arXiv:2303.06619v1 [math.RT] 12 Mar 2023

按 Bruhat序通过同构对 Coxeter 群上的商进行分类

JOSEPH NEWTON

ABSTRACT. 我们对 Bruhat序中所有商 W/W_J 进行同构分类，其中（W， S）是一个 Coxeter 系统， W_J 是 W 的一个抛物子群。特别地，非平凡同构仅分为少数几种情形，且受到严格限制；所有这些情形中， W 都是有限的，并且 W_J 是一个极大抛物子群。由此可立即将 Kac-Moody 代数的范畴 $\mathcal{O}$ 的支配块与反支配块按等价进行分类。

1. INTRODUCTION

本文扩展了 Coulembier 在 [Co1] 中的一项结果，该结果对有限 Coxeter 群上 Bruhat序中的所有商进行了同构分类。这项工作受到对有限半单李代数的 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 中各块的研究启发；研究表明，当且仅当两个块通过 Weyl 群对应的偏序集同构时，这两个块才是等价的。在本文中，我们将 Bruhat 偏序集的分类扩展到所有有限和无限的 Coxeter 系统，进而将范畴 $\mathcal{O}$的块分类扩展到更一般的 Kac-Moody 代数。

我们的主要结果如下：

定理 1。 设 W、U 是不可约*Coxeter*群，分别具有抛物子群 W_J、U_K。当且仅当有序对 （W、 W_J） 和 （U、 U_K） 属于以下情形之一时， W/W_J 和 U/U_K 作为带有 *Bruhat* 序 的偏序集同构：

(1) $(I_2(n)\ A_1) \leftrightarrow (A_{n-1}, A_{n-2})$，适用于 $n \geq 4$；*(2)* $(B_n, B_{n-1}) \leftrightarrow (A_{2n-1}, A_{2n-2})$，适用于 $n \geq 3$；*(3)* $(B_n, B_{n-1}) \leftrightarrow (I_2(2n)\ A_1)$，适用于 $n \geq 3$；*(4)* $(B_n, A_{n-1}) \leftrightarrow (D_{n+1}, A_n)$，适用于 $n \geq 3$；*(5)* $(H_3, H_2) \leftrightarrow (D_6, D_5)$（表示 $H_2 = I_2(5)$）；*(6)* $W = W_J$ 和 $U = U_K$；*(7)* 存在一个群同构 $W \to U$，其限制为一个同构 $W_J \to U_K$。

简言之，我们得到了一个引人注目的结果：只凭单个非平凡商上的 Bruhat序，就能恢复一个不可约 Coxeter 群，只有由 (1)–(5) 列出的少数例外。我们在第2节证明这些例外对是同构，并在第3节和第4节证明不存在其他同构。该结果还可推广至可约 Coxeter系统，如下所示：

定理 2. 设(W, S)和(U, T) 是 *Coxeter* 系统，且 $J \subseteq S$, $K \subseteq T$。那么$W/W_J \cong U/U_K$ 作为带 *Bruhat*序的偏序集，当且仅当存在不交并$S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n$和 $T = T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_n$，满足 $n \in \mathbb{N}$（并且其中可能有一些 S_i或 T_i为空），使得(W_{S_i}, S_i)和(U_{T_i}, T_i)各自都是不可约或平凡的 *Coxeter* 系统，并且对于所有 $1 \leq i \leq n$， $W_{S_i}/W_{S_i \cap J} \cong U_{T_i}/U_{T_i \cap K}$ 作为偏序集。

这在 [Co1，定理 3.2 中得到了证明。1], 不过，我们也在第 3.4 节给出一个证明。图 1 展示了可约系统偏序集之间非同构的一个示例（参见

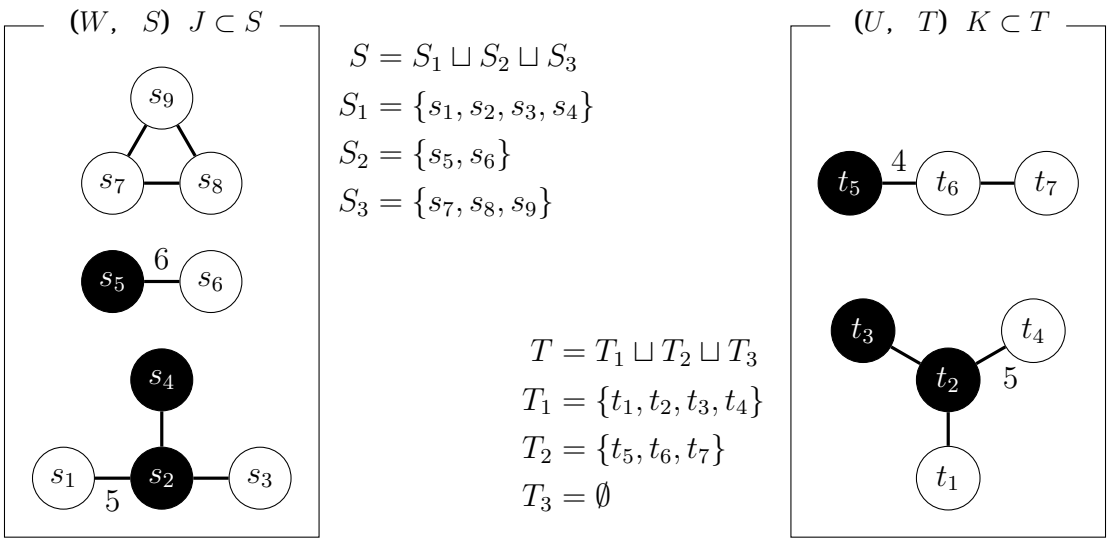


FIGURE 1.Coxeter 系统及具有同构商偏序集的子群 $W^J \cong U^K$ 根据定理 2。其中的生成元 J, K 以白色绘制，其余以黑色绘制。同构 $W_{S_i}/W_{S_i\cap J} \cong U_{T_i}/U_{T_i\cap K}$ 对于 $i = 1, 2, 3$ 是定理 1 中情形（7）、（3）、（6）的示例。

第 2 节中的记号）。沿用 [Co1], 中的相同方法，我们现在可以立即得到一个应用：

定理 3。设 $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}' \supset \mathfrak{b}' \supset \mathfrak{h}'$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的可对称化 *Kac-Moody* 代数，分别具有相应的 *Borel* 子代数和 *Cartan* 子代数，并设 $\mathcal{W}$、$\mathcal{W}'$ 是它们的 *Weyl* 群。假设 $\mathcal{O}_\Lambda$、$\mathcal{O}'_{\Lambda'}$ 分别是范畴 $\mathcal{O}$、$\mathcal{O}'$ 关于 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}'$ 的块，它们位于临界超平面之外，并且存在权 $\lambda \in \Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ 和 $\lambda' \in \Lambda' \subset (\mathfrak{h}')^*$，二者要么都是支配的，要么都是反支配的。那么，存在范畴等价 $\mathcal{O}_\Lambda \simeq \mathcal{O}'_{\Lambda'}$，当且仅当 $\mathcal{W}(\Lambda)/\mathrm{Stab}(\lambda) \cong \mathcal{W}'(\Lambda')/\mathrm{Stab}(\lambda')$ 作为带 *Bruhat*序的偏序集同构。

关于该定理的陈述，我们采用 [Fi1]和 [BS] 中的记号，更多细节见第 5.1节。按照 [Co1] 中的记号，这可以更简洁地写作

$$\mathcal{O}(W, W_J) \simeq \mathcal{O}(U, U_K) \iff W/W_J \cong U/U_K$$

其中 (W, S)、(U, T) 是任意的晶体学 Coxeter 系统，且 $J \subseteq S$, $T \subseteq K$。定理 3 的证明沿用了 [Co1] 中的相同方法，详见第 5.1节。

致谢。本研究是在 Kevin Coulembier 指导下完成的一项荣誉项目，作者衷心感谢他的指导与讨论。

2. BACKGROUND

本文所介绍的 Coxeter 系统研究取自 [BB], ，全文将沿用他们的记号。

2.1. Coxeter 系统。设 S 为一个有限集合。Coxeter 矩阵是一个函数 $m : S\times S \to \{1, 2, \ldots, \infty\}$，它是对称的，并且对所有 $s, t \in S$，均有 $m(s, t) = 1 \iff s = t$。与 S 和 m 相对应的 Coxeter 群 W 具有如下生成元表示

$$W = \langle S \mid (st)^{m(s,t)} = e \text{ for all } s, t \in S\rangle$$

其中 e 是群单位元。我们将 $\ell(w)$ 写作满足以下条件的最小数目 $n \in \mathbb{N} : w \in W$ 可以表示为 n 个生成元 $s_1 \ldots s_n$ 的乘积，而这样的乘积称为

约化表达式。Bruhat序是 W 上的偏序，其中 $u < v$ 意味着存在反射 $t_1, \ldots, t_n \in \{wsw^{-1} \mid w \in W, s \in S\}$，满足 $v = ut_1 \ldots t_n$，并且对所有 i 都有 $\ell(ut_1 \ldots t_i) < \ell(ut_1 \ldots t_{i+1})$。我们用 $\lhd$ 表示 Bruhat序中的覆盖关系。记由 $J \subseteq S$ 生成的子群为 W_J，称为抛物子群（ W_J 的共轭子群也称为抛物子群，但它们也可以写成某个 S 和 J 的选择下的形式 W_J ）。 W_J 的左陪集各自都有一个最短长度代表元，我们将这些代表元的集合记为 W^J。将 Bruhat序限制在 W^J 上，便在商 W/W_J 上诱导出一个序。

现在，让我们将上述所有内容改写为一种更具组合性的语言，本文将始终使用这种语言。 W 是由词 S^* 构成的自由群上的商，关于由以下内容生成的等价关系：

- $ss = e$ 对于每个 $s \in S$ （在沿 $ss \to e$ 方向进行时称为幂零变换）；
- $\underbrace{ststs\ldots}_{m(s,\,t)\text{ 项}} = \underbrace{tstst\ldots}_{m(s,\,t)\text{ 项}}$ 对于不同的 s， $t \in S$ 满足 m（s， t） $\neq \infty$（称为 辫变换）。

我们有时会通过加下划线来区分 S^* 的元素与 W 的元素，例如 w。我们回顾 [BB]中的若干结果，这些结果将 Bruhat序与约化表达式联系起来：

定理 2.1。设 w， $u \in W$。

(1) 词性质： w 的任意表达式都可以通过一系列幂零变换和辫变换转化为 w 的约化表达式，并且 w 的任意两个约化表达式都可以通过一系列辫变换相互连通。*(2)* 子词性质：如果 $u \leq w$ 且 $w = s_1 s_2 \ldots s_q$ 是一个约化表达式，那么存在一个约化表达式 $u = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k}$，使得 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq q$ （称为子词）。反之，如果存在 u 的一个约化表达式，它是 w 的一个约化表达式的子词，那么 $u \leq w$。*(3)* $u \lhd w$ 当且仅当 $u < w$ 且 ℓ（w） $= \ell$（u） $+ 1$，也就是说， w 的任意约化表达式都可以通过删除一个生成元转化为 u 的约化表达式。*(4)* 链性质：如果 $u < w$，那么存在元素 x_0、……、 $x_k \in W$、 $k \geq 1$，使得$u = x_0 \lhd x_1 \lhd \cdots \lhd x_k = w$。*(5)* $w \in W^J$ 当且仅当 w的每个约化表达式中最右侧的生成元都不属于 J。*(6)* 性质 *(1)*、*(2)*、*(3)* 和 *(4)* 在 W^J 中同样成立。

本文将重点讨论集合 W^J，而非商 W/W_J，并将 (5) 作为其定义。我们将频繁用到词性质的以下几个特殊情形：

推论 2.2。 设 $w \in W$ 和 w 是 $\underline{w}$ 的表达式。

- 如果无法对 w 进行辫变换或幂零变换，那么它必定是约化的。
- 如果 w 是约化的，那么 $s \in S$ 出现在 $\underline{w}$ 中当且仅当 $s \leq w$；也就是说， w 的所有约化表达式都由同一组生成元构成。

2.2. 图。我们通常用考克斯特图表示 m 中的信息；图中每个生成元对应一个节点，生成元对 s、 t 之间连有边，且满足 m（s、 t） ≥ 3。若 m（s、 t） ≥ 4，则在相应的边上标记 m（s、 t）。按照 [Co1], 中的记法，我们用节点着色来表示考克斯特群与抛物子群组成的一对（W、 W_J）：将对应于 J 中元素的节点标为白色，其余节点均标为黑色，并将这种着色图称为 bw-Coxeter 图。

为了表示偏序集 W^J，我们绘制一个图，为每个元素设置一个节点，并为每个覆盖关系 $u \lhd v$ 设置一条边。我们总是按长度将元素从下到上排列，并将单位元置于底部。请注意，文献中的***Bruhat*** 图 还会在 u 与 v 之间连边，只要对于某个与 $s \in S$ 共轭的反射 t，$v = tu$ 成立；为简便起见，我们将省略这些额外的边。

2.3. **术语**。 我们称一个考克斯特系统为：

- 有限，如果 W 是有限群；
- 晶体型，如果对于所有不同的 $s,\ t \in S,\ m(s,\ t) \in \{2,3,4,6,\infty\}$；
- 单边，如果对于所有不同的 $s,\ t \in S,\ m(s,\ t) \in \{2,3\}$（也就是说，考克斯特图没有带标号边）；
- 直角型，如果对于所有不同的 $s,\ t \in S,\ m(s,\ t) \in \{2,\infty\}$。

有限 Coxeter 群均已命名，并列于附录中以供参考。记号 (W, W_J) 有时可能会产生歧义，例如 (B_3, A_1) 根据选取哪个生成元作为 B_3 的生成元 A_1，可能指代 3 个不同的对。不过，不难验证，定理 1 中的情形在此意义下均无歧义，并且每种情形下，抛物子群在重新标记意义下都只有一种选取。

2.4. 有限 Bruhat 偏序集的同构。对于不可约系统 (W, S) 和 (U, T)，显然只要 bw-Coxeter 图相同，就会出现同构 $W^J \cong U^K$；更正式地说，若存在双射 $\sigma : S \to T$，使得 $m(s_1, s_2) = m(\sigma(s_1)\ \sigma(s_2))$ 且 $s_1 \in J \iff \sigma(s_1) \in K$ 对所有 $s_1, s_2 \in S$ 均成立，便是如此。因此，此时称这两对 (W, W_J) 和 (U, U_K) 同构。这给出了定理 1 中的情形 (7)，而情形 (6) 则是 W^J和 U^K 均为平凡的情况，即每个偏序集都只包含恒等映射。

现在我们证明，情形 (1)-(5) 给出了同构偏序集。晶体型情形将在 [Co1] 中讨论，这些情形可由其在表示论中的应用得出；不过，我们也将在下文给出一种纯粹的组合方法。还有两种新情形未在 [Co1] 中讨论，因为它们是非晶体型的；这对 $(I_2(m)\ A_1)$ 可视为情形 (B_2, A_1) 和 (G_2, A_1) 的推广，而 (H_3, H_2) 则是一个例外，但其偏序集相对容易描述。

命题 *2.3*。在 $|W^J|$元素上，偏序集 W^J 是全序，其中，当有序对 (W, W_J) 为 $(I_2(m)\ A_1)$、(A_n, A_{n-1}) 或 (B_k, B_{k-1}) 时，$|W^J|$ 分别等于 m、$n+1$ 或 $2k-1$。也就是说，我们有定理 *1* 中的同构 *(1)*、*(2)* 和 *(3)*。

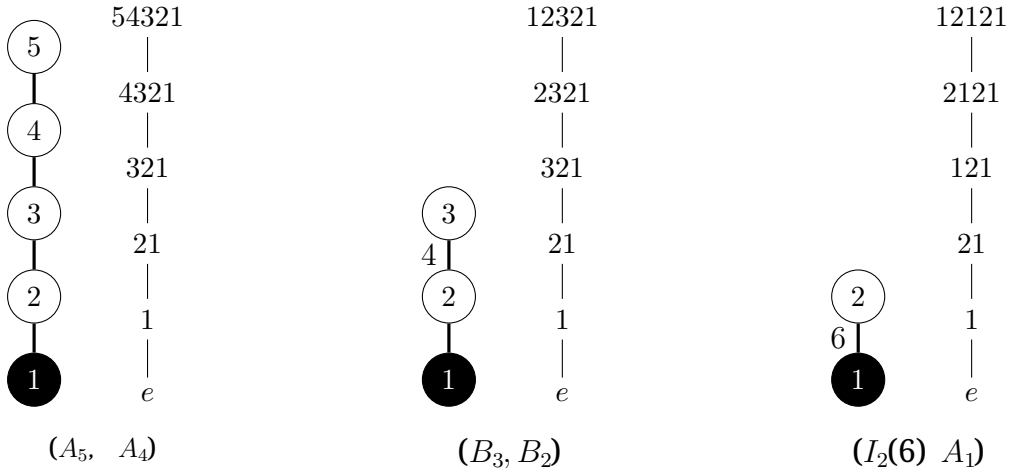


FIGURE 2. Bruhat序为全序的偏序集示例。

证明。 $(I_2(m),\ A_1)$ 与 $S=\{s,t\}$、 $J=\{t\}$ 给出由以下元素组成的 W^J

$$e<s<ts<sts<tsts<\dots$$

其中最大元的长度为 $m-1$（或者当 $m=\infty$ 时没有最大元）。$(A_n,\ A_{n-1})$ 当 $S=\{s_1,\dots,s_n\}$, $J=\{s_2,\dots,s_n\}$ 时，得到由 W^J 组成的

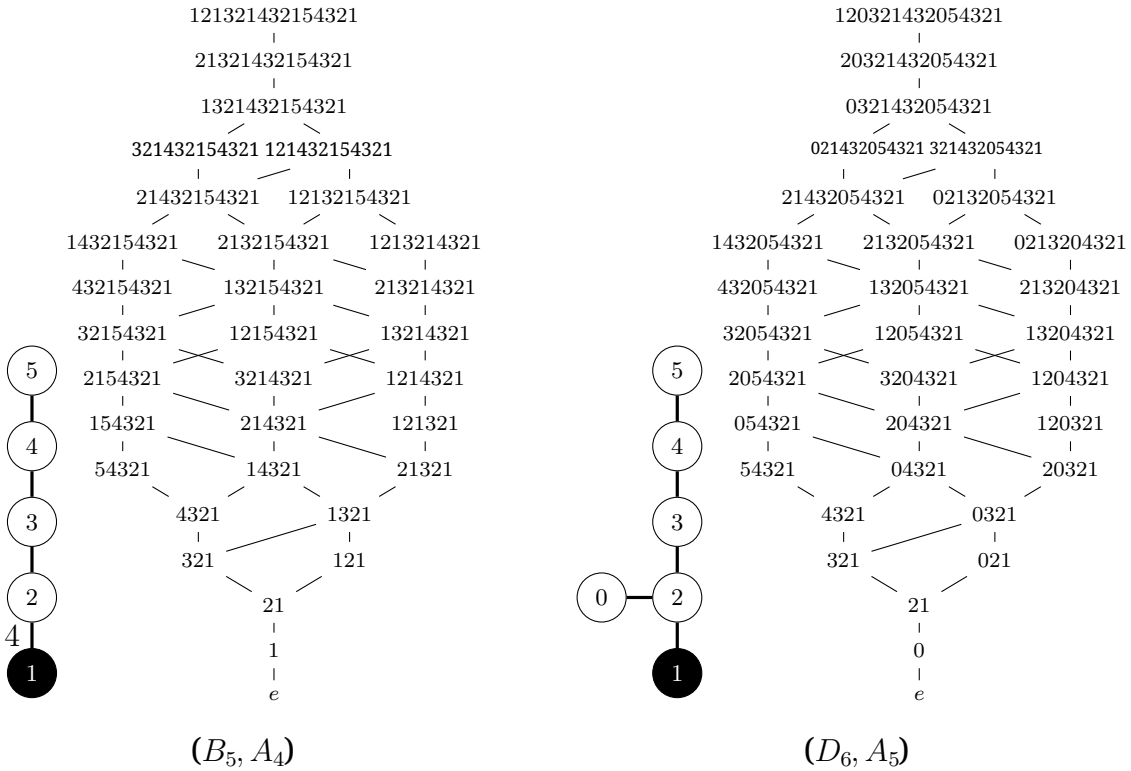
$$e<s_1<s_2s_1<s_3s_2s_1<\cdots<s_n\cdots s_1.$$

Fina地，$(B_k,\ B_{k-1})$ 当 $S=\{s_1,\dots,s_k\}$, $J=\{s_2,\dots,s_k\}$ 时，得到由 W^J 组成的 f

$$e<s_1<s_2s_1<s_3s_2s_1<\cdots<s_k\cdots s_1<s_{k-1}s_k\cdots s_1<\cdots<s_1\cdots s_k\cdots s_1.$$

不难验证，在这些表达式中加入任何其他生成元，所得元素都不属于 W^J。定理 1 中的前三个同构随后由元素数量的计数得到。 □

命题 2.4。 设 $(W,\ W_J)=(B_n,\ A_{n-1})$ 和 $(U,\ U_K)=(D_{n+1},\ A_n)$ 满足 $n\geq 3$。则 $W^J\cong U^K$ 作为偏序集，即我们有定理 *1* 中的同构（*4*）。



(B_5, A_4)　　(D_6, A_5)

