使用主动通量格式计算时变黏性可压缩流动的进展

Oliviu Şugar-Gabor

航空与机械工程组

萨尔福德大学

萨尔福德，M5 4WT，英国

o.sugar-gabor@salford.ac.uk

摘要

主动通量格式是一种具有额外自由度的有限体积格式。该格式采用连续重构，无需黎曼求解器。对于单元边界上的额外自由度，使用演化算子进行处理。本文介绍了采用主动通量格式计算一维黏性可压缩流动的研究进展。文中给出了适用于线性和非线性双曲守恒系统的演化算子，并在此基础上提出了一种纳入源项的新扩展。该方法应用于欧拉方程和扩散方程的一种双曲型 formulation。最后，针对可压缩 Navier-Stokes方程，给出了一种双曲型 formulation，并提出了一种新颖的算子分裂方法。这些方法使主动通量演化算子能够应用于黏性可压缩流动的数值计算。

关键词：主动通量格式、有限体积法、双曲守恒律、源项、算子分裂、可压缩纳维–斯托克斯方程

MSC：35L55、35L65、35Q30、35Q35、76M12

1. 引言

主动通量（AF）格式最初由 Eymann 和 Roe 在一系列研究中提出（Eymann and Roe，2011年a、2011年b、2013年），是一种在单元边界上增加了额外自由度的有限体积（FV）格式。这些额外节点使其能够达到三阶精度，不过也可以扩展到更高阶。主动通量格式与其他有限体积格式的区别主要体现在三个方面。首先，即使对于可能存在间断的非线性问题，变量在单元边界处也具有 C^0 连续性，因此不需要黎曼求解器。C^0连续性还减少了每个网格单元中的独立自由度数量，相较于间断Galerkin等其他高阶方法，可以降低内存需求。其次，单元边界处额外自由度上的变量值独立于单元平均值进行演化，采用最适合所求解方程数学和物理性质的（非守恒）紧致模板格式。第三，通过使用求积对物理通量进行数值积分，计算穿过单元边界的通量。

在过去半个世纪中，非线性守恒律的计算一直是一个重要的研究领域。合适的数值方法必须能够捕捉间断（高速流体流动中的激波），保持基本物理量（涡量、质量），同时避免非物理解（膨胀激波）。典型的有限体积格式采用维度分裂，通过沿每个单元边界求解一维问题，将多维问题替换为一维问题。要捕捉多维特征，这种方法需要进行大量网格加密。LeVeque（2002）对有限体积方法进行了出色的概述与介绍。

近期发表的研究（见 Barsukow 等，2019 年和 Barsukow，2021）表明，AF格式非常有希望成为一种能够为非线性守恒律提供相对简单、保持涡量、进行激波捕捉且真正实现多维解的方法。对于简单平流或线性化声学等线性方程，AF格式已经得到了详细研究。Eymann 和 Roe（2011a、2011b、2013）以及 Fan（2017）的研究涵盖了这些内容。对于非线性方程，Burgers方程的近似演化算子（Eymann 和 Roe，2013；Maeng，2017）以及欧拉方程的近似演化算子（Maeng，2017；Barsukow，2021）已经得到研究。近期，He（2021）在将 AF 格式应用于层流亚声速流动的纳维–斯托克斯方程方面取得了重大进展，其采用了基于 Cauchy-Kovalevskaya / Lax-Wendroff 过程的复杂演化算子，并使用受球平均方法启发的方法评估高阶空间导数。

本文进一步介绍了将AF格式应用于包含激波且流动行为更为复杂的可压缩黏性流动的进展。第2节概述了AF格式，并给出了其在Burgers方程上的首个简单应用示例。第3节详细介绍了Barsukow（2021）首次推导的非线性双曲系统演化算子，以及其在一维Euler方程中的应用。第4节介绍了将演化算子扩展到包含源项的双曲系统的一种新方法，以及AF格式在扩散方程的双曲型 formulation中的应用，

并介绍了AF格式在扩散方程的双曲型 formulation中的应用。最后，第5节详细介绍了Nishikawa（2011）推导的纳维–斯托克斯方程的双曲型 formulation，并据作者所知，首次推导并应用AF格式来处理包含激波的可压缩黏性流动。由于这类流动在跨声速和超声速飞行中相对常见，因此受到航空工程师的特别关注。本文最后给出结论，并讨论未来的工作。

