从连通三元组重构图*

Paul Bastide[1],Linda Cook[2],Jeff Erickson[3],Carla Groenland[4],
Marc van Kreveld[4], Isja Mannens[4], 和 Jordi L. Vermeulen[4]

[1] LaBRI - 波尔多大学 paul.bastide@ens-rennes.fr[2] 基础科学研究院，离散数学组，韩国 lindacook@ibs.re.kr[3] 伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校 jeffe@illinois.edu[4] 乌得勒支大学
{c.e.groenland,m.j.vankreveld,i.m.e.mannens}@uu.nl

arXiv:2303.06609v1 [cs.DM] 12 Mar 2023

摘要。 我们引入了一种新的图不确定性模型：输入并非指定图的所有边，而是包含所有构成连通子图的顶点三元组。一般而言，不同的（带标号）图可能具有相同的连通三元组集合，因此无法仅根据这些三元组唯一重构原图。我们确定了一些图族（包括无三角形图），对于这些图族，其中每个图都具有不同的连通三元组集合。我们还给出了从三元组集合重构图以及检验该重构是否唯一的算法。最后，我们研究了该模型的一种可能扩展：对于更大的（固定） k值，给出诱导连通图的大小为 k 的子集。

关键词： 算法 · 图重构 · 不确定性 · 不确定性 · 连通子图

1 引言

假设我们通过一列边获得了关于某个图的信息，但并不知道其完整结构。这些信息是否能唯一确定该图？在本文中，我们探讨这样一种情形：输入由所有诱导子图为连通的顶点三元组组成。换言之，对于给定的每个顶点三元组，我们知道其中可能的边有两条或三条存在，但不知道具体是哪几条。根据所有给定的三元组，我们或许能够完整推导出该图。

作为一个简单例子，假设给定了三元组 abc、 bcd 和 cde（无序且带标号）。那么，与这些三元组规定相符的唯一（连通）图是路径 a—b—c—d—e。另一方面，如果给定四个顶点 a、 b、 c、 d，其上除abc之外的所有可能三元组，那么可能存在多个图。我们必须包含边 ad、 bd和 cd，而边 ab、 bc和 ca中有零条或一条存在。另一个例子见图 1。

这种图的不确定性模型不使用概率，或许是部分信息最简单的组合模型。通常，一个图由顶点对确定，而这些顶点对就是边；现在，我们得到的是顶点三元组，以及它们之间边的不确定性。因此，我们认为研究这一模型很有意义。

如前面的示例所示，有些情况下，根据三元组集合 T 重构图是唯一的；而在另一些情况下，多个（带标号的）图可能具有相同的三元组集合。还有一些情况下， T 与任何图都不一致，例如 $T = \{abc, cde\}$。我们能否刻画这些情况？如果我们拥有额外信息，又能得出什么结论，例如，当我们知道要重构的是一棵树或一个无三角形图时？

1.1 我们的结果

在第2节介绍预备知识后，我们将在第3节介绍两种相对直接的重构通用算法。其中一种算法在三元组使用 n 顶点标签时的运行时间为 $O(n^3)$，另一种则

* LC受到基础科学研究院（IBS-R029-C1）的支持，CG受到Marie-Skłodowska Curie GRAPHCOSY资助项目（编号101063180）的支持。MvK和JV获得荷兰科学研究组织（NWO）项目编号612.001.651的支持。

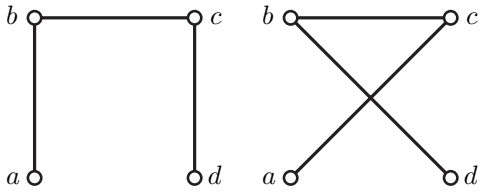


图1。 给出相同连通三元组集合的两棵不同的带标记树。

在输入中有 $|T|$ 个三元组时的运行时间为 $O(n \cdot |T|)$。如果存在与给定三元组一致的图，这些算法会返回该图，并判定其是否唯一。

然后，在第4节中，我们给出一个运行时间为 $O(|T|)$ 的算法，用于重构至少含有五个顶点的树，前提是已知未知图是一棵树。事实上，只要我们知道未知图是无三角形的，就可以重构所有无三角形图。我们在第5节中给出一个期望运行时间为 $O(|T|)$ 的算法来实现这一点。此外，我们证明了2-连通外平面图和三角剖分平面图都可以被唯一重构。

在第6节中，我们研究了该模型的一个自然扩展：对于某个固定的 $k \geq 4$，给定图的连通 k-集合，而不是连通三元组。我们证明，使得每棵 n 个顶点的树具有不同连通 k-集合族的 k 的最大值为 $\lceil n/2 \rceil$。对于随机图，也可以得到类似的阈值。最后，我们证明，不含长度为3、.....、 k 的环且至少含有 $2k-1$ 个顶点的图，具有不同的连通 k-集合族。

1.2 相关工作

图重构问题自然地出现在许多间接观测某个未知图的情形中。例如，我们可能获得了图结构的某些（含噪）测量结果，或者只能访问一个能够回答特定类型查询的预言机。此前已有大量研究针对具体情形展开，例如根据密度函数 [9],从一组轨迹 [1], 重构道路网络 [18],利用最短路径或距离预言机重构图 r根据所有邻域重构标号图 [24], 或重构系统发育树 [6]。大量研究致力于研究<style id='7'>图重构猜想 [20,28], ，该猜想断言：对于任意至少包含三个顶点的图，都可以根据删除一个顶点后得到的所有（无标号）子图所组成的多重集合，在同构意义下重构该图。即使对于平面图和无三角形图，这一猜想仍未解决，但对于外平面图 [14]和极大平面图 [21]，该猜想已经得到证明。关于更多背景知识，读者可参阅众多综述中的一篇（例如 [4,16,27,22]）。与我们在第6节对随机图的研究相关的是 Cameron 和 Martins [7] 于1993年取得的一个结果；该结果表明，对于每个图 H，随机图 $G \sim G(n, 1\ 2)$以高概率可以根据诱导出 H 的副本的（带标号）子集集合进行重构（如果 H 是自补的，则允许取补集）。

人们已经研究了图中的许多类型的不确定性。模糊图 [26] 是将模糊集推广到此类集合元素之间关系的一种形式。在模糊集中，元素的隶属度不是二值的，而是介于零和一之间的某个值。模糊图将这一概念扩展到边，使得边在边集合中也具有隶属度。不确定图与模糊图相似，因为每条边都关联着一个介于零和一之间的数值，不过在这里，该数值表示这条边存在的概率。人们已经进行了大量研究，探讨如何将通常的图论概念推广或扩展到模糊图和不确定图 [19,23]。

2 预备知识

本文中的所有图均假设为连通、有限且简单的。设 G 是一个具有 n 个顶点的未知图，并设 T 为在 G 中诱导出连通子图的所有顶点三元组的集合。由于该图是连通的，我们可以从 T 中轻松恢复图 G 的顶点集 V。我们将使用 T 表示该集合 T 的补集，即 T 是所有诱导子图不连通的顶点三元组的集合。注意， $\left|T \cup T\right| = \binom{n}{3} \in \Theta\ (n^3)$。

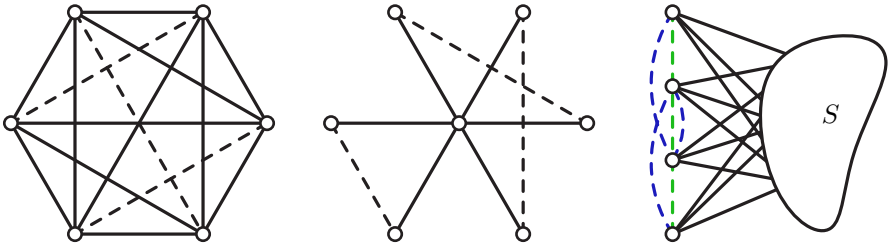


图 2。 三类歧义三元组：从完全图中去除任意边独立集所得的图、在星图的叶节点上添加任意（部分）匹配所得的图，以及长度为四的路径，其中所有顶点都与某个集合 S 中的顶点完全相邻。在最后一种情况下，我们无法区分蓝色路径和绿色路径。

请注意，一个顶点三元组的存在与否都能提供重要信息：在前一种情况下，三个可能的边中至多有一条不存在；而在后一种情况下，这些边中至多有一条存在。

图作为带标记的图可能并不相同，甚至可能不同构，却产生相同的三元组集合，例如三个顶点上的路径和一个三角形。我们还在图 2 中给出了更大图的示例：仅根据其连通三元组集合无法区分这些图。

我们将使用（LSD）基数字符串排序（例如参见 [8] 中的描述），以在时间 $\mathcal{O}(tk)$ 内对一个由 t 个基数为 k 的集合组成的集合进行排序，该方法将在本文介绍的若干算法中使用。

3 从三元组中寻找一致图的算法

给定一个三元组集合 T，我们可以通过求解一个 2-SAT 公式来找到与这些三元组一致的图 G。这里的主要观察是，三元组 abc 的存在意味着边 ab、ac 和 bc 中至少有两条必须存在，而三元组的缺失意味着其中至多有一条边可以存在。随后，我们可以构造一个 2-SAT 公式，其中每个变量对应图的一条边，真值表示该边存在。对于每个三元组 $abc \in T$，我们向公式中添加子句 $(ab \vee ac)$、$(ab \vee bc)$ 和 $(ac \vee bc)$。对于每个三元组 $abc \in T$，我们添加子句 $(\neg ab \veebar \neg ac)$、$(\neg ab \vee \neg bc)$ 和 $(\neg ac \vee \neg bc)$。然后，可以通过求解所得的 2-SAT 公式，并将边集合取为满足赋值中值为真的变量所对应的边，来找到一个与三元组集合一致的图。如果公式无法满足，则不存在与 T 一致的图。

我们可以在相对于公式长度为线性时间内求解 2-SAT 公式 [2,10]。对于 T 和 T 的每个元素，我们添加常数个子句，因此公式的长度为 $O(|T \cup T|)$。由此可得，我们可以用 $O(n^3)$ 时间的算法重构一个含有 n 个顶点的图。不过，我们更倾向于使用只取决于 T 大小、而不同时取决于 T 大小的算法。我们可以通过观察到某些子句可从公式中排除，一来消除对 T 大小的依赖，因为这些子句中的变量不可能为真。

引理 1. 我们可以在 $O(n \cdot |T|)$ 时间内找到与 T 一致的图 G，或者输出不存在一致图。

证明。 允许我们从公式中排除某些子句的基本观察是：如果不存在包含两个顶点 a 和 b的连通三元组，那么变量 ab 将始终为假。因此，如果有一个三元组 $abc \in T$，其中至多有一对来自 ab、ac 和 bc 的顶点对出现在某个连通三元组中，那么我们无需将其子句纳入公式，因为至少有两个变量将为假，从而这些子句必然得到满足。

