得到关于 $i \in [4, 8]$ 的命题 $Q_i^k(0)$，其中 $i \in [4, 8]$ 是我们归纳假设的一部分。令 $\ell > 0$ 满足 $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1}) > \lceil n/r \rceil$，并在归纳假设下假定，对所有 $i \in [1, 8]$， $Q_i^k(\ell-1)$ 均成立。我们依次执行小循环第 ℓ 次迭代中的两条指令（第 33 行和第 34 行）。首先，将列 $\mathsf{c}^{k-1,\ell-1}$ 嫁接到列 s^{k-1}，从而形成图 $\Gamma^{k-1,\ell}$。由于 $\Gamma^{k-1,\ell-1}$ 依据 $Q_1^{k-1}(\ell-1)$ 是适当向下的，且 $\mathsf{s}^{k-1} \neq \mathsf{c}^{k-1,\ell-1}$，因此嫁接变换是良定义的。接下来，将 $\mathsf{c}^{k-1,\ell}$ 设为 $\mathsf{c}^{k-1,\ell-1} + 1$，小循环的第 ℓ 次迭代结束。

对于每个 $i \in [1,6]$，命题 $Q_i^k(\ell)$ 都立即成立，这主要是引理 4.6 的直接推论。为证明 $Q_8^k(\ell)$，注意到引理 4.6(4) 蕴含 $\mathsf{n}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1}, \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1})) = \mathsf{n}_{\Gamma^{k-1},\ell-1}(\mathsf{c}^{k-1,\ell-1}, \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell-1}(\mathsf{c}^{k-1,\ell-1}))$。但这小于 $\mathsf{n}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{c}^{k-1,\ell}, \max\{1, \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{c}^{k-1,\ell}) - (\max(\mathsf{T}^k) - \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1})) + 1\})$。由于 $\mathsf{c}^{k-1,\ell-1} < \mathsf{c}^{k-1,\ell}$ 且 $\mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell-1}(\mathsf{c}^{k-1,\ell-1}) \geq \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{c}^{k-1,\ell}) - (\max(\mathsf{T}^k) - \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1}))$，故结论成立。为证明 $Q_7^k(\ell)$，反设 $\mathsf{c}^{k-1,\ell} > \mathsf{end}$。于是

$$\begin{aligned} n - \max(\mathsf{T}^{k-1}) &< n - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(s^{k-1}) \\ &= \textstyle\sum_{i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^{k-1,\ell}), i \neq s^{k-1}} \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(i) \\ &= \textstyle\sum_{i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^{k-1,\ell}), i \notin [c^{k-1,\ell}, end], i \neq s^{k-1}} \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(i) \\ &= \mathrm{sum}(\lambda - \mathsf{T}^{k-1}) && \text{(by } Q_5^k(\ell)\text{)} \\ &\leq n - \max(\mathsf{T}^{k-1}), \end{aligned}$$

矛盾。由此，对于所有 $i \in [1,8]$ 以及满足 $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1}) > \lceil n/r \rceil$ 的所有 ℓ，$Q_i^k(\ell)$ 的证明得证。

由于对于满足 $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell}(\mathsf{s}^{k-1}) > \lceil n/r \rceil$ 的所有 ℓ，$Q_1^k(\ell)$ 和 $Q_3^k(\ell)$ 均成立，因此小循环的每次迭代都有明确定义，并且小循环最终会终止。定义 ℓ_{last} 为 $\max\{\ell \mid \max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell-1}(\mathsf{s}^{k-1}) > \lceil n/r \rceil\}$（如果 $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathsf{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{s}^{k-1}) > \lceil n/r \rceil$——即小循环至少迭代过一次），否则定义为零。

以下情形中恰有一种成立：

Case 2a: $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1}) > \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}})$ and $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}} + 1) = \lceil n/r \rceil$;
Case 2b: $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1}) > \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}})$ and $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}} + 1) = \lfloor n/r \rfloor$;
Case 2c: $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1}) = \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}})$; and
Case 2d: $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1}) < \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}})$.

为验证情形 2a 和 2b 的条件表达式定义良好，我们证明：若 $\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}} + 1 \in$ 定义域$(\Gamma^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}})$，则

$$\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(s^{k-1}) > \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}). \tag{4}$$

假设 (4) 成立。反设 $\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}} + 1 > \mathsf{end}$。则 $Q_6^{k-1}(\ell_{\mathrm{last}})$ 蕴含 $\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}} = \mathsf{end}$。因此

$$\begin{aligned} n &= \textstyle\sum_{i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}), i \notin [c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}, end], i \neq s^{k-1}} \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(i) \\ &\qquad + \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}) + \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(s^{k-1}) \\ &= \mathrm{sum}(\lambda - \mathsf{T}^{k-1}) + \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}) + \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(s^{k-1}) && \text{(by } Q_5^k(\ell_{\mathrm{last}})\text{)} \\ &< \mathrm{sum}(\lambda - \mathsf{T}^{k-1}) + \max(\mathsf{T}^{k-1}) && \text{(by (4))} \\ &\leq n, \end{aligned}$$