FIGURE 3. 同构 $B_n/A_{n-1}\cong D_{n+1}/A_n$ 与 $n=5$的示例。

证明。 将下图中的 (W,S) 和 (U,T) 的生成元记作图示所示。



$(W,\ W_J)=(B_n,\ A_{n-1})$　　$(U,\ U_K)=(D_{n+1},\ A_n)$

我们实际上可以如下明确描述 B_n/A_{n-1} 的元素。固定 $w \in W^J$；任意约化表达式 w 都可以写成 $w_1 s_{k_1} s_{k_1-1} \dots s_1$，其中涉及生成元 w_1 和 $1 \le k_1 \le n$ 的某个乘积。选取 w，使得 k_1 最大；对于 $1 \le i \le n$，令 $s^{(i)}$ 为 w_1 中最靠右的 s_i 项（若存在）。固定 $i > 1$，并假设 $s^{(i)}$ 与 w_1 中位于其右侧的每个生成元都可交换，从而导出矛盾。

- 若 $i < k_1$，则通过辫子移动将 $s_{(i)}$ 移入 $s_{k_1} \dots s_1$，可得 $w \notin W^J$，因为

$$s_i s_{i+1} s_i \dots s_1 = s_{i+1} s_i s_{i+1} s_{i-1} \dots s_1 = s_{i+1} \dots s_1 s_{i+1}.$$

- 若 $i = k_1$，则可对 $s_{(i)}$ 执行幂零移动，并且 s_{k_1} 与 w 约化相矛盾。
- 若 $i = k_1 + 1$，则我们得到一个以 $s_{k_1+1} \dots s_1$ 结尾的约化表达式，这与 k_1 的极大性相矛盾。

- 若 $i > k_1 + 1$，则可将 $s_{(i)}$ 移至 w 的最右端，这与 $w \in W^J$ 相矛盾。

因此，在 $s^{(i)}$ 右侧的 w_1 中必定存在某个“阻挡”生成元。设该生成元为 s_{i+1}，于是 $s^{(i+1)}$ 位于 $s^{(i)}$ 右侧。用同样的推理可知，$s^{(i+1)}$ 右侧必定存在一个阻挡生成元，它只能是 s_{i+2}，因为 $s^{(i)}$ 位于 $s^{(i+1)}$ 左侧。重复这一过程，我们会在 $s^{(n)}$ 处得到矛盾，因此假设不成立，而 $s^{(i)}$ 对应的阻挡生成元是 s_{i-1}。对 $s^{(i-1)}, s^{(i-2)}, \dots$ 重复上述过程可知，w_1 要么是平凡的，要么具有 $w_2 s_{k_2} \dots s_1$ 的形式。再次选取 w，使得 k_2 达到极大值；不难验证 $k_2 < k_1$（否则，将生成元 $s_{k_2} \dots s_1$ 尽可能向右移动，再应用一系列辫子移动）。随后重复上述整个过程，得到 $w = (s_{k_m} \dots s_1)(s_{k_{m-1}} \dots s_1) \dots (s_{k_1} \dots s_1)$，其中 $1 \le k_1 < \dots < k_m \le n$ 为某些整数。

同样的过程也适用于 D_{n+1}/A_n，不过在考虑 $t^{(2)}$ 时，我们可以选择 t_1 或 t_0 作为阻挡生成元。我们必须选择上一个序列 $t_{k_j} \dots t_2 t_{(1 \text{ 或 } 0)}$ 中未选取的那个，否则就可以对 $t_1 t_2 t_1$ 或 $t_0 t_2 t_0$ 执行辫移动，从而得到矛盾。因此，我们看到存在一个双射 $W^J \to U^K$：给定 $w = (s_{k_m} \dots s_1)\ (\text{v13})\ \dots\ (s_{k_1} \dots s_1) \in W^J$，我们将每个 s_i 替换为 t_i（$i > 1$），并将每个 s_1 从右向左交替替换为 t_1 或 t_0。根据子词性质，这是 Bruhat 序的一个同构。□

命题 2.5。 *H_3/H_2 和 D_6/D_5 作为偏序集是同构的，也就是说，我们有定理 1 中的同构 (5)。*

证明。直接计算得出图 4 所示的偏序集。 □

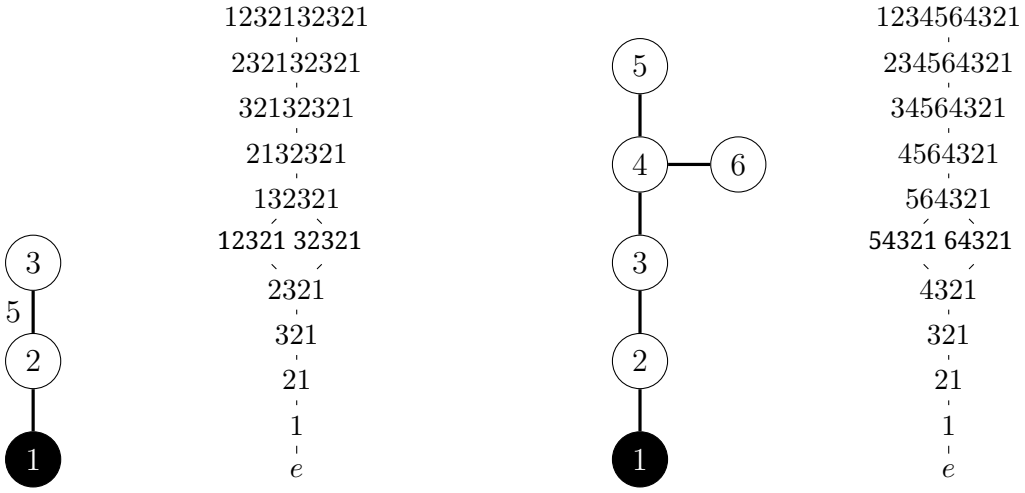


FIGURE 4. $(H_3,\ H_2)$ 的考克斯特图和偏序集（左）以及 $(D_6,\ D_5)$ 的考克斯特图和偏序集（右）。

3. Machinery for the classification

现在的目标是仅凭 $\leq$ 上的 Bruhat序 W^J 重构考克斯特图。若能做到这一点，那么只有当两个考克斯特对彼此同构时，它们才会产生同构偏序集（定理 1中的例外情形 (1)-(6) 除外）。我们可以完全利用偏序集的结构推导出商 W^J 的某些特征，长度函数 ℓ 就是一个简单的例子：

构造。将 W^J 的唯一最小元记为 e，并将 $\ell(e) = 0$ 记为。通过以下方式归纳地定义每个元素的长度：如果所有小于 w 的元素的长度都小于 n，则令 $\ell(w) = n$。

在本节中，我们定义并推导若干工具的性质，这些工具将有助于区分非同构偏序集。

3.1. 链状元素。

我们将使用的主要工具是所谓的链状元素，它们构成的子集与Coxeter 图的结构非常相似。

定义 3.1。如果一个元素 $w \in W^J$ 是半链状的，则称其在 W^J 中恰好覆盖一个元素。我们将该元素记为 $w' \lhd w$。如果 w 是半链状的，并且 w' 是链状的或 e，则递归地称 w 为链状的。换言之，当且仅当存在唯一的覆盖关系链 $e \lhd \cdots \lhd w$ 时，w 才是链状的。我们将链状元素的集合记为 $C(W^J)$。

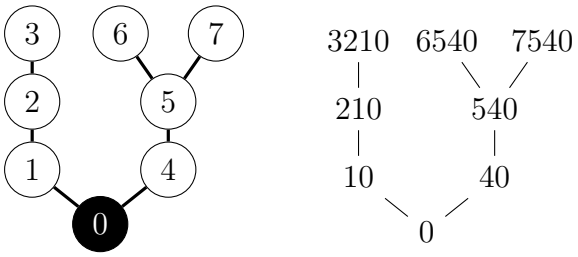


Figure 5. 一个单边考克斯特商（左）及其全部链状元素（右）。

备注 3.2。 的 Bruhat 图 $(W^J) \cup \{e\}$ 自然具有树结构。图 5说明了我们为何关注链状元素；在某些特殊情况下（当$|J| = |S| - 1$且 Coxeter 图没有带标号边或环时），$C(W^J)$ 的图恰好与 Coxeter 图具有相同的形状。下一节将通过研究简单元素证明这一点。

命题 3.3。设 $w \in W^J$ 是半链状的。

(a) 我们有 $w = sw'$，其中 $s \in S$，并且 w 的每个约化表达式都以 s 开头（或等价地说，最左生成元 s 不能通过辫变换移动）。*(b)* 如果 w 是链状的，那么它具有唯一的约化表达式。

证明。(a) w 的任意约化表达式都必须包含 w' 的一个约化表达式，记作 $w' = s_1 \dots s_n$。于是，对于某个 $0 \leq i \leq n$，有 $w = s_1 \dots s_i s s_{i+1} \dots s_n$，并且 $s \in S$。如果 $i = 0$，那么 $w = sw'$。否则，令 $u = s_2 \dots s_i s s_{i+1} \dots s_n$。我们有 $u \in W^J$，且 u 是约化的；否则将存在一系列辫变换和幂零变换，使 u 变得更短或以 J 中的某个元素结尾，而同样的变换也可以对 $w = s_1 u$ 执行，这与 $w \in W^J$ 约化相矛盾。因此 $u \lhd w$，所以要使 w 为半链状，我们需要 $u = w'$，从而 $w = s_1 u = s_1 w' < w'$，矛盾。因此唯一的可能性是 $w = sw'$，并且 w 的每个约化表达式都必须具有这种形式。

(b) 所有满足 $\ell(w)$ 的 $w \in W^J$ 均为链状，且具有唯一的约化表达式。因此，由 (a) 以及对 $\ell(w)$ 的归纳法可得结论。□

3.2. **简单元素**。 首先，我们刻画单边考克斯特群中的链状元素，并概述一种从 Bruhat 偏序集确定考克斯特图的构造。这将为一般考克斯特群的构造奠定基础，因此请注意，本节并不 假设 W 始终为单边考克斯特群。

定义 3.4。 如果一个元素 $w \in W^J$ 是简单元 ，则称其具有如下形式的表达式 $w = s_k s_{k-1} \dots s_1 s_0$ ，其中 $k \geq 0$ 满足以下条件:

- s_0、……、 $s_k \in S$ 两两不同;
- $s_0 \in S \setminus J$ 并且 s_1、……、 $s_k \in J$;
- $m(s_i,\ s_j) \geq 3$ 当且仅当对所有 $i,\ j \in \{0, \dots, k\}$，均有 $|i-j| = 1$。

根据词性质，这是 w 的唯一约化表达式。

定理 3.5. 我们有 :

(a) 若 $w \in W^J$ 是简单元，则 w 是链状的。*(b)* 若 W 是单边的，则 $w \in W^J$ 是简单元当且仅当 w 是链状的。

证明。 $S \setminus J$中的所有元素都是 W^J中的链状元素。对于 $\ell(w) = 2$，我们看到链状元素必为 $s_1 s_0$ 的形式，其中 $s_0 \in S \setminus J$、 $s_1 \in J$ 和 $s_1 s_0 \neq s_0 s_1$。不可能有 $s_1 \notin J$ ，否则就会有 $s_0,\ s_1 \lhd s_1 s_0$ ，且 $s_1 s_0$ 不是半链状的。完成这些基例后，我们现在对 $\ell(w)$进行归纳。

对于 (a)，假设 $w = s_k \dots s_0$ 是简单元，并证明 w 是链状的。设 $u \lhd w$ 由移去一个生成元 s_i得到。若 $s_i \neq s_k$ ，则 s_{i+1} 与 u中位于它右侧的每个生成元都交换，因此 u 的一个约化词为 $s_k \dots s_{i+2} s_{i-1} \dots s_0 s_{i+1}$，它以 J中的一个生成元结尾，所以 $u \notin W^J$。若 $s_i = s_k$，则根据归纳法， $u = s_{k-1} \dots s_0$ 是链状的，因此 w 只覆盖一个元素 $w' = u$ ，且 w 是链状的。

现在令 W为单边。对于 (b)，假设 w 为链状，因此 $w' = s_k \dots s_0 \in W^J$根据归纳法是简单元，且 $k \geq 1$。命题 3.3 给出 $w = sw'$ ，其中 $m(s,\ s_k) \geq 3$。

- 假设 $s < w'$，即 $s = s_i$ 对于某个 i。由于 $m(s,\ s_k) \geq 3$ ，我们必有$s = s_{k-1}$，因此 $w = s_{k-1} w' = s_{k-1} s_k s_{k-1} \dots s_0$。由于 W是单边的，我们有辫变换 $s_{k-1} s_k s_{k-1} \to s_k s_{k-1} s_k$，这与命题 3.3矛盾。
- 假设 $s \not< w'$，且 $s \notin J$或 $m\ (s_i,\ s)\ \geq 3$对于某个 $i \in \{0, \dots, k-1\}$。那么从 w 中移除 s_k 便得到 sw''的一个约化表达式；由于 $s \notin J$ 或 s 无法通过辫变换越过 s_i ，该表达式属于 W^J 。但此时 $sw'' \lhd w$且 $w' \neq sw''$，因此 w 不是半链状。
- 仅剩下这种情况： $s \not< w'$、 $s \in J$ 和 $m(s_i,\ s) \geq 3 \iff s_i = s_k$对所有 $s_i < w'$ 均成立。于是， w 是简单元素。

This 覆盖了所有情况，因此我们通过归纳证明了任意链状的 w 都是简单元素 . □

直观地说，每个长度大于 1 的简单元素都对应一条路径：从一个黑色节点出发，经过一串白色节点，且路径中的节点无论如何选取，都不会构成一个环。这意味着，当存在环或多个黑色节点时，每个白色节点可能对应多条路径。为此，我们尝试根据简单元素的最左生成元将其归入等价类，如图 6 所示。下一个定义将实现这一点。

定义 3.6. 对于 $u,\ v \in W^J$，我们记

$$L(u,v) = \min\{\ell(w) \mid w \in W^J,\ u \leq w,\ v \leq w\}$$

由于 W^J 是一个有向偏序集（参见 [BB]中的命题 2.2.9）。于是我们定义 $\sim$在 $C(W^J)$上的关系

$$u \sim v \iff L(u,v) = L(u',v) = L(u,v').$$

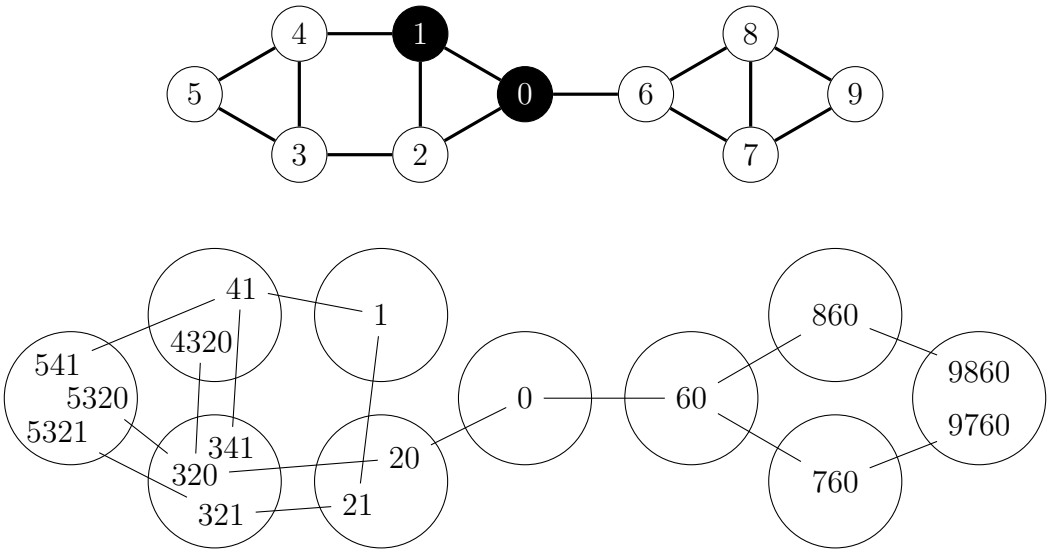


FIGURE 6. 一个单边 Coxeter 对（上），以及按其最左生成元收集为等价类的所有链状元素（下）。链状元素之间的边表示覆盖关系。注意，边 1-0 和 7-8 未在覆盖关系中表示；这些情形在定理 3.10的第 2(b) 步中考虑。

命题 3.7。设 $u = s_1 \dots s_n$ 和 $v = t_1 \dots t_k$ 是 u、$v \in C(W^J)$ 的唯一约化表达式。假设 $r = r_1 \dots r_m$ 是 u 和 v 的一个（可能退化的）最长子词，也就是说，$m \geq 0$ 是满足以下条件的极大子词：$r_1, \dots, r_m \in S$ *satisfying*

$$r_1 = s_{i_1},\ r_2 = s_{i_2},\ \dots,\ r_m = s_{i_m} \text{ with } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n;$$
$$r_1 = t_{j_1},\ r_2 = t_{j_2},\ \dots,\ r_m = t_{j_m} \text{ with } 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq k.$$

于是我们有 $L(u,\ v) = \ell(u) + \ell(v) - \ell(r) = \ell(u) + \ell(v) - m$。

证明。记 $i_0 = j_0 = 0$、$i_{m+1} = n+1$、$j_{m+1} = k+1$。令 $S^*(u, v)$ 为形如 $x_0 r_1 x_1 r_2 \dots r_k x_k$ 的词的集合，其中 $r = r_1 \dots r_m = s_{i_1} \dots s_{i_n} = t_{j_1} \dots t_{j_n}$ 是同时属于 u 和 v 的任意最长子词，而每个 x_p 都是元素 s_i 的一个排列，其中 $i_p < i < i_{p+1}$ 对应 t_j，$j_p < j < j_{p+1}$ 对应 s_i，并且 t_j 项的顺序保持不变，m 项的顺序也保持不变。由于 u 是极大的，这些恰好是包含 v 和 ℓ 作为子词的所有最小长度词，其长度为 $w(=\ell)\ u(+\ell)v(-m)\ s_i t_j$。这些词也不含有满足 $t_j s_i$ 的 $s_i = t_j$ 或 $w \in S^*$ 对，并且每个 $u(v, s_n)$ 都以 t_k 或 $S \setminus J$ 结尾，二者均属于 W^J。要证明它们是 S^* 中元素的约化表达式，只需证明 $u(v, W)$ 在 $(S,)$ 的辫变换下封闭。

我们可以看到，对 $w \in S^*(u,\ v)$ 所能进行的任何辫变换，都不能包含来自同一 x_p 项的一个 s and$t$；否则，我们要么会在 u 或 v 中进行幂零移动，要么对于同一 x_p 项中的某个 i，j，$s_i = t_j$，这将与 m 的极大性矛盾。现在假设我们可以对包含连续项 $t_{j_p-2} t_{j_p-1} r_p s_{i_p+1}$ 的序列进行辫变换。这意味着 $r_p s_{i_p+1} = t_{j_p-2} t_{j_p-1}$，因此 $r_1 \dots r_p s_{i_p+1} r_{p+1} \dots r_m$ 是 u 和 v 的子词，这与 m 的极大性矛盾。如果 r_p 右侧有 2 个项，或者在上述表达式中交换 s 和 t，同样的结论也成立。

现在假设我们有 $t_{j_p-1} = s_{i_p+1}$，并且可以对 $t_{j_p-1} r_p s_{i_p+1}$ 应用长度为 3 的辫变换，得到 $w^\dagger$。于是令 $r^\dagger$ 等于 r，但将其中的 r_p 替换为 $t_{j_p-1} = s_{i_p+1}$，由此可见，$r^\dagger$ 也是 u，v 和 $w^\dagger \in S^*(u,\ v)$ 的最长子词。对 $s_{i_p-1} r_p t_{j_p+1}$ 也同样成立，因此 $S^*(u,\ v)$ 在辫变换下是闭的。□

命题 3.8。 假设 u、$v \in C(W^J)$ 以及 s、$t \in S$，其中 $u = su'$ 和 $v = tv'$。

(a) $u \sim v$ 蕴含 $s = t$。*(b)* 如果 u、v 是简单元，那么 $u \sim v$ 当且仅当 $s = t$。

证明。 (a) 构造 $r = r_1 \dots r_m$ 和 u 的最长子词 v，并假设 $L(u, v) = L(u', v) = L(u, v')$。假设 $r_1 \neq s$，因此 r 也是 u' 的子词。然而

$$L(u', v) \leq \ell(u') + \ell(v) - m = \ell(u) - 1 + \ell(v) - m = L(u, v) - 1$$

我们得到矛盾。因此 $r_1 = s$，同理 $r_1 = t$，所以 $t = s$。

(b) 假设 $s = t$ 并构造 u 和 v 的最长子词 $r = r_1 \dots r_m$。如果 $r_1 \neq s$，那么 sr 将是 u 和 v 的更长子词，产生矛盾，因此 $r_1 = s = t$。但此时 $r_2 \dots r_m$ 是 u' 和 v 的最长子词；如果存在更长的子词 $r^\dagger$，那么 $sr^\dagger$ 将比 r 更长，并且是 u 和 v 的子词，产生矛盾。因此

$$L(u', v) = \ell(u') + \ell(v) - (m - 1) = \ell(u) + \ell(v) - m = L(u, v)$$

根据同样的推理，我们也有 $L(u, v') = L(u, v)$，因此 $u \sim v$。 □

因此，$\sim$ 是简单元素上的一个等价关系；当 W 为单边时，简单元素构成 $C(W^J)$。随后，我们可以通过为每个等价类指定一个节点，并在存在覆盖关系的地方绘制边，来重构 Coxeter 图。首先，我们给出一个也适用于非单边群的一般性陈述：

