arXiv:2303.06622v1 [math.FA] 12 Mar 2023

Banach 对。I. 初等理论。

Jaak Peetre

Per G. Nilsson（打字员）

Lund Institute of Technology, Lund, Sweden

Nilsson: Stockholm, Sweden电
子邮件地址：pgn@plntx.com

Abstract. 本说明是 Jaak Peetre《Banach 对。I. 初等理论》报告的（完全）副本。该报告于隆德（1971年）以技术报告形式发表。不过，文中增补了一些较新的综合性参考文献，并更新了部分参考文献。

Banach 对，I. 初等理论。Jaak Peetre

0. 引言

插值空间理论，粗略地说，研究的是所谓“插值方法”这类“构造”：对于给定的一组巴拿赫空间（通常恰好由两个元素组成；此时我们称之为 Banach 对），赋予一个巴拿赫空间，称为相对于该组巴拿赫空间的插值空间。当试图将这些非常模糊的概念置于更严格的基础上时，人们会考虑从巴拿赫空间集合的某个范畴到巴拿赫空间范畴的函子。长期以来，我一直认为，要进一步推进这一理论，就必须把前一种类型的范畴本身作为研究对象。[1]

本文是朝这个方向迈出的第一个小小的步骤。我们称之为“初等理论”，是为了强调我们确实没有证明任何重要的结果。我们所做的，概括地说，是提出一个纲领：给出若干一般定义，并指出一些由这些定义所激发的问题。正如上文已经显明的，我们在很大程度上依赖范畴这一思想。在这方面，Semadeni [41] 的一段引文或许值得牢记：“范畴理论中重要的是思维方法，而不是具体的结果”。（除了 Semadeni 的这篇论文 [41]，还应提及以下几篇将范畴用于巴拿赫空间的论文：Gelfand-Silov [12]. 、Mitjagin-Svarc [23]、Semadeni [41]（与 Semadeni [42] 几乎相同，但更为详尽）。此外，我们还受到巴拿赫空间的平行（结构）理论的启发。当然应当指出，后一个理论本身也远未完善。（我们尤其推荐读者参阅 Lindenstrauss 的精彩笔记 [17]）。

Som本文的观点曾在 Peetre [24]. 中作过简要概述。大部分内容也曾在 1969年12月于隆德举行的一次研讨会上讨论过。

本文的安排如下。第 1 节引入 Banach 对的概念。第 2 节列出一些具体的 Banach 对，作为一般理论发展的例证，并将在后文中用到。第 3 节介绍 Banach 对的几个范畴。第4节定义子偶以及（对偶概念）商对。第5节专门讨论收缩这一重要概念。第 6 节讨论分类问题。第 7 节定义泛宇宙和余泛宇宙的概念，并证明一个类似于巴拿赫-马祖尔定理的结果。第 8 节定义单射和投射的概念。特别地，可以看到标量对是单射的，换言之，我们得到了一个类似于 Hahn-Banach定理的结果。我们还引入了一种一般类型，称为拟内射。第 9 节将我们的思想应用于确定所有插值空间的问题。在这里，我们得到了本研究中或许最重要的结果。第10节专门讨论所谓的拟射影对。最后，第 11 节包含一个关于插值函数的结果。

[1] 关于1971年以后的参考文献，特别可参见 Brudnyi-Krugljak-Aizenstein [49, 第2章第2.7小节。2], Brudnyi-Krein-Semenov [50], Kaijer-Pelletier [52], [53], Ovchinnikov [54], Pelletier [55] 以及其中列出的参考文献（尤其是 [50]）。

1. Banach 对的概念

Banach 对由一个 Hausdorff 拓扑向量空间 $\mathcal{A}$ 以及包含于其中的两个巴拿赫空间 A_0 和 A_1 组成，即相应的嵌入 i_0 和 i_1 均为线性连续映射。（我们用 Λ表示标量域，因此有 $\Lambda = \mathbb{R}$ 或 $\Lambda = \mathbb{C}$。）于是我们有如下图示

$$\begin{array}{ccc} & A_0 & \\ & \searrow & \\ (1.1) \qquad & & \mathcal{A} \\ & \nearrow & \\ & A_1 & \end{array}$$

我们将采用 Peetre [**35**] 中首次使用的记号 $\overrightarrow{A} = \{A_0, A_1\}$。因此，既不必明确引入“较大”的空间 $\mathcal{A}$，也不必明确引入嵌入 i_0 和 i_1。在大多数情况下，可以假设 $\mathcal{A} = \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$，其中一般来说，$\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right) = A_0 + A_1 =$ 是 A_0 和 A_1 的线性包，但我~~们不作这一~~额外要求。

除了 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 之外，$\mathcal{A}$ 的另一个子空间也将特别受到关注，即 $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right) = A_0 \cap A_1 = A_0$ 与 A_1. 的交集。我们有 $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right) \subseteq A_0 \subseteq \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$，并且 $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right) \subseteq A_1 \subseteq \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$.

Banach 对的概念可以沿几个方向加以推广：

a. 我们可以不只考虑两个空间，而是考虑多个空间。这样便引出了 Banach $(n+1)$-元组的概念，其中 为任意整数 > 0. 对于 Banach $(n+1)-$元组，我们可以使用记号 $\overrightarrow{A} = \{A_0, A_1, ..., A_n\}$. 如果 $n = 1$，我们就回到了 Banach 对的情形。下文我们将主要只关注这一特殊情形。有时，出于形式上的原因，也会提及平凡情形 $n = 0$；在大多数情况下，一个 1-元组可以视为一个单独的 Banach 空间。关于一般情形，请参阅 Sparr [**44**]。

b. 我们可以用其他类型的拓扑向量空间来代替 Banach 空间。这样便引出了类似的 Hilbert 对、拟 Banach 对、局部凸对等概念。我们也可以完全舍弃线性结构。一个颇有意义的特殊实例是度量对的概念（参见 Peetre [**26**], Gustavsson [**15**]）。此外，“混合体”赋范 Abel 对也值得考虑（~~参见 Peetre-S~~parr [**38**]）。同样，下文我们将主要集中讨论 Banach 对的情形。

c. 有时还必须令 A_0 和 A_1 成为与 $\mathcal{A}$ 没有直接联系的独立对象，并令 i_0 和 i_1 为任意的连续线性映射，甚至不一定是单射。对于这种情形，我们将其称为弱巴拿赫对。因此，弱巴拿赫对 $\overrightarrow{A} = \{A_0, A_1\}$ 不过是~~形如 (1.1) 的图。我~~们仍可将 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 定义为 $\mathcal{A}$ 的子空间，即 $i_0(A_0)$ 和 $i_1(A_1)$ 的线性包；但 $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)$ 必须定义为 $A_0 \times A_1$ 的子空间，即由满足 a_0、$a_1 \in A_1 \times A_1$ 以及 $i_0(a_0) = i_1(a_1)$ 的所有有序对组成的子空间（参见 Gagliardo [**10**]）。因此，我们还有如下图：

$$\begin{array}{ccccc} & & A_0 & & \\ & \nearrow & & \searrow i_0 & \\ \Delta\left(\overrightarrow{A}\right) & & & & \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right) \quad \to \quad \mathcal{A} \\ & \searrow & & \nearrow i_1 & \\ & & A_1 & & \end{array}$$

这里我们不会系统地研究弱巴拿赫对，但将问题转换为弱巴拿赫对的语言通常非常有用，读者应当尽可能在任何时候都尝试这样做。

对于任意 Banach 对 $\overrightarrow{A}=\{A_0,A_1\}$，我们如下引入 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 中的一参数等价范数族（最早见于 Peetre [**37**]（并以伪装的形式见于 Gagliardo[**10**]！）；参见 Butzer-Berens [**6**] 及其他许多文献）：

$$K\left(t,a;\overrightarrow{A}\right)=\inf_{a=a_0+a_1}\left(\|a_0\|_{A_0}+t\|a_1\|_{A_1}\right)\text{ if }a\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$$

其中 $0<t<\infty$. 类似地，我们如下定义 $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)$中的一参数等价范数族：

$$J\left(t,a;\overrightarrow{A}\right)=\max\left(\|a\|_{A_0},t\|a\|_{A_1}\right)\text{ if }a\in\Delta\left(\overrightarrow{A}\right).$$

出于技术原因，有时有必要使用修正后的定义：

$$\begin{aligned}K_p\left(t,a;\overrightarrow{A}\right)&=\inf_{a=a_0+a_1}\left(\|a_0\|_{A_0}^p+t^p\|a_1\|_{A_1}^p\right)^{1/p}\\J_p\left(t,a;\overrightarrow{A}\right)&=\left(\|a\|_{A_0}^p+t^p\|a\|_{A_1}^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

其中 $1\le p\le\infty$. 显然，$K=K_1$，$J=J_\infty$.（我们约定，在特定语境下不重要的自变量省略不写。）。Holmstedt-Peetre [**16**]比较了各种 p 下的 K_p。

我们把对应于 $\overrightarrow{A}$ 的中间空间定义为这样的巴拿赫空间 A：使得 $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)\subseteq A\subseteq\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$，其中嵌入是线性连续的。因此，$A_0$和 A_1是中间空间，$\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)$和 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$. 也是中间空间（约定 $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)$采用由等价范数 $J_p\left(t,a\text{给出的拓扑；}\overrightarrow{A}\right)$和 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$采用由等价范数 $K_p\left(t,a\text{给出的拓扑；}\overrightarrow{A}\right)$.）

2. Banach 对的例子。

现在列出一些特殊的 Banach 对，以下内容中将会用到它们

a.（Lebesque 对）。设 M 是一个赋有正 Radon测度 μ. 的局部紧空间。对于任意正的 μ 可测函数 ω、任意满足 $1\le p\le\infty$ 的 p 以及任意 Banach 空间 A，我们用 $L_p(\omega,a)$ 表示由满足以下条件的 μ 可测函数 $a:M\to A$ 所组成的空间

$$\|a\|_{L_p(\omega,A)}=\left(\int_M\left(\omega\left(m\right)\|a\left(m\right)\|_A\right)^p d\mu\left(m\right)\right)^{1/p}<\infty$$

（若 $p=\infty$，则按通常方式解释）。如果 $\omega=1$ 或 $A=\Lambda$（= 标量域），我们省略相应的参数，因此写作 $L_p(A)$ 或 $L_p(\omega)$；若这两个条件均满足，则简写为 L_p。如果 M 是离散空间且每个点的质量为 1，我们用 l 代替 L；于是得到 $l_p(\omega,A)$ $l_p(\omega)$ $l_p(A)$ l_p.。如果 $\overrightarrow{A}=\{A_0,A_1\}$ 是任意 Banach 对，我们可以构造以下各对

$$\overrightarrow{L}_{\overrightarrow{p}}\left(\overrightarrow{\omega},\overrightarrow{A}\right)=\left\{L_{p_0}\left(\omega_0,A_0\right),L_{p_1}\left(\omega_1,A_1\right)\right\}$$