矛盾。因此结论成立。

每种情形都会执行一组不同的指令。我们在第 5.2.1 节证明情形2a的归纳步骤；情形 2b–d 可用类似方法证明。

5.2.1. 假设情形2a成立。于是 $\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}) = \lfloor n/r \rfloor$、$\mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1},\ell_{\mathrm{last}}}(\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}+1}) = \lceil n/r \rceil$，且 $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1}}(\mathsf{s}^{k-1}) = \lceil n/r \rceil$。执行情形 2a 指令集。通过将 $\Gamma^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}$ 中的列 $\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}+1}$ 嫁接到 s^{k-1}，形成图 Γ^k。回顾本节之前紧邻部分的讨论，$\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}+1} \le$ 终止。因此，根据 $Q_6^{k-1}(\ell_{\mathrm{last}})$，列 $\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}+1}$ 是一条向下路径。由于根据 $Q_4^{k-1}(\ell_{\mathrm{last}})$，$\Gamma^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}$ 是适当向下的，并且由于列 $\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}+1}$ 是一条向下路径，因此嫁接操作定义良好。引理 4.6(2) 蕴含 $\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(\mathsf{s}^{k-1}) = \max(\mathsf{T}^{k-1})$。接下来的指令将 $\mathsf{s}^k =$ 设置为 $\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}$，将 $\mathsf{c}^k =$ 设置为 $\mathsf{c}^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}+1}$，并将 $\mathsf{T}^k =$ 设置为 $\mathsf{T}^{k-1} - \{\max(\mathsf{T}^{k-1})\}$。

命题 $P_1(k)$ 成立，因为上述各表达式和指令都有明确的定义，并且对于所有满足 $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1,\ell}}(\mathsf{s}^{k-1}) > \lceil n/r \rceil$ 的 ℓ，$Q_1^\ell(k)$ 都成立。命题 $P_3(k)$ 显然成立。命题 $P_4(k)$ 由引理 4.6(5) 得出。由于对于所有满足 $\max(\mathsf{T}^{k-1}) - \mathrm{ht}_{\Gamma^{k-1,\ell}}(\mathsf{s}^{k-1}) > \lceil n/r \rceil$ 的 ℓ，$Q_2^k(\ell)$ 都成立，因此可得 $P_2(k)$。不难验证，$P_6(k)$ 由引理 4.6 和 $Q_6^k(\ell_{\mathrm{last}})$ 得出。命题 $P_8(k)$ 可直接由 $Q_6^k(\ell_{\mathrm{last}})$ 和引理 4.6(4) 推出。

为证明 $P_5(k)$，首先注意到引理 4.6(1) 蕴含

$$\begin{aligned}
&\{i \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k), i \notin [c^k, end], i \neq s^k\} \\
&= \{i \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}) - \{c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}+1\}, i \notin [c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}+2, end], i \neq c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}\} \\
&= \{i \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}), i \notin [c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}, end]\}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\{\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k), i \notin [c^k, end], i \neq s^k\} \\
&= \{\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}), i \notin [c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}, end]\} \\
&= \{\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}), i \notin [c^{k-1,\ell_{\mathrm{last}}}, end], i \neq s^{k-1}\} + \{\mathrm{ht}_{\Gamma^k}(s^{k-1})\} \\
&= (\lambda - \mathsf{T}^{k-1}) + \{\max(\mathsf{T}^{k-1})\} \qquad \text{(by } Q_5^k(\ell_{\mathrm{last}})\text{)} \\
&= \lambda - \mathsf{T}^k.
\end{aligned}$$

命题 P_5（k）得证。

最后，我们证明 P_7（k）。假设 T^k 非空。反设 $\mathsf{c}^k >$end。则

$$\begin{aligned}
n - \lfloor n/r \rfloor &= \textstyle\sum_{i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k)} \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) - \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(s^k) \\
&= \textstyle\sum_{i \in \mathrm{Dom}(\Gamma^k), i \notin [c^k, end], i \neq s^k} \mathrm{ht}_{\Gamma^k}(i) \\
&= \mathrm{sum}(\lambda - \mathsf{T}^k) \qquad \text{(by } P_5(k)\text{)} \\
&\le n - \max(\mathsf{T}^k),
\end{aligned}$$