我们可以按如下方式在 $O(n \cdot |T|)$ 时间内构造出排除这些不必要子句的公式。我们构造一个矩阵 $M(i,j)$，其中 $i,j \in V(G)$ 的每个条目都包含与 i和 j一同出现在某个连通三元组中的所有顶点列表，即 $M(i,j) = \{x \mid ijx \in T\}$。该矩阵可以在 $O(n^2 + |T|)$ 时间内构造完成：首先将每个条目设为 $\emptyset$（这需要 n^2 时间），然后遍历 T，将每个三元组 abc 添加到条目 $M(a,b)$、$M(b,c)$ 和 $M(a,c)$ 中。我们还使用例如基数排序在线性时间内对每个列表进行排序。由于所有列表的总长度为 $O(|T|)$，因此总共需要 $O(n^2 + |T|)$ 时间。

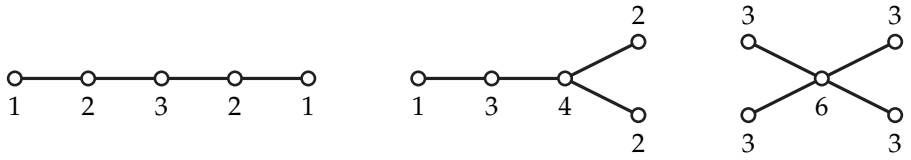


图3。 五个顶点上的所有树，以及每个顶点出现于其中的三元组数量。

利用这个矩阵，我们可以按如下方式决定是否纳入与来自 T 的三元组对应的子句。对于出现在某个连通三元组中的所有顶点对 (a,b)（即 $M(a,b) \neq \emptyset$），我们找出所有满足 $abx \in T$ 的 x。由于 $M(a,b)$ 已排序，我们只需记录列表 $M(a,b)$ 的缺失元素，即可在 $O(n)$ 时间内找出所有 x。然后检查 $M(a,x)$ 和 $M(b,x)$ 是否为空。如果其中任一个不为空，我们就将与 $abx \in T$ 对应的子句纳入公式。否则，我们可以放心忽略该子句，因为对于 ax 和 bx，相应变量为假时，该子句必然得到满足。

对于 $M(i,\ j)$ 的每个非空元素，我们的算法耗时 $O(n)$，共有 $O(|T|)$ 个这样的元素，此外遍历矩阵还需 $O(n^2)$ 时间。构造公式的总耗时为 $O(n^2 + n \cdot |T|)$。由于对于连通图有 $|T| \in \Omega(n)$，因此这可简化为 $O(n \cdot |T|)$ 时间。所得公式的长度也为 $O(n \cdot |T|)$，并且可以在线性于该长度的时间内求解。□

注意，只有当 $|T| \in o(n^2)$ 时，这才是对朴素 $O(n^3)$ 方法的改进。我们还注意到，使用 Feder方法枚举 2-SAT解，可以在相同的时间内检验重构的唯一性 [11]。

4 树的唯一重构

本节将证明以下结果。

定理 1。 设 T 为三元组集合，并且已知底层图 $G = (V、E)$ 是一棵树。如果 $n \geq 5$，那么 G 可以在 $O(|T|)$ 时间内被唯一重构。

让我们简要考察具有三个或四个顶点的树。具有三个顶点的树总是一条路径，并且总会有一个包含全部三个顶点的三元组。我们不知道三条边中的哪一条缺失。具有四个顶点的树要么是一条路径，要么是一幅星图。该路径有两个三元组，而星图有三个三元组。对于星图，中心是出现在全部三个三元组中的那个顶点，因此重构是唯一的。对于路径，我们知道该图是一条路径，但不知道中间两个顶点以何种顺序出现（见图 1）。

接下来我们考察至少包含五个顶点的树。我们首先证明，可以根据三元组识别出所有叶节点及其邻点。下文中，如果顶点 v 支配顶点 u，则称 v 出现在 u 出现的所有三元组中。如果 u 是一个叶节点，那么它会被其唯一邻点 v支配。 u 也可能被 v的一个邻点支配，但在这种情况下，uvw 将是唯一包含 u的三元组，而 v 将被 w支配。利用这一点可以识别出叶节点。由此我们可以证明，只要知道结果必须是一棵树且 $|V| \geq 5$，任何树都可以根据其三元组进行重构，因为我们可以迭代地识别并移除度为1的顶点，同时记录在最后应将它们粘接回何处，直到剩下至多四个顶点。通过更仔细地考察原树中包含剩余顶点的连通三元组，我们便可以完成重构。

为了推导出一个最优的、时间复杂度为 $O(|T|)$ 的重构算法，我们将利用三元组对树的顶点进行进一步刻画。其主要思想是，我们不仅可以识别叶节点，还可以识别能够对树进行约简的其他顶点。如果顶点 v 在一棵树中度为 2，那么存在两个节点 w，w' 使得包含 v 的每个三元组也包含 w 或 w'（或同时包含二者）。反之并不成立，原因有二：如果 v 是叶节点，它同样具有上述性质；如果 v 的度为 3，且至少有一个邻点是叶节点，那么它也具有这一性质。这就引出了下面的刻画。

引理 2. 一棵至少有五个顶点、三元组集合为 T 的树 G 的顶点 v 是：

(i) 当且仅当 v 被某个顶点 w 支配且自身不支配任何顶点时， v 是叶节点 *lf;*

(ii) 如果 v 不是叶节点，那么 v 是（a）度为 2 的节点，或（b）度为 3 且至少有一个叶邻居的节点；当且仅当存在两个节点 w_1、w_2，使得所有包含 v 的三元组也包含 w_1 或 w_2。

此外，当对所有 $v \in V(G)$给出包含 v 的三元组集合 T_v 时，可以在 $O(|T_v|)$ 时间内检查这两种刻画。

证明。根据定义，叶节点 v 必然只能出现在包含其相邻顶点 w的三元组中，因为它不与其他顶点相邻。因此，叶节点总是被其邻点 w 支配。由于$|V| \geq 5$，v 不支配任何顶点。反过来，假设 v 被某个顶点 w 支配，且不支配任何其他顶点。显然，如果 v 有三个邻点，或者有两个非叶节点邻点，则它不可能被支配。由于 v 不支配任何顶点，它没有叶邻居。因此，v 本身必然是叶节点。这证明了 (i)。

第二种刻画如下所述。如果 v 的度至少为 4，则不存在形如 (ii) 的 w_1, w_2，只需查看包含 v 及其邻点的三元组即可轻松验证这一点。此外，如果 v 的度为 3 且其邻点均不是叶节点，则同样不存在这样的w_1, w_2。另一方面，在情况 (a) 中，可以将两个邻点取为 w_1, w_2；在情况 (b) 中，可以选择 w_1, w_2 为 v 的两个邻点，使得 v 的不在$\{w_1, w_2\}$ 中的唯一邻点是叶节点。

对于测试 (i)，任取一个三元组 $vab \in T_v$，分别测试 a 和 b 是否为所求的 w。对于测试 (ii)，任取一个三元组 $vab \in T_v$。如果满足刻画 (ii)，那么 w_1 必须是 a 或 b。我们按如下方式分别尝试这两种情况：对于 $w \in \{a, b\}$，从 T_v 中移除所有包含 w 的三元组。然后，当且仅当 T_v 中剩余的所有三元组都包含某个 $w_2 \neq v$ 时，$w = w_1$ 成立。我们通过查看 $vcd \in T_v$ 中的某个剩余三元组，并测试 c 或 d 是否包含于其他每个剩余三元组中，来进行检验。总之，对于 w_1 和 w_2，我们得到四种需要测试的选项；每种选项都可以在 $O(|T_v|)$ 时间内轻松检验。□

注意到，G 中超过半数的顶点满足该引理的两个刻画之一。接下来我们转向定理 1 的证明。假设 G 的顶点集上有一个全序，并且将 uvw 的连通三元组存储在一个带有 $u < v < w$ 的有序元组中。对于 T 中的每个三元组 uvw，我们同时生成 vwu 和 wuv。我们收集首个顶点相同的三元组，为所有 $v \in V$ 生成 T_v。然后，对于所有 $v \in V$，我们使用 T_v 来测试 v 是否满足引理 2 的条件之一。V 的顶点划分为 V'、V''和 V'''，其中 V' 包含叶节点，V'' 包含不是叶节点但满足该引理第二个条件的顶点，而 $V''' = V \setminus (V' \cup V'')$。

对于所有叶节点 v，我们记录在 $O(|T_v|)$ 中支配 v 的顶点集。这是一个单独的顶点w，即 v 的邻点，除非 T_v 恰好包含一个三元组 $vw'w$。在这种情况下，w 支配 w'，或反之；两者中被支配的顶点就是 v的邻点。因此，我们可以记录所有叶节点及其邻点。之后，我们从 T 中移除包含叶节点的所有三元组。设 G' 为移除所有叶节点及关联边后得到的图。那么，新的三元组集合就是该图 G' 的连通三元组集合，而我们可以从 G' 恢复 G。

对于 V'' 中的所有顶点，请注意，它们不再可能是 G' 中度为3的顶点，但可能已经成为叶节点。我们对此进行检验，并考虑尚未成为叶节点的顶点子集 $W \subseteq V''$。

由 G' 在 W 上诱导的子图由路径的不交并组成。设 $v \in W$。那么，v在 V（G'）中恰好有两个邻点，它们是满足引理 2 的第二个条件的两个顶点 w_1、w_2。对于每个 $v \in W$，我们可以在时间 O（$|T_v|$）内找到这两个顶点 w_1、w_2。特别地，我们知道 $G'[W]$ 的所有路径分支，以及 V（G'）中与任意此类路径的端点相邻的唯一顶点 $\setminus W$。假设 v_1—v_2—. . .—v_ℓ 是 $G[W]$ 的一个路径分支。令 x_1、$x_2 \in V$（G'）$\setminus W'$，使得 x_1 是 v_1 的另一个邻点，而 x_2 是 v_k（在 G' 中）的另一个邻点。我们记录边 x_1v_1 和 x_2v_k，以及路径 v_1，...，v_ℓ 中的边和顶点。然后，我们将每个三元组 ux_1v_1 替换为 ux_1x_2，并将每个三元组 v_kx_2u 替换为 x_1x_2u。之后，丢弃包含 v_1、...、v_ℓ 中任一顶点的所有三元组。令 G'' 为删除 v_1、...、v_ℓ 并添加边 $\{x_1, x_2\}$ 后得到的图。所得三元组集合就是 G'' 的三元组集合，并且我们可以根据 G'' 恢复 G。我们对所有路径分支重复这一过程。在整个过程中，我们始终保持所存储的三元组集合对应一棵树，并且通过掌握这棵树及我们记录的附加信息，可以重构原树 G。

最后，我们还通过丢弃更多三元组来移除 $V'' \setminus W$ 中的所有叶节点，其方式类似于第一次移除叶节点。该过程所需时间关于 $|T|$ 为线性，并将 T 中出现的顶点数减少到原来的一半或更少。我们在剩余的树上重复此过程，直到其大小为五；此时，只需查看每个顶点出现于多少个三元组中，即可唯一确定树的结构（见图 3）。如果移除 V' 或 V'' 中的所有顶点会使剩余的树小于五个顶点，我们就不必移除它们；在这种情况下，只保留其中一些顶点。标准递推表明，所用总时间为 $O(|T|)$。定理 1 的证明至此完成。