其中我们使用记号 $\overrightarrow{p}=(p_0,p_1)$ $\overrightarrow{\omega}=(\omega_0,\omega_1)$。在两种特殊情形下，我们可以得到 K 的一个简单“显式”公式：

(i)：$p_0=1$，$p_1=\infty$，$\omega_0=\omega_1=1$，$A_0=A_1=A$

(ii)：$p_0=p_1=p$即成立（参见 Peetre [**28**]）

$$K\left(t,a;\{L_1\left(A\right),L_\infty\left(A\right)\}\right)=\int_0^t a^*\left(s\right)ds \tag{2.1}$$

其中 $*$ 表示“递减绝对重排”,

$$\begin{aligned} & K_p\left(t,a;\left\{L_p\left(\omega_0,A_0\right),L_p\left(\omega_1,A_1\right)\right\}\right) \\ = & \left(\int_M\left(\omega_0\left(m\right)K_p\left(\frac{\omega_1\left(m\right)t}{\omega_0\left(m\right)},a;\overrightarrow{A}\right)\right)^p d\mu\left(m\right)\right)^{1/p},\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{'}}=1\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

（特别地，$(A_0=A_1=A)$成立

$$\begin{aligned} & K_p\left(t,a;\left\{L_p\left(\omega_0,A\right),L_p\left(\omega_1,A\right)\right\}\right) \\ = & \left(\int_M\left(\left(\frac{1}{\omega_0^{p^{'}}}+\frac{1}{\left(t\omega_1\right)^{p^{'}}}\right)^{-p/p^{'}}\left\|a\left(m\right)\right\|_A\right)^p d\mu\left(m\right)\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

b.（Lorentz 对）。类似地，使用 Lorentz 空间 $L_{pq}(\omega,A)$ 代替 Lebesque 空间 $L_p(\omega,A)$。

c.（可微对）。设 M 是 $\mathbb{R}^d$ 的开子集，或者更一般地，设其为一个 d 维黎曼流形。我们将 C^0 记为有界连续函数空间 $a\colon\ M\to\Lambda$，并将 C^k 记为其第 k 阶导数属于 C^0. 的函数空间。现在我们可以构成这对

$$C^{\overrightarrow{k}}=\left\{C^{k_0},C^{k_1}\right\}$$

其中我们记 $\overrightarrow{k}=\{k_0,k_1\}$.。如果 $\Lambda=R$、$M=\mathbb{R}^d$、$k=0$、$k_1=1$，则我们再次得到关于 K 的一个“显式”公式：即（参见 Peetre [**29**]）成立

$$K_\infty\left(t,a;\left\{C^0,C^1\right\}\right)=\frac{1}{2}\Omega^*\left(t,a\right), \tag{2.4}$$

其中现在 * 表示“最小凹主函数”，而 Ω 是连续模；根据 Holmstedt-Peetre [**16**], ，它等价于

$$K\left(t,a:\left\{C^0,C^1\right\}\right)=\sup_{x,y\in\mathbb{R}^d}\frac{\left|a\left(x\right)-a\left(y\right)\right|}{2+\frac{|x-y|}{t}} \tag{2.5}$$

（其中 $x=（x_1,\ ..,\ x_d）\quad|x|=|x_1|+...+|x_d|$）。

d。（Lipschitz 对）。采用 Lipschitz 空间 Lip_α 而不是 C^k进行类似构造

e.（Sobolev 对）。若在 C^k的定义中用最大范数替代 L_p 范数（相对于 Haar 测度），则可得到 Sobolev 空间 W_p^k。我们得到这些对。

$$W_{\overrightarrow{p}}^{\overrightarrow{k}}=\left\{W_{p_0}^{k_0},W_{p_1}^{k_1}\right\},$$

其中 $\overrightarrow{k}=\{k_0,k_1\},\ \ \overrightarrow{p}=\{p_0,p_1\}$.

f.（Besov 对）。如果 $M=\mathbb{R}^d$（我们仅考虑这种情况），则 Besov 空间 B_p^{sq}可以﹀如下定义（参见 Peetre [**30**],[**31**]）：在 $\mathbb{R}^d$（对偶群）中引入以下集合:

$$U_\nu=\left\{\xi\ |\colon 2^{\nu-1}\le|\xi|\le2^{\nu+1}\right\},\left(v=0,\overset{+}{-}1,\overset{+}{-}2,...\right)$$

并且还选择一族（“划分”）快速衰减的（即属于 $\mathcal{S}$ 的）函数 $\phi_v\left(v=0、\ \overset{+}{-}1、\ \overset{+}{-}2、\ ...\right)$，满足以下性质

$$\begin{aligned} \text{support of }\mathcal{F}\phi_\nu &\subseteq U_\nu. \\ \left|D^\alpha\mathcal{F}\phi_\nu\left(\xi\right)\right| &\le C_\alpha\left|\xi\right|^{-\alpha}\ (C_\alpha\text{ independent of }\nu!). \\ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}\phi_\nu\left(\xi\right)\right| &\ge c>0, \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换。然后我们将 B_p^{sq} 定义为满足以下条件的温和分布（即属于 $\mathcal{S}'$ 的分布）所构成的空间

$$\|a\|_{B_p^{sq}} = \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(2^{2\nu s} \|\phi_v * \alpha\|_{L_p} \right)^q \right)^{1/q} < \infty,$$

$*$ 表示卷积。注意， $B_\infty^{\alpha\infty} = Lip_\alpha$： 相应的对为

$$B_{\overrightarrow{p}}^{\overrightarrow{s}.\overrightarrow{q}} = \left\{ B_{p_0}^{s_0 q_0}, B_{p_1}^{s_1 q_1} \right\}$$

其中 $\overrightarrow{s} = \{s_0, s_1\}$、 $\overrightarrow{q} = \{q_0, q_1\}$、 $\overrightarrow{p} = \{p_0, p_1\}$.

g.（谱对）。设 E 为任意巴拿赫空间， P 为 E上的一个闭线性算子，其定义域为 $D(P) \subseteq E$. 于是我们可以考虑对 $\{E, D(P)\}$. 前面的某些例子就是这种对的特殊情形:

(i): $\{L_p(\omega_0, A) \quad L_p(\omega_1, A)\}$ 其中 $Pa(m) = \frac{\omega_1 (m)}{\omega_0 (m)} a($ $m)$ (ii): $C^{\overrightarrow{k}}$若 $d = 1$， 其中 $P = D^k$(D =导数), $k = k_1 - k_0$ (iii): $W_p^{\overrightarrow{k}} = \left\{ W_p^{k_0}, W_p^{k_0} \right\}$若 $d = 1$， 其中 $P = D^k$或者若 $1 < p < \infty$， 其中 $P = \left(\sqrt{-\Delta} \right)^k$ (Δ = 拉普拉斯算子) (iv): $B_p^{\overrightarrow{s}q} = \left\{ B_p^{s_0 q}, B_p^{s_1 q} \right\}$， 其中 $P = \left(\sqrt{-\Delta} \right)^k$.

h.（标量对）。如果 Λ 是标量域，那么 $\overrightarrow{\Lambda} = \{\Lambda, \Lambda\}$ 是一个对。

i.（算子对、对偶对）。设 $\overrightarrow{A}$、 $\overrightarrow{B}$ 是两个 Banach 对，并假设 $\overrightarrow{A}$ 按如下意义是正则的: $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)$ 在 A_0 和 A_1 中都稠密，因此 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$。于是我们可以考虑这个对

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right) = \left\{ \overline{\mathcal{M}}(A_0, B_0), \overline{\mathcal{M}}(A_1, B_1) \right\},$$

其中， $\overline{\mathcal{M}}$（A， B）通常表示连续线性映射 T： $A \to B$ 的集合（关于此记号，参见第 3 节）。鉴于 $\overrightarrow{A}$. $\overline{\mathcal{M}}$ 的正则性，这确实是一个对； A_0（B_0， $\overline{\mathcal{M}}\left(\Delta\left(\overrightarrow{A}\right), \Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)\right)$）可以识别为 $\overline{\mathcal{M}}$ 的一个子空间，对于 A_1（B_1， $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\Lambda} = \{\Lambda, \Lambda\}$）也同样如此。若取特殊情形: ，我们得到这个对

$$\overrightarrow{A}' = \left\{ A_0', A_1' \right\}$$

其中 A'通常表示 A的对偶: $A' = \overline{\mathcal{M}}(A, \Lambda)$。如果我们舍弃关于 A正则性的假设，那么 $\overrightarrow{\mathcal{M}}\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right)$ 以及 $\overrightarrow{A}'$分别只是第1c节意义下的弱对。（关于算子对的插值，参见 Peetre [**33**], [**34**]。）

3. Banach 对的若干范畴。

我们假定读者已经熟悉与范畴、函子、自然变换等相关的基本概念，即 Lang 所说的“ 一般胡说”（例如参见 Mc Lane [**20**]）。粗略地说，当我们取某一类 $\mathcal{S}$“空间”，并为其添加一类适当的 $\mathcal{M}$ “空间”之间的“映射”时，就产生了一个范畴 $\mathcal{C}$； 其中，“空间”与其恒等映射等同，并且满足某些简单的公理。特别地，我们要求

$$T \in \mathcal{C}, S \in \mathcal{C} \Longrightarrow TS \in \mathcal{C} : X \in \mathcal{C} \Longrightarrow id_X \in \mathcal{C} \tag{3.1}$$

给定任意范畴 $\mathcal{C}$， 如果 $T: X \to Y$ 属于 $\mathcal{C}$， 则称其为（在 $\mathcal{C}$ 中的）同构， 若逆映射 $T^{-1}: Y \to X$ 存在且也属于 $\mathcal{C}$; 如果存在至少一个同构 $T: X \to Y$., 则称属于 $\mathcal{C}$的 X、 Y是（在 $\mathcal{C}$ 中）同构的或等价的

现在我们将构造 Banach 对的各种范畴。不过，首先必须定义从一个 Banach 对到另一个 Banach 对的映射的含义。如果 $\overrightarrow{A}=\{A_0,A_1\}$ 和 $\overrightarrow{B}=\{B_0,B_1\}$ 是 Banach 对，我们称 T 为从 $\overrightarrow{A}$ 到 $\overrightarrow{B}$ 的映射（简写为：$\overrightarrow{A}\to\overrightarrow{B}$），如果 T 是从 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 到 $\Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$ 的映射，使得 T $(A_0)\subseteq B_0$，$T(A_1)\subseteq B_1$。因此，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} A_0 & & \overset{T|_{A_0}}{\to} & & B_0 \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right) & \overset{T}{\to} & & \Sigma\left(\overrightarrow{B}\right) \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ A_1 & & \overset{T|_{A_1}}{\to} & & B_1 \end{array}$$