引理 3.9。 如果 s_n，……，s_0 满足 s_n，……，$s_1 \in J$，$s_0 \in S \setminus J$，并且对于 $0 \leq i < n$，s_i 与 s_{i+1} 通过一条边相连，那么在 $C(W^J)$ 中存在一个简单链状元，其起点为 s_n，终点为 s_0。特别地，如果 $s \in S$ 位于 $W(W_J)$ 的图的一个连通分支中，且该连通分支至少包含 $S \setminus J$ 中的一个元素，那么 s 就是某个简单链状元的唯一约化表达式中的最左生成元，该简单链状元属于 $C(W^J)$。

证明。 在满足上述条件的所有以 s_n 开头并以 s_0 结尾的序列中，取 s_n、……、$s_0 \in S$、$n \geq 0$ 使其长度最小。若对于某个满足 $|i - j| \geq 2$ 的 $i < j$，有 $m(s_i, s_j) = 2$，则 s_n、……、s_j、s_i、……、s_0 是一个更短的序列，矛盾。因此，$s_n \dots s_0$ 是简单元，因而是链状的。于是，如果 s 位于包含黑色节点的图的某个连通分支中，则取 $s_n = s$，并令 s_0 为距 s 最近的黑色节点。□

定理 3.10。 若 W 是单边且不可约的，并且 $J \neq S$，则在 W^J 上进行以下构造，即可得到该对 (W, W_J) 的 ***bw-Coxeter*** 图：

(1) 为 $\sim$ 的每个等价类绘制一个节点，并将对应于长度为 *1* 的元素的节点涂成黑色。

(2) 对于每一对不同的等价类 $U, V \subseteq C(W^J)$，如果存在 $u \in U, v \in V$ 满足以下任一条件，则用一条边连接相应的节点：*(a)* $u = v'$ 或 $v = u'$；或 *(b)* $u' = v'$，且 W^J 中恰有 *2* 个元素同时覆盖 u 和 v。

证明。 我们需要检查：如果 s、$t \in S$ 在 bw-Coxeter 图中有一条边，那么构造会画出一条边。如果 s、$t \in S \setminus J$，则由于 $s' = t' = e$，步骤 2 (b) 会画出一条边。如果 $s \in J$ 和 $t \in S \setminus J$ 之间有一条边，那么 $t \lhd st$，且步骤 2 (a) 会画出一条边。现在设 s、$t \in J$，并令 $ss_n \dots s_0 = sw$ 为引理 3.9所给出的简单链状。如果 $t \leq w$，则必有 $t = s_n$，因为 $m(s, t) \geq 3$。于是步骤 2 (a) 会画出一条边，证明完毕，因此设 $t \not\leq w$：

- 如果 $m(t, s_i) = 3$ 对某个 $i \leq n - 2$ 成立，那么假设 i 是极小的，我们有 $sts_i \dots s_0$ 链状，因而证明完毕。
- 如果对于 $i \leq n - 2$ 和 $= 3$ 有 $m(t, s_i) = 2$ 以及 $m(t, s_{n-1})$，那么 stw' 反而是链状的。

- 如果对于 $i \le n-1$ 和 $=3$ 有 $m(t,\ s_i)=2$ 以及 $m(t,\ s_n)$（因此，在图中 s、t 和 s_n 之间构成一个三角形），那么 sw 和 tw 满足构造中步骤 2 (b) 的要求，因为长度为 $\ell(w)+1$ 的 2 个元素是 $stw \neq tsw$。
- 如果对于所有 i，都有 $m(t,\ s_i)=2$，那么 tsw 是链状元素，我们就完成了。

这涵盖了所有情况。最后，我们检查第 2 (b) 步没有添加错误边。假设 $u'=v'$、$u=su'$、$v=tu'$ 和 $s,\ t$ 之间没有边相连。那么 $m(s,\ t)=2$，因此长度为 $\ell(u)+1$ 且大于 $u,\ v$两者的元素只有 1 个，即 $stu'=tsu'$。所以第 2 (b) 步正确地没有在 s 和 t 之间添加边。□

3.3. **对所有链状元素进行分类。** 现在，我们将链状元素的理论扩展到所有 Coxeter 群。这引入了一些非简单链状元素，它们是定理 3.10 中构造的冒充者，如图 7 所示；我们将对其进行分类。

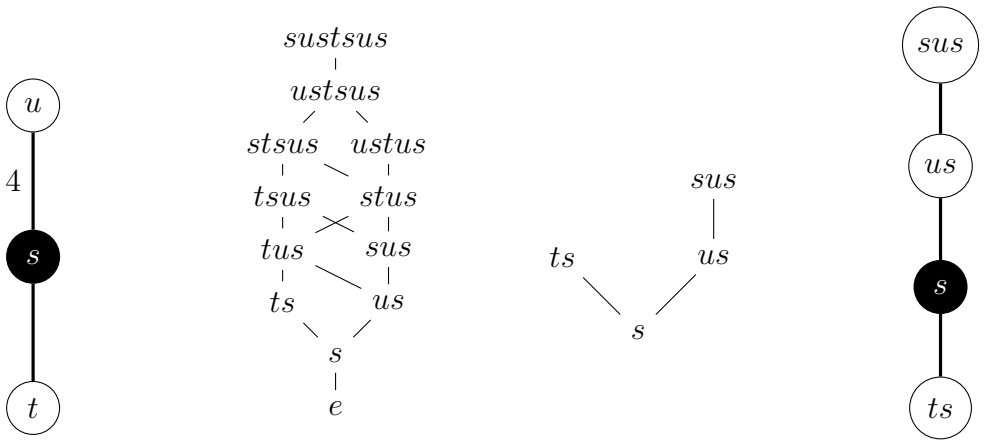


FIGURE 7. 由于命题 3.8 (b) 不适用于非简单元，定理 3.10 中的构造在存在带标号边时可能产生额外的冒充节点。在此例中，冒充节点是 sus，它是定理 3.11 中所述的形式（II）元素。

定理 3.11。 $w \in W^J$是链状的，当且仅当存在 s_0、.....、$s_k \in S$，使得$s_k \dots s_0$是简单链状的，且 w属于以下某一种形式：

(I) $w=s_k \dots s_0$，即 w是简单元。*(II)* $w=s_l s_{l+1} \dots s_k \dots s_0$与 $0 \le l < k$, $m(s_k, s_{k-1}) \ge 4$以及 $m(s_i, s_{i+1})=3$对于$l \le i < k-1$。*(III)*

$$w=\dots \underbrace{s_{k-1}s_k s_{k-1} s_k s_{k-1}}_{m \text{ terms}} s_{k-2} \dots s_0$$

与 $k \ge 2$和 $4 \le m < m(s_k, s_{k-1})$。

根据词性质，这是 w的唯一约化表达式。

注3.12。 图 8 展示了一个说明这三种形式的例子。满足 $u, v \in C(W^J)$ 的分支点 $u'=v'$ 非常有限，共有以下三种情况：

- $u=s_k s_{k-1} \dots s_0$, $v=ts_{k-1} \dots s_0$与 $t \in S$，即 u, v都是简单元；
- $u=s_k s_{k-1} \dots s_0$、$v=s_{k-2}s_{k-1} \dots s_0$，也就是说，$u$是简单元，$v$是形式（II）；
- $u=s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$、$v=s_{k-2}s_{k-1}s_k \dots s_0$，也就是说，$u$、$v$分别是形式（III）和形式（II）。

还需注意形式（II）元素的一个特殊之处：位于 $s_k \dots s_0$左侧部分的生成元之间的边必须没有标记。因此，在图8的示例中，0123210 由于 0 和 1 之间的标记而不是链状的。特别地，它覆盖了两个不同的元素 123210 和 $023210=232010$，因此不是半链状的。

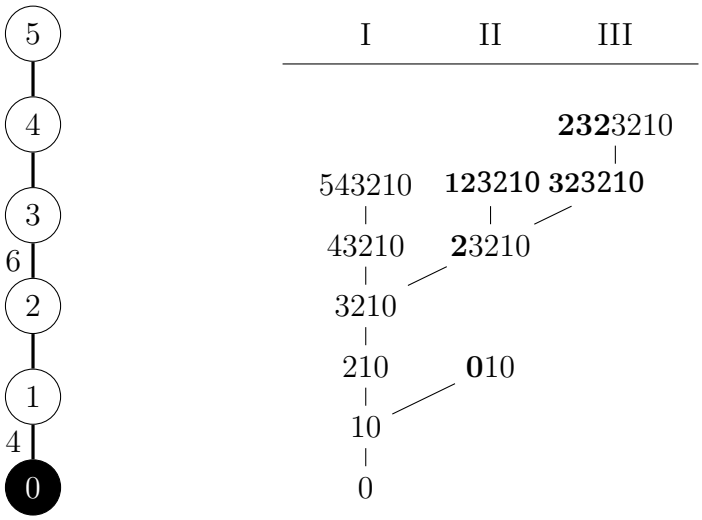


FIGURE 8.一个考克斯特商（左）及其所有链状元素（右）。形式（II）和（III）的元素中，$s_k \dots s_0$左侧的部分以粗体突出显示。

后面的许多证明都需要寻找半链状元素，因此在证明上述定理之前，我们先陈述一个有助于识别这些元素的引理：

引理 3.13。设 $w \in W^J$ 是半链状的，并且对于某些 s、$t \in S$ 和 $y \in W^J$ 有 $w = sw' = sty$ $y \lhd w'$。则 $t \leq y$ 蕴含 $s \leq y$。

证明。假设 $t \leq y$ 和 $s \not\leq y$。若 $s \notin J$，则 $sy \in W^J$，但此时 $sy \lhd w$，因此 $sy = w'$，因为 w 是半链状的。于是 $s = t$ 且 $w = sty = y$，产生矛盾。反之，若 $s \in J$，那么为了满足 $w' \in W^J$，我们必须有 $m(s, a) \geq 3$，其中某个生成元为 $a \leq w'$。但由于 $w' = ty$，要么 $a \leq y$，要么 $a = t$，在这种情况下 $a \leq y$ 也成立，因此 $sy \in W^J$，因为单个 s 在任何表达式中都无法移到 a 的另一侧。于是 $sy = w'$，再次产生矛盾。□

定理 *3.11* 的证明。基例 $\ell(w) \leq 2$ 与定理 3.5证明中的相同。现在我们对 $\ell(w)$ 进行归纳法。

不妨设 w 属于上述某种形式。

- 若 w 属于形式（I），则它是简单元，因此根据定理3.5，它是链状的。
- 设 $w = s_l \dots s_k \dots s_0$属于形式（II），并令 $u \lhd w$为移除一个生成元 s后得到的对象。若 s位于 s_k右侧，则 $u \notin W^J$，因为 $s_k \dots s_0$是简单元。若 $s = s_k$，则我们有一个幂零移动 $s_{k-1}s_{k-1}$，因此 $\ell(u) < \ell(w) - 1$，这就产生了矛盾。若$s = s_i$ 位于第一个 s_l 和 s_k之间，则利用 $m(s_{i-1}, s_i) = 3$，我们得到

$$\begin{aligned} u = s_l \dots s_{i-1}s_{i+1} \dots s_k \dots s_0 &= s_l \dots s_{i-2}s_{i+1} \dots s_k \dots s_{i+1}s_{i-1}s_is_{i-1}s_{i-2} \dots s_0 \\ &= s_l \dots s_{i-2}s_{i+1} \dots s_k \dots s_{i+1}s_is_{i-1}s_is_{i-2} \dots s_0 \\ &= s_l \dots s_{i-2}s_{i+1} \dots s_k \dots s_0s_i \notin W^J \end{aligned}$$

  唯一剩下的选项是最左生成元 $s = s_l$，通过归纳法得到 u 链状，因此 w 与 $w' = u$呈链状。
- 假设 $w = \dots s_{k-1}s_ks_{k-1}s_k \dots s_0$具有形式（III），并令 $u \lhd w$为移除生成元 s后得到的元素。如果 s位于最右侧的 s_k右边，那么 $u \notin W^J$，因为 $s_k \dots s_0$是简单元。如果 s 是除第一个之外的任意其他生成元，那么我们可以进行幂零移动 s_ks_k或 $s_{k-1}s_{k-1}$，因此 $\ell(u) < \ell(w) - 1$，这就产生了矛盾。唯一剩下的选择是最左生成元；由归纳法可知，这使得 u 呈链状，因此 w 是链状的，且$w' = u$。

现在假设 w 呈链状，因此 w' 由归纳法可知属于所需形式之一。命题 3.3 表明 $w = sw'$ 满足 $m(s, s_j) \geq 3$，其中 s_j 是 w'表达式中的最左生成元。

- 设 w' 为形式（I）。若 $s \not\leq w$ 则如定理 3.5的证明中所示，w 呈链状的唯一可能情形是 w 为简单元，此时得到形式（I）。唯一剩下的可能是 $s = s_{k-1}$，若 $m(s_k, s_{k-1}) = 3$，我们可以通过辫移动交换 s_k 与s_{k-1}，这与命题 3.3矛盾。因此 $m(s_k, s_{k-1}) \geq 4$，且我们得到形式（II）。
- 设 $w' = s_l \dots s_k \dots s_0$为形式（II）。– 若 $s = s_{l-1}$，则反设 $m(s_{l-1}, s_l) \geq 4$。考虑移除 s_l，得到 $sw'' = s_{l-1}s_{l+1} \dots s_k \dots s_0$。由于 s_{l-1}无法越过 s_l，也不能通过辫移动替换，因此它属于 W^J，所以 $sw'' \lhd w$。但 $sw'' \neq w'$，因此 w 不是半链状的。于是 $m(s_{l-1}, s_l) = 3$，且 w 为形式（II）。– 若 $s = s_{l+1}$且 $l < k-1$，则 $w = s_{l+1}s_ls_{l+1}s_{l+2} \dots s_k \dots s_0$，于是有辫移动 $s_{l+1}s_ls_{l+1} \to s_ls_{l+1}s_l$，这与命题 3.3 矛盾。– 若 $s = s_{l+1}$且 $l = k-1$，则 $w = s_ks_{k-1}s_ks_{k-1} \dots s_0$。若 $m(s_k, s_{k-1}) = 4$，则有辫变换 $s_ks_{k-1}s_ks_{k-1} \to s_{k-1}s_ks_{k-1}s_k$，这与命题 3.3 矛盾。否则，$w$ 为形式（III）。– 若 $s \not\lhd w'$，则根据引理 3.13，w 不是半链状的。
- 假设 $w' = s_j \dots s_{k-1}s_ks_{k-1}s_k \dots s_0$具有形式（III），且 $s_j \in \{s_k, s_{k-1}\}$。– 令 $s \in \{s_k, s_{k-1}\}$ 满足 $s \neq s_j$。如果 w 中 s_k、s_{k-1} 项的数量至少为 m（s_k、s_{k-1}），那么 s_k 与 s_{k-1}之间存在辫移动，因此根据命题 3.3，w 不是链状的。否则，w 具有形式（III）。– 如果 $s_j = s_{k-1}$且 $s = s_{k-2}$，那么 $s_{k-2}w'' = s_{k-2}s_ks_{k-1} \dots s_k \dots s_0$ 属于 W^J，因为唯一可能的辫变换是交换 s_k 和 s_{k-2}。但是 $sw'' \neq w'$，所以 w 不是半链状的。– 如果 $s \not\lhd w'$，那么根据引理 3.13，w 不是半链状的。

这涵盖了所有情况，因此我们通过归纳证明了任意链状 w 都属于所需的某种形式。□

现在，可以将从 Bruhat 偏序集确定考克斯特图的问题，归结为识别每个链状元素的类型，因为给定这些信息后，我们可以将定理 3.10中的构造应用于形式（I）元素，然后利用形式（II）和形式（III）元素确定边标号。我们将在下文对此进行形式化。首先，通过引入函数 $M(u, v)$，使其匹配 $m(s, t)$ 的值，从而推广定理3.10 中的步骤 2 (b)，以允许带标号边，其中 s, t是 u中的最左生成元，且 v满足 $u' = v'$(稍后我们将推广 M，使其适用于更多的成对元素 u, v)。

定义3.14。设 $u, v \in C(W^J)$，其中 $u' = v'$。记作：

$$M_1(u, v) = \{u, v\};$$
$$M_i(u, v) = \{w \in W^J \mid z \lhd w \text{ for all } z \in M_{i-1}(u, v)\} \text{ for integers } i \geq 2;$$
$$M(u, v) = \min\{i \geq 2 \mid |M_i(u, v)| = 1\}$$

当且仅当对所有 $i \geq 2$，$M(u, v) = \infty$ if $|M_i(u, v)| \neq 1$。

命题 3.15。假设 $u, v \in C(W^J)$ 是简单元，且满足 $u' = v'$，并且 $s, t \in S$满足$u = su'$ 和 $v = tu'$。那么 $m(s, t) = M(u, v)$。

证明。$M_2(u, v)$ 中元素的约化表达式必须包含 su' 作为子词；更精确地说，必须按顺序包含构成 su' 的唯一约化词的所有生成元；tu' 也同理。因此 $M_2(u, v) = \{tsu', stu'\}$。若 $m(t, s) = 2$，则 $tsu' = stu'$ 且

$M(u,\ v) = 2$；否则 tsu'，stu' 具有唯一约化表达式。因此，依照相同的论证进行归纳，可得

$$M_i(u,v) = \{\underbrace{\dots tstst}_{i \text{ terms}} u',\ \underbrace{\dots ststs}_{i \text{ terms}} u'\} \quad \text{for } i < m(s,t)$$

若 $m(s,\ t) = \infty$ 则对所有 $i \geq 2$，都有 $|M_i(u,\ v)| = 2$。若 $m(s,\ t)$ 是有限的，则在 $i = m(s,\ t)$ 处，我们有 $ststs\dots$

$$\underbrace{\qquad}_{i \text{ 项}} = \underbrace{tstst\dots}_{i \text{ 项}}$$，因此 $|M_{m(s,t)}| = 1$。□

定理3.16。假设 W 不可约，并且对于每个链状 $w \in C(W^J)$，已知 w 属于形式 *(I)*、*(II)* 还是 *(III)*。那么，对 W^J 进行以下构造，即可得到这一对 (W, W_J) 的 *bw-Coxeter* 图：

(1) 将 $\sim$ 限定为形式（*I*）元素，并为每个等价类绘制一个节点，将对应于长度为 *1* 的元素的节点涂成黑色。*(2)* 对于每一对不同的等价类 U、$V \subseteq C(W^J)$，若存在 $u \in U$、$v \in V$ 满足以下任一条件，则用一条边连接相应的节点：*(a)* $u = v'$ 或 $v = u'$；或 *(b)* $u' = v'$ 且 $M(u,\ v) \geq 3$。若 *(b)* 成立且 $M(u,\ v) \geq 4$，则用 $M(u,\ v)$ 标记该边。*(3)* 对于每个满足 u' 为形式（*I*）的形式（*II*）元素 u，令 $q \geq 0$ 为大于 u 的形式（*III*）元素的数量，并用 $q + 4$ 标记连接分别对应于包含 u' 和 u'' 的等价类的节点的边。

图 9 展示了这一构造的一个示例。

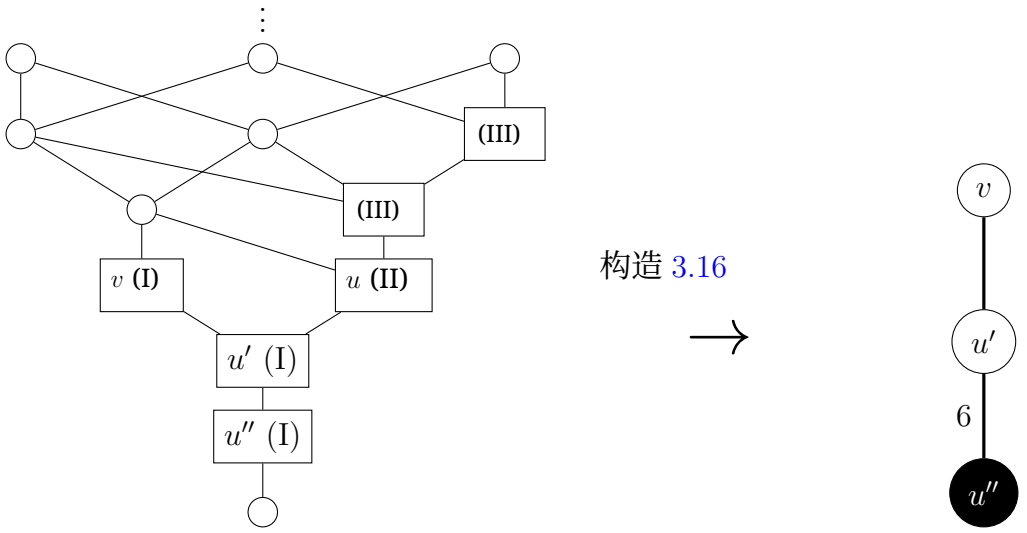


FIGURE 9. Bruhat 偏序集的一部分 W^J（左），其中链状元素及其形式已标明。该构造生成一个图（右），每个形式（I）元素等价类对应一个节点，而边标签 6 是在步骤 3 中添加的。

证明。与定理 3.10中一样，构造的步骤 1 和 2 正确生成了 W的 bw-Coxeter 图中的所有节点和边。现在我们来检查边标号。对于每一对$s,\ t \in S$满足 $m(s,\ t) \geq 3$的元素，根据定理 3.10，以下条件至少有一个成立：