我们注意到，如果树中没有作为兄弟节点的叶节点，那么要实现唯一重构，就不需要知道该图是一棵树。

5 进一步可重构的图类

本节将给出更大的图类，其中的图可以由其连通三元组集合确定。

定理 2。 存在一种算法，对于已知为无三角形的、具有 G 个 $n \geq 5$ 顶点的图，可以根据其 T 个三元组集合，在确定性 $O(|T| \log(|T|))$ 时间或随机化 $O(|T|)$期望时间内重构该图。

证明。 设 T 为给定的连通三元组列表。对于每个三元组 abc，我们创建三个有序副本 abc、acb、bca。然后使用基数排序，在 $O(|T|)$ 时间内按字典序对列表进行排序。对于每个以某个三元组的前两个顶点为端点出现的潜在边 ab，我们按如下方式检验它是否为一条边。

如果我们找到两个三元组 abc 和 abd，就搜索三元组 acd 和 bcd。如果 $ab \notin E(G)$，那么必有 bc、ac、bd、$ad \in E(G)$，因此 acd和 bcd均连通。因此，如果任一三元组不在列表中，我们就知道 ab 是一条边。否则，我们发现 $abcd$ 是一个 C_4。接着，我们寻找另一个与 a、b、c、d中的任意一个共同出现在某个三元组中的顶点 e，并按如下方式重构 C_4的标记。假设 $G[\{a,b,c,d\}]$ 诱导出一个 C_4（顺序也如所示，但我们无法立即得知这一点）。不失一般性地，假设 a以剩余顶点 e 为邻点；由于 G 是无三角形的， e 不与 b 和 d相邻。这意味着已知 bde 不连通，而 abe、ade 连通。如果 e 不是 c的邻点，则 ace 不连通。因此，如果 a、b、c、d中的任意一个具有私有邻点（该邻点不与环中的其他顶点相邻），那么我们就能得到 C_4 的标记（并发现 e 是 a的私有邻点）。如果 e 除了 a之外还与 c 相邻，那么我们知道以下两个顶点集也诱导出 C_4： $abce$、$acde$。我们知道 e 与 $\{a,b,c\}$、$\{a,d,c\}$ 中的两个顶点相邻，但不与 b和 d相邻。因此，我们发现 e与 a和 c相邻，并且也完成了标记。

如果我们只找到一个三元组 abc，就检查以 ac 或 bc 开头的三元组。由于涉及的三个顶点中必有一个与其他某个顶点 d 相邻，因此这两条潜在边中至少有一条必须出现在至少两个三元组中。然后，我们可以使用前面的方法重构一个包含 a、b 和 c 的某个子图。结果将告诉我们 ab 是否是一条边。

请注意，我们可以使用二分搜索在 $O(\log(|T|))$ 时间内从列表中查找特定三元组，或查找以特定顶点对开头的三元组。这意味着上述检查可以在 $O(\log(|T|))$ 时间内完成。按照潜在边在列表中出现的顺序处理它们，我们只需遍历列表一次，因此运行时间为 $O(|T| \log(|T|))$。

使用 Fredman 等人 [12],所描述的那类数据结构，我们可以在 $O(1)$ 时间内查询所需的三元组，从而在 $O(|T|)$ 时间内重构该图。创建这种数据结构是一个随机化过程，预计需要 $O(|T|)$ 时间。□

注意，我们还可以重构一些包含三角形的图的特殊情形。例如，如果三角形中的两个顶点各自拥有不与三角形中任何其他顶点相邻的邻居，我们就可以重构该三角形。然而，对于恰有一个顶点拥有私有邻居的三角形，我们无法将其与星图 $K_{1,3}$ 区分开来。对于何时能够重构那些尚不知道是否为无三角形的图，我们距离得到一个刻画还差得很远。我们将在附录中讨论以下两个特殊情形。

定理 3。 任何已知为 *2*-连通且外平面的、包含 $n \geq 6$ 个顶点的图，都可以根据其连通三元组列表进行重构。

注意，如果一个图包含超过 k 个顶点，并且无法通过移除少于 k 个顶点使其变得不连通，那么该图就是 k-连通的。我们的方法与处理树的方法类似：我们证明可以识别出一个度为二的顶点，并通过将其与一个邻点“合并”来将其从图中移除。

我们的方法与处理树的方法类似：证明可以识别一个度为二的顶点，并通过将它与一个邻点“合并”来将其从图中删除。

三角剖分平面图，也称为极大平面图，是指每个面（包括外面）都是三角形的平面图。

定理 4. 设 T 是一个三元组集合，并且已知底层图 $G = (V, E)$ 是平面且经过三角剖分的。那么，如果 $n \geq 7$，就可以从 T 唯一重构出 G 。

为证明这一结果，我们首先证明这类图在 4-连通时可以唯一重构。然后证明图不是4-连通的情形可归约为 4-连通的情形。

6 从连通的 k-集合重构

对于 $k \geq 2$ 和图 $G = (V, E)$，我们将 G 的连通 k-集合定义为集合 $\{X \subseteq V \mid |X| = k$ ，且 $G[X]$ 连通 $\}$。我们用 $N(v)$ 表示顶点 v 的邻点集合。

观察 1 对于 $k' \geq k \geq 2$，图的连通 k'-集合由连通k-集合决定。

事实上，$(k+1)$-集合 $X = \{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq V$当且仅当存在某个 y， $z \in X$，使得 $G[X \setminus \{y\}]$ 和 $G[X \setminus \{z\}]$ 均连通时，才诱导出 G的连通子图。

给定一个图类 $\mathcal{C}$，我们可以考虑函数 $k(n)$。对于任意整数 $n \geq 1$，定义 $k(n)$ 为最大的整数 $k \geq 2$ ，使得 $\mathcal{C}$ 中的所有（带标号） n-顶点图都具有不同的连通 k-集合族。根据观察 1，询问这样的最大 k 是多少是一个合理的问题：随着 k 增大，重构会变得更加困难。我们始终假设只需将该图与图类中的其他图区分开来，并指出，通常识别问题 （ $G \in \mathcal{C}$是什么？ ）甚至无法仅根据连通三元组解决。

首先，我们给出定理 1 的一个类似结果。证明见附录。

定理 5。 如果已知输入图是一棵树，那么重构树的阈值为 $\lceil n/2 \rceil$: 当 $k \leq \lceil n/2 \rceil$ 时，我们可以根据连通的 k-集合重构一棵 n 个顶点的树；而当 $k \geq \lceil n/2 \rceil + 1$时，我们无法重构一条具有 n 个顶点的路径中顶点的次序。

利用上述定理，我们在附录中给出例子（命题 1），说明对于 $k \geq 2$ 的每个取值，都存在无穷多个图，它们可以由其连通的 k-集合确定，但不能由其连通的（$k+1$）-集合确定。

接下来我们将证明，对于“几乎每一个 n 个顶点的图”，都成立一个接近 $n/2$ 的阈值，这一阈值我们在树的情形中已经看到过。Erdős-Renyi 随机图 $G \sim G(n, 1/2)$ 有 n 个顶点，并且每条边以概率 $1/2$ 独立于其他边出现。这在所有 n 个顶点上的（带标号）图的集合上诱导出均匀分布。如果某个性质以高概率在随机图中成立（也就是说，当 $n \to \infty$ 时，其成立的概率趋于 1），那么从某种意义上说，它对“几乎每一个图”都成立。随机图也很有趣，因为对于许多问题而言，它都是极值的。更多信息可参见例如 [3,13,17]。

我们称一个 n-顶点图 $G = (V, E)$ 是类随机的，如果它满足以下三个性质（其中 log 以 2 为底）。

1. 对于每个顶点 $v \in V$，

$$n/2 - 3\sqrt{n \log n} \leq |N(v)| \leq n/2 + 3\sqrt{n \log n}.$$

2. 对于每一对不同的顶点 v， $w \in V$，

$$n/4 - 3\sqrt{n \log n} \leq |N(v) \cap (V \setminus N(w))| \leq n/4 + 3\sqrt{n \log n}.$$

3. 不存在不相交子集 A， $B \subseteq V$满足 $|A|$， $|B| \geq 2\log n$，使得 A 中的一个顶点与 B中的一个顶点之间没有边。

引理 3。 对于 $G \sim G(n, 1/2)$， G 以高概率呈类随机性。

该 随机图的相关性质众所周知，但为方便读者，我们在附录 B 提供了其证明。

定理 6。 对于所有充分大的 n，任何 G 具有 n 个顶点且类随机的图，都可以在 $O(n^{k+1})$ 时间内，从 $2 \le k \le \frac{1}{2}n - 4\sqrt{n \log n}$ 的连通 k-集合构造出来。另一方面，对于所有大小至少为 $\frac{1}{2}n + 4\sqrt{n \log n}$ 的子集 S， $G[S]$ 都是连通的。

特别地，对于“几乎每个图”（结合引理 3 和定理 6），k-元组在 $k \ge \frac{1}{2}n + 4\sqrt{n \log n}$ 下的连通性完全无法提供任何信息，而在 $k \le \frac{1}{2}n - 4\sqrt{n \log n}$ 下则完全决定该图。

（定理 6 的）证明。 令 K 为连通的 k-集合。

我们首先证明该陈述的第二部分。令 $k \ge \frac{1}{2}n + 4\sqrt{n \log n}$ 为一个整数，并令 S 为 V 的一个子集，其大小至少为 k。考虑两个顶点 u、$v \in S$。我们将证明 u 和 v 属于 $G[S]$ 的同一个连通分支。根据第一个拟随机性质，与 u 不相邻的顶点至多有 $\frac{1}{2}n + 3\sqrt{n \log n}$ 个，这意味着 u 在 S 中至少有 $\sqrt{n \log n} - 1 \ge 2 \log n$ 个邻点。注意到，出于同样的原因，这对 v 也成立。因此，我们可以对 $A = N(u) \cap S$ 和 $B = N(v) \cap S$ 应用第三个拟随机性质，以确保这两个集合之间存在一条边。由此可知，必然存在一条从 u 到 v 的路径。

现在证明该命题的第一部分。令 $2 \le k \le \lfloor \frac{1}{2}n - 4\sqrt{n \log n} \rfloor$。令 $u \in V(G)$。我们声称，不与 u 相邻或相等的顶点集 $V \setminus N[v]$，是满足 $G[S]$ 连通而 $G[S \cup \{u\}]$ 不连通的最大集合 S。注意，这两个条件直接推出 $S \subseteq V \setminus N[u]$。要证明相等，只需证明 $G[V \setminus N[u]]$ 连通。考虑两个顶点 v, $w \in G[V \setminus N[u]]$。根据第二个拟随机性质，集合 $A = N(v) \cap (V \setminus N[u])$ 和 $B = N(w) \cap (V \setminus N[u])$ 的大小至少为 $n/4 - 3\sqrt{n \log n}$。因此，根据拟随机性质的第三个性质， A 与 B 之间存在一条边。这证明了存在一条路径连接 v 和 w，且该路径使用 $V \setminus N[u]$ 中的顶点，因此 $G[V \setminus N[v]]$ 是连通的。