这是一个矛盾，因为 $\max(\mathsf{T}^k) > \lfloor n/r \rfloor$。命题 $P_7(k)$得证。

参考文献

[1] J. A. Ball、I. Gohberg、L. Rodman 和 T. Shalom，《关于具有给定上三角部分的矩阵的特征值》，Integr. Equat. Oper. Th. 13 (1990)，第4期，488–497。[2] A. Berman 和 M. Krupnik，《谱保持下三角补全——非负幂零情形》，Electron. J. Linear Algebra 2 (1997)，9–16。[3] P. Boalch，《辛流形与等单值变形》，Adv. Math. 163 (2001)，137–205。[4] C. Bremer 和 D. S. Sage，《具有抛物形式类型奇点的联络的等单值变形》，Comm. Math. Phys. 313 (2012)，175–208。[5] ———，《约化群的平坦 G-丛与正则层》，arXiv:1309.6060，2013。[6] ———，《不规则奇异联络的模空间》，Int. Math. Res. Not. IMRN (2013)，1800–1872。[7] ———，《平坦 K-丛的最小 G-型理论》，Int. Math. Res. Not. IMRN (2018)，3507–3555。[8] D. H. Collingwood 和 W. M. McGovern，《半单李代数中的幂零轨道》，Van Nostrand Reinhold 数学丛书，Van Nostrand Reinhold Co.，纽约，1993。[9] W. Crawley-Boevey，《关于给定共轭类中不存在公共不变子空间且和为零的矩阵》，Duke Math. J. 118 (2003)，339–352。[10] E. Frenkel 和 B. Gross，《射影直线上的刚性不规则联络》，Ann. of Math. (2) 170 (2009)，1469–1512。[11] I. Gohberg、L. Rodman、T. Shalom 和 H. J. Woerdeman，《矩阵补全的特征值与奇异值界》，Linear and Multilinear Algebra 33 (1992)，第3–4期，233–249。[12] L. Gurvits、L. Rodman 和 T. Shalom，《环上部分上三角矩阵的可控性与补全》，Linear Algebra Appl. 172 (1992)，135–149。[13] C. R. Harris、K. J. Millman、S. J. van der Walt、R. Gommers、P. Virtanen、D. Cournapeau、E. Wieser、J. Taylor、J. Berg、N. J. Smith、R. Kern、M. Picus、S. Hoyer、M. H. van Kerkwijk、M. Brett、A. Haldane、J. F. del R´ıo、M. Wiebe、P. Peterson、P. G´erard-Marchant、K. Sheppard、T. Reddy、W. Weckesser、H. Abbasi、C. Gohlke 和 T. E. Oliphant，《使用 NumPy 进行数组编程》，Nature 585 (2020)，第7825期，357–362。[14] K. Hiroe，《黎曼球面上的线性微分方程与箭图表示》，Duke Math. J. 166 (2017)，855–935。[15] K. Hiroe 和 D. Yamakawa，《亚纯联络的模空间与箭图簇》，Adv. Math. 266 (2014)，120–151。[16] L. Hogben 和 A. Wangsness，《矩阵补全问题》，《线性代数手册》（L. Hogben 编），Chapman & Hall/CRC Press，第1版，2007。[17] M. Kamgarpour 和 D. S. Sage，《Gross–Reeder 猜想的几何类比》，Amer. J. Math. 141 (2019)，1457–1476。[18] ———，《通过 Bruhat–Tits 建筑研究 $\mathbb{P}^1$ 上的刚性联络》，Proc. Lond. Math. Soc. 122 (2021)，359–376。[19] N. M. Katz，《高斯和、Kloosterman 和与单值群》，Ann. Math. Stud.，第116卷，Princeton University Press，1988。[20] ———，《指数和与微分方程》，Ann. Math. Stud.，第124卷，Princeton University Press，1990。[21] M. Krupnik，《上等价矩阵的 Jordan 结构》，Linear Algebra Appl. 261 (1997)，167–172。[22] M. Krupnik 和 A. Leibman，《幂零矩阵的严格下三角补全的 Jordan 结构》，Integr. Equat. Oper. Th. 23 (1995)，459–471。[23] M. Krupnik 和 L. Rodman，《部分 Jordan 矩阵与 Hessenberg 矩阵的补全》，Linear Algebra Appl. 212–213 (1994)，267–287。[24] M. C. Kulkarni、N. Livesay、J. P. Matherne、B. Nguyen 和 D. S. Sage，《具有最大分歧奇异点的 $\mathbb{G}_m$ 上的联络的 Deligne–Simpson问题》，Adv. Math. 408 (2022)，108596。

[25] L. Rodman 和 T. Shalom，部分上三角矩阵补全的 *Jordan*标准形，《线性代数及其应用》**168**（1992），221–249。[26] D. S. Sage，不规则奇异联络的正则层与模空间，《分析与跨学科应用新趋势》，《数学趋势与展望》，Birkh¨auser/Springer，Cham，2017年，第69–75页。[27] _____，具有指定局部行为的射影直线上的亚纯联络，arXiv:2212.14108，2022年。[28]Sage开发者，*SageMath*，*Sage*数学软件系统（*8.1*版），2017年，https://www.sagemath.org。[29] W. Wasow，常微分方程的渐近展开，Wiley Interscience，纽约，1976年。[30] H. J. Woerdeman，分块矩阵的最小秩补全，《线性代数及其应用》**121**（1989），105–122。

Roux研究所，东北大学，波士顿，MA
电子邮箱地址：n.livesay@northeastern.edu

数学系，路易斯安那州立大学，巴吞鲁日，LA.
电子邮箱地址：sage@math.lsu.edu

路易斯安那泽维尔大学数学系，新奥尔良，路易斯安那州。电子邮箱地址：
bnguye22@xula.edu