- 存在 $u,\ v \in C(W^J)$的最左生成元为 $s,\ t$分别为 $u' = v'$。因此，根据命题 3.15，步骤 2 正确地标记了这条边。

- 存在 $w \in C(W^J)$，其中 $w = stw''$。那么，根据定理 3.11 $u = tstw''$是形式（II）的链状元素，当且仅当 $m(s, t) \geq 4$，若此条件成立，则恰有$m(s, t) - 4$ 个位于其上方的形式（III）链状元素 u，因此步骤 3 正确地标记了这条边。
- 存在 $w \in C(W^J)$满足 $w = tsw''$，因此我们得到与上文相同的结果，但将 s 和 t 反转。

因此，所有带标号边都与 bw-Coxeter 图中的边相匹配。 □

3.4. **化归为不可约情形**。 现在证明定理2，从而定理 3.16 也可以推广到可约Coxeter系统。

命题3.17。 我们有以下结果：

(a) 对于不同的 s_1、$s_2 \in S \setminus J$，记 $s_1 \leftrightarrow s_2$ 表示 $m(s_1, s_2) \geq 3$，或者存在链状元素 $w_1 \geq s_1$、$w_2 \geq s_2$，使得 $w_1 \sim w_2$（或两者皆是）。那么，s_a、$s_b \in S \setminus J$ 属于图 (W, W_J) 的同一个连通分支，当且仅当存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得有一个序列 $s_a = s_1 \leftrightarrow s_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow s_n = s_b$。

(b) 设 $S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n$ 为图 (W, W_J) 的连通分支。对于每个 $1 \leq i \leq n$，偏序集 $(W_{S_i})^{S_i \cap J}$ 等于子偏序集

$$W_i^J = \{w \in W^J \mid s \leq w \implies s \in S_i \text{ for all } s \in S \setminus J\}.$$

证明。对于 (a)，假设 s_a、s_b 属于同一个连通分支。那么存在一个序列 $s_a = s_1$、s_2、…、$s_n = s_b$，其中每一对 s_i、s_{i+1} 要么由一条边连接，此时 $m(s_i, s_{i+1}) \geq 3$；要么由 J 中的一列节点连接，此时选取其中一个节点，并应用引理 3.9 和命题 3.8，可得链状元素 $w_i \sim w_{i+1}$，使得$w_i > s_i$、$w_{i+1} > s_{i+1}$。因此 $s_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow s_n$。反过来，若 $s_a = s_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow s_n = s_b$，则每一对 s_i、s_{i+1} 要么有一条边连接，要么存在链状元素 $w_i \sim w_{i+1}$，使得 $w_i \geq s_i$、$w_{i+1} \geq s_{i+1}$。由定理 3.11，链状元素的约化表达式中相邻的生成元具有 $m \geq 3$；又由命题 3.8，w_i、w_{i+1} 中最左的生成元相同，因此 w_i 和 w_{i+1} 的表达式给出一个连接 s_i 与 s_{i+1} 的节点序列。由此，每一对 s_i、s_{i+1} 都属于同一个连通分支，故 s_a、s_b 也属于同一个连通分支。

对于 (b)，显然有 $(W_{S_i})^{S_i \cap J} \subseteq W_i^J$，因为 $s \leq w \in W_{S_i}$ 当且仅当 $s \in S_i$。现在假设 $w \in W_i^J$的一个约化表达式包含生成元 $s \in S \setminus S_i$（因此必有 $s \in J$），并设 s 是最右侧的此类生成元。由于 s 与 S_i 中的元素可交换，因此可以通过辫变换将其移到词的最右端，这就导致矛盾。因此 $W_i^J \subseteq (W_{S_i})^{S_i \cap J}$，证毕。□

定理 *2* 的证明。 在同构 $W^J \cong U^K$ 中，每个非平凡子偏序集 W^i 都必须映射到唯一的 U^j。此外，W^i 是平凡的，当且仅当对应于 W^i 的连通分支仅包含 J中的生成元；对每个 U^j 也同样如此。因此，对于每个平凡的 W^i，我们都可以在连通分支的不交并中添加一个空集$T = T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_{n_2}$；反过来，对于每个平凡的 U^j，在 $S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_{n_1}$中添加一个空集，使两边的不交并所含连通分支的数量相同 n，并满足 $(W_{S_i})^{S_i \cap J} \cong (U_{T_i})^{T_i \cap K}$ 对每个 $1 \leq i \leq n$都成立。 □

3.5. **检测器与恢复** $m(s, t)$。 下一步是仅根据 $w \in C(W^J)$ 在偏序集中的位置来确定其形式。由于某些商具有同构偏序集，因此有些情况下无法做到这一点，第 4 节专门讨论如何识别这些情况。这里我们建立了一些关键工具，并将在第 4 节中贯穿使用。

首先，我们可以扩展函数的定义域 M，使其包含所有链状元素对u，x 满足 x 从该链分支出来 $\cdots \to u'' \to u' \to u$，也就是说 $x' < u'$并且$x \not< u$（情形 $x' = u'$ 已由定义3.14涵盖）。下面我们将展示，对于这些对 (u, x)，可以根据偏序集定义 M，使得 $M(u, x) = m(s, t)$，其中

s，t分别是u中的最左生成元x。由于我们最关注的是$m(s,t)\geq 3$的情形，因此我们为此赋予一个特殊名称，称x检测到u（下文将给出更严格的定义）。例如，在图8中，元素$x=010$检测到$u=123210$，因为每个元素中的最左生成元（0和1）不交换。

在大多数情况下（特别是图中不存在圈时），被检测元素总是形式（II）或（III），因此该方法提供了一种揭示“冒牌”链状元素的方式；例如在图7中，我们可以利用ts检测到sus这一事实来证明sus是非简单元。然而，要使这一点严格成立，需要用尽第4节的全部内容。

定义3.18。对于u，$x\in W^J$我们记

$$X(u,x)=\{w\in W^J \mid u\leq w,\ x\leq w,\ \ell(w)=L(u,x)\}$$

设u，$x\in C(W^J)$，其中$x'<u'$且$x\not<u$。如果$|X(u,x)|=|X(u',x)|+1$，则称u被x检测到。

命题 3.19。设$u,x\in C(W^J)$，其中$x'<u'$且$x\not<u$。如果$u=su'$且$x=tx'$，其中$s,t\in S$，那么当且仅当$m(s,t)\geq 3$时，u被x检测到。此外，如果该条件成立，则在$X(u',x)$中恰有*1*个元素被$X(u,x)$中的*2*个不同元素覆盖，且这些元素为$stu'\rhd tu'\lhd tsu'$。

证明。由于$x'<u'$，令u和x分别具有约化表达式$u=ss_k\dots s_0$（不一定是简单元）和$x=ts_l\dots s_0$，其中$-1\leq l<k$（$l=-1$表示$x=t\in S$）。我们有$t\neq s$，并且对于$l<i\leq k$还有$t\neq s_i$，因为否则$x<u$。于是我们有$L(u',x)=\ell(u')$，因为$r=x'$是u'的最长子词，且x。那么，如果$w\in W^J$，其中$\ell(w)=\ell(u')+1$，$u'\leq w$且$x\leq w$，根据子词性质，可以通过将t插入$s_k\dots s_0$中s_l的左侧（若$x=t$则可插入任意位置）来得到w，因此

$$X(u',x)=\{w_i=s_k\dots s_{i+1}ts_i\dots s_0 \mid l\leq i\leq k\}$$

我们有$w_i=w_{i-1}$当且仅当$m(t,s_i)\geq 3$，因此从$i=l$开始，我们有一个元素w_l；随后随着i递增，每次遇到$m(t,s_i)\geq 3$时，都会出现一个新元素。因此，

$$|X(u',x)|=1+\big|\{i\in\mathbb{N}\mid l<i\leq k,\ m(t,s_i)\geq 3\}\big|.$$

将上述过程重复一遍，但把u'和u互换，可得

$$|X(u,x)|=1+\big|\{i\in\mathbb{N}\mid l<i\leq k+1,\ m(t,s_i)\geq 3\}\big| \text{ where } s_{k+1}=s$$

因此，$|X(u,x)|=|X(u',x)|+1$当且仅当$m(s,t)\geq 3$。对于第二个结论，考虑如上所述的w_i。我们有$sw_i\in X(u,x)$，并且对于任意i,j，都有$sw_i\rhd w_j\implies w_i=w_j$，否则$w_j$将有一个以$s$开头的表达式，这会导致矛盾。$X(u,x)$中唯一一个不具有$sw_i$形式的元素是$tu=tsu'$，它覆盖$w_k=tu'$。
□

定义 3.20. 设$u,x\in C(W^J)$，其中$x'<u'$且$x\not<u$。如果u未被x检测到，则令$M(u,x)=2$。否则，令w_1,w_2为$X(u,x)$中唯一的一对元素，使得对于某个$w\in X(u',x)$，有$w_1\rhd w\lhd w_2$，如命题 3.19 所述，并记为：

$$M_2(u,x)=\{w_1,w_2\};$$
$$M_i(u,x)=\{w\in W^J \mid z\lhd w \text{ for all } z\in M_{i-1}(u,x)\} \text{ for integers } i\geq 3;$$
$$M(u,x)=\min\{i\geq 2 \mid |M_i(u,x)|=1\}$$

其中$M(u,x)=\infty$若对于所有$i\geq 2$，均有$|M_i(u,x)|\neq 1$。

定理 4。设u、$x\in C(W^J)$满足$x'\leq u'$和$x\not<u$，并分别令s、t为u、x的唯一约化表达式中的最左生成元。则

$$M(u,x)=m(s,t)$$

其中$M(u,x)$若$x'=u'$，则由定义 *3.14* 给出；若$x'<u$，则由定义 *3.20* 给出$'$。

证明。 如果 $u = ss_k \dots s_0$ 被 $x = ts_l \dots s_0$ 检测到（两者不一定都是简单元），那么根据命题 3.15 证明中的相同推理，对于 $i \le m(t,\ s)$ 有：

$$M_i(u,x) = \{\underbrace{\dots tstst}_{i \text{ terms}} s_k \dots s_0,\ \underbrace{\dots ststs}_{i \text{ terms}} s_k \dots s_0\}$$

以及 $M(u,\ x) = m(t,\ s)$。如果 u未被 x检测到，那么根据定义，$m(t,\ s) = 2$且 $M(u,\ x) = 2$。唯一尚未检查的情形是 $u' = x'$，其中 u 或 x 不是简单元；此时我们有 $\{u, x\}$，要么是 $\{s_k \dots s_0, s_{k-2}s_{k-1} \dots s_0\}$，要么是 $\{s_k s_{k-1} s_k \dots s_0, s_{k-2}s_{k-1}s_k \dots s_0\}$，并且在两种情形下，$M(u,\ x) = 2 = m(s_k,\ s_{k-2}) = m(s,\ t)$。□

注释 3.21。 设 $u,\ x \in C(W^J)$，其中 $x' < u'$且 $x \not< u$。利用定理3.11 中的分类，我们可以列出所有 u 能被 x检测到的情形；第 4 节的大部分内容将用于寻找偏序集中其他能够区分这些情形的特征。下表列出了所有 u 能被 x 检测到，且满足 $\ell(x) \ge 2$ 的情形。所有标记不同的生成元（包括未标记的 s）彼此不同。

u	x	条件
$s_k \dots s_0$ (I)	$ss_j \dots s_0$ (I)	$m(s,\ s_k) \ge 3,\ 0 \le j \le k-2$
$s_l \dots s_k \dots s_0$ (II)	$ss_j \dots s_0$ (I)	$m(s,\ s_l) \ge 3,\ \ 0 \le j \le l$
$s_l \dots s_k \dots s_0$ (II)	$s_{l-1}s_l \dots s_0$ (II)	$m(s_l,\ s_{l-1}) \ge 4,\ l \ne 0$
$s_k \dots s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$ (III)	$ss_j \dots s_0$ (I)	$m(s,\ s_k) \ge 3,\ 0 \le j \le k$
$s_{k-1} \dots s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$ (III)	$ss_j \dots s_0$ (I)	$m(s,\ s_{k-1}) \ge 3,\ 0 \le j \le k-1$
$s_{k-1} \dots s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$ (III)	$s_{k-2}s_{k-1} \dots s_0$ (II)	$m(s_{k-1},\ s_{k-2}) \ge 4,\ k \ge 2$
$s_{k-1} \dots s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$ (III)	$s_{k-2}s_{k-1}s_k \dots s_0$ (II)	$m(s_{k-1},\ s_{k-2}) = 3,\ \ k \ge 2$

注意，只有一种情况会使 u成为简单元；而要使其发生，图中必须存在一个环，$s - s_j - s_{j+1} - \dots - s_k - s$。稍后我们将在引理 4.3 中看到，这种情况通常可以与其他情况区分开来。

若 $x = s \in S \setminus J$，则 u 能被 x 检测到，当且仅当 $m(t,\ x) \ge 3$，其中 $u = tu'$。对于这种情形，我们还可以多说一点：

命题 3.22。 假设 u 能被 $s \in S \setminus J$ 检测到。若存在长度为 2 的 $v \in C(W^J)$，满足 $v' = s$ 且 $u \sim v$，则 u 是简单元。

证明。 我们有 $v = ts$，其中 t 是 u的最左生成元。若 u 不是简单元，那么 t 在 u的表达式中至少出现两次，因此 $r = t$ 是两对 $\{u, v\}$ 和 $\{u', v\}$ 的极大子词。于是 $L(u,\ v) = L(u',\ v) + 1$，这与 $u \sim v$ 矛盾。□

本节中，我们再引入一项用于区分偏序集的一般性工具：在 $u' = v'$ 且 $M(u,\ v) = 2$ 的情形下，我们定义集合 N_i，其中包含位于 u 和 v 之上的半链状元素，其生成元表达式与链状元素的生成元表达式相似。集合 N_i 最终各自都只有一个元素，但在证明这一事实之前，我们先将它们记作集合。

定义 3.23。 对于 $u,\ v \in C(W^J)$，其中 $u' = v'$和 $M(u,\ v) = 2$，记作：

$$N_0(u,v) = M_2(u,v) = \{w \in W^J \mid u \lhd w,\ v \lhd w\} \quad \text{(which only has 1 element)};$$

$$N_i(u,v) = \{w \in W^J \mid w \text{ semi-chainlike with } w' \in N_{i-1}(u,x)\} \text{ for integers } i \ge 1;$$

$$N(u,v) = \min\{i \ge 1 \mid N_i(u,v) = \emptyset\}$$

其中，如果对所有 $i \ge 1,\ \ N(u,\ v) = \infty$均非空，则取 $N_i(u,\ v)$。

命题 3.24。设 $u,\ v \in C(W^J)$ 满足 $u' = v'$。

(a) 如果 $u = ss_k \dots s_0$ 和 $v = ts_k \dots s_0$ 都是简单元，且 $m(s,t) = 2$，那么设 $l \in \{0, \dots, k\}$ 是满足 $m(s_i, s_{i+1}) = 3$ 的极小 $l \le i < k$。则

$$N(u,v) = \begin{cases} k-l+2 & \text{if } m(s,s_k) = m(t,s_k) = 3 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(b) 如果 $u = s_{k-1}s_k \dots s_0$ 为形式（*II*），且 $v = ss_k \dots s_0$ 为简单元，则

$$N(u,v) = \begin{cases} 3 & \text{if } m(s,s_k) = 3 \text{ and } m(s_k,s_{k-1}) = 4 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(c) 如果 $u = s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$ 为形式（*III*），且 $v = s_{k-2}s_{k-1}s_k \dots s_0$ 为形式，则 *(II)*，

$$N(u,v) = \begin{cases} 5 & \text{if } m(s_k,s_{k-1}) = 5 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

所有这些情形的示例都列于本节末尾的图 10 中。此 N函数将在第 4 节的最后一部分使用。例如，在图 4 中，我们可以看到，在 H_3 偏序集中有 $N(12321, 32321) = 5$，这属于命题 3.24 中的情形 (b)；而在 D_6 偏序集中有 $N(54321, 64321) = k - l + 2 = 3 - 0 + 2 = 5$，这属于情形 (a)。这解释了为什么例外对 $(H_3, H_2) \leftrightarrow (D_6, D_5)$ 不会扩展为同构的无限族；对于其他考克斯特对 (D_n, D_{n-1})，我们得到的 $k - l + 2$ 值不同于 5。命题 4.11 对这一特定情形进行了形式化。

命题 *3.24* 的证明。 我们将命题 3.3 和引理 3.13 简记为 (∗)。

对于 (a)，假设 $m(s,s_k) = m(t,s_k) = 3$。我们有 $N_0(u,v) = \{sts_k \dots s_0\} = \{tss_k \dots s_0\}$，并通过归纳法证明，对于 $1 \le i \le k-l+1$，$N_i(u,v) = \{s_{k-i+1} \dots s_k s t s_k \dots s_0\}$。如果 w 是半链状的且覆盖 $w_j = s_j \dots s_k s t s_k \dots s_0$，那么由 (∗) 可知，唯一的可能性是 $w = s_{j-1} \dots s_k s t s_k \dots s_0$。然而，如果 $m(s_j, s_{j-1}) \ge 4$，那么 w 也覆盖 $s_{j-1}s_{j+1} \dots s_k s t s_k \dots s_0 \in W^J$，且 w 不是半链状的。至此归纳完成，并可知 $N_{k-l+2}(u,v)$ 为空。反之，如果 $m(s,s_k) \ge 4$，那么 w_k 也覆盖 $s_k ss_k \dots s_0$，因此 $N_1(u,v)$ 为空，且 $N = 1$；对于 $m(t,s_k) \ge 4$，同样成立。

对于 (b)，我们有 $N_0(u,\ v) = \{s_{k-1}ss_k \dots s_0\} = \{ss_{k-1}s_k \dots s_0\}$。因此根据 (∗)，$N_1(u,v)$ 中唯一可能的元素是 $s_k s_{k-1} ss_k \dots s_0$。这不是半链状的，并且 $N = 1$ 当且仅当 $s_k ss_k \dots s_0$ 或 $s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$ 属于 W^J，它们分别对应于 $m(s,\ s_k) \ge 4$ 和 $m(s_k,\ s_{k-1}) \ge 5$。否则，我们有 $N_2(u,\ v) = \{s_{k-1}s_k s_{k-1} ss_k \dots s_0\}$，于是 $N_3(u,\ v)$ 为空，因为 $s_{k-2}s_{k-1}s_k s_{k-1} ss_k \dots s_0$ 覆盖 $s_{k-2}s_k s_{k-1} ss_k \dots s_0 \in W^J$ 且不是半链状的，所以 $N = 3$。

对于 (c)，我们有 $N_0(u,\ v) = \{s_k s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0\} = \{s_{k-2}s_k s_{k-1} s_k \dots s_0\}$。因此根据 (∗)，$N_1(u,\ v)$ 中唯一可能的元素是 $s_{k-1}s_k s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0$。该元素不是半链状，并且 $N = 1$ 当且仅当 $s_{k-1}s_k s_{k-1} s_k \dots s_0 \in W^J$，这对应于 $m(s_k,\ s_{k-1}) \ge 6$。否则，如果 $m(s_k,\ s_{k-1}) = 5$，我们可以继续该序列，并注意到 $m(s_{k-1},\ s_{k-2}) = 3$，因为 v 是链状的：

$$\begin{aligned} N_1(u,v) &= \{s_{k-1}s_k s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0\} \\ N_2(u,v) &= \{s_k s_{k-1} s_k s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0\} \\ N_3(u,v) &= \{s_{k-1}s_k s_{k-1} s_k s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0\} \\ N_4(u,v) &= \{s_{k-2}s_{k-1}s_k s_{k-1} s_k s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0\} \end{aligned}$$

那么 $N_5(u,\ v)$ 为空，因为 $s_{k-3}s_{k-2}s_{k-1}s_k s_{k-1} s_k s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0$ 覆盖了移除最左侧 s_{k-2} 后得到的元素，所以 $N = 5$。□