对于每个顶点 u，现在可以通过寻找最大的集合 S 来找到与其不相邻的顶点集，使得 $G[S]$ 是连通的，而 $G[S \cup \{u\}]$ 不是。由于任何这样的 S 都是 $V \setminus N[u]$ 的子集，因此这样的 S 存在唯一的极大集合（也是唯一的最大集合）。下面给出该过程的 $O(n^{k+1})$ 时间算法。

我们首先构造一个类似于 Fredman 等人所描述的数据结构 [12], ，该结构允许我们在 $O(1)$ 时间内查询所需的 k-集合。这需要 $O(|K| \log |K|) = O(n^k k) = O(n^{k+1})$ 的确定性时间。对于一个顶点 v，我们给出一个在 $O(n^{k+1})$ 时间内重构 v 的邻域的算法。

1. 我们首先遍历大小为 k 的子集 S，直到找到一个满足 $G[S]$ 连通但 $G[S \cup \{v\}]$ 不连通的子集。这可以在 $O(kn^k)$ 时间内完成：如果 $G[S]$ 连通，那么当且仅当对于所有 $s \in S$, $G[S \setminus \{s\} \cup \{v\}]$ 不连通时， $G[S \cup \{v\}]$ 才是不连通的。2. 对于每个顶点 $w \in V \setminus (S \cup \{v\})$, 我们检查是否存在一个大小为 $k-1$ 的子集 $U \subseteq S$，使得 $U \cup \{w\}$ 连通，并检查对于每个大小为 $k-2$ 的子集 $U' \subseteq S$， $U' \cup \{w, v\}$ 是否不连通。如果对于顶点 w 这两点都成立，那么 $G[S \cup \{w\}]$ 连通而 $G[S \cup \{w, v\}]$ 不连通，因此我们将 w 添加到 S，并重复此步骤。3. 如果无法再添加任何顶点，我们就停止，并输出 $V \setminus (S \cup \{v\})$ 作为 v 的邻点集合。

我们最多重复步骤 2 n 次，每次最多尝试 n 个顶点作为候选 w，并遍历大小至多为 $k-1$的子集。因此，这部分的运行时间为 $O(n^{k+1})$。我们将上述算法重复执行 n 次（每个顶点执行一次），以重构所有边。□

我们证明附录 B 中定理 2 的如下类比命题。

定理 7。 设 $k \ge 4$ 为一个整数。任何一个至少有 $2k-1$ 个顶点、已知不含长度至多为 k 的环的图，都由其连通 k-集合确定。

7 结论

我们提出了一个关于图中的不确定性的新模型，在该模型中，我们只能获得所有构成连通诱导子图的顶点三元组。从某种意义上说，这是图中组合不确定性的最简单模型。我们研究了该模型的一些基本性质，并提供了一种算法，用于寻找与给定不确定性相一致的图。我们还证明，树、无三角形图以及其他一些图族，都可以由连通三元组确定，尽管我们需要知道所求图所属的图族。为了获得完整的刻画，自然需要对三角形连接到图的其余部分的方式施加条件。例如，不难发现，如果 a、b和 c 中至少有两个顶点具有私有邻点，则它们诱导出一个三角形；然而，如果这三个顶点在三角形外具有相同的邻点，就无法区分 a、b和 c 诱导出的是三角形还是路径。我们将这一问题留待今后研究。

与图重构领域所采用的方法类似（例如参见 [22]），另一个自然方向是放宽重构目标，考察我们是否无需确定（带标签的）图，而是能够恢复某些图性质，例如边数或直径。另一个自然问题是，在给定“子集”（类似于 [5,15,25], ）或可以执行自适应查询（如 [18]）的情况下，需要多少个连通三元组。

我们将模型扩展到更大的 k-集合，并给出了若干结果，其中包括树和随机图。关于从连通三元组重构图这一概念，还有其他几种逻辑扩展。我们可以定义一个 (k,ℓ)-表示 T，使其包含所有连通且至少含有 ℓ 条边的 k-集合。这样，连通三元组的定义就会成为一个 (3,2)-表示。请注意，在这种情况下，某些顶点可能不会出现在 T 中，或者 T 甚至可能完全为空（例如，当 $\ell \geq k$ 时的树）。另一种自然的扩展是为每个 k-集合指定边数，但即使在 $k = n - 2$ 时，这也提供了过多信息：任意边 $\{u, v\}$ 是否存在，都可以通过确定四个集合 $V, V \setminus \{u\}, V \setminus \{v\}$ 和 $V \setminus \{u, v\}$ 中顶点之间的边数来判断。

一些有趣的算法问题仍然悬而未决。特别是，我们给出了一种高效算法，用于确定一组三元素连通集合是否唯一确定一个图，但我们不知道如何对更大的 k 高效解决这一问题。以下判定问题能否在多项式时间内求解：给定一个图 G 和一个整数 k，G 是否由其 k 元组集合确定？我们注意到，当 k 固定为 4 时，隶属于 coNP 是显然的（只需给出另一个具有相同连通 4-集合的图），而即使是 NP归属性也尚不明确。

最后，一个自然的问题是：对于给定的连通三元组集合，寻找一致图（引理 1）时，$O(n \cdot |T|)$ 的运行时间能否改进为 $O(|T|)$（或期望运行时间 $O(|T|)$）。

参考文献

1. Ahmed, M., Wenk, C.：从 GPS 轨迹构建街道网络。载于：第20届年度欧洲算法研讨会论文集。《计算机科学讲义》，第7501卷，第60–71页（2012） 2. Aspvall, B., Plass, M.F., Tarjan, R.E.：用于检验某些量化布尔公式真值的线性时间算法。《信息处理快报》**8**(3)，121–123（1979） 3. Bollobás, B.：《现代图论》，随机图，第215–252页。Springer，纽约，NY（1998） 4. Bondy, J.A., Hemminger, R.L.：图重构——综述。《图论杂志》**1**(3)，227–268（1977） 5. Bowler, A., Brown, P., Fenner, T.：具有大量公共卡片的图对族。《图论杂志》**63**(2)，146–163（2010） 6. Brandes, U., Cornelsen, S.：超越树的系统发育图模型。《离散应用数学》**157**(10)，2361–2369（2009） 7. Cameron, P.J., Martins, C.：关于随机图重构的一个定理。《组合学、概率与计算》**2**(1)，1–9（1993年） 8. Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L., Stein, C.：《算法导论》，第197–200页。麻省理工学院出版社（2022） 9. Dey, T.K., Wang, J., Wang, Y.：通过离散 Morse 理论进行图重构。载于：第34届国际计算几何研讨会论文集。《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs），第99卷，第31:1–31:15页（2018）

10. Even, S., Itai, A., Shamir, A.：时刻表问题和多商品流问题的复杂性。《SIAM计算杂志》**5**(4)，691–703（1976） 11. Feder, T.：网络流和2-可满足性。《算法学》**11**(3)，291–319（1994） 12. Fredman, M.L., Komlós, J., Szemerédi, E.：使用0(1)最坏情况访问时间存储稀疏表。《美国计算机协会杂志》**31**(3)，538–544（1984） 13. Frieze, A., Karonski, M.：《随机图导论》。剑桥大学出版社，纽约（2015） 14. Giles, W.B.：外平面图的重构。《组合理论杂志B辑》**16**(3)，215–226（1974） 15. Groenland, C., Guggiari, H., Scott, A.：图的规模可重构性。《图论杂志》**96**(2)，326–337（2021） 16. Harary, F.：重构猜想综述。载于：《图与组合学》，第18–28页（1974） 17. Janson, S., Rucinski, A., Luczak, T.：《随机图》。约翰·威利父子公司（2011） 18. Kannan, S., Mathieu, C., Zhou, H.：图重构与验证。《ACM算法汇刊》**14**(4)，1–30（2018） 19. Kassiano, V., Gounaris, A., Papadopoulos, A.N., Tsichlas, K.：不确定图挖掘：综述。载于：《云计算的算法方面》。《计算机科学讲义》，第10230卷，第87–116页（2017） 20. Kelly, P.J.：《等距变换》。博士学位论文，威斯康星大学（1942） 21. Lauri, J.：极大平面图的重构。《组合理论杂志B辑》**30**(2)，196–214（1981） 22. Lauri, J., Scapellato, R.：《图自同构与重构专题》。剑桥大学出版社（2016） 23. Mordeson, J.N., Peng, C.S.：模糊图上的运算。《信息科学》**79**(3)，159–170（1994） 24. Mossel, E., Ross, N.：标记图的霰弹枪组装。《IEEE网络科学与工程汇刊》**6**(2)，145–157（2017） 25. Myrvold, W.：度序列可由 $n-1$ 卡片重构。《离散数学》**102**(2)，187–196（1992） 26. Rosenfeld, A.：模糊图。载于：Zadeh, L.A., Fu, K.S., Tanaka, K., Shimura, M.（编）：《模糊集及其在认知与决策过程中的应用》，第77–95页（1975） 27. Tutte, W.：国王的所有马匹：重构指南。《图论及相关主题》，第15–33页（1979） 28. Ulam, S.M.：《数学问题集》，《纯数学与应用数学跨学科论丛》，第8卷。跨学科出版社（1960） 29. Wagner, K.：关于平面复形的一个性质。《数学年刊》**114**(1)，570–590（1937） 30. West, D.B.：《图论导论》。普伦蒂斯·霍尔出版社，第2版（2001）

A 连通三元组的省略的证明

在本附录中，我们给出第5节中省略的证明。

A.1 重构 2-连通外平面图

我们证明，至少有六个顶点的 2-连通外平面图 G 可由其连通三元组 T集合确定。

我们首先描述平面图和外平面图的一些性质。瓦格纳定理[29] 指出，一个图是平面的，当且仅当它不包含完全图 K_5 或完全二部图 $K_{3,\,3}$ 作为图子式。由此很容易推出，外平面图恰好是不包含 K_4 或 $K_{2,\,3}$ 作为图子式的图。简单的结构分析表明，每个外平面图都有一个度至多为二的顶点。由于这一事实众所周知，我们省略证明，但可在例如 [30] （命题6.1.19）中找到。

我们的方法与处理树的方法相似：我们证明可以识别出一个度为二的顶点，并通过将其与一个邻点合并来将其从图中删除。我们持续进行这一操作，直到得到一个具有六个顶点的图；根据每个顶点和边所出现的三元组数量，可以区分这些图。我们首先注意到，可以识别度为二的顶点。我们将需要以下引理，该引理通过应用门格尔的著名定理得到（进一步背景请参见[30]）。

引理4。 设 G 是一个至少有五个顶点的2-连通外平面图。设 C 是 G中的一个4-环。设 a和 $b \in C$ 在 $V(G) \setminus V(C)$中都没有邻点。那么 a和 b必须在C中相邻。