2. 主动通量格式概述

2.1. 有限体积离散

为简要而直观地描述 AF格式，考虑如下非线性一维标量守恒律：

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0 \tag{1}$$

其中 $U(t,x)$ ：$\mathrm{R}^{+}\times\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}$，且 F $U(t,x)$ e)isth 通量函数。

按照有限体积方法所采用的方法，将空间区域划分为 N non- overlapping 计算单元 Ω_i , $i=1,N$，每个单元均以网格点x_i 为中心，并具有左侧$x_{i-1/2}$ 和右侧$x_{i+1/2}$ 边界。时间区域划分为M 时间步 t^n , $n=1,M$。网格间距 $\Delta x=x_{i+1/2}-x_{i-1/2}$ 和时间步长 $\Delta t=t^{n+1}-t^n$ 均取为常数，不过扩展到可变时间步长并不会带来任何实质性问题。

定义单元平均值：

$$\bar{U}_i(t)=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}U(t,x)dx \tag{2}$$

通过对 Ω_i en t^n 和 t^{n+1}进行积分，可得到有限体积方法中典型的守恒律经典离散形式：

$$\bar{U}_i^{n+1}=\bar{U}_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{F}\left(x_{i+1/2}\right)-\bar{F}\left(x_{i-1/2}\right)\right) \tag{3}$$

其中， $\bar{U}_i^n$ represents the cell-average value in cell Ω_i 时间 t^n。与许多有限体积格式一样，at该值与网格点 x_i相关联。$\bar{F}(x_{i+1/2})$ 是穿过单元边界 $x_{i+1/2}$ 的通量，其表达式为：

$$\bar{F}\left(x_{i+1/2}\right)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}F\left(U\left(t,x_{i+1/2}\right)\right)dt \tag{4}$$

2.2. 解的重构 struction

在 AF 方法中，边界点与单元中心点结合起来，用于重构每个网格单元内部的解。网格单元平均值作为自由度之一予以保留。此外，在计算区域内，重构在各处均C^0 连续。

在一维　维度中，抛物线是实现三阶精度的自然选择　　：

$$U_{recon}(x) = -3(2\overline{U}_i - U_{i-1/2} - U_{i+1/2})\frac{(x-x_i)^2}{\Delta x^2} + (-U_{i-1/2} + U_{i+1/2})\frac{x-x_i}{\Delta x} + \frac{1}{4}(6\overline{U}_i - U_{i-1/2} - U_{i+1/2}), x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad (5)$$

为增强符号表示的清晰性，式（5）中未包含 $U_{i-1/2}$ 和 $U_{i+1/2}$ 对时间的依赖关系，但这一点是隐含的。

关于非结构网格上的二维重构，详见 Maeng（2017）；关于结构网格上的二维重构，详见 Barsukow 等（2019）。He（2021）提供了一些适用于将精度阶数提高到三阶以上的重构方法，但必须注意，还需对格式的其他部分进行相应修改。

2.3. 演化算子

该方法的关键阶段是在单元边界上演化点自由度。利用 t^n 中的数据进行的重构充当初始条件。演化阶段使用最适合所求解方程数学和物理特性的格式，将 $U_{i-1/2}$ 和 $U_{i+1/2}$ 从 t^n 推进到 t^{n+1} 。

为了演化点值，考虑式（1）的非守恒形式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U)\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

其中 $A(U) = \partial F/\partial U$。

为简便起见，引入以下记号：

$$U_{recon}(t^n, x) = U_0(x) \quad (7)$$

位于 $U\ t^n\ ^1, x_{i+1/2})$ 处的更新值根据特征线理论确定，表示为：

$$U(t^{n+1}, x_{i+1/2}) = U_0(x_0) \quad (8)$$

其中，x_0 表示在时间 t^{n+1} 从边界 $x_{i+1/2}$ 反馈回来的量。

特征线是解保持不变的直线。然而需要注意的是，对于非线性方程，特征线可能会相交，即使初始数据光滑，也会产生间断。这是因为特征速度 $A(U)$ 是解本身的函数。

特征脚点的坐标可通过以下方式确定：

$$x_0 = x_{i+1/2} - A\big(U_0(x_0)\big)\Delta t \quad (9)$$

Barsukow（2021）展示了用于求解（9）的非迭代过程：

$$x_0^{(0)} = x_{i+1/2}$$
$$x_0^{(k+1)} = x_{i+1/2} - A\left(U_0\left(x_0^{(k)}\right)\right)\Delta t \tag{10}$$