由此可得 $T\left(\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)\right)\subseteq\Delta\left(\overrightarrow{B}\right)$，并且我们可以相应地补全该图。在所有情况下，$\mathcal{C}$ 是所有对的类，而 $\mathcal{M}$ 是所指定的映射类。接下来我们可以列出一些值得关注的范畴。（建议读者思考一下，在巴拿赫空间，即 1-元组的情况下，这一切分别对应什么。）

$\overline{\mathcal{C}}_b$：有界映射范畴。我们称 $T:\ \overrightarrow{A}\to\overrightarrow{B}$ 有界，如果 $K\left(t,Ta;\ \overrightarrow{B}\right)\leq CK\left(t,a;\ \overrightarrow{A}\right)$，只要 $a\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$，就存在某个 C（取决于 T）。

$\overline{\mathcal{C}}_l$. 线性连续映射的范畴。我们称 $T:\ \overrightarrow{A}\to\overrightarrow{B}$ 是线性连续的，如果 T 视为从 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 到 $\Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$ 的映射时是线性的，并且如果 $\|Ta\|_{B_0}\leq C\|a\|_{A_0}$ 对任意 $a\in A_0$ 都成立，且 $\|Ta\|_{B_1}\leq C\|a\|_{A_1}$ 对任意 $a\in A_1$ 都成立，其中某个 C（依赖于 T）。

$\overline{\mathcal{C}}_{Lip}$. Lipschitz 映射的范畴。我们称 $T:\ \overrightarrow{A}\to\overrightarrow{B}$ 是 Lipschitz 的，如果 $K\left(t,Ta'-Ta''\right)\leq CK\left(t,a'-a''\right)$ 对任意 a'、$a''\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 都成立，其中某个 C（依赖于 T）。

注 3.1. 如果将 K 替换为 $K_p(1\leq p\leq\infty)$，上述定义不受影响。此外，根据 Holmstedt-Peetre [**16**] 的结果，常数 C 也变得相同。

显然，$T\in\overline{\mathcal{C}}_l\Longrightarrow T\in\overline{\mathcal{C}}_b$ 和 $T\in\overline{\mathcal{C}}_{Lip}$.此外，在附加假设 $T0=0$ $T\in\overline{\mathcal{C}}_{Lip}\Longrightarrow T\in\overline{\mathcal{C}}_b$. 下，这一点也是显然的。我们总结如下：

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathcal{C}}_l & \subseteq & \overline{\mathcal{C}}_b \\ \overline{\mathcal{C}}_l & \subseteq & \overline{\mathcal{C}}_{Lip} \\ \overline{\mathcal{C}}_{Lip} & \subseteq & \overline{\mathcal{C}}_b,T0=0 \end{array}$$

设 $\overline{\mathcal{M}}_b\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)$、$\overline{\mathcal{M}}_l\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)$、$\overline{\mathcal{M}}_{Lip}\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)$ 为映射集合 T：属于 $\overline{\mathcal{C}}_b$、$\overline{\mathcal{C}}_l$、$\overline{\mathcal{C}}_{Lip}$. 的 $\overrightarrow{A}\to\overrightarrow{B}$。如果我们令

$$\|T\|=\|T\|_{\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)}=\inf C\ \ (x=b,l,Lip)$$

其中 C 遍历相应定义条件中出现的所有常数 C，我们得到一个范数。可以证明，以这种方式得到的 $\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)$ $(x=b、\ l、\ Lip)$ 是一个巴拿赫空间。由范畴的定义（参见 (3.1)）可知，每一类空间 $\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)$$(x=b、\ l、\ Lip)$ 都具有如下乘法性质：

$$T\in\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right),S\in\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{B},\overrightarrow{C}\right)\Longrightarrow ST\in\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{C}\right)$$

但我们还有一个相应的乘法范数不等式：

$$\|ST\|_{\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{C}\right)}\leq\|S\|_{\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{B},\overrightarrow{C}\right)}\|T\|_{\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)}$$

因此，这里我们有一个可称为赋范范畴的实例。所谓赋范范畴，是指这样一个范畴 $\mathcal{C}$：对于该范畴，所有映射 T：$X \to Y$（对所有属于 $\mathcal{C}$ 的 X、Y）所组成的集合 $\mathcal{M}(A,B)$ 是一个巴拿赫空间；而所有集合 $\mathcal{M}(X,Y)$（其中 X、Y遍历所有满足相应乘法范数不等式的 $\mathcal{C}$）构成的类.....赋范范畴的理论值得为其自身而加以发展。这里我们只作如下

注记 3.2。在每个赋范范畴 $\mathcal{C}$ 中，我们都可以定义赋范左理想 $\mathcal{I}$的概念。所谓赋范左理想，是指一类巴拿赫空间 $\mathcal{I}(X,Y)$，记作 X，其中 Y遍历所有的 $\mathcal{C}$，并满足

$$\begin{aligned} T &\in \mathcal{I}(X,Y), S \in \mathcal{M}(Y,Z) \Longrightarrow ST \in \mathcal{I}(X,Z) \\ \|ST\|_{\mathcal{I}(X,Z)} &\leq \|S\|_{\mathcal{M}(Y,Z)} \|T\|_{\mathcal{I}(X,Y)} \end{aligned}$$

同样地，我们可以定义赋范右理想和赋范双边理想。关于理想的一个重要问题是延拓问题：将定义在 $\mathcal{C}$ 的某个子范畴中的赋范理想“延拓”到整个 $\mathcal{C}$. 。在巴拿赫空间的情形下，赋范理想已得到广泛研究（特别参见 Pietcsch [**39**]，其中尤其提到了延拓问题）。赋范理想的例子包括所有紧算子、所有核算子、所有绝对可和算子等构成的类。在 Banach 对的情形下，目前尚无相关研究结果。

子注记。注意，赋范理想（左、右、双边）的概念可能会被继续
可将其视为范畴性质概念的一种连续模拟。所谓这一点，是指我们所说的是定义在 $\mathcal{C}$ 上的真值函数，或者更好地说是 ι 值函数 $0-1$，例如满足以下要求

$$\begin{aligned} \iota(S+t) &\leq \max(\iota(S),\iota(T)) \text{ (in the case of an "additive" category)} \\ \iota(ST) &\leq \iota(S)\iota(T) = \min(\iota(S),\iota(T)) \\ \iota(X) &= \iota(id_X) \end{aligned}$$

赋范范畴中的延拓问题在这里也有对应形式。例如，可以证明，$\mathcal{S}$ 类空间的每个性质（通常意义下）都可以延拓到整个 $\mathcal{C}$，并且存在一个最小延拓。

子例。考虑通常的巴拿赫空间范畴（将映射取为线性
连续映射，即两个巴拿赫空间之间的连续映射，或用上面的记号表示为 $x=l$）。那么，如果我们把巴拿赫空间具有有限维这一性质作为考察对象，最小延拓就是连续线性映射具有有限秩这一性质。

不过，在下文中，我们主要将尝试使用相应的精确范畴 $\mathcal{C}_l$、$\mathcal{C}_b$、$\mathcal{C}_{Lip}$，而不是它们本身，即 $\overline{\mathcal{C}}_l$、$\overline{\mathcal{C}}_b$、$\overline{\mathcal{C}}_{Lip}$。这些范畴以类似的方式得到：对映射 T 施加限制 $C \leq 1$进行复合，或等价地 $\|T\| \leq 1$。类比上文，我们将这类映射的集合记为 $\mathcal{M}_b\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)$ 等。因此，$\mathcal{M}_x\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)$ 是 $\overline{\mathcal{M}}_x\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)$.的（闭）凸子集。这里实际上出现了一个可以称为凸范畴的例子。

此外，在下文中我们几乎将只关注 b 和 l 的情形。

我们以回顾插值函子的这一重要概念结束本节。粗略地说，这是一种从一个对得到一个空间的方法。更准确地说，设 $\mathcal{C}=\mathcal{C}_x$、$x=b$、$l$、$Lip$，并设 $\mathcal{C}^0$ 为相应的 1-元组（即巴拿赫空间）的范畴。所谓插值函子，是指一个函子 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^0$，使得对于每个对 $\overrightarrow{A} \in \mathcal{C}$，空间 $F\left(\overrightarrow{A}\right) \in \mathcal{C}^0$满足

$$\Delta\left(\overrightarrow{A}\right) \subseteq F\left(\overrightarrow{A}\right) \subseteq \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$$

其中的包含映射是连续的，而且还是自然变换。如果 T：$\overrightarrow{A} \to \overrightarrow{B}$ 中的任意映射，那么 $\mathcal{C}^0$ 中的映射 $F(T)$ 就只是限制 $T\mid_{F\left(\overrightarrow{A}\right)}$。通过

滥用语言，我们约定也用同一个字母表示 T 的限制。因此，我们得到如下插值性质：

$$T : \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{B} \Longrightarrow T : F\left(\overrightarrow{A}\right) \to F\left(\overrightarrow{B}\right)$$

这也可以表述为： $F\left(\overrightarrow{A}\right)$ 和 $F\left(\overrightarrow{B}\right)$ 是关于 $\overrightarrow{A}$ 和 $\overrightarrow{B}$ 的插值空间。反过来，借助 Aronzajn-Gagliardo 的一个重要结果，所有插值空间实质上~~都可以通过这种方式~~得到 [**1**]（该结果仅针对 $x = l$ 表述）。因此，我们再次方便地滥用一下术语，将 $F\left(\overrightarrow{A}\right)$ 称为插值空间。请注意，在精确范畴的情形下（即“无横线”情形），上面出现的所有范数都是 ≤ 1.