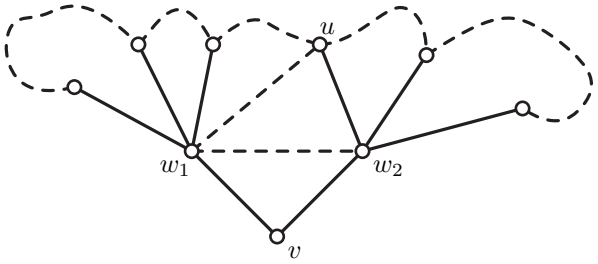


Fig. 4. 至少含有 6
顶点。虚线边 w_1w_2 和 w_1u 可能存在，也可能不存在。

证明。 假设 a, b 在 C中不相邻。将 C 的另外两个顶点记为 c, d。由于$|V(G)| \geq 5$，存在某个顶点 $r \in V(G) \setminus C$。根据门格尔定理，存在从 r 出发并终止于 $\{a, b, c, d\}$ 的路径 P和 Q，使得 P和 Q 除 r外顶点不相交。于是$P \cup Q$ 是连接 b 和 d的一条路径。但这样一来， $C \cup P \cup Q$ 就是一个$K_{2,3}$-图子式，这与G 是外平面图矛盾。□

引理5。 设 G 是一个至少含有六个顶点的2-连通外平面图。顶点 $v \in V(G)$的度为二，且其邻点为 w_1 和 w_2，当且仅当所有包含 v 的三元组也包含 w_1 或 w_2，并且不存在其他顶点 v'，使得所有包含 v' 的三元组也包含 w_1 或 w_2。

证明。 假设 v 恰有两个邻点，即 w_1 和 w_2。显然， v 只会与这些顶点一起出现在三元组中。反设存在某个 $v' \in V(G) \setminus \{w_1, w_2, v\}$，使得每个包含 v' 的三元组也包含 w_1 或 w_2。由此可知，v' 在 $V(G) \setminus \{w_1, w_2\}$中至多有一个邻点。

假设 v' 与 w_1 和 w_2均相邻。那么， v'—w_1—v—w_2—v' 是 G中的一个四边形 C。因此，根据引理4， v'必须有一个邻点 $r \in V(G) \setminus V(C)$。此外， $N(r) \subseteq V(C)$，因为否则 v'会出现在某个不包含 w_1， w_2的三元组中。因此， $G \setminus r$是2-连通的。然后，将引理4应用于 $G \setminus r$中的 v， v'和 C，我们得到矛盾。因此，我们可以假设 v'与 w_2不相邻。

G 是2-连通的，因此 v' 的度至少为二。由此可知， v' 与 w_1相邻。由于 G 是2-连通的， $G \setminus w_1$中存在一条最短的 $v'w_2$-路径 P_2。令 P_2中的 v'的邻点为 z。那么$z \neq w_2$。然后， $N(z) \subseteq \{v', w_1, w_2\}$，因为否则 v'会位于一个不包含 w_1或w_2的三元组中。因此， v—z—w_2 是 G的一条路径。于是，删除 z_2 并添加边 w_1w_2 所得的图 G' 是2-连通的。由于外平面图是小闭合的， G' 是外平面的。将引理4应用于 G' 中的环 v—w_1—v'—w_2—v，我们得到矛盾，因为 v， v' 在 $V(G') \setminus \{v, w_1, v', w_2, \}$中均没有邻点。

反过来，假设所有包含 v 的三元组也都包含 w_1 或 w_2，并且不存在其他顶点 v'，使得所有包含 v' 的三元组也都包含 w_1 或 w_2。假设 v 有某个邻点 $z \neq w_1$， w_2。由于 v只与 w_1和 w_2出现在三元组中，因此可知 $N(z) \subseteq \{w_1, w_2, v\}$。但这样一来， z只与 w_1 和 w_2出现在三元组中，矛盾。因此， w_1 和 w_2 是 z唯一可能的邻点。由于 G 是2-连通的， v 的度至少为二。因此 v 的度为二，并且它与 w_1 和 w_2相邻。□

我们将使用引理5，把识别至少有七 个顶点的2-连通外平面图的问题，简化为识别有六 个顶点的2-连通外平面图。由于在同构意义下，六个顶点上只有九个不同的2-连通外平面图（见图 5），这将显著简化问题。

观察 2 所有已知为 *2*-连通且外平面的六顶点图都可以被重构。

对于图 G 中的每个顶点 v，令 count(v) 表示 v 在 G 的一个三元组中出现的次数，并令 count(G) 表示对于每个 $w \in V$（G），count(w）的值所组成的无序列表。每个具有六个顶点的 2-连通外平面图 G 都有唯一的列表 count(G)；图 5 展示了一个例子。于是，根据这一事实、引理5 以及对这些三元组进行的一些简单额外分析，我们可以重构任意一个已知为 2-连通且外平面的六顶点图。

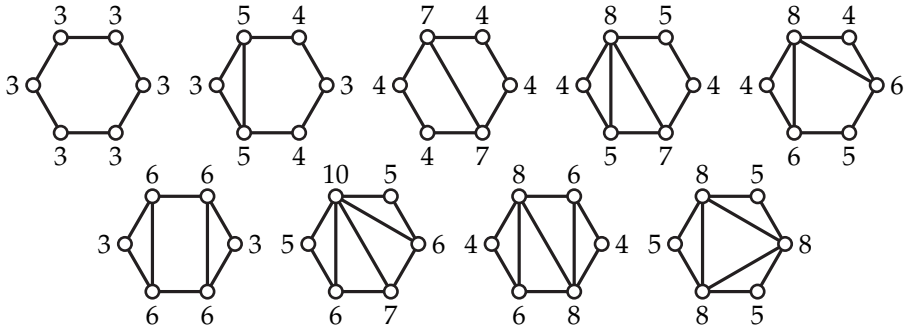


图5。 具有六个顶点的 2-连通外平面图在对称意义下的所有基本情形。每个顶点都标注了其出现在多少个三元组中。注意，每种情形都可以通过每个顶点所出现的三元组数量来确定。

定理 3。 *任何已知为 2-连通且外平面的 $n \geq 6$ 顶点图，都可以根据其连通三元组列表进行重构。*

注意，定理 3 是紧的，因为它不适用于 $n = 4$，5；而当 $n = 3$ 时则显然成立。对于 $n = 5$，考虑图 H：它由一个 P_4 添加一个与所有顶点均相邻的新顶点得到。我们可以根据图 G 的三元组，以及已知 G 是 2-连通外平面图这一事实，确定其是否与 H 同构；但我们无法确定 P_4 中顶点的顺序（见图1和图2）。对于 $n = 4$，注意我们无法区分 C_4 与通过添加一条弦而从 C_4 得到的图，因为对于这两个图，所有三个顶点的集合都是连通的。

证明（定理 3 的证明）。根据观察 2，当 $n = 6$ 时定理成立。假设 G 是外平面且 2-连通的，并且 G 至少有七个顶点，且假设对于 $n = 6$，7，.....，$|V(G)| - 1$，定理成立。

由于 G 是外平面且 2-连通的，G 有一个度为二的顶点 v。假设 v 有一个度为二的邻点 u。我们可以根据引理5识别出 u、v 及其邻点。我们记录这些信息。将边 $\{u, v\}$ 收缩为一个顶点 x，并将所得的图称为 G'。那么 G' 是 2-连通的外平面图。我们通过以下方式从 G 的三元组列表中获得 G' 的三元组列表：删除同时包含 u 和 v 的所有三元组，然后将剩余三元组中出现的 u、v 替换为 x。根据归纳法，我们可以从 G' 的三元组列表重构 G，因而也可以重构 G。

因此，我们可以假设 v 的邻点的度都至少为三。令 w_1, w_2 表示 v 的邻点。根据引理5，我们可以识别 v, w_1, w_2。我们还知道 w_1, w_2 的所有邻点：当且仅当 vxw_1（分别为 vxw_2）是一个三元组时，顶点 $x \in V(G)$ 才与 w_1（w_2）相邻。由于无论哪种情况我们都有三元组 uw_1w_2，因此无法据此判断 w_1 和 w_2 是否为邻点。不过，我们确实知道，由于 G 是外平面的，w_1 和 w_2 至多共有两个邻点，其中一个是 v（示意图见图4）。这意味着 w_1 和 w_2 都至少有一个不是另一个顶点的邻点的邻点，因为它们的度都至少为三。因此，当且仅当 G 中存在某个顶点 x，使得 $w_1w_2x \notin T$，但 $vw_1x \in T$ 或 $vw_2x \in T$ 时，w_1 和 w_2 不相邻。由此，我们可以确定 w_1 和 w_2 是否为邻点。

如果边 w_1w_2 存在，那么 $G \setminus v$ 仍然是 2-连通的。因此，我们可以移除 v 以及所有三元组。如果边 w_1w_2 不存在，我们可以添加它，并为 w_1w_2x 中的每个邻点 x（即 w_1 或 w_2的邻点）添加所有三元组，然后移除 v 以及其中出现它的所有三元组。无论哪种情况，我们都会得到一个少了一个顶点的 2-连通外平面图 G' 及其三元组列表，因此可以通过归纳法重构 G'。此外，在这两种情况下，由于我们知道 v，w_1，w_2 及其关联边，因此可以从 G' 重构 G。□

A.2 重构三角剖分的平面图

三角剖分平面图，也称为极大平面图，是一种平面图，其中每个面（包括外面）都是三角形。根据定义，包含三个以上顶点的三角剖分平面图是 3-连通的。请注意，弦图（即每个超过三个

顶点的含有弦的图有时也称为三角剖分图，但这不是我们所采用的含义
在这里使用的含义
。每个三角剖分平面图都是弦图，但反方向显然不成立。

为了证明至少有七个顶点的三角剖分平面图可以被唯一重构，我们采用与定理 3 的证明中类似的方法。我们论证：对于一个已知为至少有六个顶点的 4-连通三角剖分平面图，我们可以识别出所有度至少为五的顶点及其按循环顺序排列的邻点。然后，我们论证可以重构所有至少有六个顶点且已知为 4-连通三角剖分平面图的图。最后，我们将利用这一结果证明，可以重构每个至少有七个顶点且已知为三角剖分平面图的图。我们先从一些简单的观察开始。

对于连通图 G，我们称满足 $S \subset V(G)$ 且满足 $\emptyset \neq S \neq V(G)$ 的顶点集为分隔集，如果 $G \setminus S$ 是不连通的。分离三角形是基数为三的分隔集，并且其导出子图是一个三角形。

观察 3 在至少含有五个顶点的三角剖分平面图中，任何基数为 *3* 的分隔集都是一个分离三角形。

事实上，根据定义，三角剖分平面图没有大小至多为二的分隔集。此外，三角剖分平面图的极小分隔集必定是团。由欧拉公式（如下给出）可知，每个含有七个顶点的三角剖分平面图都包含一个度为五的顶点。我们将六个顶点的 4-正则平面图称为八面体（见图 6 中的示意图）。