该过程要求将特征脚点迭代至 k^{th} 精度阶。 iterations to solve for the pos

网格单元边界上点自由度的演化进行两次：一次是在完整时间步 $U(t^{n+1},x_{i+1/2})$ 内，另一次是在半时间步$U(t^{n+1/2},x_{i+1/2})$ 内。接下来，使用辛普森 1/3求积法计算通量积分：

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U(t,x_{i+1/2})\right)dt \cong \frac{\Delta t}{6}\left(F\left(U(t^n,x_{i+1/2})\right) + 4F\left(U(t^{n+1/2},x_{i+1/2})\right) + F\left(U(t^{n+1},x_{i+1/2})\right)\right) \tag{11}$$

在本文采用的形式中，AF格式在时间上是显式的，不过已有文献发表了针对线性方程的隐式形式（Nishikawa and Roe，2016年）。作为一种显式格式，它必须满足CFL条件：

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{A_{max}} \tag{12}$$

其中，A_{max} 是最大特征速度。 ue of the cha

在实际应用中，借助广泛使用的库朗数σ来实现该条件：

$$\Delta t = \sigma\frac{\Delta x}{A_{max}} \tag{13}$$

2.4. s的总体概述 **cheme**

AF格式的所有步骤现已完整定义，可总结如下：

步骤 1：给定单元平均值 $\bar{U}_i^n$ 和额外的自由度 $U_{i-1/2}^n$、$U_{i+1/2}^n$，使用公式 (5) 计算每个网格单元的重构系数。

步骤 2：遍历所有单元边界。对于每个单元边界，使用公式 (10) 确定特征脚点 x_0 的位置，分别计算完整时间步 Δt 和半时间步 $\Delta t/2$ 的位置。使用公式 (8) 更新 $U(t^{n+1},x_{i+1/2})$ 和 $U(t^{n+1/2},x_{i+1/2})$。

步骤 3：遍历所有单元边界，并使用公式 (11) 中的求积确定通量。

步骤 4：使用守恒更新 (3) 更新单元平均值。

2.5. Burgers方程的应用

作为初步示例，考虑 AF格式应用于 Burgers方程的一个简单实例。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2/2}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

令 $x \in [0,1]$ 以及初始条件 ndition be:

$$U_0(x) = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) \tag{15}$$

当初始条件为 a smooth, sine function 时，解将随时间演化，并在最小时间 $t = 1s$ 后趋向于位于 $x = 0.5$ 处的激波。图 1 展示了所得结果，以及 AF 格式从平滑初始数据中捕捉激波形成的能力。

同样重要的是检验 AF格式的收敛阶。采用包含$N = 2560$ 个网格单元的计算结果作为替代“精确”解。计算 $L2$ 误差的范数，即不同网格密度下的解与替代“精确”解之间的误差，并在 $t = 0$处计算。$5s$ ，结果绘制于图2中。最粗网格层级包含 $N = 5$ 个网格单元，后续每个网格层级的单元数均加倍。可以观察到，对于 Burgers方程，AF格式以三阶精度收敛。

3. 非线性双曲系统与欧拉方程

3.1. 欧拉方程

考虑如下的一维守恒律系统：

$$\begin{gathered}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{U}(t_0, x) = \boldsymbol{U}_0(x)\end{gathered} \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{U}(t,x) : \mathrm{R}^+ \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}^m$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(t,x))$ is the flux 和 $\boldsymbol{U}_0(x)$ 是初始条件。