例 3.1。插值空间的平凡例子是 A_0 和 A_1. 。同样平凡但更有用的是 $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)$ 和 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$.。事实上，在这两个空间中的每一个里，我们都可以考虑一整族等价范数，即 $K\left(t, a;\ \overrightarrow{A}\right)$ 和 $J\left(t, a;\ \overrightarrow{A}\right)$ （$0 < t < \infty$）。利用这一点，我们可以构造两类非常一般的非平凡插值空间，即 $K-$ 和 $J-$空间。关于 $K-$ 和 $J-$ 空间理论的入门介绍，请参阅 Butzer-Berens [**6**] 和 Peetre [**28**]。

4. 子对与商对。

设 $\overrightarrow{B} = \{B_0, B_1\}$ 是一个 Banach 对，即 B_0 和 B_1 是两个 Banach 空间，均为带有连续嵌入的“较大”Hausdorff 拓扑向量空间 $\mathcal{B}$ 的子空间。若取 A_0 为 B_0 的任意子空间，并赋予更强范数（即 A_0 到 B_0 的嵌入（单射）是连续的），同时取 A_1 为 B_1 的任意子空间并赋予更强范数，且较大空间保持为同一个空间 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$，则得到 $\overrightarrow{B}$ 的一个子耦合对 $\overrightarrow{A} = \{A_0, A_1\}$ 。当范数一致时，我们称其为 $l-$ 子耦合对，即

$$\begin{aligned} \|a\|_{A_0} &= \|a\|_{B_0} \text{ if } a \in A_0 \subseteq B_0 \\ \|a\|_{A_1} &= \|a\|_{B_1} \text{ if } a \in A_1 \subseteq B_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

如果进一步满足以下条件，我们称其为 b-子对

$$K\left(t, a; \overrightarrow{A}\right) = K\left(t, b; \overrightarrow{B}\right) \text{ if } a \in A_0 + A_1 \subseteq B_0 + B_1 \tag{4.2}$$

注意，（4.1）总是蕴含（4.2）的一半，即不等式

$$K\left(t, a; \overrightarrow{A}\right) \geq K\left(t, a; \overrightarrow{B}\right) \text{ if } a \in A_0 + A_1 \subseteq B_0 + B_1 \tag{4.3}$$

例 4.1. $\{C^0, C^1\}$ 与 $\left\{l^\infty\left(\frac{1}{2}\right)\right.$ 的一个 b-子对 $\left.l^\infty\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right\}$. 等价（l-同构）

只需比较公式 (2.3) 和 (2.4)（特殊情形 $E = \mathbb{R}$,$p = \infty$, $\omega_0(x, y) = \frac{1}{2}$, $\omega_1(x, y) = \frac{1}{|x-y|}$, $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$）即可立即得到这一点。事实上，映射

$$T : a(x) \to b(x, y) = a(x)$$

显然定义了一个从 l 到 $\left\{C^0, C^1\right\}$ 的同构，将其映射到 $\left\{l^\infty\left(\frac{1}{2}\right), l^\infty\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right\}$. 的一个 b-子对

下面这个几乎显而易见的结果说明了 b-子对为何值得关注。

命题 4.1. 设 B 并设 $\overrightarrow{A}$ 是 的一个 b-子对 任意 K-插值函子，则范数相等

$$F\left(\overrightarrow{A}\right) = F\left(\overrightarrow{B}\right) \cap \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right) \tag{4.4}$$

证明。设 Φ 是对应于 F 的函数范数（参见 Peetre [**28**]）。那么，根据定义

$$a \in F\left(\overrightarrow{A}\right) \iff a \in \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right) \text{ and } \Phi\left[K\left(t, a; \overrightarrow{A}\right)\right] < \infty$$

x

对于 $\overrightarrow{B}$. 也同样如此。将其与（4.2）比较，立即可得（4.4）。#

对于 l-子耦合对，我们只有包含关系

$$F\left(\overrightarrow{A}\right) \subseteq F\left(\overrightarrow{B}\right) \cap \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right) \tag{4.5}$$

这与从（4.3）得到的结论相同。下面的反例值得一看。

例4.2。（Arne Persson）。取 $\overrightarrow{B}$由 $\{L_1, L_\infty\}$ 构成的对 $M = T =$，其中 $\mu =$ 为环面（圆群）上的 Haar 测度。取 $\overrightarrow{A}$ 为将该对限制在那些 a 上具有稀疏傅里叶级数的函数 T^1 所得到的对，即

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\left(2^k x\right)}$$

考虑序列 $\alpha = (a_k)_{k=1}^{\infty}$. 众所周知（分别参见 Zugmund，第 [48] 1卷，第203页和第247页）：

1^0 范数 $\|\alpha\|_{l_2}$ 和 $\|a\|_{L_p}$ $1 \leq p < \infty$ 是等价的。

2^0 范数 $\|\alpha\|_{l_1}$ 和 $\|a\|_{L_\infty}$ 是等价的。

众所周知，$F\left(\overrightarrow{A}\right) = F(\{L_1, L_\infty\}) = L_p$ 当且仅当$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{\infty}$，其中 F定义为 $F\left(\overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{C}_{\theta p;K}$ 对于一般的对 $\overrightarrow{C}$. 另一方面，由于 $F(\{l_2, l_\infty\}) = l_{qp}$ 当且仅当$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty}$，我们看到 $F\left(\overrightarrow{B}\right)$ 由具有稀疏傅里叶展开的函数组成，使得 $\alpha \in l_{qp.}$。由于 $l_{qp} \neq l_2$，我们得出结论：(4.4)不成立。

现在我们来讨论对偶概念。设 $\overrightarrow{B}$ 如上。若取 A_0 为任意商空间，例如 B_0/C_0，它属于 B_0（赋予一个范数，使得从 A_0 到 B_0 的投影是连续的），并取 A_1 为任意商，例如 B_1/C_1，它来自B_1，则可得到 $\overrightarrow{A} =\{A_0, A_1\}$ 由 $\overrightarrow{B}$ 构成的商偶；其中较大的空间为 $\mathcal{B}/\Delta\left(\overrightarrow{C}\right)$，且 $\overrightarrow{C} = \{C_0, C_1\}$；如果我们还假设 $C_1 \cap B_0 \subseteq C_0$，则 $C_0 \cap B_1 \subseteq C_1$，否则我们只能得到第1c节意义下的弱偶。若范数相同，即.....，我们称之为l-商偶。

$$\begin{aligned} \|a\|_{A_0} &= \inf_{c \in C_0} \|b + c\|_{B_0} \text{ if } a \in b + C_0 \in A_0 \\ \|a\|_{A_1} &= \inf_{c \in C_1} \|b + c\|_{B_1} \text{ if } a \in b + C_1 \in A_1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

如果另外还满足以下条件，我们称其为 b-商偶

$$K\left(t, a; \overrightarrow{A}\right) = \inf_{x \in C_0 + C_1} K\left(t, b + c; \overrightarrow{B}\right) \text{ if } a = b + C_0 + C_1 \in A_0 + A_1 \tag{4.7}$$

显然，子偶和商偶的概念一如通常情况彼此对偶。然而，在下文中，我们未能将对偶理论发展到完整的程度。其原因究竟是什么，是否存在某些隐藏因素，目前我还不清楚。

5. 收缩

给定任意范畴 $\mathcal{C}$ 以及空间 X、Y，在此范畴 $\mathcal{C}$ 中，如果存在映射 α： $X \to Y$、β： $Y \to X$，它们属于 $\mathcal{C}$，使得 $\beta \circ \alpha = id.$，我们就称 X 是 Y的收缩（在 $\mathcal{C}$中）。换句话说，此时我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\alpha}{\to} & Y \\ \downarrow id & \swarrow \beta & \\ X & & \end{array}$$

（我们也称 β 是 $\alpha.$的收缩映射。）这显然是一种传递关系。如果 X 是Y 的收缩映射，且 Y 是 X 的收缩映射，那么 X 是 $Z.$的收缩映射。还要注意，如果 X，则 X 显然是 Y 的收缩映射。

等价于 Y（如果 α 是同构，就取 $\beta=\alpha^{-1}$！）。然而， X 是 Y 的收缩映射、Y 是 X 的收缩映射，一般并不意味着 X 等价于 Y.。通常称 X 和 Y 属于同一个收缩类。

现在回到 Banach 对的情形。用我们的记号表示的交换图现在呈现为:

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{A} & \overset{\alpha}{\rightarrow} & \overrightarrow{B} \\ \downarrow id & \swarrow \beta & \\ \overrightarrow{A} & & \end{array}$$

对于我们的两个范畴 $\mathcal{C}_b$ 和 $\mathcal{C}_l$，分别有一种不同的概念（这里排除了 $\mathcal{C}_{Lip}$ 的情形！）。然而事实证明，还必须使两个类 b 和 l 相互结合。因此，我们实际上需要记住收缩的四种概念:

$\overrightarrow{A}$是 $\overrightarrow{B}$的 b-收缩，当且仅当 $\overrightarrow{A}^{\beta\in\mathcal{C}_b}_{\alpha\in\mathcal{C}_b}\ \overrightarrow{B}\ \beta\in\mathcal{C}_b$；$\overrightarrow{A}^{\beta\in\mathcal{C}_l}_{\alpha\in\mathcal{C}_l}\ \overrightarrow{B}$ 是 的 l-收缩，当且仅当 $\overrightarrow{A}^{\beta\in\mathcal{C}_b}_{\alpha\in\mathcal{C}_l}\ \overrightarrow{B}\ \alpha\in\mathcal{C}_b\ \beta\in\mathcal{C}_l$；是 的 lb-收缩，当且仅当；是 的 bl-收缩，当且仅当 。

例 5.1. 如果 $\overrightarrow{A}$是 b–的子偶，且 $\overrightarrow{B}$，那么 $\overrightarrow{A}$是 $\overrightarrow{B}$.的 lb-收缩。也就是说，如果 $\alpha=$ 是从 $\overrightarrow{A}$ 到 $\overrightarrow{B}$的单射，则相应的收缩映射 β 可以按如下方式构造:

$$\begin{aligned} \beta(b) &= b \text{ if } b\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right) \\ \beta(b) &= 0 \text{ if } b\notin\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right) \end{aligned}$$

因此，我们得到了审视第4节中定义的一种新方法。

例5.2。如果 $\overrightarrow{A}$ 是一个 l-收缩 $\overrightarrow{B}$，那么很容易看出，$\overrightarrow{A}$是 $\overrightarrow{B}$ 的 b-子对。因此命题4.1适用于此情形（参见 Baouendi-Goulaouic [**3**], Baiocchi [**2**]）。

例5.3。 $B^{\overrightarrow{s}\,\overrightarrow{q}}_{\overrightarrow{p}}$是 $l_{\overrightarrow{q}}\left(2^{\overrightarrow{s}\,v},L_{\overrightarrow{p}}\right)$ 的 l-收缩（无括号（）情形！）。事实上，取

$$\begin{aligned} \alpha &: a\to(\phi_v * \alpha) \\ \beta &: (a_v)\to\sum_{v=-\infty}^{\infty}\psi_v * \alpha_v \end{aligned}$$

wh其中 ϕ_v 是来自第2f小节的划分，而 ψ_v 是所选取的第二个划分，使得 t

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\psi_v\mathcal{F}\phi_v=1.$$

备注 5.1。当然，同样适用于空间（$=$ 0元组） B_p^{sq}.事实上，可以证明一个更强得多的结果，即 B_p^{sq}同构于 $l_q(l_p)$（Peetre [**30**]）。

问题 5.1。沿着备注 5.1 的方向改进例 5.1。

问题 5.2。$\{C_0,C_1\}$是 $\left\{l^\infty\left(\frac{1}{2}\right)\right.$ 的 l-收缩吗？ $\left.l^\infty\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\right\}$（加括号情形或未加括号情形并不影响）？ 如果将例 5.1 与例 4.1 结合起来，那么显然可以得到一个 lb 收缩。

问题 5.3。$\{Lip_{\alpha_0},Lip_{\alpha_1}\}$的相同问题:

出于技术上的原因，引入一种我们称为伪收缩的混合体也很有用。粗略地说，它是一种情形，并且 α 在某种意义上是部分定义的。下面给出与此前四种情形之一相对应的精确定义：我们称$\overrightarrow{A}$是 $\overrightarrow{B}$的 bl-伪收缩，如果对于每个 $a\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$，都存在 $b\in\Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$，使得 $K\left(t,a;\ \overrightarrow{A}\right)=K\left(t,b;\ \overrightarrow{B}\right)$，以及一个映射 β: $\overrightarrow{B}\to\overrightarrow{A}\in\mathcal{C}_1$（取决于 a！），使得 $b=\beta a$.。显然，每个 bl-收缩都是 bl-伪收缩。（取$b=\alpha a$即可！）现在让我们赶紧给出一个例子，以说明这一概念的实用性。

例5.4。令 $\overrightarrow{A}$为任意一对。我们称 $a \in \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 是正则的，如果它属于 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$的拓扑中的 $\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)$~~.的闭包~~。可以证明， $a \in \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 是正则的，当且仅当

$$K(t,a) = O(\max(1,t)), t \to 0 \text{ or } \infty. \tag{5.1}$$

根据“插值空间理论的基本引理”（参见 Peetre [**28**]），存在一个常数 c（取决于 $\overrightarrow{A}$），使得如果 $a \in \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 是正则的，并且 $\epsilon > 0$，我们就有如下积分表示

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \tag{5.2}$$

其中 $u(t)$ 是某个（取值于向量空间的！）函数，且

$$J(t,u(t)) \le (c+\epsilon)K(t,a). \tag{5.3}$$

令

$$\gamma\left(\overrightarrow{A}\right) = \inf c$$

（$\gamma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 能够取哪些值尚不清楚。我只知道 $\inf_{\overrightarrow{A}} \gamma\left(\overrightarrow{A}\right) = \frac{1}{2}$ 且 $\sup_{\overrightarrow{A}} \gamma\left(\overrightarrow{A}\right) < \infty$。参见 Peetre [**32**]。 [**35**]。）我们声称，泛函 $\gamma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 具有如下单调性：如果 $\overrightarrow{A}$ 是 $\overrightarrow{B}$ 的 bl-伪收缩，那么

$$\gamma\left(\overrightarrow{A}\right) \le \gamma\left(\overrightarrow{B}\right) \tag{5.4}$$

事实上，假设我们有

$$b = \int_0^\infty v(t)\frac{dt}{t}, J\left(t, v(t); \overrightarrow{B}\right) \le (c+\epsilon)K\left(t,b;\overrightarrow{B}\right)$$

其中， $b \in \Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$ 是上述 bl-伪收缩定义中与给定的 $a \in \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 相对应的元素。注意，如果 a 是正则的，那么 b 也是正则的（鉴于（5.1）！）。现在令

$$u(t) = \beta v(t)$$

其中， β 处于类似的位置。于是立即得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} &= \beta\left(\int_0^\infty v(t)\frac{dt}{t}\right) = \beta b = a \\ J\left(t,u(t);\overrightarrow{A}\right) &\le J\left(t,v(t);\overrightarrow{B}\right) \le (c+\epsilon)K\left(t,b;\overrightarrow{B}\right) = (c+\epsilon)K\left(t,a;\overrightarrow{A}\right) \end{aligned}$$

即（5.2）和（5.3）得以推出。这显然确立了（5.4）。

6. 分类问题。

一旦等价（同构）的概念得到精确定义，即当我们将相应“空间”的类 $\mathcal{S}$ 嵌入范畴 $\mathcal{C}$时，每一种“数学理论”（集合论、群论、拓扑空间理论等）都会提出分类问题。其本质上可归结为以下内容：

a) 找出所有同构类。一个与之相关且实质上包含于 a) 中的问题是：b) 找出所有收缩类。（在某些情况下，问题 a) 和 b) 通过“Schr¨oder-Bernstein 定理”是等价的。）

例 6.1. 让我们考虑范畴 $\mathcal{C}_b$ （第 3 节）中的问题 a) 和 b)。如果我们能够回答以下问题，这两个问题都可以得到解决：哪些函数 $\phi(t)$ 可以

表示为 $K\left(t,a;\ \overrightarrow{A}\right)$? 更具体地说，对于任意 $\overrightarrow{A}$，令

$$S=S\left(\overrightarrow{A}\right)=\left\{\phi:\exists a\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right):K\left(t,a;\overrightarrow{A}\right)=\phi\left(t\right)\right\}$$

S是一个锥： $\phi\in S,\ \lambda>0\Longrightarrow\lambda\phi\in S.$显然， $S\subseteq S_0$其中 S_0表示所有正凹函数组成的凸锥 $\phi.$如果 $\overrightarrow{A}$和 $\overrightarrow{B}$是 b-同构的，则可推出$S\left(\overrightarrow{A}\right)=S\left(\overrightarrow{B}\right).$反之，如果 $S\left(\overrightarrow{A}\right)=S\left(\overrightarrow{B}\right)$，并且对于任意 ϕ，映射 $a\rightarrow K\left(t,a\text{的逆像};\ \overrightarrow{A}\right)$ 以及 $b\rightarrow K\left(t,b\text{的逆像};\ \overrightarrow{B}\right)$ 是等价的，则 $\overrightarrow{A}$和 $\overrightarrow{B}$是 b-同构的。关于关系 $\overrightarrow{A}$是 $\overrightarrow{B}$.的 b-收缩，也有类似的表述。

子例。考虑这一对 $\{L_1,L_\infty\}$.那么 $S=S\left(\{L_1,L_\infty\}\right)$是“几乎” S_0，确切答案取决于 $M.$以下情形是典型的

M	S
$(0,\infty)$	$\lim_{t\rightarrow0}\phi\left(t\right)=0$
$(0,1)$	$\lim_{t\rightarrow0}\phi\left(t\right)=1,\phi\left(t\right)=\text{const. if }t\geq1.$
$\{0,1,2,3...\}$	$\phi\left(t\right)\text{ is linear in each subinterval }(i,i+1)\ (i=0,1....)$

问题 6.1。对于哪些子集 $P\subseteq S_0$存在 $\overrightarrow{A}\in\mathcal{C}$使得 $S\left(\overrightarrow{A}\right)=P.$

注 6.1。 P不必是 S_0中的闭集，这例如可由这一对的特殊情形 $\{L_p,L_\infty\}$、 $p>1$.推出

7. 泛宇宙。余泛宇宙。

如果对于 $\mathcal{S}$的一个子类 $\mathcal{S}_1$（ $\mathcal{S}$的“空间”类），对于每个 $\overrightarrow{A}$属于 $\mathcal{S}_1$， $\overrightarrow{A}$都 b-等价于 $\overrightarrow{B}$.的一个 b-子对，则称一对 $\overrightarrow{B}$关于该子类是 b-泛宇宙。显然，如果 $\overrightarrow{B}$是 b-泛宇宙，且 $\overrightarrow{B}$是 $\overrightarrow{C}$的 b-子对，那么 $\overrightarrow{C}$也是 b-泛宇宙。

定理 7.1。每个正则对 $\overrightarrow{A}$都等价于某个 b-子对 $\overrightarrow{l}_\infty=(\overrightarrow{\omega})=\{l_\infty(\omega_0)\ l_\infty(\omega_1)\}$其中 ω_0、 ω_1、 $M.$取适当值

（从下面的证明可以看出，如果我们对 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$的基数加以限制，就可以一次性选定 ω_0、 ω_1、 M，从而 $\overrightarrow{l}_\infty(\overrightarrow{\omega})$ 也能一次确定。因此， $\overrightarrow{l}_\infty(\overrightarrow{\omega})$ 确实是关于某个适当的对的子类 $\overrightarrow{A}.$的 b-泛宇宙）

换句话说，我们得到了一个“巴拿赫-马祖尔定理”。）

证明：考虑对偶对 $A^{'}=\left\{A_0^{'}、\ A_1^{'}\right\}.$我们取

$$\left\{\begin{array}{c}M=\text{ unit ball of }\Delta\left(\overrightarrow{A^{'}}\right)\\ \omega_0\left(a^{'}\right)=\left\|a^{'}\right\|_{A_0^{'}}\\ \omega_1\left(a^{'}\right)=\left\|a^{'}\right\|_{A_1^{'}}\end{array}\right\}$$

并定义映射 $T:\ \overrightarrow{A}\rightarrow\overrightarrow{l}_\infty(\overrightarrow{\omega}):\ ,\ a\rightarrow f_a$满足 $f_a\left(a^{'}\right)=\left\langle a^{'},\ a\right\rangle$其中 $\langle,\ \rangle$表示对偶性。现在 $K_\infty\left(t,a;\ \overrightarrow{A}\right)$和 $J_1\left(\frac{1}{t},\ a^{'};\ \overrightarrow{A^{'}}\right)$是对偶范数。由此可得（根据 Hahn-Banach定理和（2.2））

$$\begin{aligned}K_\infty\left(t,a;\overrightarrow{A}\right)&=\sup\frac{\left|\left\langle a^{'},a\right\rangle\right|}{J_1\left(\frac{1}{t},a';\overrightarrow{A^{'}}\right)}=\sup\frac{\left|f_a\left(a^{'}\right)\right|}{\left\|a'\right\|_{A_0^-}+\frac{1}{t}\left\|a'\right\|_{A_1'}}\\&=K_\infty\left(t,f_a;\overrightarrow{l}_\infty(\overrightarrow{\omega})\right)\end{aligned}$$

因此， T是将 $\overrightarrow{A}$映 onto b-子对 $\overrightarrow{l}_\infty(\vec{\omega})$ 的 b-同构。#

对偶概念 b-余泛的定义方式类似（涉及商偶，而不是子对）。

问题 7.1。余泛情形的定理 7.1 的类似命题。

8. 单射。投射。

如果对于任意两个对 $\overrightarrow{A}$ 和 $\overrightarrow{B}$，使得 $\overrightarrow{A}$ 是 $\overrightarrow{B}$ 的 b-子偶（记作 $\overrightarrow{A} \overset{b}{\subseteq} \overrightarrow{B}$），且每个映射 $T: \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{I}$ 到 $\mathcal{C}_1$ 都存在一个映射 $S: \overrightarrow{B} \to \overrightarrow{I}$ 到 $\mathcal{C}_1$，使下图交换，则称对 $\overrightarrow{I}$ 是 l-内射的:

$$\begin{array}{ccc} & & \overrightarrow{I} \\ & \nearrow T & \uparrow S \\ \overrightarrow{A} & \overset{b}{\subseteq} & \overrightarrow{B} \end{array}$$

如果 $\overrightarrow{I}_1$ 是 $\overrightarrow{I}$ 的 l-收缩，且 $\overrightarrow{I}$ 是 l-内射的，那么 $\overrightarrow{I}_1$ 也是 l-内射的。