定理 9（欧拉公式）。 设 G 是一个连通的平面嵌入图。那么

$$n - e + f = 2$$

其中， n、 e和 f分别等于 G的顶点数、边数和面数。

推论 1。 任何不含度至少为五的顶点的三角剖分平面图至多包含六个顶点。此外，八面体是唯一一个含有六个顶点且不含度为五顶点的三角剖分平面图。

对于 $\ell \geq 4$，我们将通过在长度为 ℓ 的环上添加一个新顶点 v 并使其与其他每个顶点相邻而得到的图称为 an ℓ-轮图。我们将 v 称为 ℓ-轮图的中心 。不包含 v 的环称为 ℓ-轮图的 C_ℓ 。我们将证明，对于一个已知为三角剖分的、4-连通且平面的图中的每个度为$\ell \geq 5$ 的顶点 v，由 v及其邻点导出的图是一个 ℓ-轮图。为简洁起见，我们将集合 $N(v) \cup \{v\}$ 记为 $N[v]$。

引理6。 设 G 是一个三角剖分平面图。那么，对于每个度为 $\ell \geq 5$的 $v \in V(G)$，由 $N[v]$ 诱导的图包含一个以 v为中心的 ℓ-轮图。此外，如果 G 是4-连通的，则由 $N[v]$ 诱导的图是一个 ℓ-轮图。

证明。 设 $v \in V(G)$ 的度至少为五。固定 G 的一个嵌入以及平面的定向。根据 $G[N(v)]$的嵌入，令 w_1、 w_2、 w_3、 w_4、.....、 w_d按循环顺序排列为 v的邻点。令 $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$。于是， w_i—v—w_{i+1}是 G的一个面边界上的路径。因此，在 $G \setminus v$ 中存在某条 $w_i w_{i+1}$路径 P，使得 P与路径 w_i—v—w_{i+1} 的并是一个面边界上的环，其中该面属于 G。因此，由于 G 是三角剖分的， P 必须是一条单独的边。由此可知， w_1—w_2—w_3—.....—w_d—w_1 是 G的一个环。这就证明了第一个断言。

设 G 是 4-连通的。假设对于某些不相邻的 i、 $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$， $w_i w_j$是一条边，且满足 $i < j < d$。由于 G 没有分离三角形，因此在 $G \setminus \{v, w_i, w_j\}$中存在一条 $w_{i+1} w_{j+1}$-路径 Q。但这样一来， $G[N[v]] \cup Q$就有一个 K_5 图子式，矛盾。因此， $G[N[v]]$是一个 ℓ-轮图。□

观察4 对于每个 $\ell \geq 5$， C_ℓ 都可以被重构。

这个结果显然成立，但为完整起见，我们给出证明。

证明。 令 $\ell \geq 5$为一个整数。我们断言， G是一个顶点为 v_0、 v_1、.....、 $v_{\ell-1}$且按循环顺序排列的 C_ℓ，当且仅当 G的三元组集合等于 $X = \{v_i v_{i+1} v_{i+2} \mid i = 1, 2, \ldots, \ell\}$，其中下标按模 ℓ计算。

“如果”语句是显然的。设 G 是一个具有 ℓ 个顶点 v_0， v_1，.....， $v_{\ell-1}$ 的图，并且 X 是 G的三元组集合。假设 $v_1 v_2$ 不是 G的一条边。那么，由于 $v_0 v_1 v_2$ 和 $v_1 v_2 v_3$ 都是 G的三元组， v_0， v_3 必须同时与 v_1和 v_2 相邻。但这样一来， v_0—v_2—v_3 就是 G的一个子图，这与 $v_0 v_2 v_3 \notin X$ 矛盾。□

Obs定理 5 图 G 是一个 ℓ-轮图，当且仅当存在某个顶点 v 出现在 $\binom{\ell}{2}$ 中三元组 组，且 $G \setminus v$ 是一个 C_ℓ。

结合观察4和观察5，对于每个 $\ell \geq 5$，若已知相关图是三角剖分的、平面的且4-连通的，我们便能重构 ℓ-轮图。由观察4、观察5和引理6可得：

推论2. 若已知 G 是一个不含任何分离三角形的三角剖分平面图，则对于每个度至少为五的 $v \in G$，我们可以重构由 v 及其邻点所诱导的图。

Le引理7. 每个已知为平面的、三角剖分的、至少有七个顶点的连通图 G，u-*lated* 并且可以重构<style id='1'>4-连通图。

证明。 由欧拉公式（作为推论2给出）可轻易得出， G必定有一个 v 度至少为五的顶点。根据推论2，由于 $N[v]$ 是4-连通的，我们可以重构由G 诱导的图。我们称两个顶点 x, y 之间的距离为 $d(x, y)$，即它们之间一条最短路径上的边数。令 $B_m(v)$表示由距离 m 不超过 v的顶点集诱导的图。假设对于某个 $\ell \geq 2$，我们可以根据 G的连通三元组重构 $B_{\ell-1}(v)$。

断言。 对于满足 $d(v, x) = \ell - 1$的每个顶点x，我们可以确定距离 ℓ 为 v 的顶点集合 $w \in N(x)$。

由于 $\ell \geq 2$， x 与某个满足 $d(v, y) = \ell - 2$的顶点 y 之间存在一条边。于是，当且仅当 $q \notin V(B_{\ell-1}(v))$且 qxy 是一个连通三元组时， q 是 x 的一个邻点，并且其距离 ℓ 为 v 。因此，我们重构了距离 ℓ 为 v的 x 的邻点列表。这证明了该断言。

对于顶点 $b \in G$ 和整数 m，令 $N_v^m(b)$ 表示与 b 的距离至多为 m 的邻点集合。根据前述断言，我们可以为每个 $w \in G$ 重构集合 $N_v^{\ell-1}(w)$。此外，我们可以确定与 v 的距离为 ℓ 的顶点集。设 u 是一个与 v 的距离为 ℓ 的顶点。通过证明我们可以重构集合 $N_v^{\ell}(u)$ 来完成证明。设 $z \neq u$ 是一个与 v 的距离为 ℓ 的顶点。

断言。 设 z 是一个与 v 的距离为 ℓ 的顶点。假设 z 和 u 相邻。那么，如果 z 和 u 有一个满足 $d(v, x) = \ell - 1$ 的公共邻点 x，则必有 x 的度至少为五。此外，边 zu 可以被重构。

由于 $\ell \geq 2$，根据定义， x 必须有一个与 v的距离为 $\ell - 2$ 的邻点 x'。于是， z， u 都不与 x' 相邻。由于 G 是三角剖分的，因此可知， x'， x， u 不可能同时出现在围成一个面的环上，并且 x'， x， z也不可能同时出现在围成一个面的环上。由于 G是平面的， $G \setminus x$ 中存在一个单个面 C，包含 x的所有邻点。设 P_u 为 C 中不包含 z 的 $x'u$-路径，设 P_z 为 C 中不包含 u的 $x'z$- 路径。那么，由于G 是三角剖分的， x 必须在 P_u 和 P_z 的内部各有一个邻点。因此， x 的度至少为五。由推论2， $G[N[x]]$ ，从而边 uz 可以被重构。这就证明了该断言。

我们通过证明可以从满足 $d(v, z) = \ell$和 $N_v^{\ell-1}(z) \cap N_v^{\ell-1}(u) = \emptyset$的顶点 z 确定从 u 出发的边来完成证明。令 x表示与 u距离为 $\ell - 1$ 的一个邻点。于是，当且仅当 xuz 是一个三元组时， z 与 u 相邻。□

我们还可以识别图中“足够小”的分隔集。对于至少含有六个顶点的图，我们只需要这一关于大小为三的分隔集的结果。

观察 6 设 G 是一个含有 n 个顶点的连通图，并且 $S \subseteq V(G)$ 的基数至多为 $n - 3$。则 S 是一个分隔集，当且仅当可以将 $V(G) \setminus S$ 划分为两个非空部分 V_1、V_2，使得任何包含来自 V_1 的顶点和来自 V_2 的顶点的三元组都必须包含来自 S的顶点。

利用我们能够检测大小为三的分隔集这一事实，通过沿分离三角形进行递归，我们将证明所有具有至少七个顶点的三角剖分平面图都具有唯一重构。我们将需要以下观察。

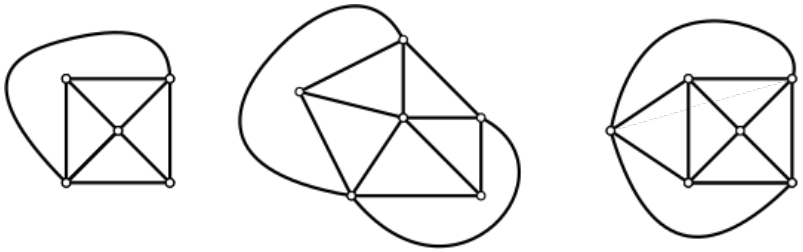


图 6. 所有五个或六个顶点上的不同（无标号）三角剖分平面图的示意图。从左到右，这些图分别是三角剖分四轮图、三角剖分五轮图和八面体。

观察 7 设 G 是一个三角剖分平面嵌入图，且 S 是 G 中大小为三的分隔集。那么， $G \setminus S$ 恰好有两个连通分支 V_1、V_2，并且 $G[S \cup V_1]$ 和 $G[S \cup V_2]$ 都是三角剖分平面图。

观察 7 源于以下事实：如果 G 是一个三角剖分平面图，那么$G \setminus S$的每个连通分支都必须与 S 的每个顶点有一条边相连。由于 S是观察 3 中三角形的顶点集，而平面图不含有 $K_{3,\ 3}$ 子图，因此 $G \setminus S$至多有两个连通分支。我们可以利用观察 7 对 G[进行递归，在$V(H) \cup V_1$] 和$G[V(H) \cup V_2]$ 上重复此过程，直到剩下以下两种情况之一：一个至少有七个顶点且不含分离三角形的三角剖分平面图（我们可以用引理 7 处理），或者一个至多有六个顶点的三角剖分平面图。接下来，我们将证明，如果通过这一过程得到一个至多有六个顶点的三角剖分平面图，就能够将其重构。我们首先描述至多有六个顶点的三角剖分平面图。

对于 $\ell \geq 3$，我们将从 ℓ-轮图中添加尽可能多的弦，同时保持图的平面性，从而得到的图称为三角剖分的 C_ℓ $\ell triangulated\text{-}wheel$。注意，当 $\ell \leq 5$ 时，该图在标记意义下是唯一确定的（见图 6）。此外，任何包含一个度为 $n-1$ 的顶点且具有 n 个顶点的三角剖分平面图，都必然是一个三角剖分的 $(n-1)$-轮图。

观察 8 每个至多含六个顶点的三角剖分平面图，要么是 K_3，要么是 K_4，要么是三角剖分的4-轮图、八面体或三角剖分的5-轮图。

现在我们可以证明递归的基础情形了。

引理 8. 设 G 是一个至少含有七个顶点、已知为三角剖分平面图的图。假设 G 有一个大小为三的分隔集 S，并令 V_1 为 $G \setminus S$ 中大小至多为三的一个连通分支。那么，利用 G 的三元组、 S 和 V_1 的标记信息，以及 S 是 G 的分隔集这一事实，可以重构 $G[S \cup V_1]$。