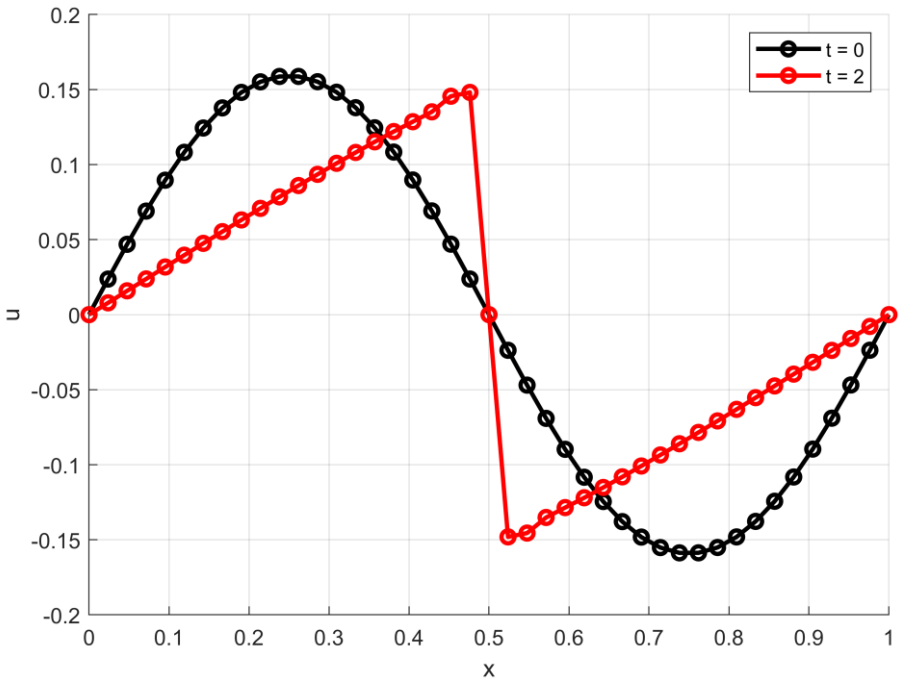


图1. 使用 Burgers’方程从光滑初始数据形成激波。在 $\boldsymbol{t = 2\ s}$ 处获得了解，使用了 $\boldsymbol{N = 21}$ 个网格单元和 $\boldsymbol{\sigma = 0}$。 $\boldsymbol{7}$。绘制的结果同时包括边界点值和单元平均值。

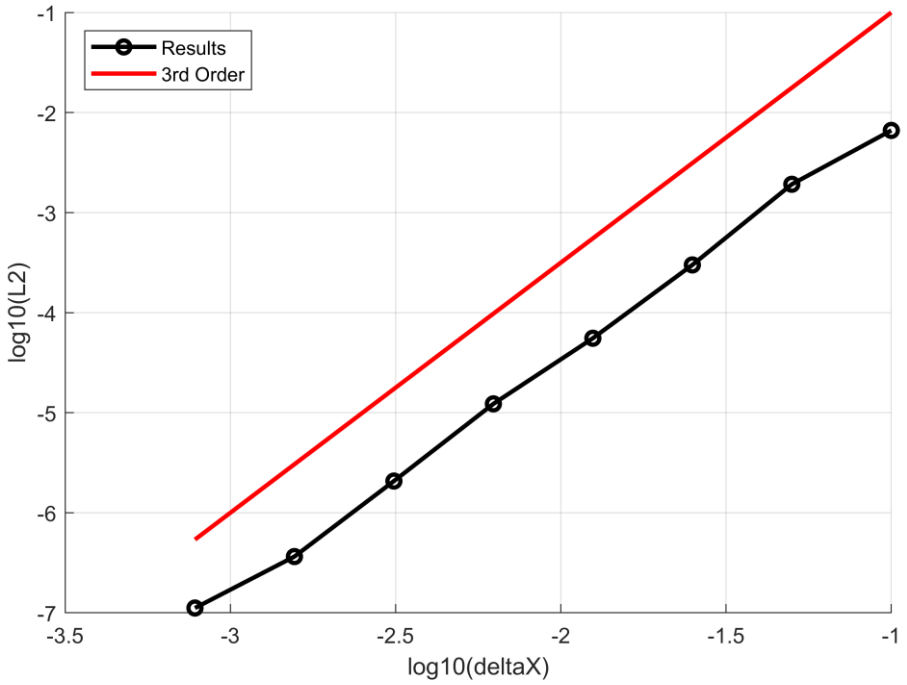


图2. Burgers'方程解的收敛阶，$\boldsymbol{t = 0.5s}$通过相对于极细网格的$\boldsymbol{L2}$ 误差进行测量。图中给出了与**3rd** 阶相对应的直线作为参考。

假设该系统为双曲型，即雅可比矩阵 $\boldsymbol{A = \partial F/\partial U}$ 仅具有实特征值，并且拥有一组完备的线性无关特征向量。描述可压缩绝热流体无黏流动的欧拉方程是一个众所周知的例子，其中式（16）中出现的各项为：