定理 8.1。设 $\overrightarrow{I}$ 是一个单射对，使得 $\overrightarrow{I}$ 等价于 $\overrightarrow{l}_\infty(\vec{\omega})$ 的一个 b-子对 $= \{l_\infty(\omega_0)\ l_\infty(\omega_1)\}$ 其中 ω_0、ω_1、$M.$ 取适当值。于是，$\overrightarrow{I}$ 确实是 $\overrightarrow{l}_\infty(\vec{\omega})$ 的一个 l-收缩。反之，$\overrightarrow{l}_\infty(\vec{\omega})$ 的每个 l-收缩都是单射的。

证明：证明的直接部分是显然的，因为如果 $\overrightarrow{I}$ 等价于任意一个对 $\overrightarrow{B}$ 的 b-对 $\overrightarrow{A}$，那么 $\overrightarrow{I}$ 显然是 $\overrightarrow{B}$ 的一个 l-收缩：取 $T: \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{I}$ 为一个等价，并将其延拓为 $S: \overrightarrow{B} \to \overrightarrow{I}$。令 $i: \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{B}$ 为该单射。于是我们得到如下图

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{I} & & \\ & \searrow \alpha & \\ \downarrow & & \overrightarrow{B} \\ & \swarrow \beta & \\ \overrightarrow{I} & & \end{array}$$

其中 $\alpha = i \circ T^{-1}$、$\beta = S.$。对于逆命题，根据前面的注记，只需证明 $\overrightarrow{l}_\infty(\vec{\omega})$ 是单射的。还可以将情形限定为 M是单元素集，即 $\overrightarrow{l}_\infty(\vec{\omega})$ 是对 $\overrightarrow{\Lambda}_{\vec{\omega}} = \{\Lambda_{\omega_0}, \Lambda_\omega\}$，其中 Λ_ω表示带有范数 $\|x\| = \frac{|x|}{\omega}$.的 Λ。于是 $\overrightarrow{A} \to \overrightarrow{\Lambda}_{\vec{\omega}}$由 $\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 上的一个线性泛函定义，使得

$$|Ta| \leq \omega_0 \|a\|_{A_0}, |Ta| \leq \omega_1 \|a\|_{A_1}$$

or

$$|Ta| \leq \omega_0 K\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}, a; \overrightarrow{A}\right) = \omega_0 K\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}, a; \overrightarrow{B}\right);$$

其中最后一个等式由（4.2）得出。由 Hahn-Banach定理可知，我们可以将 T 延拓为 $\Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$ 上的一个线性泛函 S，使得

$$|Sb| \leq \omega_0 K\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}, b; \overrightarrow{B}\right)$$

但随后也可得到

$$|Sb| \leq \omega_0 \|b\|_{B_0}, |Sb| \leq \omega_1 \|b\|_{B_1}$$

因此，S 导出了一个映射 $\overrightarrow{B} \to \overrightarrow{\Lambda}_{\vec{\omega}}.$ #

对偶概念是 l-投射的，其定义方式类似（使用商对而不是子对）。我们目前不讨论它。不过参见第10节。

不过，下面给出另一个混合体的定义，其引入是受上述定理8.1的启发：如果 $\overrightarrow{I}$ 是某个 $\overrightarrow{l}_\infty(\vec{\omega})$ 的 bl-伪收缩，则称 $\overrightarrow{I}$ 是 bl-伪内射的。

9. 插值空间问题。

我们所考虑的一般问题如下：确定所有插值空间，或者更确切地说：

问题 9.1。给定任意两个对 $\overrightarrow{A}$ 和 $\overrightarrow{B}$ 以及满足以下条件的空间 A 和 B

$$\Delta\left(\overrightarrow{A}\right) \subseteq A \subseteq \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right), \Delta\left(\overrightarrow{A}\right) \subseteq B \subseteq \Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$$

何时成立

$$T : \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{B} \in \mathcal{C} \Longrightarrow T : A \to B \in \mathcal{C}^0$$

其中 $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}_x$ 或 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_x$ $x = b$、l、Lip 和 $\mathcal{C}^0$ 表示相应的 1-元组（巴拿赫空间）范畴，参见第 3 节。

根据 Aronszajn-Gagliardo 定理 [**1**]，我们看到这实质上等价于

问题 9.2。设 $\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$、$\mathcal{C}$为上述问题 9.1，并设 $a \in \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$、$b \in \Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$。何时成立:

$$\exists T : \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{B} \in \mathcal{C} : b = Ta \tag{9.1}$$

为明确起见，仅考虑未加括号情形。如果 $x = b$，即 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_b$，则 (9.1) 成立的充要条件是

$$K\left(t, b; \overrightarrow{B}\right) \leq K\left(t, a; \overrightarrow{A}\right) \tag{9.2}$$

这实质上就是 Gagliardo [**11**]的相应条件。显然，如果 $x = l$，即 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l$，那么 (9.2) 至少也是必要条件。下面我们将对以下问题作出一些贡献:

问题 9.3。设 $\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$如问题 9.1 中，设 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l$，设 $a \in \Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 且 $b \in \Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$.。当（$=$且 $\overrightarrow{A}$和 $\overrightarrow{B}$）时，(9.2) 是否蕴含 (9.1)?

一个本质上等价的表述是：所有插值空间都是 K 空间吗？（还有一个对偶问题：所有插值空间何时都是 J-空间？关于这个问题，我们所知甚少。）

例 9.1. 在特殊情形 $\{l_1, l_\infty\}$ 有限 M下，答案为肯定，是 Hardy-Littlewood-Polya 关于双随机矩阵的一个经典定理所致（例如参见 [**21**]）。许多作者已将这一结果推广到 M 可数情形以及 $\{L_1, L_\infty\}$连续情形。特别是，问题 9.2 至少在我们对 A 和B 作某些限制时得到了完整解答（参见 Calderon [**7**], Mitjagin [**22**]）；因此在这种情形下，“几乎所有”插值空间都是 K-空间。

对于 $\{l_p, l_\infty\}$ 和 $\{L_p, L_\infty\}$ 的情形，也有部分推广结果（Cotlar [**8**], Lorentz- Shimogaki [**19**], ，另见 Bergh [**4**]）。

*Rema*第 9.1 节。Mitjagin-Calderon 结果可以说是这项研究的起点。奇怪的是，这一结果本身并不十分符合下面所呈现的图景。

例 9.2。并非对于所有的对 $\overrightarrow{A}$ 和 $\overrightarrow{B}$，K-空间都能穷尽所有插值情形；最简单的情形或许是 $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} = \left\{L_p, W_p^2\right\}$ 与 $p \neq 2$。事实上，通过复插值我们看到，$A = B = W_p^1$ 是一个插值空间，但当然不是 K-空间（使用稀疏傅里叶级数，正如例 4.1 中那样！）。

然而，我们有如下肯定的结果（其稍微更一般的形式见下面的定理 9.2）。 [2]

定理 9.1。设 $\overrightarrow{B}$ 是满足定理 8.1 的附加要求的单射，且 $\overrightarrow{A}$ 是正则的。则 (9.2) 蕴含 (9.1)。

我们给出两种证明：

第一种证明：如易见，取 $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{l}_{\infty}(\vec{\omega})$ 不失一般性。根据定理 7.1，我们可以假设 $\overrightarrow{A}$ 是 $\overrightarrow{B}$. 的 b-子对。为简单起见，取 $M=(0,\infty)$ $\omega_0(x)=1$、$\omega_1(x)=1/x$.。设 $K(t,b)\leq K(t,a)$。于是我们可以找到一个映射 T_1： $\overrightarrow{B}\to\overrightarrow{B}$ 到 $\mathcal{C}_l$，使得 $b=T_1a$.。为此，我们注意到，根据 (2.9) 以及 Holmstedt-Peetre 的结果，一般来说有 [**16**]，我们有 $K(t,a)=|a|^*$，其中 $*$ 如第 2c 小节所述，因此在我们的情形下 $|b|\leq|a|^*$。将情形化简为 $b=|a|^*$、a 连续的情形并不困难。于是，我们只需定义 $T_1\overline{a}$ （其中 $\overline{a}$ 为任意的）为

$$T_1\overline{a}(x)=\left\{\begin{array}{c}\overline{a}(x)\ \text{if}\ a(x)=a^*(x)\\ \overline{a}(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\overline{a}(x_2)\ \text{if}\ (x_1,x_2)\ \text{is the largest interval}\ I\\ \text{containing}\ x\ \text{such that}\ a(\xi)<a(x),\xi\in I\end{array}\right\}$$

定义 T_1 后，我们只需取限制即可得到一个映射 T： $\overrightarrow{A}\to\overrightarrow{B}$，其中 $b=Ta$ 。#

第二种证明：这个证明表面上要长得多。我们从一般分析开始，这种分析在其他关联中也很有用。设 $\overrightarrow{A}$为正则对，如定理 9.1 中所述，但设 $\overrightarrow{B}$为一个对，按照第 2i 小节的意义，它是某个正则对 $\overrightarrow{C}=\{C_0,C_1\}$ 的对偶，即 $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{C}'$。我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示对偶性。设 $b=Ta$ 满足 $a\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$、$b\in\Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$、$T$： $\overrightarrow{A}\to\overrightarrow{B}$. 如果 $c\in\Sigma\left(\overrightarrow{C}\right)$，则得到

$$\langle b,c\rangle=\langle Ta,c\rangle=\left\langle T,a\widehat{\otimes}c\right\rangle.$$

现在我们断言

$$|\langle b,c\rangle|\leq K\left(1,a\otimes c;A_0\widehat{\otimes}C_0,A_1\widehat{\otimes}C_1\right)\tag{9.3}$$

其中 $\widehat{\otimes}$ 表示射影张量积（参见 Grothendieck [**14**]）。事实上，对于任意的 $a\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 和 $c\in\Sigma\left(\overrightarrow{C}\right)$，我们有

$$|\langle T,a\otimes c\rangle|\leq\|a\|_{A_0}\|c\|_{C_0}$$

这意味着

$$|\langle T,u\rangle|\leq\|u\|_{A_0\widehat{\otimes}C_0}$$

对于任意的 $u\in A_0\widehat{\otimes}C_0$.。同理可得

$$|\langle T,u\rangle|\leq\|u\|_{A_1\widehat{\otimes}C_1}$$

for 任意的 $u\in A_1\widehat{\otimes}C_1$.。回到最初的 a 和 c，我们得出：若 $a\otimes c=u_0+u_1$，则

$$|\langle b,c\rangle|\leq\|u_0\|_{A_0\widehat{\otimes}C_0}+\|u_1\|_{A_1\widehat{\otimes}C_1}$$