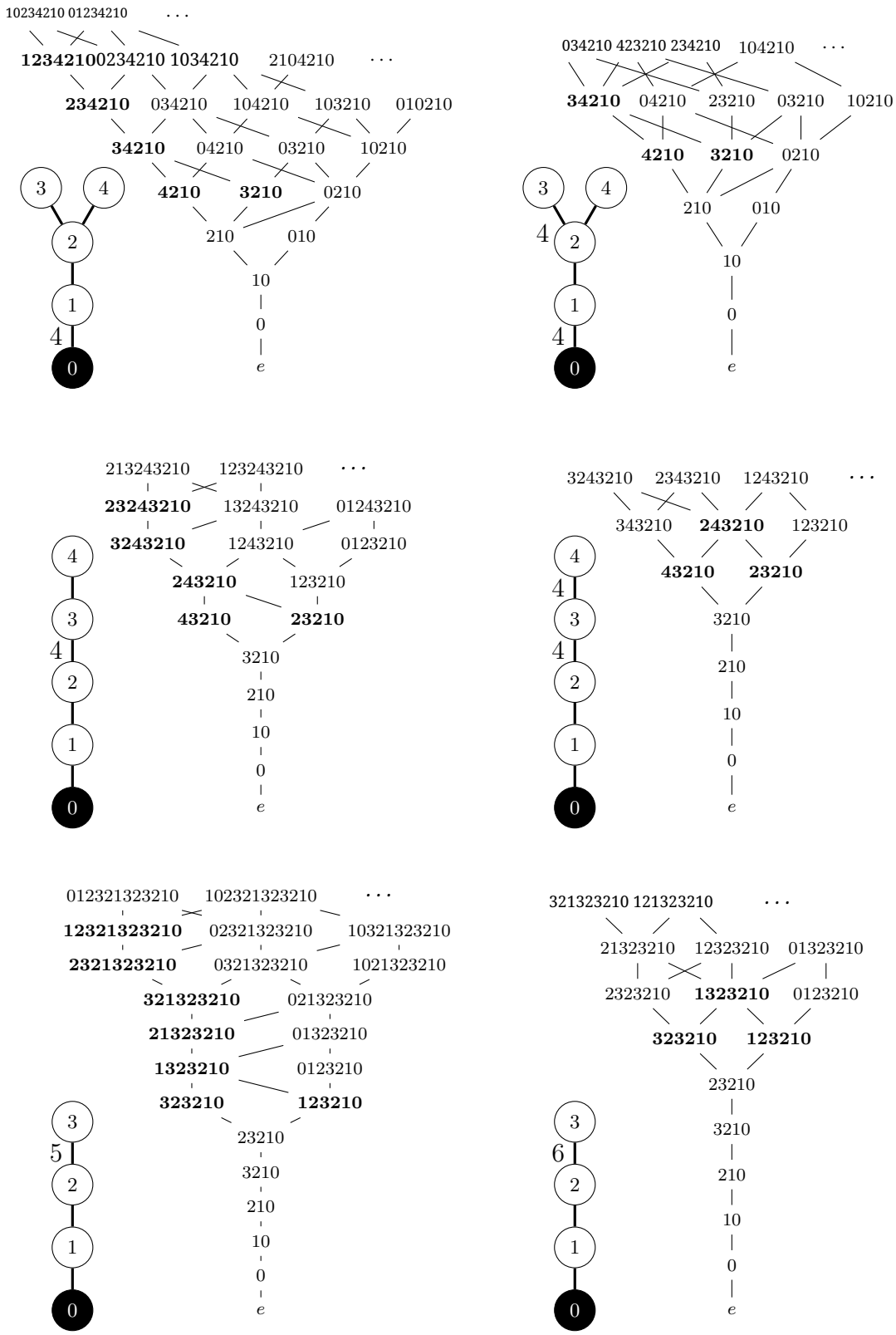


FIGURE 10. 命题 3.24 中，(a) 的情形分别为 $N = k - l + 2$（左上）和 $N = 1$（右上），(b) 的情形分别为 $N = 3$（左中）和 $N = 1$（右中），(c) 的情形分别为 $N = 5$（左下）和 $N = 1$（右下）。在每个例子中，u，v 集合 $N_i(u, v)$ 中，当 $i \geq 0$的元素以粗体标出。

4. Classifying isomorphic posets

在本节中，我们将用 (W, S) 和 (W, S) 表示两个不可约 Coxeter 系统，其中 $J \subseteq S$和 $J \subseteq S$，并且存在一个双射 $W^{\mathcal{J}} \to W^J$, $w \mapsto w$，它是 Bruhat 偏序集的一个同构，即 $u \leq v$ 当且仅当 $u \leq v$。由于我们对链状元素、检测器、 L、 M 和 N 函数以及关系 $\sim$的定义仅依赖于偏序集的结构，因此它们对于 W^J和 W^J 是相同的（特别地，对于所有半链状 $u \in W^J$，$(u') = u'$）。如果我们能够证明，对于所有 $w \in C$（W^J），w 的形式与 w 的形式相同，那么构造 3.16 将推出 (W, S) 和 (W, S) 的图相同。因此，我们旨在找出所有 w的形式不同于 w的情形。为简化记号，我们将用 s 表示S中的生成元，并用 t表示 S中的生成元，同时记 $C = C$（W^J）、 $C = C$（W^J）。

4.1. **篮子情形**。 除了已知的有限同构之外，还有另一组情形，其中 $w \in C$ 和 $w \in C$ 具有不同的形式。这不是不同偏序集之间的同构，而是一个带有 $W^J \cong W^J$的自同构。图 11展示了这种自同构的最小情形。

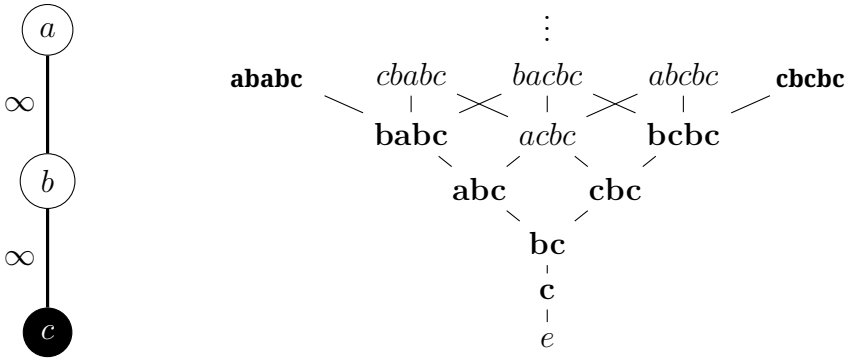


Figure 11. 所示偏序集具有一个自同构 ϕ，它会交换 a 的所有出现位置与 c，反之亦然，但不包括每个约化表达式中的最后一个 c，例如 ϕ $(cbabc) = abcbc$。链状元素以粗体标示。

幸运的是，产生具有这种自同构的偏序集的图具有一种受到严格限制的特殊结构，并且它们都包含偏序集中的一个特征，我们将其称为篮子。

定义 4.1。 我们称 u、 $v \in C$（W^J）构成一个篮子，当且仅当 $u'' = v''$、 u'检测到 v且 v' 检测到 u。由注记 3.21 可知，篮子可以通过 3 种方式出现：

- I/I： u 和 v 都是简单元，并且共享第一个生成元（节点的平方）。
- II/II： u 和 v 属于形式（II），而 u'， v' 是简单元（两个带标记分支）。
- III/II： u 属于形式（III）， v， u' 属于形式（II），而 v' 是简单元（一个标记 ≥ 4 位于另一个标记 ≥ 5之上）。如果 u 和 v 的形式顺序相反，我们就写作 II/III。

这些情况如图 12所示。如果 u、 u'、 v、 v'的形式分别与u、 u'、 v、 v'的形式相同，我们称该篮子是形式保持的。例如，在图 11$babc$ 和 $bcbc$ 构成一个 II/III 篮子，而在给定的自同构下，该篮子不是形式保持的，因为它被映射为一个 III/II 篮子。

我们将证明，只要 W^J 包含一个非保形式篮子，就存在一个类似于图11 中的自同构，它可以“修正”这些形式：

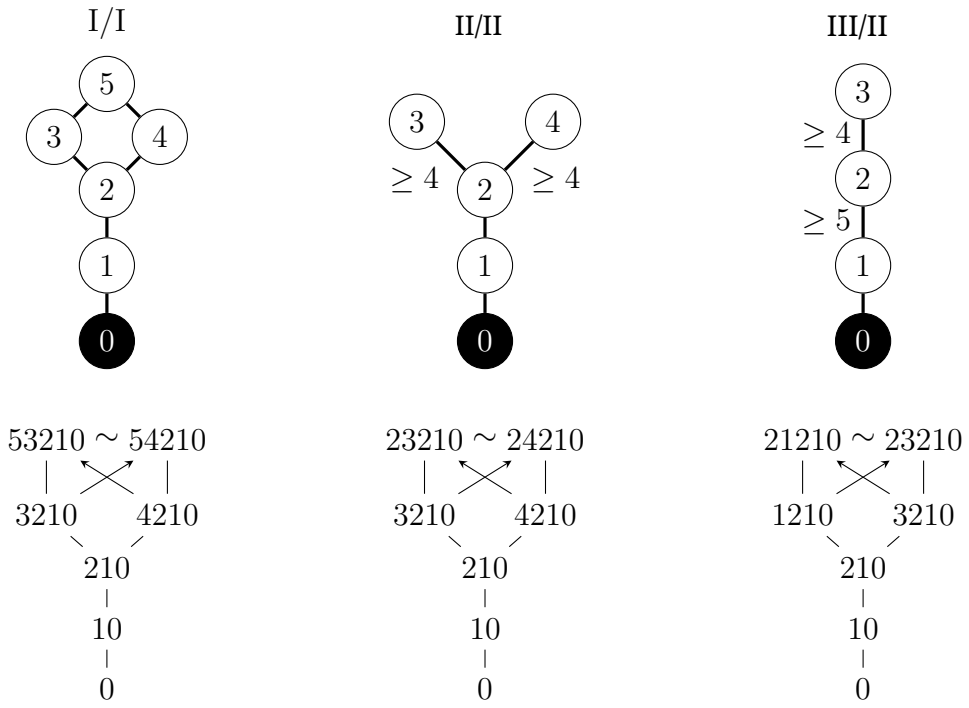


FIGURE 12. 篮子出现的 3 种不同方式示例。箭头表示在链状图中的检测结果（这些图看起来有点像编织物，因此得名“篮子”）。

定理4.2。 若 W^J 包含一个非保形式篮子，则 $\phi(w)$ 与 w 具有相同的形式，对所有 $w \in C$ 均成立，其中 ϕ 是命题 *4.6*中的自同构，因此根据定理 *3.16*，有序对 (W, W_J) 与 (W, W_J) 同构。

我们将看到，这涵盖了几乎所有不保持链状形式的自同构。特别是，在下面的许多情形中，篮子都作为边界情形出现，因此证明该定理也就提前涵盖了所有这些边界情形。下面列出证明定理 4.2 的步骤：

- 引理 4.3 是一个将在多个地方发挥作用的技术性结果。
- 命题 4.4 和 4.5 考察了篮子在 W^J中具有 III/II 形式、在 W^J中具有 II/III 形式的情形，表明该图具有图 13所示的特定结构。
- 命题 4.6 表明，图 11 中的自同构可以扩展到任何具有这种结构的考克斯特图。
- 命题4.7 表明，所有其他非形式保持篮子都可归约到这种情形。
- 命题 4.8 是关于形式（II）元素的一个强有力的结果。本节后续的大量分类讨论都已包含在该陈述的证明中。
- 推论 4.9 可立即推出，并表明 W^J和 W^J的图仅通过节点重新标记即可相同，从而完成了定理 4.2的证明。

引理 4.3。 假设 $u = s_l \dots s_k \dots s_0$ 被 $x \rhd s_l \dots s_0$ 检测到，且 u 是简单元。那么 $l = k - 1$，并且 $v = s_{k-1}x \in C$，使得 u、v 构成一个篮子。

证明。 对于 $u \equiv t_{2k-l} \dots t_0$，我们要求 $x = tt_l \dots t_0$为简单元，并且存在一个链状元素 $v = t_{2k-l}tt_l \dots t_0 \in C$满足 $u \sim v$。因此，C中对应的元素为$v = s_l x$。若 $x = s_{k-2}s_{k-1} \dots s_0$，则只有当 $m(s_{k-1}, s_{k-2}) \geq 5$与 u, v构成一个 II/III 篮子时，v才是链状元素。若 $x = ss_l \dots s_0$是简单元，则只有当 $m(s, s_l) \geq 4$时，v才是链状元素。

于是 $s_{l+1}\dots s_0$ 检测到 v，因此 $t_{l+1}\dots t_0$ 检测到 v，从而得到 $m(t_{2k-l},t_{l+1})\geq 3$，这只有在 $l=k-1$ 时才可能；此时 u,v 构成一个 II/II 篮子。□

命题 4.4。假设 u,v 构成一个 *III/II* 篮子，而 u,v 构成一个 *II/III* 篮子，也就是说，u,v,u,v 的约化表达式如下：

$$u=s_ks_{k-1}s_k\dots s_0 \qquad v=s_ks_{k+1}s_k\dots s_0$$
$$\overline{u}=t_kt_{k+1}s_k\dots t_0 \qquad \overline{v}=t_kt_{k-1}t_k\dots t_0$$

那么 $m(s_k,s_{k-1})=m(s_k,s_{k+1})=m(t_k,t_{k-1})=m(t_k,t_{k+1})=\infty$。此外，若 $k\geq 2$，则存在更多生成元 $s_{k+2},\dots,s_{2k}\in S$ 和 $t_{k+2},\dots,t_{2k}\in S$，使得

$$\overline{s_l\dots s_k\dots s_0}=t_{2k-l}\dots t_0, \qquad \overline{s_{2k-l}\dots s_0}=t_l\dots t_k\dots t_0$$

对于 $0\leq l\leq k$。

证明。我们不可能有 $s_{k-1}v\in C$，因为 $m(s_k,s_{k-1})\geq 5$，所以 u,v 上方的所有链状元素都具有形式（III）。如果 $m(s_k,s_{k-1})$ 是有限的，那么 u,u 上方的极大链状元素为

$$u_{\max}=\underbrace{\dots s_{k-1}s_ks_{k-1}s_ks_{k-1}}_{m(s_k,s_{k-1})-1\text{ terms}}s_{k-2}\dots s_0 \qquad \overline{u}_{\max}=\underbrace{\dots t_kt_{k+1}t_kt_{k+1}t_k}_{m(t_k,t_{k+1})-1\text{ terms}}t_{k-1}\dots t_0$$

比较长度可得 $m(t_k,t_{k+1})=m(s_k,s_{k-1})-1$，但这与矛盾相悖，因为$M(v,u')=m(s_k,s_{k-1})$，而 $M(v,u')=m(t_k,t_{k+1})$。因此必有 $m(s_k,s_{k-1})=m(t_k,t_{k+1})=\infty$，并且重复对 v 和 v进行同样论证，也可得 $m(s_k,s_{k+1})=m(t_k,t_{k-1})=\infty$。

现在，如果 $k\geq 2$，那么我们不可能有 $m(s_{k-1},s_{k-2})\geq 4$，因为 $x=s_{k-2}s_{k-1}\dots s_0$ 无法检测到 v'，而 $x\rhd t_{k-1}\dots t_0$ 能够检测到 v'。于是 $s_{k-2}s_{k-1}s_k\dots s_0$ 是链状的，并映射到某个 $t_{k+2}\in S$ 对应的 $t_{k+2}t_{k+1}t_k\dots t_0$；同理，$t_{k-2}t_{k-1}t_k\dots t_0$ 是链状的，并映射到某个 $s_{k+2}\in S$ 对应的 $s_{k+2}\dots s_0$。接着归纳可得，对于 $1\leq i\leq k-1$，$m(s_i,s_{i-1})=m(t_i,t_{i-1})=3$，否则 $x_i=s_{i-1}s_i\dots s_0$ 无法检测到 $w_i=s_{k+i}\dots s_0$，而 $x_i\rhd t_i\dots t_0$ 能够检测到 $w_i=t_i\dots t_k\dots t_0$；对于 $t_{i-1}t_i\dots t_0$ 也同理。因此，我们有 $s_l\dots\overline{s_k}\dots s_0$ 映射到 $t_{2k-l}\dots t_0$，且 $s_{2k-l}\dots s_0$ 映射到 $t_l\dots t_k\dots t_0$，其中 $0\leq l\leq k$。□

命题 4.5. 设 u、v 组成一个 *III/II* 篮子，而 u、v 组成一个 *II/III* 篮子，并令 s_0、……、s_{2k} 如命题 *4.4*所述。对于所有 $s\in S\setminus\{s_0,\dots,s_{2k}\}$，有：

(a) $s\in J$;
(b) $m(s,s_i)=2$ *for all* $s_i\in\{s_0,\dots,s_{k-2},s_{k+2},\dots,s_{2k}\}$;
(c) If $m(s,s_{k-1})\geq 3$ *or* $m(s,s_{k+1})\geq 3$ *then* $m(s,s_{k-1})=m(s,s_{k+1})=\infty$.

也就是说，*Coxeter* 图的结构如图*13*所示。

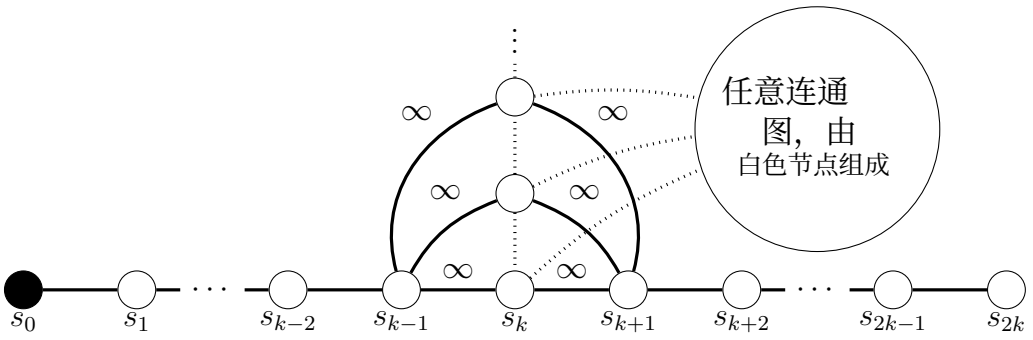


FIGURE 13. “篮子情形”。允许任意数量的节点通过带 ∞ 标号的边同时连接到 s_{k-1} 和 s_{k+1}，这些节点之间也可以彼此相连、连接到 s_k，以及连接到其他由“任意白色节点图”表示的白色节点。节点 s_0、……、s_{k-2}、s_{k+2}、……、s_{2k} 没有其他边。

证明。令 $s \in S \setminus \{s_0, \ldots, s_{2k}\}$。

- 假设 $s \in J$ 和 s 与某个 s_l 有边相连，其中 $0 \le l < k$。假定 l 是具有此性质的极小元，则 $x = ss_l \ldots s_0$ 呈链状且检测 $s_l \ldots s_k \ldots s_0$，因此由引理 4.3 可得 $l = k-1$，且 u'、$s_{k-1}x$ 构成一个篮子。我们必须有 x 是简单元（因为对于 $k \ge 2$，$m(s_{k-1}, s_{k-2}) = 3$），所以这是一个 II/II篮子，且 $m(s, s_{k-1}) \ge 4$。类似地，$x = tt_{k-1} \ldots t_0$ 是简单元；再次由引理 4.3，因 x 检测 v'，可得 $m(t, t_{k-1}) \ge 4$。因此，

$$m(t, t_{k+1}) = M(\overline{u}', \overline{x}) = M(u', x) = m(s, s_{k-1}) \ge 4,$$
$$m(s, s_{k+1}) = M(v', x) = M(\overline{v}', \overline{x}) = m(t, t_{k-1}) \ge 4.$$

  那么 $v_1 = ss_{k+1}x$ 是链状的，并由 $y = s_{k-1}x$检测。由于 $y \rhd x$ 和$y \sim u'$，我们必须有 $y = t_{k+1}x$；又由于 $v_1' \sim \overline{v}'$ 和 y 检测 v，我们必须有 $v_1 = tt_{k-1}x$。对称地，$u_1 = tt_{k+1}x$ 是链状的，且有 $\overline{u}_1 = ss_{k-1}x$。于是$u_1$和 v_1 构成一个 III/II 篮子，而 u_1、v_1 属于 II/III，因此根据命题 4.4，$m(s, s_{k-1}) = m(s, s_{k+1}) = m(t, t_{k-1}) = m(t, t_{k+1}) = \infty$。

- 假设对于某个 $0 \le l < k$，$s \in J$与 s_{2k-l}之间有一条边。元素 $ss_{2k-l} \ldots s_0$不可能是链状的，因为没有其他覆盖 $t_l \ldots t_k \ldots t_0$的元素可供它映射到（注意，$t_k t_{k-1} t_k \ldots t_0$ 已经被 $s_k s_{k+1} \ldots s_0$映射到），所以对于某个 $i \le k$，$m(s, s_i) \ge 3$。于是结合 $x = ss_i \ldots s_0$ 和 $x = tt_i \ldots t_0$，我们可以通过 M函数看出，$m(t, t_l) \ge 3$，这就归结为上述情形。

- 假设对于某个 $0 \le l \le k$，$s \notin J$与 s_l之间存在一条边。于是，s 检测到 $s_l \ldots s_k \ldots s_0$，因此$t = s$检测到 $t_{2k-l} \ldots t_0$，且 t_{2k-l}与 t之间存在一条边。由此，$t_{2k} \ldots t_{2k-l}t$ 是链状的，并且 $t_{2k} \ldots t_{2k-l}t \sim t_{2k} \ldots t_0$；但是，$t_{2k} \ldots t_0$对应于$s_0 \ldots s_k \ldots s_0$，后者无法与以 s结尾的任何链状对象满足 $\sim$，因此产生矛盾。类似地，如果存在 $s \notin J$ 通过J中的生成元链连接到 s_k，那么我们可以找到一个简单元 $w \ge s$，使得 $s_k w \sim s_k \ldots s_0$是简单元，因此 $t_k w \rightsquigarrow t_k \ldots t_0$也是简单元，并且使用 t_{2k}可以应用相同的论证。如果 s 连接到 s_{2k-l}，那么对连接 t 和 t_l的情形也可应用相同的论证。

这说明考克斯特图如图 13 所示。 □

命题4.6。取上述的 $s_0, \ldots, s_{2k}$，如下定义的映射 $\phi\colon W^J \to W^J$ 是一个自同构：

- 若 $w \not> u''$，则 $\phi(w) = w$。
- 若 $w > u''$，任选 w 的一个约化表达式（它必然以 u'' 的约化表达式结尾），并通过将 w 中最右侧 k 个生成元左侧的所有 s_{k+j} 替换为 s_{k-j}（针对 $-k \le j \le k$），得到 $\phi(w)$。