证明。令 G' 表示图 $G[S \cup V_1]$。由于 $G \setminus V_1$ 非空，且 G 是三角剖分平面图，因此每个顶点 $s \in S$ 都必须在 $u_s \in G \setminus G'$ 中有一个邻点。然后，对于每个 $s \in S$ 和 $v \in V_1$，通过检查 su_sv 是否为一个三元组，我们就能确定 S 与 V_1 之间的边。因此，我们只需证明能够重构 V_1 的顶点之间的边即可。当 G' 有四个顶点时，这是显然的。当 G' 有五个顶点时，根据观察 8，它必定是 4-连通的，因此 V_1 中的两个顶点必定相邻。

当 G' 有六个顶点时，它要么是八面体，要么是三角剖分五轮图。八面体中的每个顶点的度都是四，而三角剖分五轮图恰好有两个度为四的顶点。因此，由于我们知道 S 在 G' 中关联的边，就能确定 G' 是八面体还是三角剖分五轮图。注意，在八面体中，移除任意三角形的顶点集后得到的图是一个三角形。因此， V_1 必须诱导出一个三角形。所以，当 G' 是八面体时，我们可以重构它。

我们通过假设 G' 是一个三角剖分五轮图，并证明我们可以重构G'来完成证明。注意，三角剖分五轮图恰有两个度为3、两个度为4和两个度为5的顶点。此外，对于每个 $i \in \{3,4,5\}$，它都存在一个同构，将度为 i 的顶点映射到另一个度为 i 的顶点。若 S的顶点可以排序，使得第i个顶点在 G'中的度为 n_i，则称 S的度数为（n_1, n_2, n_3）。由于 G'的对称性， $G' \setminus S$ 上的无标号图由 S 的度数决定。由于 S 诱导出一个三角形，因此其可能具有的度数只有四种 S

可能为（5,5,4）、（5,5,3）、（5,4,4）、（5,4,3）。此外，由于我们已经重构了 S 与 $G' \setminus S$之间的边，如果存在某个 $x, y \in G' \setminus S$，使得 y 有一个邻点 $s \in S$ 与 x 不相邻，那么我们可以通过检查 sxy 是否为一个三元组，来判断 x 和 y 是否相邻。不难看出，这些观察结合起来足以重构 G'。□

现在我们已经可以证明本小节的主要结果。

定理 4。 设 T 为三元组集合，并且已知底层图 $G = (V, E)$ 是平面的且经过三角剖分。那么，当 $n \geq 7$ 时，可以从 T 唯一重构出 G。

证明。 设 G 是一个至少含有七个顶点的三角剖分平面图。根据观察 6，我们可以确定 G 是否具有大小为 3 的分隔集。如果没有，则根据引理 7，我们可以重构 G。因此，不妨设 G 具有一个大小为 3 的分隔集 S。于是， $G \setminus S$ 恰好有两个连通分支，并且根据观察 6 和观察 7，我们可以识别出它们的顶点集 V_1、V_2。此外，根据观察 7， $G[V_1 \cup S]$ 和 $G[V_2 \cup S]$ 都是平面的且经过三角剖分的。对于 $i \in \{1, 2\}$，如果 $G[V_i \cup S]$ 至多包含六个顶点，则根据引理 8，我们可以重构 $G[V_i \cup S]$。否则，我们对 $G[V_i \cup S]$ 执行递归。□

请注意，尽管我们的证明是构造性的，但它并不能导出比第3节中所述的一般立方时间算法或 $O(n \cdot |T|)$ 时间算法更快的算法。

B 从连通 k-集合重构的证明

在本附录中，我们给出关于从连通 k-集合进行重构的证明，这些证明在正文中被省略了。为方便读者，我们重复列出这些结果。

定理 5。 如果已知输入图是一棵树，那么重构树的阈值为 $\lceil n/2 \rceil$：当 $k \leq \lceil n/2 \rceil$ 时，我们可以根据连通的 k-集合重构一棵具有 n个顶点的树；而当 $k \geq \lceil n/2 \rceil + 1$时，我们无法重构具有 n个顶点的路径中顶点的顺序。

证明。 对于第一个断言，根据单调性，不妨设 $k = \lceil n/2 \rceil$。我们首先通过检查所有 $v \in V$中的 $G[V \setminus \{v\}]$ 是否连通，找出由所有叶节点组成的集合 L。注意，由于 G 是一棵树，只有当 v 是叶节点时才会出现这种情况。

接下来，我们检查所有 $v \in V$：

1. 对于所有大小至少为 $\lceil n/2 \rceil - 1$ 的 $L' \subseteq L$，检查 $G[L' \cup \{v\}]$ 是否连通；以及 2. 对于所有大小至多为 $\lceil n/2 \rceil - 2$ 的 $L' \subseteq L$，检查 $G[V \setminus (L' \cup \{v\})]$ 是否连通。

对 L' 施加的大小限制使我们能够执行这些查询，因为

$$n - (\lceil n/2 \rceil - 1) = n - \lfloor n/2 \rfloor) = \lceil n/2 \rceil.$$

对于第一个问题（ $G[L' \cup \{v\}]$ 是否连通）给出肯定回答的所有 L' 都包含在 $N(v) \cap L$中。事实上，根据假设，它们包含在 L 中；而只有当其“父节点”也存在时，叶节点才会成为连通子图的一部分。因此，如果 $|N(v) \cap L| \geq \lfloor n/2 \rfloor - 1$，那么我们就能恢复$N(v) \cap L$，即满足 $G[L' \cup \{v\}]$ 连通的最大 $L' \subseteq L$。

另一方面，对于第二个问题（$G[V \setminus (L' \cup \{v\})]$ 是否连通）给出肯定回答的所有 $L' \subseteq L$ 都必须包含 $N(v) \cap L$，除非 v 是唯一的非叶节点（在这种情况下，我们可以立即得出 G 是一个星图）。因此，如果 $|N(v) \cap L| \leq \lceil n/2 \rceil - 2$，那么我们就能恢复 $N(v) \cap L$，即满足 L' 且使回答为肯定的最小集合。

一旦我们恢复了每个顶点所关联的叶节点，就可以用类似的方法继续找出与这些顶点相邻的顶点集：我们将关联着一个叶节点的顶点视为“第二轮”叶节点，并将其权重设为与它关联的叶节点数加 1。如果我们在子集中纳入一个第二轮叶节点，就同时纳入它本身及其关联的叶节点；否则，同样的论证适用于寻找“第三轮”叶节点，依此类推。

对于第二个论断，令 $P_n = ([n], \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\})$ 为一条 n-顶点路径。如果 n 为偶数，那么任意连通的 $n/2 + 1$ 个顶点集合都必须包含顶点 $n/2$ 和 $n/2 + 1$。这意味着，我们无法区分当前路径与交换这两个顶点后得到的路径。类似地，如果 n 为奇数，那么任意连通的 $\lceil n/2 \rceil + 1$ 个顶点集合都必须包含顶点 $\lceil n/2 \rceil - 1$、$\lceil n/2 \rceil$ 和 $\lceil n/2 \rceil + 1$。这再次意味着，我们无法区分这三个顶点。□

该 r 上述结果可用于说明，对于每个 k，都有无穷多个图具有“可重构性阈值” k，其含义如下。

命题 1。对于 $k \geq 2$ 的每个取值，都存在无穷多个图，它们可以由其连通 k-集合确定，但不能由其连通 $(k+1)$-集合确定

证明。对于 $k=2$，结论显然成立。令 $k \geq 3$。令 P 为一条具有 $2k$ 个顶点的路径，并令 P' 为一条具有 $n \geq 2k$ 个顶点的路径。在 P 与 P' 的顶点之间添加所有边，并令 G 为所得的图。如果集合 S 同时与 P 和 P'相交，那么 $G[S]$ 始终是连通的，因此只有当我们能够从其自身的连通 ℓ-集合中重构 P 时，才能从 G的连通 ℓ-集合中重构 G。根据定理 1，当且仅当 $\ell \leq k$时，我们可以从 P 的连通 ℓ-集合中重构 P。这意味着，在给定连通 $(k+1)$-集合时，我们可能会将 G 与其他图混淆。另一方面，给定连通k-集合后，我们可以找出 P 和 P'的（非）边，随后发现它们完全连通，因为对于任意 $p \in P$ 和 $I \subseteq P'$ 大小为 $k-1$的独立集，$G[\{p\} \cup I]$ 都是连通的。□

接下来我们证明随机图的性质。

引理 3。对于 $G \sim G(n, 1/2)$，G 以高概率是类随机的。

（我们本可以改进类随机定义中的常数，但为了便于阅读，我们选择了当前的常数。）证明中，我们使用下面陈述的 Chernoff 界。

引理 10（Chernoff 界）。设 X_1、X_2、……、X_n 是取值于 $\{0,1\}$ 中的独立随机变量，其中 $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$。令 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 和 $\mu = \mathbb{E}[X] = pn$。那么，对于任意 $\epsilon > 0$，

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \epsilon\mu) \leq 2\exp(-\epsilon^2\mu/3).$$

证明（引理 3 的证明）。固定一个顶点 $v \in [n]$，并令 $u \in [n] \setminus \{v\}$ 为另一个顶点。令 X_u 为事件“边 $\{u,v\}$ 存在于 $G \sim G(n, 1/2)$ 中”的指示函数。于是 $\mathbb{P}(X_u = 1) = \frac{1}{2}$，且 $|N(v)| = \sum_{u \neq v} X_u$ 是独立随机变量之和。因此，根据引理 10（Chernoff 界），令 $\mu = (n-1)/2$、$\epsilon = 5\sqrt{\log n/n}$ 和 $X = |N(v)|$，可知当 n 足够大时，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(||N(v)| - n/2| \geq 3\sqrt{n\log n}) &\leq \mathbb{P}(||N(v)| - (n-1)/2| \geq 2.5\sqrt{n\log n}) \\
&= \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \mu\frac{n}{n-1}5\sqrt{\log n/n}) \\
&\leq \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \epsilon\mu) \\
&\leq 2\exp(-\epsilon^2\mu/3) \\
&= 2\exp(-\frac{25}{6}\log n\frac{n-1}{n}) \leq 2n^{-2.5}.
\end{aligned}$$

通过对顶点应用并集界，随机图样性质的第一条对$G(n, 1/2)$成立的概率在 $n \to \infty$ 时趋于 1。

为得到随机图样定义的第二条陈述，令 v，$w \in V$ 为不同的顶点，并且对于 $u \in V \setminus \{v,w\}$，令 X_u 表示 $\{u,v\}$ 是一条边而 $\{u,w\}$ 不是一条边这一事件。再次，由于这些事件涉及不同的边，因而彼此独立，且 $\mathbb{P}(X_u = 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$，所以 $X = |N(v) \cap (V \setminus N(w))| = \sum_{u \in V \setminus \{v,w\}} X_u$ 满足 $\mu = \mathbb{E}[X] = (n-2)/4$。通过类似的计算，我们得到

$$\mathbb{P}(||N(v) \cap (V \setminus N(w))| - n/4| \geq 3\sqrt{n\log n}) \leq 2n^{-3}.$$