这显然意味着 (9.3)。现在的关键是，反过来，若 (9.3) 成立，则由 Hahn-Banach定理可知存在 (9.1) 中的 T。现在取 $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{l}_{\infty}(\vec{\omega})$。于是可以取 $\overrightarrow{C}=\overrightarrow{l_1}(1/\vec{\omega})$。但一般而言，$A\widehat{\otimes}l_1(\omega)=l_1(\omega,A)$（参见 Grothendieck[**14**]）。因此，在这种情况下，(9.4) 等价于

$$|\langle b,c\rangle|\leq K\left(1,a\otimes c;\overrightarrow{l_1}\left(1/\vec{\omega},\overrightarrow{A}\right)\right)$$

或者，根据（2.2），

$$|\langle b,c\rangle|\leq\sum_{m\in M}\frac{1}{\omega_0(m)}K\left(\frac{\omega_0(m)}{\omega_1(m)},a;\overrightarrow{A}\right)|c(m)|$$

[2]另请参见 Cwikel-Peetre [**51**, 定理 4.1、注 4.1], , 以了解最新进展。

但在这种情况下

$$\langle b,c\rangle=\sum_{m\in M}b\left(m\right)c\left(m\right)$$

因此，我们还得到等价条件

$$\left|b\left(m\right)\right|\leq\frac{1}{\omega_0\left(m\right)}K\left(\frac{\omega_0\left(m\right)}{\omega_1\left(m\right)},a;\overrightarrow{A}\right).$$

最后我们注意到（参见第一种证明）：

$$K\left(t,b\right)=\phi^*\left(t\right)$$

其中

$$\phi\left(t\right)=\sup\left\{\omega_0\left(m\right)\left|b\left(m\right)\right|:\frac{\omega_0\left(m\right)}{\omega_1\left(m\right)}=t\right\}$$

因此，在这种情况下，(9.3) 与 (9.2) 等价。#

现在很容易找到关于 $\overrightarrow{B}$ 的条件，它对于定理 9.1 结论成立是充要的。

定理 9.2. 对每个正则 $\overrightarrow{A}$，(9.2) 蕴含 (9.1)，当且仅当 $\overrightarrow{B}$ 是 bl-伪内射（见第 8 节）。

证明：设 $\overrightarrow{B}$ 是 bl-伪内射，即 $\overrightarrow{B}$ 是某个 $\overrightarrow{l}_\infty(\vec{\omega})$ 的 pl-伪收缩。设 (9.2) 成立。我们可以找到 $i\in\Sigma\left(\overrightarrow{l}\right)$，使得 $K(t,b)=K(t,i)$，并且存在一个映射 $\beta\colon\overrightarrow{l}\to\overrightarrow{B}$，使得 $b=\beta i$。由于 $K(t,i)\leq K(t,a)$，我们还可以（由定理 9.1）找到一个映射 $S\colon\overrightarrow{A}\to\overrightarrow{l}$，使得 $i=Sa$。那么 $T=\beta\circ S$ 显然满足 (9.1) 的要求。这证明了“若”部分。反之显然成立（取 $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{l}$ 即可！）。#

例 9.3。$\overrightarrow{L}_{\vec{p}\infty}=\{L_{p_0\infty},L_{p_1\infty}\}$（Lorentz 对，见第 2b 小节）在 $\overline{C}$. 中是 bl-伪内射的。为说明这一点，令 $b\in\Sigma\left(\overrightarrow{L}_{\vec{p}\infty}\right)$。不失一般性，我们可以假设 $b=b^*$，为简便起见取 $M=$（0，∞）。容易看出

$$K\left(t,b\right)\approx\sup\frac{b\left(x\right)}{x^{-1/p_0}+t^{-1}x^{-1/p_1}}=K\left(t,b;\overrightarrow{L}_\infty\left(x^{-1/\vec{p}}\right)\right)$$

于是，考虑自然嵌入 $\overrightarrow{L}_\infty\left(x^{1/\vec{p}}\right)\to$，$\overrightarrow{A}$ $\overrightarrow{L}_{\vec{p}\infty}$. 9 2

我们得到所需的“伪收缩”。如果将适用于加括号情形的定理应用于此，我们得到以下结果：设 是任意一个正则对，且 $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{L}_{\vec{p}\infty}$.。令 A，并令 B 如问题 9.1 中所述。则 $T\colon\overrightarrow{A}\to\overrightarrow{B}$ 蕴含 $T\colon A\to B$ 当且仅当 K（t，b）$\leq K$（t，a），其中 $a\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$，$b\in\Sigma\left(\overrightarrow{B}\right)$，蕴含对于某个常数 $C\geq1$. 有 $\|b\|_B\leq C\|a\|_A$。特别地，如果 $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{L}_{\vec{p}1}=\{L_{p_0 1},L_{p_1 1}\}$，后一个条件写成：

$$\begin{array}{rcl}\sup\frac{b^*\left(x\right)}{x^{-1/p_0}+tx^{-1/p_1}} & \leq & \int_0^\infty\min\left(x^{1/p_0},tx^{1/p_1}\right)a^*\left(x\right)\frac{dx}{x}\\ & \Longrightarrow & \|b\|_B\leq C\|a\|_A\end{array}$$

或者，更具体地说，如果 $p_0=1$、$p_1=\infty$：

$$tb^*\left(t\right)\leq\int_0^t a^*\left(x\right)dx\Longrightarrow\|b\|_B\leq C\|a\|_A$$

当然，这一切都与 Marcinkiewicz 插值定理有关（参见 Calderon [**7**]。Boyd [**5**], Semenov [**43**], Zippin [**47**], Shimogaki [**45**]）。

我们通过给出条件（9.3）的另一个应用来结束本节；该条件出现在定理9.1的（第二个）证明中。

在 (9.3) 中取 $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{l}_1(\vec{\omega})$ $\overrightarrow{C}=\overrightarrow{l}_1(1/\vec{\omega})$，于是 $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{l}_\infty(\vec{\omega})$。然后我们得到

$$\left|\sum_m b(m)c(m)\right|\leq\sum_m\sum_n\min\left(\omega_0(m)/\omega_0(n),\omega_1(m)/\omega_1(n)\right)|a(m)||c(n)|$$

这显然等价于

$$|b(m)|\leq\sum_n\min\left(\omega_0(m)/\omega_0(n),\omega_1(m)/\omega_1(n)\right)|a(n)|$$

因此，在这种情况下，（9.4）是（9.1）成立的充要条件。

我们可以将此稍作推广。再次取 $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{l}_1(\vec{\omega})$，但令 $\overrightarrow{C}$，从而 $\overrightarrow{B}$ 为一般情形。因此我们得到条件

$$|\langle b,c\rangle|\leq C\sum_m\omega_0(m)K\left(\frac{\omega_1(m)}{\omega_0(m)},c;\overrightarrow{C}\right)|a(m)| \tag{9.5}$$

利用对偶性，我们可以看出（9.5）等价于以下条件：

$$\exists\beta\quad:\quad M\to\Delta\left(\overrightarrow{B}\right):b=\sum_m a(m)\beta(m) \tag{9.6}$$

$$\frac{1}{\omega_0(m)}J\left(\frac{\omega_0(m)}{\omega_1(m)},\beta(m)\right)\quad\leq\quad 1$$

（这应与 J-空间的定义进行比较，参见例5.4。）

10. 关于拟投射耦合的说明。

第5节曾简要提到定义投射耦合的可能性，但在本文中完全没有加以利用。不过，我们要指出，对 $\overrightarrow{l}_1(\vec{\omega})$ 是投射的。本节则对一个更一般的概念，即拟投射耦合，作一些说明；这些说明与第9节中的讨论密切相关（另见例5.4）。更确切地说，我们称 Banach 对 $\overrightarrow{A}$ 是 bl-伪投射的，如果对于正则 $\overrightarrow{A}$、任意 $a\in\Sigma\left(\overrightarrow{A}\right)$ 以及某个 $\overrightarrow{l}_1(\vec{\omega})$，都能找到 $\lambda\in l_1(\vec{\omega})$，使得 $K\left(t,a;\ \overrightarrow{A}\right)=K\left(t,\lambda;\ \overrightarrow{l}_1(\vec{\omega})\right)$，以及一个映射 β：$\overrightarrow{l}_1(\vec{\omega})\to\overrightarrow{A}$ 到 $\mathcal{C}_l$，满足 $a=\beta(\lambda)$。元素 $\mathcal{M}\left(\overrightarrow{l}_1(\vec{\omega})\ \ \overrightarrow{A}\right)$ 的结构很容易确定。因此，我们看到，β 的存在性等价于存在一个函数 u：$M\to\Delta\left(\overrightarrow{A}\right)$，使它们具有如下表示形式

$$a=\sum_m\lambda(m)u(m);$$

with

$$\sum_m\min\left(\omega_0(m),t\omega_1(m)\right)|\lambda(m)|=K\left(t,a;\overrightarrow{A}\right)$$

若作如下特化：$M=(0,\infty)$ $\omega_0(x)=1,\omega_1(x)=\frac{1}{x}$，我们看到，这就是表示式 (5.2) 的连续模拟，只是将 (5.3) 替换为

$$\int_0^\infty\min\left(1,\frac{t}{x}\right)J\left(x,u(x)\right)\frac{dx}{x}\leq K(t,a).$$

以上均适用于未加括号情形。在加括号情形下，我们得到不等式

$$\int_0^\infty\min\left(1,\frac{t}{x}\right)J\left(x,u(x)\right)\frac{dx}{x}\leq\left(c'+\epsilon\right)K(t,a)$$

其中 c' 是依赖于 $\overrightarrow{A}$ 的常数。对于对应于 $\gamma(A)$ 的情形（参见例 5.4），我们需要设定

$$\gamma'\left(\overrightarrow{A}\right)=\inf c'$$

（参见 Peetre [**32**],[**35**]。）以下示例或许能阐明与注释 9.1 相关时所提到的问题。

例 10.1. $\{L_1, L_\infty\}$ 是 $\{L_1(x)\ \ L_1(1)\}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的 bl-伪收缩，因此是 bl-伪投射。更一般地，$\overrightarrow{L}_{\vec{p},\ 1} = \{L_{p_0 1}, L_{p_1 q}\}$(Lorentz 对)是 $\overrightarrow{L}_1\left(x^{1/\vec{p}}\right) = \left\{L_1\left(x^{1/p_0}\right), L\left(x^{1/p_1}\right)\right\}$.这是例 9.3 结果的对偶结果，证明也十分相似。

例 10.2. 根据例 10.1 的离散版本，$\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_\infty\}$ 是 $\{l_1, l_\infty\}$ 的 bl-伪收缩，因此是 bl-伪投射（$\mathcal{S}_p$ 表示 Hilbert 空间中所谓的 p-迹类算子；参见 Gohberg-Krein [**13**], 另见 Triebel [**46**], Peetre [**35**], , 了解其与插值空间的联系）。