证明。令 $w \in W^J$。由于 $S \setminus J = \{s_0\}$，要么对于某个 $l \le k$ 有 $w = s_l \ldots s_0$，要么 w 的每个约化表达式都以 u'' 的约化表达式结尾。对所有 $s \in S \setminus \{s_0, \ldots, s_{2k}\}$，记 $\phi_S(s_i) = s_{2k-i}$，并记 $\phi_S(s) = s$。由命题 4.5 可得，对所有 $a, b \in S$，有 $m(\phi_S(a), \phi_S(b)) = m(a, b)$，因此 w 的任一约化表达式及其对应的 $\phi(w)$ 表达式，都会在相同位置进行辫变换。因此 ϕ 保持 Bruhat序，故 ϕ 是一个自同构。□

命题4.7。设 u、v构成一个在 W^J 上非形式保持的篮子。那么 W^J具有图 13 所示的结构，并且 $\phi(w)$与w在 $w \in \{u, u', v, v'\}$下具有相同的形式。

证明。我们考虑篮子的所有可能组合 u，v，u，v并分别证明存在 u_1，v_1，它们构成一个 III/II-II/III篮子。图 14展示了其中两个，以便更直观地理解。

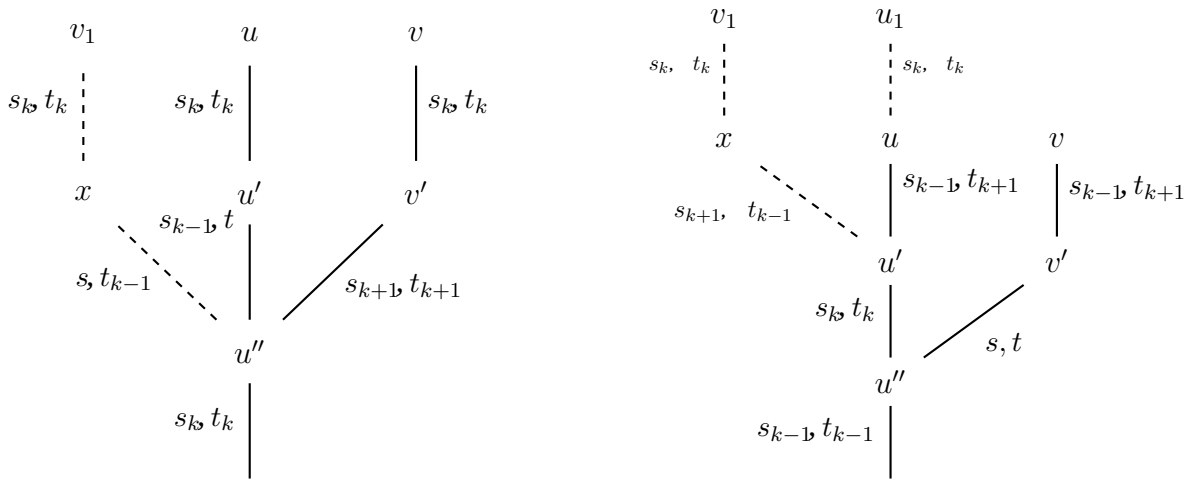


FIGURE 14. 命题4.7证明中 (a)（左）和 (c)（右）部分的示意图。在 (a) 中，u 和 v 蕴含了 v_1 的存在，使得 u 和 v_1构成一个 III/II-II/III篮子。在 (b) 中，u 和 v 蕴含了 u_1 和v_1 的存在，它们构成一个 III/II-II/III篮子。

(a) 假设 u, v构成一个 III/II 篮子，而 $u, \overline{v}$构成一个 II/II篮子。我们有

$$u = s_k s_{k-1} s_k \dots s_0 \qquad v = s_k s_{k+1} s_k \dots s_0 \qquad \overline{u} = t_k t t_k \dots t_0 \qquad \overline{v} = t_k t_{k+1} t_k \dots t_0$$

其中 $m(t_k, \ t) \geq 4$ 和 $m(t_k, \ t_{k+1}) \geq 4$。如果 $m(t_k, \ t_{k-1}) = 3$，那么 $t_{k-1}\overline{u} \sim t_{k-1}v \in C$，但在 C 中唯一可能的对应元素是 $s_{k-1}u \not\sim s_{k+1}v$，这就产生了矛盾，因此 $m(t_k, \ t_{k-1}) \geq 4$。这意味着 $x = t_{k-1}t_k \dots t_0 \in C$必须对应于某个简单元 $x = s s_k \dots s_0$。于是我们有

$$m(s, s_k) = M(v, x) = M(\overline{v}', \overline{x}) = m(t, t_k) \geq 4$$

这意味着 $v_1 = s_k s s_k \dots s_0$是链状的，并且 $v_1 \sim u$，因此我们有 $v_1 = t_k t_{k-1} t_k \dots t_0$。然后，$u$, v_1与 u和 v_1构成一个形式（III）的篮子。我们有一个 III/II-II/III篮子，因此可以使用前面的命题。

(b) 假设 u, v构成一个 III/II 篮子，而 $u, \overline{v}$构成一个 II/II篮子。我们有

$$u = s_k s_{k-1} s_k \dots s_0 \qquad v = s_k s_{k+1} s_k \dots s_0 \qquad \overline{u} = t_{k+2} t t_k \dots t_0 \qquad \overline{v} = t_{k+2} \dots t_0$$

我们有 $N(u', \ v') = 1$，因此根据命题 3.24 为了对u'得到相同的结果，v'我们需要 $m(\overline{t}_{k+1}, \ t_k) \geq 4$或 $m(t, \ t_k) \geq 4$。

- 如果 $m(t_{k+1}, \ t_k) \geq 4$，那么$\overline{x} = t_k t_{k+1} \dots t_0 \rhd v'$对应于某个 $s \in S$的 $x = s s_{k+1} \dots s_0$。于是，u' 无法检测到 x，但 u' 检测到了 x，这就产生了矛盾。
- 如果 $m(t, \ t_k) \geq 4$，则 $\overline{x} = t_k t t_k \dots t_0 \rhd u'$对应于 $x = s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0$。于是，$v'$ 无法检测到 x，但 v' 检测到了 x，这就产生了矛盾。

因此，不可能存在 III/II-II/II篮子。

(c) 假设 u, v构成一个 II/II篮子，而 $u, \overline{v}$构成一个 I/I篮子。我们有

$$u = s_{k-1} s_k \dots s_0 \qquad v = s_{k-1} s s_{k-1} \dots s_0 \qquad \overline{u} = t_{k+1} \dots t_0 \qquad \overline{v} = t_{k+1} t t_{k-1} \dots t_0$$

我们有 $N(u', \ v') = 1$，因此，为使 $u', \ v'$得到相同的结果，我们要求 $m(t, \ t_{k-1}) \geq 4$或 $m(t_k, \ t_{k-1}) \geq 4$。不失一般性，设后一种情况成立。于是，对于某个 $s_{k+1} \in S$，$x = t_{k-1}t_k \dots t_0 \rhd u'$对应于$\overline{x} = s_{k+1} \dots s_0$。现在，

$$m(t_k, t_{k+1}) = M(\overline{v}, \overline{u}') = M(v, u') = m(s_k, s_{k-1}) \geq 4$$

于是 $\overline{u_1} = t_k t_{k+1} \dots t_0 \rhd u$是链状的。取 $u_1 = s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0$会导致矛盾，因为 $w = s_{k-2} s_{k-1} s s_{k-1} \dots s_0$将是链状的，且具有 $w \sim u_1$

这意味着 w 必须映射到 $w = t_k t_{k+1} t t_{k-1} \dots t_0$，而它不是链状的，因此唯一的可能是 $u_1 = s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$ 和 $m(s_k, s_{k-1}) \geq 5$。接下来，我们有

$$m(s_k, s_{k+1}) = M(u_1, x) = M(\overline{u}_1, \overline{x}) = m(t_k, t_{k-1}) \geq 4$$

这意味着 $v_1 = s_k s_{k+1} \dots s_0$ 呈链状，并对应于 $v_1 = t_k t_{k-1} t_k \dots t_0$，而 u_1，v_1 构成一个 III/II-II/III 篮子。

□

命题 4.8。设 $u = s_l \dots s_k \dots s_0$ 为形式（*II*），并可由 $x \rhd s_l \dots s_0$ 检测，使得对于 $w < u$，x 无法检测 w。如果 u 不与任何 $v \in C$ 构成篮子，则对于 $w \leq u$，w 的形式与 w 的形式相同。

证明。首先设 $u = t_j \dots t_n \dots t_0$ 为形式（II），其中有 $n \neq k$ 和 $x = t t_l \dots t_0$（简单元或形式（II））。如果 $n < k$，那么 $j < l$ 和 $m(t_l, t_{l-1}) = 3$，因此 x 是简单元。然而，要使 x 检测 u，我们需要 $m(t, t_j) \geq 3$，这与 x 为简单元相矛盾。如果 $n > k$，那么 $j \geq l+2$ 和 $m(t, t_j) \geq 3$，因此 x 检测 $w = t_j \dots t_0$，与该命题的条件相矛盾。这表明，如果 u 为形式（II），则结论成立。反之，如果 u 是简单元，那么根据引理 4.3 $l = k-1$，u 构成一个篮子。

最后，假设 u 是形式（III）。我们需要进行大量的情况检查：

（1）如果 $\ell(x) \leq \ell(u) - 3$，那么由于 u'' 与 u 具有相同的第一个生成元，x 也能检测到 u''，从而产生矛盾。（2）如果 $\ell(x) = \ell(u) - 2$，那么我们考虑 4 个子情形：

- 如果 $u = t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$，那么 $x \rhd t_{n-1} \dots t_0$，因此 x 也能检测到 $t_{n-1} t_n \dots t_0$。
- 如果 $u = t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$，那么 $x \rhd t_n \dots t_0$，因此 x 也能检测到 $t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$。
- 如果 $u = t_n t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$，那么 x 的唯一可能性是 $t_{n-2} t_{n-1} t_n \dots t_0$，它无法检测出 u。
- 如果 $u > t_n t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$，那么 x 不存在任何可能性。

(3) 假设 $\ell(x) = \ell(u) - 1$，因此 $u = s_{k-1} s_k \dots s_0$，并假设 $x = s_{k-2} s_{k-1} \dots s_0$。那么 $m(s_{k-1}, s_{k-2}) = 4$，因为否则 u 和 $v = s_{k-1} s_{k-2} s_{k-1} \dots s_0$ 会构成一个篮子。我们考察以下两个子情形：

- 如果 $u = t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$，那么 $x = t t_n \dots t_0$ 是简单元。于是 $m(t, t_n) = M(u, x) = M(u, x) = m(s_{k-1}, s_{k-2}) = 4$，因此 u 和 $v = t_n t t_n \dots t_0$ 构成一个篮子。
- 若 $u = t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$，则 $x = t t_{n-2} t_{n-1} t_n \dots t_0$。令 $x_0 = t_j \dots t_n \dots t_0$ 为具有 $x_0 \geq x$、$0 \leq j \leq n-2$ 的极大链状结构。由于 $m(s_{k-1}, s_{k-2}) = 4$，我们有 x_0 为形式（II），又由于 $n = k-2$，可得 $x_0 = s_{j+4} \dots s_k \dots s_0$。由于在 x_0 之上不存在链状结构，$m(s_{j+4}, s_{j+3}) \geq 4$。因此，若 $j < n-2$，则 x_0 可由 $s_{j+3} s_{j+4} \dots s_0$ 检测到，这与本证明的第一部分矛盾；若 $j = n-2$，则 $j+4 = k$，且 $s_{j+3} s_{j+4} \dots s_0$ 与 x_0 的极大性矛盾。

(4) 假设 $\ell(x) = \ell(u) - 1$，因此 $u = s_{k-1} s_k \dots s_0$，并假设 $x = s s_{k-1} \dots s_0$ 是简单元。则 $m(s, s_{k-1}) = 3$，否则 u 和 $s_{k-1} s s_{k-1} \dots s_0$ 将形成一个篮子。此外，我们可以假设 $m(s_{k-1}, s_{k-2}) = 3$，否则 $s_{k-2} s_{k-1} \dots s_0 \in C$，这将归结为上述情形，并记 $u_1 = s_{k-2} s_{k-1} s_k \dots s_0 \in C$。我们还记 $w = s_k s_{k-1} s s_k \dots s_0$，它覆盖 $s_{k-1} s s_k \dots s_0 \in M_2(u, x)$。我们考察 2 个子情形，其中第一个如图15所示。

- 若 $u = t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$，则 $x = t t_n \dots t_0$ 是简单元。于是 u_1 以 $t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n t_{n-1}$ 开头，因此 $m(t_n, t_{n-1}) \geq 6$。由于 u_1 是覆盖 u 的唯一链状元素，$s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$ 不可能是链状元素，因此 $m(s_k, s_{k-1}) = 4$。因此，如上所定义的 w 是半链状的。现在 $M_2(u, x) = \{t t_n u', t_n t u'\}$，所以根据引理 3.13，覆盖 $M_2(u, x)$ 中某个元素的 w 只有以下几种可能：$M_3(u, x)$ 中的元素，它们覆盖 $M_2(u, x)$ 中的两个元素；

– $\overline{w} = t_j t t_n \overline{u'} = t t_j t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$ with $j \leq n-1$, which is either not in $\overline{W}^{\overline{J}}$ or also covers $t_j t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$;
– $\overline{w} = t_j t_n t \overline{u'} = t_n t t_j t_{n-1} t_n \dots t_0$ with $j \leq n-2$, which is either not in $\overline{W}^{\overline{J}}$ or also covers $t_n t_j t_{n-1} t_n \dots t_0$;
– $\overline{w} = t_{n-1} t_n t \overline{u'}$ which also covers $t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$ as $m(t_n, t_{n-1}) \geq 6$.

因此，w 没有可映射到的半链状元素，这就得到了一个矛盾。

• 若 $\overline{u} = t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$，则 $x = \overline{t}_{n-2} t_{n-1} t_n \dots t_0$。于是 u_1 以 $t_n t_{n-1} \overline{t}_n t_{n-1} t_n t_{n-1}$ 开头，因此 $m(t_n, t_{n-1}) \geq 7$。由于 u_1 是唯一的链式覆盖 $\overline{u}$，$s_k s_{k-1} s_k \dots s_0$ 不可能是链状的，因此 $m(s_k, s_{k-1}) = 4$。所以，如上定义的 w 是半链状的。现在 $M_2(u, x) = \{t t_{n-1} u', t_{n-1} t u'\}$，因此根据引理 3.13，$w$ 的唯一可能性是：

– the element(s) of $M_3(\overline{u}, \overline{x})$, which cover both elements of $M_2(\overline{u}, \overline{x})$;
– $\overline{w} = t_j t t_{n-1} \overline{u'} = t t_j t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$ with $j \leq n-2$, which is either not in $\overline{W}^{\overline{J}}$ or also covers $t_j t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$;
– $\overline{w} = t_j t_{n-1} t \overline{u'} = t_{n-1} t t_j t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$ with $j \leq n-3$, which is either not in $\overline{W}^{\overline{J}}$ or also covers $t_{n-1} t_j t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$;
– $\overline{w} = t_{n-2} t_{n-1} t \overline{u'}$ which also covers $t_{n-2} t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$.
– $\overline{w} = t_n t t_{n-1} \overline{u'}$ which also covers $t_n t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$ as $m(t_n, t_{n-1}) \geq 7$;
– $\overline{w} = t_n t_{n-1} t \overline{u'}$ which also covers $t_n t_{n-1} t_n t_{n-1} t_n \dots t_0$ as $m(t_n, t_{n-1}) \geq 7$.

因此，w 没有半链状元素映射到其中，于是我们得出矛盾。

每种情况都会导致矛盾，因此 u 不属于形式（III），证明完毕。□

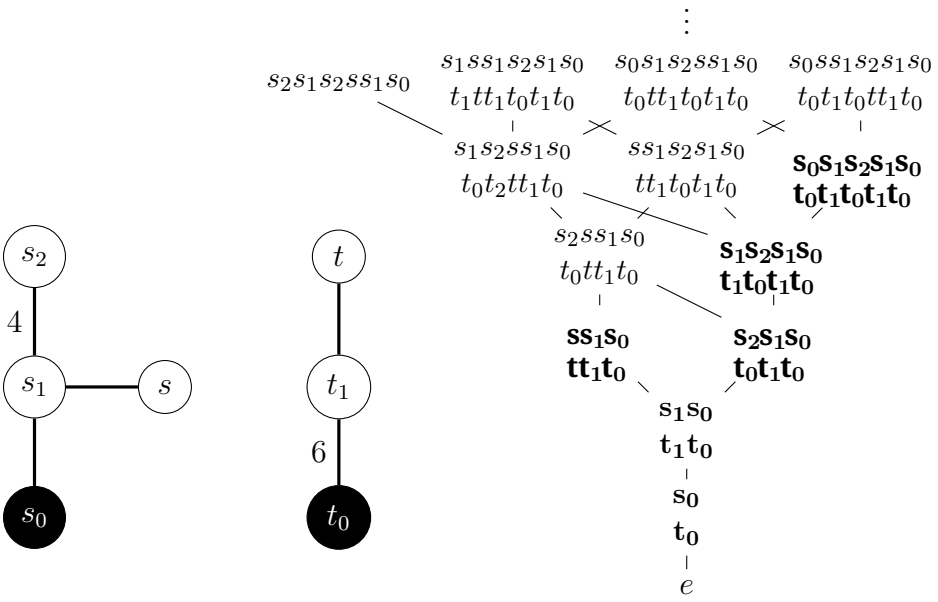


FIGURE 15. 命题证明中（4）的例子4.8 与 $k = 2$，$n = 1$。这两个偏序集以重叠方式绘制，以显示它们的差异，差异在于元素 $s_2 s_1 s_2 s s_1 s_0$，证明中将其标记为 w。

推论4.9 (堆叠标签性质)。假设形式（*II*）的 $u = s_l \dots s_k \dots s_0$ 不包含与任何 $v \in C$ 组成的非保形式篮子。若满足以下任一条件：

(a) $m(s_j, s_{j-1}) \geq 4$ 对某个 $j \leq l$ 成立；

或 ***(b)*** $l = 0$ 且 u 属于形式（*II*），

于是对于某些互不相同的 $\{t_0, \dots, t_k\} \in S$，有 $u = t_l \dots t_k \dots \overline{t_0}$。

证明。如果 u 属于一个保持形式的篮子，那么根据篮子分类，结论即得。对于 (a)，假设 j 在具有此性质的元素中是极大的。于是 $x = s_{j-1}s_j \dots s_0$ 是链状元素，并检测出 u，且在 u 之下没有链状元素，因此由命题 4.8 即可得到结论。对于 (b)，设 $u = t_j \dots t_n \dots t_0$ 满足 $n > k$。于是 $j > 0$ 并且 $m(t_j,\ t_{j-1}) \geq 4$，因为在 u 之上没有链状元素，所以 $x = t_{j-1}t_j \dots t_0$ 是链状元素，并检测出 u，且在 u 之下没有链状元素，而命题 4.8 导致矛盾。□

定理4.2的证明。令 u、v 构成非形式保持篮子。我们已经有 $\phi(w)$ 与 w 具有相同形式，适用于 $w \geq u'$、$w \geq v'$ 或 $w \leq u''$。如果 $w \in C$ 不属于这些情形中的任何一种，那么它在图13中白色节点的附加图中包含生成元，并且 $\phi(w) = w$。然而，如果 w 是形式（II），则由于 s_k 与 s_{k-1} 之间的 ∞ 标记，推论4.9适用。对方向 $W^J \to W^J$ 重复上述论证，我们得到：$w \in C$ 是形式（II）当且仅当 w 是形式（II）。于是，w 是形式（III）当且仅当它不是形式（II）且大于某个形式（II）元素；否则 w 是简单元。因此，C 和 C 中所有元素的形式均已确定，定理3.16适用。□

4.2. **标签大于或等于 5。** 根据定理 4.2 已证明，我们现在可以假设同构 $W^J \to W^J$ 不包含任何非形式保持的篮子。我们将这样的同构偏序集对称为 无篮子。首先，我们关注形式（III）元素，并对所有将形式（III）链状元素映射为形式（I）或（II）链状元素的同构进行分类。我们从大于或等于 6 的边标签开始。

命题 4.10。 设 $W^J \to W^J$ 为无篮子，并假设 u 为形式（*III*），且 $u = s_{k-1}s_ks_{k-1}s_k \dots s_0$（因此 $m(s_k,\ s_{k-1}) \geq 6$）以及 $k \geq 2$。那么，对于 $w \leq u$ 或 $w \geq u$，$w \in C$ 的形式与 w 的形式相同。

证明。如果 $m(s_{k-1},\ s_{k-2}) \geq 4$，那么 $x_0 = s_{k-2}s_{k-1} \dots s_0$ 是链状的，并且能检测到 u 和 $u'' = s_{k-1}s_k \dots s_0$，因此命题 4.8 给出 $u'' = t_{k-1}t_k \dots t_0$。那么我们不能有 $u = t_{k-3} \dots t_k \dots t_0$，因为 x_0 将无法检测到 u，所以必有 $u = t_{k-1}t_kt_{k-1}t_k \dots t_0$，结论得证。

另一方面，若 $m(s_{k-1},\ s_{k-2}) = 3$，那么 $x = s_{k-2}s_{k-1}s_k \dots s_0 \in C$ 是链状元素，并检测 u。若 u 是形式（II），则命题 4.8 推出 u 是形式（II），这就产生了矛盾。现在假设 u 是简单元，因此 $u = t_{k+3} \dots t_0$ 且 $x = tt_{k+1} \dots t_0$ 是简单元。那么 $v = t_{k+3}x$ 是链状元素，且 $v \sim u$，但这意味着 $v = s_{k-1}s_{k-2}s_{k-1}s_k \dots s_0$ 不可能是链状元素，产生矛盾。因此 u 是形式（III）。