通过对顶点对应用并集界，随机图样性质的第二条对 $G(n, 1/2)$成立的概率在 $n \to \infty$ 时趋于 1。

还需证明第三个性质以高概率成立。给定两个不相交集合A，$B \subseteq V$，满足 $|A|$，$|B| \geq 2\log(n)$，我们将 $E_{A,B}$ 表示为这样的事件：不存在一条边，其一个端点位于 A，另一个端点位于 B。注意，这样的潜在边恰好有 $|A| \cdot |B|$ 条。我们计算得

$$\mathbb{P}(E_{A,B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|A|\cdot|B|} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{4\log^2 n}.$$

为了证明第三个性质，只需证明对于所有大小恰为 $2\log n$ 的集合 A，B，事件 $E_{A,B}$ 不会发生（以高概率）。由于这种大小的集合对少于 $\binom{n}{2\log n}^2$，我们得到

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{A,B\in\binom{[n]}{2\log n}} E_{A,B}\right) \le \binom{n}{2\log n}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4\log^2 n} \le \left(\frac{en}{2\log n}\right)^{4\log n} n^{-4\log n} \le \left(\frac{e}{2\log n}\right)^{4\log n}.$$

第三个不等式来自著名上界 $\binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$。注意，当 $n\to\infty$ 时，最后一项收敛于 0。

这表明，全部三个性质以高概率成立。 □

接下来，我们回到确定性情形，并证明定理 7；该定理是定理 2 关于高围长图的一个类似结果，现陈述如下。

本节将图 G 的围长 定义为其中 G的最短环的长度。为简洁起见，如果 G 无环，则称 G 具有无限围长。

定理 7。 设 $k\ge 4$ 为一个整数。任何一个至少有 $2k-1$ 个顶点、已知不含长度至多为 k 的圈的图，都由其连通 k-集合确定。

定理 7 的证明与定理 2 的证明类似。在本节余下部分，我们令 $k\ge 4$ 为一个固定整数。我们首先说明，如何从已知围长至少为 $k+1$ 的图的连通 k-集合中重构诱导环。

引理 11。 设 G 是一个不含长度至多为 g 的圈的图，其中 $g\ge 3$。对于任意大小为 $g+1$ 的子集 $A\subseteq V$，$G[A]$ 诱导出一个长度为 $g+1$ 的环，当且仅当对于所有 $a\in A$，$G[A\setminus\{a\}]$ 是连通的。

证明。 设对于每个 $a\in A$，$G[A\setminus\{a\}]$ 都是连通的。令 T 表示某个固定的 $a\in A$ 的 $G\setminus a$。由于 G 不含长度为 $3,\dots,k$ 的圈，因此 T 是一棵树。我们断言，事实上 T 必须始终是一条路径；由于 $a\in A$ 是任意选取的，这就证明了结论。

如果 T 不是一条路径，那么它有一个度至少为 3 的顶点 $t\in T$。根据假设，$G[A\setminus\{t\}]$ 也是连通的，但 $G[A\setminus\{t,a\}]$ 至少有三个连通分支 $C_1,C_2,\dots,C_\ell$。注意，t 和 a 都必须与 $G[A\setminus\{t,a\}]$的每个连通分支相邻。因此，$G[C_1\cup C_2\cup\{t,a\}]$ 包含一个环。但由于我们排除了 $C_3,\dots,C_\ell$ 的所有顶点，它至多有 g 个顶点。这就产生了矛盾。□

应用上述引理，我们可以识别 $(k+1)$-环，也就是说，我们可以重构集合

$$\{\{s_1,\dots,s_{k+1}\}\subseteq V : G[\{s_1,\dots,s_{k+1}\}] \text{ induces a } (k+1)\text{-cycle}\}.$$

令 $S=\{s_1,\dots,s_{k+2}\}$ 表示一个包含 $k+2$ 个顶点的集合，其中大小为 $k+1$ 的子集均未出现在上述集合中。于是我们知道 $G[S]$ 没有长度为 3、.....、$k+1$ 的环；应用观察 1，我们还可以识别 $(k+2)$-环。以此类推，如果我们知道 G 没有长度至多为 k 的环，那么我们就可以从连通的 k-集合中识别出 G 的所有诱导出环的顶点子集。特别地，我们得到引理 11 的以下推论。

推论 3。 令 G 为一个我们知道没有长度至多为 k 的环的图。于是我们可以从连通的 k-集合中识别出所有诱导出环的子集，并且特别可以识别该图是否为树。

我们通过证明还可以重构环的带标记顶点顺序，来扩展推论 3。首先，我们证明对于长度至少为 $k+2$ 的环，该结论成立。

引理 12. 设 G 是一个已知围长至少为 $k+1$ 的图。那么，我们可以根据 G 的连通 k-集合，重构 G 中每个长度至少为 $k+2$ 的环。

证明。 根据推论 3，我们可以识别出 G 中诱导出一个环的每个顶点集。假设 $V(C)$ 是一个顶点集，它在 C 中诱导出一个长度至少为 $k+2$ 的环。注意，对于每个 x，$y\in V(C)$，当且仅当 $C\setminus\{x,y\}$ 连通时，顶点 x 和 y 相邻，并且 $|V(C)\setminus\{x,y\}|\ge k$。根据单调性（观察 1），$G$ 的连通 k-集合决定了 $C\setminus\{x,y\}$ 是否连通，因此我们可以发现环上顶点的顺序。□

由于环的长度为 $k+1$ 时，其 k 个顶点的每个子集都是连通的，因此我们无法将同样的论证应用于重构长度为 $k+1$ 的环。然而，由于我们只考虑已知至少具有 $k+2$ 个顶点的图，因此，通过观察长度为 $k+1$ 的环上的顶点与图中其他顶点之间的关系，我们可以获得关于这些顶点顺序的额外信息。

引理 13。 设 G 是一个已知围长至少为 $k+1$ 的连通图。假设 C 是 G 中的一个诱导环。那么，我们可以根据 G 的连通 k-集合重构 C 。

证明。 根据引理 12，我们不妨设 C 的长度为 $k+1$。根据推论 3，我们可以识别出 C 的顶点集。当且仅当存在某个包含 w 和 $k-1$ 个 C 顶点的连通 k-集合时， $w \notin V$（C）中的一个顶点是 V（C）中某个顶点的邻点。因此，我们可以识别出 V（G）$\setminus V$（C）中在 V（C）中至少有一个邻点的顶点集合 S。由于 G 是连通的， $S \neq \emptyset$。

令 $s \in S$ 任意。由于 G 没有长度至多为 k 的环，因此 s 在 V（C）中恰有一个邻点。我们可以将 s 的唯一邻点 $v \in V$（C）识别为所有满足 $\{s\} \cup M$ 连通的、大小为 $k-1$ 的 $M \subseteq V$（C）子集的唯一公共顶点。

我们以类似于引理 12 的方式，利用这一点确定 G 中顶点标记的顺序。不同顶点 $x, y \in V(C)$ 相邻，当且仅当 $C \setminus \{x, y\}$ 诱导出一个连通图。注意， $V(C)$ 仅包含 $k-1$ 个顶点，并且由于 v 是 s 在 $V(C)$ 中的唯一邻点，以下陈述成立。不同顶点 $x, y \in V(C)$ 相邻，当且仅当 $C \cup \{s\} \setminus \{x, y\}$ 是一个连通的 k-集。因此，我们可以重构 $C \setminus \{v\}$ 中顶点之间的（非）边。 $C \setminus \{v\}$ 诱导的图是一条路径，而 $C \setminus \{v\}$ 的两个度为一的顶点正是 v 在 $V(C)$ 中的两个邻点。由此可知，我们可以重构 C。□

现在考虑如何重构图中其他的边（即不在环上的边），其中最小环的大小至少为 $k+1$。设 C 为一个环，设 T 为一棵至少包含两个顶点的根树。我们称将 T 的根与 C 中的一个顶点识别所得的图为<κaзstyle id='6'>环上有根树。

引理14。 设 G 为一个已知围长至少为 $k+1$ 的图。那么，如果 G 恰好包含一个环，且如果 $|V(G)| \geq k+2$，则可以根据其连通 k-集合重构 G 。

证明。 设 G 是一个围长至少为 $k+1$ 且至少有 $k+2$ 个顶点的图。不妨设 G 恰好包含一个诱导环 C，根据引理 13，我们可以识别出 G 具有该环，并将其重构。对于每个 $u \in V(G) \setminus V(C)$，我们称从 u 到 C 的<κaзstyle id='13'>距离 为从 u 到 $V(C)$ 中某个顶点的最短路径长度。

对于 $v \in V(C)$，我们可以确定一个包含它的、由 $k-1$ 个顶点组成的连通顶点集 S。此外，$u \notin V(C)$ 与 v 相邻，当且仅当 $S \cup \{u\}$ 是连通的。因此，我们可以重构由 C 以及与 C 距离为一的所有顶点所诱导的图。

令 $\ell > 1$ 为一个整数。令 X 为 G 中与 C 的距离至少为 ℓ 的顶点集，并假设 $X \neq \emptyset$。假设根据归纳法（关于 ℓ），我们已经重构了 $G \setminus X$。令 u 为一个与 C 的距离为 $\ell-1$ 的顶点。利用从 u 到 C 的最短路径上的顶点，并根据需要使用来自 C 的顶点，我们选取一个由 $k-1$ 个顶点组成的连通顶点集 S，使得 $u \in S$ 是唯一一个与 C 的距离为 $\ell-1$ 的顶点。然后，对于每个 $x \in X$，顶点 u 与 x 相邻，当且仅当 $S \cup \{x\}$ 是连通的。这样，我们就重构了 G 的子图，该子图由与 C 的距离至多为 ℓ 的顶点组成，直到 X 为空且图被重构完毕。引理得证。□

现在我们可以证明定理 7，下面重新陈述该定理。

定理 7。 设 $k \geq 4$ 为一个整数。任何一个至少含有 $2k-1$ 个顶点、已知不含长度至多为 k 的圈的图，都可以由其连通 k-集合确定。

证明。 设 G 是一个至少含有 $2k-1$ 个顶点的连通图。假设已知 G 不含长度至多为 k 的圈。应用引理 13，我们可以识别出所有诱导一个圈的子集（以及圈上顶点的排列顺序）。如果 G 是无环的，那么根据定理 5，可以由其连通 k-集合重构 G 。因此，我们可以假设 G 含有某个圈。

然后，我们可以如下重构 G 的其余边。令 U 表示 G 中所有诱导环的顶点集之并。令 C 为 G 中的某个诱导环。于是， C 是 $G[V \setminus U \cup V(C)]$ 的某个连通分支中的唯一环。我们可以使用引理14重构该连通分支，并记录找到的边。对每个诱导环重复此过程，我们便记录下 G 的所有边：事实上，由于假设 G 是连通的，每条边都必须至少与其中一个诱导环相连。证明完毕。□

我们强调，仅凭连通的 k-集合，我们并不总能识别 出图是否含有长度为 3、.....、k 的环，即使该图非常大。事实上，如果我们知道三个顶点 u、v、w 具有相同的邻点（不计入 u、v、w 自身），并且构成一个连通三元组，那么我们永远无法区分它们所诱导的是三角形还是其他图形。