11. 插值函数的一个应用。

本节讨论在谱对（第 g 小节）这一特殊情形下，确定所有插值空间（第 9 2 9 1 节）$\overrightarrow{A} = \{E, D\ P\}\ \overrightarrow{B} = \{F, D\ Q\}$ $A = D\ h\ P$ $B = D\ h\ Q$ h 的问题。因此，我们在问题中取 . ( ) , ( )，并且也取 (( )) (( ))，其中 是一个给定的标量值函数。若 A 和 B 是问题 9.1 意义下的插值空间，我们称 h 是关于 P 和 Q.的插值函数。以下文献讨论了特殊类型算子的插值函数：Lions [**18**], Foias-Lions [**9**], Peetre [**36**]{**37**], Schechter [**40**]。通常取 $P = Q$（以及 $E = F$），下文我们也这样做。因此，一开始只给定一个谱对 $\overrightarrow{A} = \{E, D(P)\}$.。但现在我们假设 $\overrightarrow{A}$是谱对 $\overrightarrow{A^*} = \{E^*, D(P^*)\}$.的 l-收缩。更确切地说，我们假设有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \{E, D(P)\} & & \\ & \searrow \alpha & \\ \downarrow id & & \{E^*, D(P^*)\} \\ & \swarrow \beta & \\ \{E, D(P)\} & & \end{array}$$

其中 α 和 β 除了满足基本关系外，还满足以下条件

$$\alpha P = P^* \alpha, \beta P^* = P\beta \tag{11.1}$$

条件 (11.1) 中的每一项显然都意味着

$$P = \beta P^* \alpha \tag{11.2}$$

例 11.1。由例 5.3 可知，$B_p^{\vec{s}\,q} = \left\{B_p^{s_0 q}, B_p^{s_1 q}\right\}$ 是 $l_q\left(2^{\vec{s}\,v}, L_p\right) = \{l_q(2^{s_0 v}, L_p)\ \ l_q(2^{s_1 v}, L_p)\}$. 的~~收缩。根据第~~ 2g 小节（情形 (i) 和 (iv)），我们还知道这些是谱对，第一个带有 $P = \left(\sqrt{-\Delta}\right)^{s_0 - s_1}$，第二个带有 $P^* = 2^{v(s_1 - s_0)}$。但是 (11.1) 和 (11.2) 均未得到满足。不过，如果我们将原算子 $\left(\sqrt{-\Delta}\right)^{s_1 - s_0}$ 替换为以下类型的算子，这一问题便可得到解决

$$a \to \sum_{v=-\infty}^{\infty} 2^{v(s_1 - s_0)} \rho_v * a$$

其中，ρ_v 是一个具有适当再生性质的第三个划分，关于在 α 和 β 的定义中出现的划分ϕ_v 和 ψ_v而言（见第2f小节）。

例11.2。类似的例子还包括 $\{L_p, W_p\}$和 $\{L_p\ (l_2)\ \ L_p\ (l_2\ (2^v))\}$，其中 $1 < p < \infty$，因为我们必须使用Paley-Littlewood定理（参见Peetre [**30**]。 [**31**]）。

回到前述一般情形，我们可以证明如下结论。

xx

定理 11.1 . 关于 P^* 的每个插值函数都是关于 P的插值函数

证明：设 T: $\overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A}$已给定。我们通过令 $T^* = \alpha \circ t \circ \beta$.来定义 T^*: $\overrightarrow{A^*} \to \overrightarrow{A^*}$。由 $\overline{\beta \circ \alpha = id}$可得 $T = \beta \circ T^* \circ \alpha$.。若 h是相对于 P^*的插值函数，我们便得到

$$T^* : D\left(h\left(P^*\right)\right) \to D\left(h\left(P^*\right)\right)$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} \alpha &: D\left(h\left(P\right)\right) \to D\left(h\left(P^*\right)\right) \\ \beta &: D\left(h\left(P^*\right)\right) \to D\left(h\left(P\right)\right) \end{aligned}$$

因为根据 (11.1)，至少形式上有

$$\alpha h\left(P\right) = h\left(P^*\right)\alpha, \beta h\left(P^*\right) = P^* h\left(\beta\right).$$

因此，复合后可得

$$T : h\left(P\right) \to h\left(P\right)$$

并且 h 是关于 P.# 的插值函数

参考文献

[1] N. Aronszajn - E. Gagliardo, 《插值空间与插值方法》。《纯粹与应用数学年鉴》68（1965），51-118。[2] C. Baiocchi, 《插值定理：偏微分方程边值问题的应用》。《纯粹与应用数学年鉴》73（1966），233-251。[3] M.S. Baouendi - C. Goulaouic, 《交集与插值函子的交换》。《巴黎科学院报告》265（1967），313-315。[4] J. Bergh, 《关于赋范线性空间的插值——一个必要条件》。技术报告，隆德，1971年。[5] D.W. Boyd, 《一对自反Lebesgue空间之间的空间》。《美国数学会会刊》18（1967），215-219。[6] P.L. Butzer - H. Berens, 《算子半群与逼近》，Springer，柏林，1967年。[7] A.P. Calderon, L^1 与 L^∞ 之间的空间及Marcinkiewicz定理。《数学研究》26（1966），273-299。[8] M. Cotlar，个人通信。[9] C. Foias - J.L. Lions, 《关于某些插值定理》。《塞格德学报》22（1961），269-282。[10] E. Gagliardo, 《巴拿赫空间的插值及其应用》。《巴黎科学院报告》248（1959），3388-3390。[11] E. Gagliardo, 《不同函数空间族中的一种幺结构，I》。《数学研究》10（1961），245-281。[12] I. Gelfand - G.E. Silov, 《有限维空间的范畴》。《莫斯科大学学报》，第1辑，数学与力学，第4期（1963），27-48（俄文）。[13] J.C. Gohberg - M.G. Krein, 《非自伴算子理论导论》。莫斯科，1965年（俄文）。[14] A. Grothendieck, 《拓扑张量积与核空间》。《美国数学会回忆录》16（1955）。[15] J. Gustavsson, 《度量空间的插值》。技术报告，隆德，1971年。[16] T. Holmstedt - J. Peetre, 《插值空间理论中出现的某些泛函》。《泛函分析杂志》4（1969），88-94。[17] J. Lindenstraus, 《巴拿赫空间理论的某些方面》。讲义，麻省理工学院，1969年。[18] J.L. Lions, 《希尔伯特空间之间的中间空间及其应用》。《罗马尼亚共和国数学物理科学学会数学通报》50（1958），419-432。[19] G.G. Lorentz - T. Shimogaki, 《关于空间对（L^p, L^∞）及（L^1, L^q）.的插值定理》。《美国数学会汇刊》159（1971），207–221。[20] S. McLane, 《范畴代数》。《美国数学会通报》17（1965），40-106。[21] L. Mirsky, 《双随机矩阵理论中的结果与问题》。《概率论与相关领域》1（1962/63），319-334。[22] B.S. Mitjagin, 《模空间的一个插值定理》。《数学文集》66（1965），473-482（俄文）。另见《“分析中的插值空间及相关主题”会议论文集》（隆德，1983），《数学讲义》1070（1984），10–23。[23] B.S. Mitjagin - A.S. Svarc, 《巴拿赫空间范畴中的函子》。《数学科学进展》19:3（1964），65-130（俄文）。[24] J. Peetre, 《插值函子与Banach 对》。（尼斯，1970年8月。）[25] J. Peetre, 《插值空间的一种新方法》。《数学研究》34（1970），23-42。[26] J. Peetre, 《Lipschitz算子与度量空间的插值》。《数学学报》（克卢日）12（1970），325-334。[27] J. Peetre, 《插值空间的新性质》。《巴黎科学院报告》256（1963），1424-1426。[28] J. Peetre, 《赋范空间的插值理论》。讲义，巴西利亚，1963年（= 《数学笔记》第39号，1968年）。[29] J. Peetre, 《Lipschitz连续函数的精确插值定理》。《数学研究》18（1969），239-259。[30] J. Peetre, 《关于Besov 空间》。《巴黎科学院报告》264（1967），281-283。[31] J. Peetre, 《关于Sobolev空间与Besov 空间的结构》。待刊。[32] J. Peetre, 《插值空间理论中的一个基本引理》。油印本，隆德，1967年。[33] J. Peetre, 《算子r¨空间的插值》。《数学档案》（巴塞尔）21（1970），61-608。

[34] J. Peetre，线性算子的逼近。（瓦尔纳，1970年5月。）[35] J. Peetre，论插值空间理论与逼近空间理论之间的联系。（布达佩斯，1969年8月。）[36] J. Peetre，论 Foias 和 Lions 的一个插值定理。《Acta Szeged》25（1964），255-261。[37] J. Peetre，论插值函数，I-III，《Acta Szeged》27（1966），167-171；29（1968），91-92；30（1969），235-239。[38] J. Peetre - G. Sparr，赋范阿贝尔群的插值。Sparr，《纯粹与应用数学年鉴》（第4辑），92（1972），第4期，217–262。[39] A. Pietsch，Banach 空间中的 S_p-算子理想。Studia Math. 38（1970），59-69。[40] M. Schechter，复插值。Comp. Math. 18（1967），117-147。[41] Z. Semadeni，凸性中的范畴方法。Proc. Coll. Convexity，哥本哈根，1965（1967），281-307。[42] Z. Semadeni，泛函分析与范畴论专题。讲义，奥胡斯，1965。[43] E. Semenov，一个新的插值定理。Funkcional. Anal. i Prilozen. 2（1968），68-80（俄文。）[44] G. Sparr，多个 Banach 空间的插值。《纯粹与应用数学年鉴》99，247–316（1974）。[45] T. Shimogaki，函数空间中的 Hardy-Littlewood 主函数。J. Math. Soc. Japan 17（1965），365-373。[46] H. Triebel，关于 Sobolev-Besov 空间中紧算子逼近数的分布。Inv. Math. 4（1967），275-293。[47] M. Zippin，重排不变函数空间之间弱型算子的插值。J. Functional Analysis 7（1971），267-284。[48] A. Zygmund，三角级数。剑桥，1958。[49] Y.A. Brudnyi 和 N.Y. Kruglyak，《插值函子与插值空间》1。Elsevier，North-Holland（1991）。[50] Y.A Brudnyi、S.G. Krein 和 E.M. Semenov，线性算子的插值。J. Soviet Math 42，2009–2113（1988）。[51] M. Cwikel 和 J. Peetre，抽象 K 空间和 J 空间。J. Math. Pures Appl. 60（1981），1–50。[52] S. Kaijser，J.W. Pelletier，插值理论与对偶性。Lecture Notes in Math. 1070（1984），152-168。[53] S. Kaijser，J.W. Wick-Pelletier，插值函子与对偶性。Lecture Notes in Math 1208（1986）。[54] V. I. Ovchinnikov，插值理论中的轨道方法。Math. Reports 1（1984），349–516。[55] J.W. Pelletier，Aronszajn-Gagliardo 定理的一个推广。J. Pure Appl. Algebra，60，第1-2期，259-277（1990）。