对于 u 为形式（III）的一种可能情形，是 $u = t_{k+1}t_kt_{k+1} \dots t_0$ 且 $x = tt_{k+1} \dots t_0$ 为简单元。由于 u 是唯一覆盖 u' 的链状元素，$u' = t_kt_{k+1} \dots t_0$ 之上没有形式（II）链状元素，因此 $m(t_k,\ t_{k-1}) \geq 4$。但这样一来，$t_{k-1}t_k \dots t_0$ 就会检测 u'，所以根据命题 u' 4.8，这将意味着 $u = t_{k-1}t_kt_{k-1}t_k \dots t_0$ 是形式（II），从而产生矛盾。唯一剩下的可能性是□，结论得证。□

现在我们考察 5 的标签，并使用 N 函数。

命题 4.11。 设 $W^J \to W^J$ 为无篮子，并假设 $u = s_ks_{k-1}s_k \dots s_0$ 属于形式（*III*），$m(s_k,\ s_{k-1}) = 5$ 且 $k \geq 3$。那么，当 $w \leq u$ 或 $w \geq u$ 时，$w \in C$ 的形式与 w 的形式相同。

证明。若 $m(s_{k-1}, s_{k-2}) \geq 5$，则 $u' = s_{k-1}s_k \dots s_0$ 与 $s_{k-1}s_{k-2}s_{k-1} \dots s_0$ 构成一个篮子。由于该同构无篮子，我们有 $u' = t_{k-1}t_k \dots t_0$ 且 $m(t_{k-1}, t_{k-2}) \geq 5$，因此必有 $u = t_kt_{k-1}t_k \dots t_0$，证明完毕。现在考虑 $m(s_{k-1}, s_{k-2}) = 4$，并令 $x = s_{k-2}s_{k-1} \dots s_0$。由 x 检测到 u'，根据命题 4.8 可得 $u' = t_{k-1}t_k \dots t_0$。若 $u = t_{k-2}u'$，那么由于 u 上方没有链状元素，$m(t_{k-2}, t_{k-3}) = 3$。然而

$\overline{x}_1 = t_{k-3}t_{k-2}\dots t_0$ 检测到 u，因此根据命题 4.8，u 必须是形式（II），这就导致矛盾。最后，假设 $m(s_{k-1}, s_{k-2}) = 3$，并令 $v = s_{k-2}s_{k-1}s_k\dots s_0$。我们有 $M(u,v) = 2$，以及 $N(u,v) = 5$。满足 $N(u,v) = 5$ 的情况有两种：

- 假设 $u = t_{k+2}\dots t_0$，$v = tt_{k+1}\dots t_0$ 是简单元。要使 $N(u, v) = 5$ 成立，我们要求 $m(t_{k-2}, t_{k-3}) \geq 4$ 且 $m(t_{k-1}, t_{k-2}) = m(t_k, t_{k-1}) = m(t_{k+1}, t_k) = 3$，因此 $x = t_{k-3}t_{k-2}\dots t_0$ 是链状的，并对应于 $x \in C$，其中某个 s 满足 $x \rhd s_{k-2}\dots s_0$。但此时 x 能检测出 v，而 x 无法检测出 v，这就造成了矛盾。
- 假设 $u = t_{k-2}t_{k-1}t_k\dots t_0$ 且 $v = t_kt_{k-1}t_k\dots t_0$。我们有 $m(s_{k-2}, s_{k-3}) = 3$，否则 $x = s_{k-3}s_{k-2}\dots s_0$ 无法检测出 u，但 $x \rhd t_{k-2}\dots t_0$ 能检测出 u。然而此时 $v_1 = s_{k-3}\dots s_k\dots s_0$ 是链状的，因此必有 $v_1 = t_{k-1}t_kt_{k-1}t_k\dots t_0$，再应用命题 4.10 即可得到矛盾。

唯一剩下的情况 是 u，v 与 u，v 具有等价生成元表达式的情况。 □

上述两个命题覆盖了大多数情况，但当 k 过小时便不再适用。现在我们分别考察 $k = 1$ 和 $k = 2$ 这两个例外情形：

命题 4.12。设 $W^J \to W^J$ 无篮子，且假设 $u = s_1s_0s_1s_0$ 为形式（*III*）（因此 $k = 1$）。若存在一个 $s \in S \setminus \{s_0, s_1\}$，它与 s_0 或 s_1 之间有一条边，则对于 $w \leq u$ 或 $w \geq u$，$w \in C$ 的形式与 w 的形式相同。

命题 4.13。设 $W^J \to W^J$ 无篮子，且假设 $u = s_2s_1s_2s_1s_0$ 为形式（*III*）（因此 $k = 2$），并且 $m(s_1, s_2) = 5$。若 $m(s_0, s_1) \geq 4$，或者存在一个 $s \in S \setminus \{s_0, s_1, s_2\}$，它与 s_0、s_1 或 s_2 之间有一条边，则对于 $w \leq u$ 或 $w \geq u$，$w \in C$ 的形式与 w 的形式相同。

命题 4.12 的证明。若 u 不是形式（III），则 u 要么是 $t_3t_2t_1t_0$，要么是 $t_1t_2t_1t_0$。在这两种情况下，对于某些互不相同的 t_0、t_1、$t_2 \in S$，$t_2t_1t_0$ 都是链状的。若存在 $s \in S \setminus \{s_0, s_1\}$，使得 $m(s, s_0) \geq 3$，则 s 或 ss_0 是链状的，因此存在 $t \in S \setminus \{t_0, t_1\}$，使得 $m(t, t_0) \geq 3$。但这样一来，s 或 ss_0 就能检测到 $s_0s_1s_0$，所以 t 或 tt_0 能检测到 $t_2t_1t_0$，并且 $m(t, t_2) \geq 3$。因此 $u' \sim v$，其中要么 $v = t_2tt_0$，此时 u' 和 v 构成一个篮子；要么 $v = t_2t$，这就导致矛盾，因为不存在长度为 2 且满足 $v \sim u' = s_0s_1s_0$ 的 $v \in C$。

现在假设存在 $s \in S$，满足 $m(s, s_0) = 2$，但 $m(s, s_1) \geq 3$。若 $s \notin J$，则 $s_1s \in C$，类似地 $t_1t \in C$。此外，s 不会检测到 $s_0s_1s_0$，因此 t 不会检测到 $t_2t_1t_0$，所以 $m(t_2, t) = 2$ 且 $t_2t_1t \in C$。于是 $u' \sim v = t_2t_1t$，但这意味着 $v \in C$ 以 s_0 开始并以 s 结束，产生矛盾。反之，若 $s \in J$，则 $x = ss_1s_0$ 会检测到 u。若 u 属于形式（II），则由命题 4.8 可知会产生矛盾；若 $u = t_3t_2t_1t_0$ 是简单元，则 u 和 $v = t_3x$ 构成一个篮子。因此，我们必有 $u = t_1t_0t_1t_0$，结论随即成立。□

命题的证明 *4.13*。如果 $m(s_0, s_1) \geq 4$，那么 $x = s_0s_1s_0$ 能检测到 $u' = s_1s_2s_1s_0$，由命题 4.8 即可得证。因此假设 $m(s_0, s_1) = 3$，使得 $v = s_0s_1s_2s_1s_0 \in C$。如果 u 不属于形式（III），那么有两种可能情况。

首先，可能有 $u = t_4t_3t_2t_1t_0, v = t_5t_3t_2t_1t_0$，其中 $t_0, \dots, t_5 \in S$ 互不相同。如果 $s \notin J$，那么命题 3.22 会导出一个矛盾，因此假设 $s \in J$。如果 $m(s, s_0) \geq 3$ 或 $m(s, s_1) \geq 3$，那么我们可以将引理 4.3 应用于 v，取 $x = ss_0$；或者应用于 v'，取 $x = ss_1s_0$。反之，如果 $m(s, s_2) \geq 3$ 且 $m(s, s_0) = m(s, s_1) = 2$，那么 $x = ss_2s_1s_0$ 能检测到 u，但此时 u 和 t_4x 构成一个篮子。

其次，我们可能有 $u = t_0t_1t_2t_1t_0$，$v = t_2t_1t_2t_1t_0$。不能有 $x = ss_2s_1s_0$ 链状，因为这样一来 x 能检测到 u，但 $x \rhd t_2t_1t_0$ 无法检测到 u。因此，存在一个链状 $x \in \{s, ss_0, ss_1s_0\}$，其约化表达式以 $t \in S$ 开头；对于 t_0，t_1，t_2，必须分别取一个与 s 到 s_0，s_1，s_2 具有相同边的生成元。此外，由于 u 以 s_2 开头，而 u 以 s_0 开头，通过观察 x 是否检测到 u 或 v，我们得到

$m(s,\ s_0) = m(s,\ s_2) = m(t,\ t_0) = m(t,\ t_2)$。我们将其分成若干种情况，并在每种情况下都得到一个矛盾。

- 如果 s 与 s_0相连，s_2 但不与 s_1相连，请考虑具有 $w \rhd v$和 $w > s$的 $w = s_0s_1s_2s_1ss_0$。这覆盖了 4 个元素（v、$s_0s_1s_2ss_0$、$s_0s_2s_1ss_0$、$s_1s_2s_1ss_0$），但 w 的可能情况为 $tt_2t_1t_2t_1t_0$、$t_2t_1tt_2t_1t_0$、$t_2t_1t_2t_1t\overline{t_0}$ 和 $t_2t_1t_2t_1t_0t$（如果 $t \notin J$），它们都覆盖 2 个或 3 个元素。

- 如果 s 与 s_0相连，s_1 并且与 s_2相连，请考虑具有 $w \rhd v$和 $w > s$的 $w = s_0s_1s_2ss_1s_0$。这覆盖了 5 个元素（v、$s_0s_1s_2ss_0$、$s_0s_1ss_1s_0$、$s_0s_2ss_1s_0$、$s_1s_2ss_1s_0$），但 w 的可能情况为 $tt_2t_1t_2t_1t_0$、$t_2tt_1t_2t_1t_0$、$t_2t_1tt_2\overline{t_1}t_0$、$t_2t_1t_2tt_1t_0$ 和 $t_2t_1t_2t_1tt_0$，它们都覆盖 2 至 4 个元素。

- 假设 s 与 s_1 之间有一条边，但与 s_0、s_2之间没有边。– 如果 $s \notin J$，考虑具有 $w \rhd v$ 和 $w > s$的 $w = s_0s_1s_2s_1s_0s$。它覆盖 4 个元素（v、$s_0s_1s_2s_1s$、$s_0s_2s_1\underline{s_0}s$、$s_1s_2s_1s_0s$），但 w 的可能情况是$t_2tt_1t_2t_1t_0$、$t_2t_1t_2tt_1t_0$ 和 $t_2t_1t_2t_1t_0t$，而它们都覆盖 2 到 3 个元素。– 如果 $s \in J$ 和 $m(s,\ s_1) \geq 4$，考虑具有 $w \rhd v$和 $w > s$的 $w = s_0s_1s_2ss_1s_0$。它覆盖 3 个元素（v、$s_0s_1ss_1s_0$、$s_1s_2ss_1s_0$），其中 2 个呈链状，而 w 的可能情况是 $t_2tt_1t_2t_1t_0$ 和 $t_2t_1t_2tt_1\overline{t_0}$。前者只覆盖 2 个元素，后者只覆盖一个链状$v$。– 如果 $s \in J$ 和 $m(s,\ s_1) = 3$，考虑具有 $\ell(w) = 7$ 和$w \not> v$的 $w = s_1s_2s_1s_2ss_1s_0$。这是一个具有 $w' = s_2s_1s_2ss_1s_0$的半链状结构，但w 的可能情况是 $t_1t_0tt_1t_2t_1t_0$ 和 $t_0t_1tt_1t_2t_1t_0$，二者都覆盖超过 1 个元素。

因此我们已经证明 u 具有形式（III），并且根据命题 $u = t_0t_1t_0\overline{t_1}t_0$ 4.12，不可能有该情形，所以我们得到了所需结果。□

注记 4.14。这些命题与上述结果表明，如果一个 bw-Coxeter 图含有一条边标签为 5 或更大的边，并且相应的偏序集同另一个偏序集存在一个同构，而该同构不保持由该边产生的形式（II）或形式（III）的链状结构，那么该图必定是 $(I_2(m)\ A_1)$（带有 $m \geq 5$）或 $(H_3,\ H_2)$。于是很容易验证，这些图可能的同构只有以下几种:

- $(H_3, H_2) \leftrightarrow (D_6, D_5)$;
- $(H_3,\ H_2)$，其自同构交换两个最长的链状元素;
- $(I_2(n)\ A_1) \leftrightarrow (A_{n-1},\ A_{n-2})$，其中 $n \geq 5$;
- $(I_2(2n)\ A_1) \leftrightarrow (B_n,\ B_{n-1})$，适用于 $n \geq 3$。

除自同构外，所有这些内容都在第 2.4 节中介绍。请注意，虽然这种方法揭示了（H_3, H_2）自同构，但它并不能保证不存在其他自同构，只能说明这些未知的自同构会保持链状元素的形式。例如，I_2（m）的 Bruhat 偏序集由 $\{s_0, s_1\}$ 生成，并具有一个将 s_0s_1 与 s_1s_0 互换而固定其他元素的自同构。

4.3 完成分类。现在我们检查标签为 4 的情形。由于我们已经涵盖了涉及形式（III）链状元素的所有可能性，因此从这一点开始，我们假设除了 $W^J \to W^J$为无篮子之外，对于所有 $u \in C$，u是形式（III）当且仅当u 是形式（III）$\overline{\ }$。一个直接推论是，如果 u 和 u 都为形式（II），那么通过计算 u 和 u上方的非形式（III）链状元素的数量，并在必要时应用推论4.9，可知对于所有 $w \leq u$ 或$w \geq u$，w 和 w 具有相同的形式。这意味着我们只剩下一个情形需要考虑：将 $\overline{\ }$ $u_0 = s_0 \dots s_k \dots s_0$映射到 $u_0 = t_{2k} \dots t_0$的同构。如果 s_0、.....、s_k是 S中的唯一生成元，那么该同构为 $(B_{k+1}, B_k) \to (A_{2k+1}, A_{2k})$。如果任何 $x \in C$检测到任何 $s_l \dots s_k \dots s_0 \leq u_0$，那么我们可以应用命题 3.22或引理 4.3，因此添加生成元的唯一方式

到 S 同时保持同构，就是仅将新生成元连接到 s_k。接下来的两个命题将处理这种情形。

命题 4.15. 取上述的 $u_0 = s_0 \dots s_k \dots s_0$ 和 $u_0 = t_{2k} \dots t_0$，假设 $k \geq 2$。那么不可能存在任何满足 $m(s, s_i) \geq 3 \iff i = k$ 的 $s \in S \setminus \{s_0, \dots, s_k\}$，因此根据上述说明，$S = \{s_0, \dots, s_k\}$。

如果 $s \in J$ 在 $s_k \dots s_0$ 上方有两个链状元素分支，一个以 $ss_k \dots s_0$ 开始，另一个以 $s_{k-1}s_k \dots s_0$ 开始。证明中最复杂的部分是验证交换这两个分支的映射不能扩展为偏序集的自同构（除非 $k = 1$，此时 (B_3, A_2) 具有这个自同构），图 16对此作了说明。

证明。如果 $s \notin J$ 且 $t = \bar{s}$，那么我们看到 $u_1 = t_{2k} \dots t_k t$ 是链状的，并且 $u_1 \sim t_{2k} \dots t_0$，这与矛盾，因为 u_1 必须以 s_0 开头并以 s 结尾。如果 $s \in J$，则令 $u = s_{k-1}s_k \dots s_0$ 和 $v = ss_k \dots s_0$。如果 v 是简单元，那么 $N(u, v) = k + 2 \geq 4$，而 $N(u, v) \in \{1, 3\}$，矛盾，因此假设 v 是形式（II）。我们有 $m(t_k, t_{k-1}) = 4$，并且对于 $i \geq k$ 还必须有 $m(t_i, t_{i+1}) = 3$，因为否则 $t_i t_{i+1} \dots t_0$ 要么会映射到 W^J 中的形式（III）元素，要么没有任何链状对象可供映射。记 $s_{k+1} = s$ 和 $u_2 = s_{k-2}s_{k-1}s_k \dots s_0$（因此 $u_2 = t_{k+2} \dots t_0$），我们有

$$N_1(u, v) = \{s_k s_{k-1} s_{k+1} s_k \dots s_0\} \qquad N_1(\bar{u}, \bar{v}) = \{t_k t_{k-1} t_{k+1} t_k \dots t_0\}$$
$$M_2(u_2, v) = \{s_{k-2} s_{k-1} s_{k+1} s_k \dots s_0\} \qquad M_2(\bar{u}_2, \bar{v}) = \{t_{k+2} t_{k-1} t_{k+1} t_k \dots t_0\}$$

考虑 $w = t_{k+1} t_k t_{k+2} t_{k-1} t_{k+1} t_k \dots t_0$。我们有 $w \in W^J$ 且 $\bar{w}$ 是半链状的，此外 w' 覆盖了 $N_1(u, \bar{v})$ 和 $M_2(u_2, v)$ 中的唯一元素。因此必有 $w' = \bar{s}_k s_{k-2} s_{k-1} s_{k+1} s_k \dots s_0$。根据引理3.13，$w$ 的可能取值为 $s_{k-3}w'$、$s_{k-1}w'$ 和 $s_{k+1}w'$，不难验证它们要么不是半链状的，要么不属于 W^J。因此产生矛盾。□

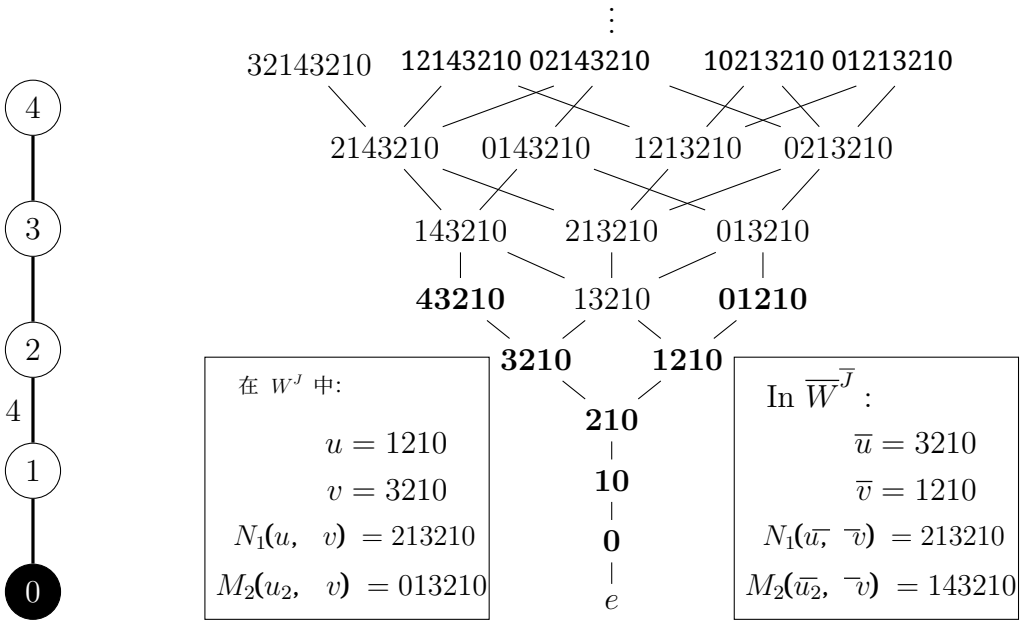


FIGURE 16. 命题的证明示例4.15，其中 $k = 2$。右侧的图可根据 u 和 v 的选择解释为两个偏序集之一，如图例所示。请注意，$w = 32143210$ 在 W^J 中没有对应的半链状元素。

最后，我们单独讨论 $k=1$ 情形：

命题4.16。如果上述 u_0 和 u_0^- 由 $u_0 = s_0s_1s_0$ 和 $u_0 = tt_1t_0$ 给出（因此$k=1$），那么对于某个 $n \geq 1$，有 $(W, W_J) = (B_{n+1}, A_n)$。

证明。首先，我们证明至多存在一个不等于 u_0 的链式覆盖 s_1s_0。假设存在 $s_a, s_b \in J$，其中 $v_a = s_as_1s_0$ 和 $v_b = s_bs_1s_0$ 是链状的，且不同于 u_0，于是 $N(u_0, v_a) = N(u_0, v_b) \in \{1,3\}$。$v_a, v_b$ 中至多有一个是非简单的，因此不妨设 $v_a = t_at_1t_0$ 是简单元。如果 $m(t, t_1) = 4$，那么 $t_1tt_1t_0 \triangleright u_0$ 是链状的，但不存在覆盖 u_0 的链式覆盖，矛盾。此外，如果 $m(t_a, t_1) = 4$，那么 $v_1 = t_1t_at_1t_0$ 是链状的，并且由 u_0 检测到，从而得到 $v_1 = s_1s_as_1s_0$，于是 $m(t, t_1) = M(v_1, u_0) = M(v_1, u_0) = m(s_1, s_0) = 4$，同样产生矛盾。这意味着 $m(t, t_1) = m(t_a, t_1) = 3$，但随后 $N(u_0, v_a) = 2$。因此，至多存在一个简单链状 v_0 覆盖 s_1s_0。

现在设 $s_n \dots s_0$ 是 s_1s_0 上方带有 $n \geq 2$ 的极大简单链式，这意味着 $v_0 = s_2s_1s_0$。我们有 $m(s_1, s_2) = 3$，否则 $s_1s_2s_1s_0$ 会被 u_0 检测到，从而根据引理4.3导致矛盾。若 $m(t_0, t_1) \geq 4$，那么必有 $v_0 = t_0t_1t_0$，因为否则 u_0、v_0 和 $t_0t_1t_0$ 是覆盖 t_1t_0 的不同元素，并且会得到如上的矛盾。由于不存在覆盖 v_0 的链状元素，在此情形下必有 $n=2$。

If 相反，若 $m(t_0, t_1) = 3$ 且 $v_0 = t_2t_1t_0$ 是简单元，则有以下结果：

- 我们证明链状元素中不存在带标记的边 $s_i \dots s_0$。设 $j \geq 2$在满足 $m(s_j, s_{j-1}) \geq 4$的元素中是极小的。由推论4.9，$u_1 = t_1 \dots t_j \dots t_0$。我们假设上文不存在形式（III）的链状元素 u_1，因此由于 $s_0 \dots s_j \dots s_0 \notin C$我们要求 $m(t_0, t_1) \geq 4$，矛盾。
- 我们证明链状元素中不存在分支 $s_i \dots s_0$。假设 u，v是两个简单链状元素，且满足 $u' = v' = s_i \dots s_0$，$i \geq 2$。根据命题4.15及上面的注释u和 v也必须是简单元，因此要使 $N(u, v) = N(u, v)$成立，我们需要 $m(t_0, t_1) \geq 4$，这就产生了矛盾。

因此，上述链状元素 s_0是 Coxeter 对 $(W, W_J) = (B_{n+1}, A_n)$中的链状元素。我们还需证明，不存在与 s_i 相连的黑色节点 $x \in S \setminus J$，其中$i \geq 1$。假设 i是极小的，因此 x与 t_i相连，其中 $t_i \dots t_0 = s_i \dots s_0$。但此时$tt_1 \dots t_ix$ 或 tx 是链状元素，从而得到 $v \in C$，且 $v \sim u_0$，所以 v必须以 s_0开始并以 x结束，这就产生了矛盾。□

注释 4.17。上述结果表明，唯一尚未检验的同构是：

- $(B_n, B_{n-1}) \leftrightarrow (A_{2n-1}, A_{2n-2})$ 对于 $n \geq 2$（表示 $B_1 = A_1$）；
- $(B_n, A_{n-1}) \leftrightarrow (D_{n+1}, A_n)$ 对于 $n \geq 3$；
- (B_2, A_1)，具有一个交换两个最长链状元素的自同构。

所有这些（除了自同构之外）都在第2.4节中覆盖。这完成了分类，以下定理对此作了阐述，并扩展了定理1。

定理 4.18。假设(W, S)、$(W, \overline{S})$是具有连通图的*Coxeter* 系统，且$J \subset S$、$J \subset S$。*Bruhat* 偏序集 W^J和 W^J 同构，当且仅当(W, W_J)、(W, W_J)具有以下形式之一：

- $(I_2(n), A_1) \leftrightarrow (A_{n-1}, A_{n-2})$ 当 $n \geq 4$；
- $(B_n, B_{n-1}) \leftrightarrow (A_{2n-1}, A_{2n-2})$ 当 $n \geq 3$；
- $(B_n, B_{n-1}) \leftrightarrow (I_2(2n), A_1)$ 当 $n \geq 3$；
- $(B_n, A_{n-1}) \leftrightarrow (D_{n+1}, A_n)$ 当 $n \geq 3$；
- $(H_3, H_2) \leftrightarrow (D_6, D_5)$；
- 存在一个双射 $\sigma: S \to S$，满足 $m(s_1, s_2) = m(\sigma(s_1)\ \sigma(s_2))$ 以及 $s_1 \in J \iff \sigma(s_1) \in J$对所有 $s_1, s_2 \in S$ 均成立；也就是说，配对 (W, W_J)和 (W, W_J)是同构的；
- $S = J$和 $S \equiv J$，也就是说，W^J和W^J 是平凡的。

此外，当限制在 $C(W^J)$上时， W^J存在一个非恒等映射的自同构，当且仅当 (W, W_J) 具有以下形式之一：

- （B_2， A_1），其中自同构交换了两个最长的链状元素；
- （H_3， H_2），其中自同构交换了两个最长的链状元素；
- （W， W_J）的图如图 *6* 所示；
- 存在一个非平凡双射 σ： $S \to S$，它满足 $m(s_1, s_2) = m(\sigma(s_1)\ \sigma(s_2))$ 且 $s_1 \in J \iff \sigma(s_1) \in J$ 对所有 s_1， $s_2 \in S$均成立；也就是说，（W， W_J）的 ***bw-Coxeter*** 图存在一个自同构。

定理的证明 *4.18* 和定理 *1*。这两个结果均可由上述评论以及第 2.4 节中的结果推出。□

5. Extensions and observations

这里我们详细介绍一项主要应用，即将 [Co1] 的结果推广到 $\mathcal{O}$的各块，并讨论进一步研究的方向。

5.1. O类的块 $\mathcal{O}$。设 $\mathfrak{g}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的可对称化 Kac-Moody 代数，具有根空间分解，其 Weyl 群为 $\mathcal{W}$ （一个晶体型 Coxeter 群），Borel 子代数为 $\mathfrak{b}$，Cartan 子代数为 $\mathfrak{h}$。我们在 $\mathfrak{h}^*$ 上定义通常的偏序：当且仅当 $\lambda - \mu$ 是单根的正整数系数线性组合时， $\lambda \geq \mu$ 成立。

文献中有两种与 $\mathcal{O}$ 相对应的 $\mathfrak{g}$ 类别定义，定理3 适用于这两种定义。我们按照 [BS]的记法将它们区分如下：

- $\mathcal{O}$ 表示由 $\mathfrak{g}$-模 M 构成的范畴，这些模是 $\mathfrak{h}$-半单的，具有有限维权空间，并且存在有限多个权 λ_1、……、λ_n（取决于 M），使得 M 的每个权 λ 都满足：对某个 i， 有 $\lambda \leq \lambda_i$。$\frown$

- $\mathcal{O}$ 表示由 $\mathfrak{g}$模组成的范畴，其中对象是 $\mathfrak{h}$半单且局部 $\mathfrak{b}$有限的。

$\widehat{\ }$ $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}$ 都包含由 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$参数化的简单对象 $L(\lambda)$。由于 $\mathfrak{g}$ 是可对称化的，因此在 $\mathfrak{h}^*$ 上存在一个非退化对称不变双线性型 $(\cdot, \cdot)$，并存在元素 $\rho \in \mathfrak{h}^*$，使得对于任意单根 α，都有 $(\rho, \alpha) = 1$。令 $\sim$ 为 $\mathfrak{h}^*$ 上的等价关系：当存在 $n \in \mathbb{N}$ 和一个正根 α 使得 $\lambda - \mu = n\alpha$ 且$2(\lambda + \rho, \alpha) = n(\alpha, \alpha)$时，由 $\lambda \sim \mu$ 生成该关系。等价类 $\Lambda \in \mathfrak{h}^*/\sim$给出 $\mathcal{O}$ （分别为 $\mathcal{O}$）的一个 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$分解，将其分解为由满足[M 的模 M 组成的块 $\mathcal{O}_\Lambda$ （分别为 $\mathcal{O}_\Lambda$）：$L(\lambda)] \neq 0 \implies \lambda \in \Lambda$。如果对于所有 $\mu \in \Lambda$都有 $\lambda \geq \mu$ $\widehat{\ }$（分别为 $\lambda \leq \mu$），则称 $\lambda \in \Lambda$ 为支配的（分别为反支配的）；类似地，如果 Λ包含一个支配权或反支配权，则称 $\mathcal{O}_\Lambda$ 和 $\mathcal{O}_\Lambda$ 为支配的或反支配的。

与 [Fi1] 中一样，我们用 Stab(λ) 表示 $\mathcal{W}$ 的子群，其中权 λ 在点作用 $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ 下保持不变；用 $\mathcal{W}(\Lambda)$ 表示由反射 s_α 生成的子群，其中 α 是满足对某个 $\lambda \in \Lambda$ 有 $2(\lambda + \rho, \alpha) \in \mathbb{Z}(\alpha, \alpha)$ 的根（在有限维情形下， $\mathcal{W}(\Lambda)$ 和 Stab(λ) 通常分别记作 $\mathcal{W}_{[\lambda]}$ 和 $\mathcal{W}_\lambda$，例如参见 [Hu]）。我们称 Λ 位于临界超平面之外，如果上述所有 α 都是实根；此时事实上对于 $\lambda \in \Lambda$，有 $\Lambda = \mathcal{W}(\Lambda) \cdot \lambda$。此外， $\mathcal{W}(\Lambda)$ 是一个 Coxeter 群，Stab(λ) 是其抛物子群；在反支配情形下，由 $u \cdot \lambda \leq v \cdot \lambda$ 定义的 Λ 上的偏序（当 $L(u \cdot \lambda)$ 是标准 Verma 模 $M(v \cdot \lambda)$ 的子商时），恰好就是 $\mathcal{W}(\Lambda)$/Stab(λ) 上的 Bruhat序；在支配情形下，则是其对偶（例如参见 [KK],[Hu，第 5.2] 节）。

在 [Co1] 中证明了，对于任意有限维半单李代数 $\mathfrak{g}$ 和$\mathfrak{g}'$ （即满足 $\mathcal{W}$ 有限条件的 Kac-Moody 代数），它们各自的最高权范畴 $\mathcal{O}_\Lambda$ 中 $\mathcal{O}'_{\Lambda'}$ 的两个块 $\mathcal{O}$ 等价，当且仅当它们对应的偏序集 $\mathcal{W}$（Λ）/Stab(λ)和$\mathcal{W}'$（Λ'）/Stab(λ')同构。但我们现在已经证明了定理1，它表明无限偏序集之间不存在非平凡同构，因此我们可以将……扩展到

定理4.2.1的证明 [Co1] 中的结果推广到所有可对称化 Kac-Moody 代数（尽管并非适用于所有块）。首先，我们重述 [BS] 中的一个结果，并利用他们对上有限和下有限最高权范畴的分析：

定理 5.1。 若存在支配权 $\lambda \in \Lambda$，则 $\mathcal{O}_\Lambda$ 是 $\mathcal{O}_\Lambda$ 的满子范畴，由所有满足 $[M : L(\lambda)] < \infty$ 的模 M 组成，并且 $\mathcal{O}_\Lambda$ 是上有限的。若存在反支配权 $\lambda \in \Lambda$，则 $\mathcal{O}_\Lambda$ 是 $\mathcal{O}_\Lambda$ 的满子范畴，由所有有限长度的模组成，并且 $\mathcal{O}_\Lambda$ 是下有限的。在这两种情况下，标准对象和余标准对象分别是与 Λ 中的元素相对应的 *Verma*模和对偶*Verma*模。

这是对 [BS，定理 6 的推广。4]虽然原定理只在仿射 Kac-Moody 代数和整权的背景下表述，但其中的证明自然地推广到所有可对称化 Kac-Moody 代数以及支配权/反支配权。现在我们完成定理 3 的证明：

定理 3 的证明。 [Co1] 中证明了，具有保持简单对象的对偶的有限最高权范畴具有唯一的偏序结构；对于范畴 $\mathcal{O}$ 的块而言，这恰好是 $\mathcal{W}(\Lambda)/\mathrm{Stab}(\lambda)$ 上的 Bruhat序。 [Co2], 将此推广到了下有限和上有限情形；因此，根据定理 5.1，如果 $\mathcal{O}_\Lambda \simeq \mathcal{O}'_{\Lambda'}$ 等价，并且 $\lambda \in \Lambda$、$\lambda' \in \Lambda'$ 要么均为支配的，要么均为反支配的，那么 $\mathcal{W}(\Lambda)/\mathrm{Stab}(\lambda) \cong \mathcal{W}'(\Lambda')/\mathrm{Stab}(\lambda')$。

我们还可由 [Fi1, Theorem 4.1]得到：Coxeter 对 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }(\mathcal{W}(\Lambda),\mathrm{Stab}(\lambda))$ 与 $\cong(\mathcal{W}'(\Lambda'),\mathrm{Stab}(\lambda'))$ 之间的同构会诱导出一个等价 $\mathcal{O}_\Lambda \simeq \mathcal{O}'_{\Lambda'}$，其中 λ、λ' 要么均为支配的，要么均为反支配的（这推广了 [So] 的著名结果）；因此，根据定理 5.1，我们还得到一个等价 $\mathcal{O}_\Lambda \simeq \mathcal{O}'_{\Lambda'}$。于是，将与 Coxeter 对 (W, W_J) 对应的 $\mathcal{O}$ 中唯一的支配的（或反支配的）块在等价意义下记为 $\mathcal{O}(W, W_J)$，到目前为止我们得到以下蕴含关系：

$$(W, W_J) \cong (U, U_K) \implies \mathcal{O}(W, W_J) \simeq \mathcal{O}(U, U_K) \implies W^J \cong U^K$$

为了完成证明，我们必须验证在所有满足以下条件的情形中，W、$W_J) \ncong (U$、$U_K)$ 但 $W^J \cong U^K$ 范畴等价的情形，也就是定理 1中的情形 (1)-(6)。对于情形 (6)$\widehat{\ }$，其中 $\mathcal{W}(\Lambda) = \mathrm{Stab}(\lambda)$，我们有 $\mathcal{O}_\Lambda \simeq \mathbb{C}$-模。其余情形涉及有限群，因此已在 [Co1] 中讨论。特别地，回想一下，Kac-Moody 代数的 Weyl 群必为晶体型：

- 情形 (1) 和 (3) 涉及 $I_2(m)$，其晶体型情形仅有$B_2 = I_2$(4) 和 $G_2 = I_2$(6)。这些情形可以显式计算，参见例如 [St]。
- 文献中已有情形 (2) 和 (4) 的相关结果，参见例如 [ES]。
- 情形（5）无关紧要，因为 H_3 是非晶体型。

证明至此完成。 □

5.2. **其他块与扩张**。 尽管定理 3仅适用于支配块和反支配块，但文献中已有一些关于其他块的部分结果。例如，仿射 Kac-Moody 代数的块按正层（支配的）、负层（反支配的）或临界层分类；关于临界层块的研究可见 [Fi2] 及其他文献。

定理 3 仅与晶体学 Coxeter 系统相关，因为只有这类系统会作为 Kac-Moody 代数的 Weyl 群出现。是否有办法扩展 $\mathcal{O}(W,\ W_J)$ 的定义，使其允许 $W,\ S)$ 非晶体型情形？我们提出，可以使用 Soergel 模来实现这一点，例如通过 [St] 中的构造。在 $\lambda \in \Lambda$ 为整的且支配的有限情形下，可以构造一个函子 $\mathbb{V}_\lambda : \mathcal{O}_\Lambda \to C^\lambda$-模到射影对象上的完全忠实函子，其中 C 是 Weyl 群的余不变元代数。利用这一点，可以用箭图构造出与 $\mathcal{O}_\lambda$ 等价的范畴，因为

该函子将射影对象映射为形如 $C \otimes_{C^{s_1}} C \otimes_{C^{s_2}} \cdots \otimes_{C^{s_n}} \mathbb{C}$ 的模的直和项，其中 $s_1 \dots s_n$ 是约化的。如 [EMTW] C所述，是用 W的一个表示来表达的，而它不一定是某个李代数的根系。事实上，每个有限 Coxeter 系统都有一个几何表示，因此从理论上讲，可以为非晶体系统构造范畴 $\mathcal{O}$ 的类似物$I_2(m)$， H_3 以及 H_4。

假设所构造的范畴是一个最高权范畴，本文的结果或许可以推广到这一新情形。然而，这目前还只是一个猜想；特别是，仍需验证，对于 $n = 5, n \geq 7$，同构 $(I_2(n)\ A_1) \leftrightarrow (A_{n-1},\ A_{n-2})$ 以及 $(H_3,\ H_2) \leftrightarrow (D_6,\ D_5)$ 是否给出了这些范畴之间的等价。后一种情形需要进行冗长的计算。

5.3. **例外情形的奇特之处**。 定理1中的例外同构 (1)-(5) 有一些显著的共同点：

- 所有例外同构都是有限的，也就是说，如果 W^J和 U^K中任一方 W或 U是无限的，就不存在非平凡同构（文献[De] 证明，非平凡商 W^J 是有限的，当且仅当 W 也是有限的）。
- 所有例外同构都恰有一个黑色节点，也就是说 $|J| = |S| - 1$，且 W_J是一个极大真抛物子群。

这些看似简单的事实，证明起来却异常困难，几乎完全依赖于第3节和第4节中的全部推导。若能找到一种更直接的方法来证明这些结果，将大有裨益。此外，几乎所有例外同构都可以归入两个无限族（全序和 $B_n \leftrightarrow D_n$ 情形），但（H_3，H_2）$\leftrightarrow$（D_6，D_5）仍是一个奇特的离群情形，其意义尚不明确。

6. Appendix

有限 Coxeter 系统的常见名称列于下图。

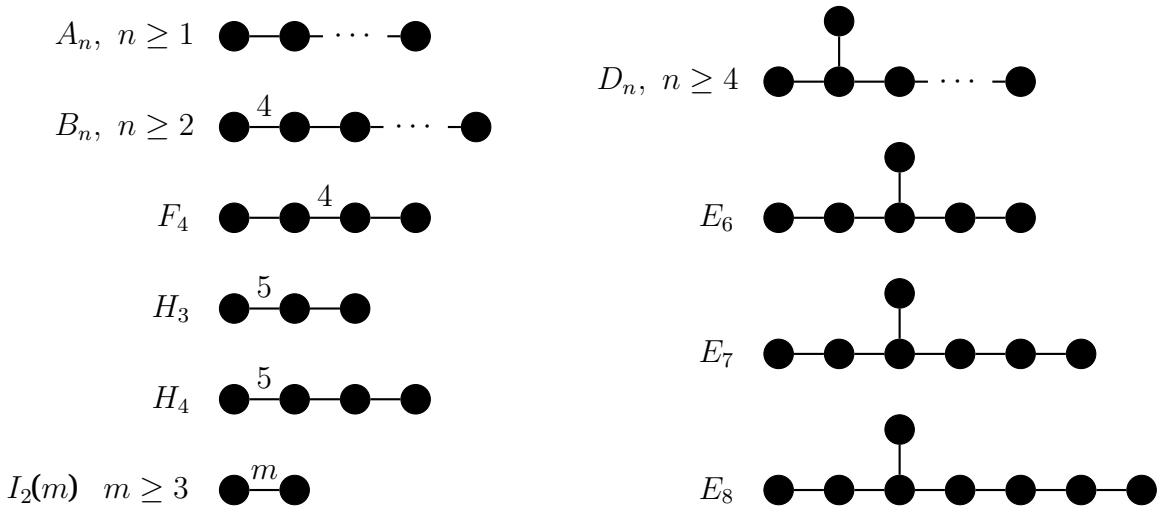


Figure 17.有限不可约考克斯特系统及其通用名称。每种情形中，指标 n 表示生成元的数量 $|S|$。请注意， $I_2(m)$也标记为 A_2，B_2，H_2，G_2 分别对应 $m = 3$，4，5，6。

References

[*BB*] *A. Bj¨orner，F. Brenti*，《考克斯特群的组合学》。数学研究生教材第 *231* 卷，施普林格，*2005* 年。[*BS*] *J. Brundan，C. Stroppel*：《半无限最高权范畴》。表示论 *7*（*2018*）。[*Co*1] *K. Coulembier*：《*BGG* 范畴 $\mathcal{O}$ 中块的分类》。*Math. Z. 295*（*2019*），*821–837*。[*Co*2] *K. Coulembier*：《归纳完备化与最高权范畴的一些同调性质》。*J. Algebra 562*（*2020*），*341-367*。[*De*] *V. V. Deodhar*：《关于 *Coxeter* 群的根系》。*Comm. Algebra，10(6)*（*1982*），*611-630*。[*EMTW*] *B. Elias，S. Makisumi，U. Thiel，G. Williamson*：《*Soergel* 双模导论》。*RSME Springer Series 5*，施普林格，*2020* 年。[*ES*] *M. Ehrig，C. Stroppel*：《各向同性格拉斯曼流形上反常层范畴的图示描述》。*Selecta Math. (N.S.) 22*（*2016*），第 *3* 期，*1455–1536*。[*Fi*1] *P. Fiebig*：《可对称化 *Kac-Moody* 代数上 *O* 类的组合学》。*Transform. Groups 11*（*2006*），*29–49*。[*Fi*2] *P. Fiebig*：《临界层仿射 *O* 类的次一般受限块》。*Sym., Int. Sys. & Rep. 40*（*2013*），*65-84*。[*Hu*] *J. E. Humphreys*：《*BGG* 范畴 $\mathcal{O}$ 中半单李代数的表示》。数学研究生丛书第 *94* 卷，美国数学会，*2008* 年。[*KK*] *V. Kac* 和 *D. Kazhdan*：《无限维李代数最高权表示的结构》，*Adv. Math. 34*（*1979*），*97–108*。[*So*] *W. Soergel*：《范畴 $\mathcal{O}$、反常层以及关于 *Weyl* 群余不变量的模》。*J. Amer. Math. Soc. 3*（*1990*），第 *2* 期，*421–445*。[*St*] *C. Stroppel*：《*O* 类 $\mathcal{O}$：箭图与射影对象的自同态环》。*Represent. Theory 7*（*2003*），*322–345*。