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中，ρ 为密度，u is the flow velocity, E为比总能，p 为压力，$H = E + p/\rho$ 为比总焓。假设流体还满足理想气体的状态方程，该方程可方便地写为$p = (\gamma - 1)(\rho E - \rho u^2/2)$，其中$\gamma$ 为比热比。

Fan（2017）或 He（2021）发表了使用AF格式求解一维Euler方程的结果。所采用的方法基于算子分裂方法：首先使用基于近似特征线追踪的方法求解非线性对流，随后使用球平均方法求解声学（压力）分量。Barsukow（2021）基于双曲型系统的数学性质，提出了一种更简单的预测-校正方法。本文采用的方法遵循Barsukow（2021）提出的方法。

3.2. 演化算子

令 $\boldsymbol{L}$ 为左特征向量矩阵，$\boldsymbol{R}$ 为右特征向量矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角特征值矩阵，$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$。另已知 $\boldsymbol{R^{-1} = L}$。

关于欧拉方程的特征值和特征向量的详细信息，可参阅许多教科书，例如 Anderson（1995）。将 (16) 左乘 $\boldsymbol{L}$，并将广义意义上的特征变量定义为 $\partial\mathbf{W}=\boldsymbol{L}\partial\boldsymbol{U}$，即可得到特征系统：

$$\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial x}=\mathbf{0} \tag{18}$$

一维欧拉方程是特征方程和特征变量解耦的情形之一。然而，对于高维情况，这一点不再成立。尽管如此，变分$\partial\mathbf{W}$ 始终可以定义，并可用作启发，为AF格式构造合适的演化算子。

对于由m 个方程组成的系统，每个特征变量∂W_k 、 $k=1$、 m 均以速度λ_k 沿特征曲线C^k传播。考虑时间t^n 和 $t^{n+1}=t^n+\Delta t$的两个时刻，沿相应特征曲线有以下方程成立：

$$\partial W_k(t^{n+1},x)=\partial W_k(t^n,x-\lambda_k\Delta t)\,,k=1,m \tag{19}$$

由（$\partial\mathbf{W}=\boldsymbol{L}\partial\boldsymbol{U}$ 19) and remembering that :

$$\begin{aligned}\partial\boldsymbol{U}(t^{n+1},x)&=\boldsymbol{L}^{-1}\,\partial\mathbf{W}(t^{n+1},x)=\boldsymbol{R}\,\partial\mathbf{W}(t^{n+1},x)\\&=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{R}_k\,\partial W_k(t^{n+1},x)=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{R}_k\,\partial W_k(t^n,x-\lambda_k\Delta t)\\&=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}_k\,\boldsymbol{L}_k\,\partial\boldsymbol{U}(t^n,x-\lambda_k\Delta t)\end{aligned} \tag{20}$$

其中$\boldsymbol{R}_k$ 为tk he right eigenvector (k column $\boldsymbol{R}$) of the $\boldsymbol{L}_k$ 为n matrix 特征向量（k 行$\boldsymbol{L}$ 矩阵）。

现定义非线性双曲系统的AF演化算子。首先，确定一组预测特征脚点位置：

$$x_0^{lk}=x-\frac{\lambda_l+\lambda_k}{2}\Delta t\,,l,k=1,m \tag{21}$$

接下来，确定预测 edictor values:

$$\boldsymbol{U}^{(l)}(t^{n+1},x)=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\left(t^n,x_0^{lk}\right)\,,l=1,m \tag{22}$$

其中，$\boldsymbol{I_k}$ 是一个 $\mathrm{atrix}\,\boldsymbol{I}_k(k,k)=1$。这就中将矩阵 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{L}$ 称为与该系统的 k^{th} 特征值相关联的投影矩阵。

令 $\boldsymbol{L}^*$、 $\boldsymbol{R}^*$、 $\boldsymbol{\Lambda}^*$ 分别为左特征向量和右特征向量'矩阵以及特征值，其中每个特征值及其对应的特征向量均使用不同的预测值进行计算（例如 $\lambda_1^*=\lambda_1^*(\boldsymbol{U}^{(1)})$、$\lambda_2^*=\lambda_2^*(\boldsymbol{U}^{(2)})$、$\boldsymbol{R}_1^*=\boldsymbol{R}_1^*(\boldsymbol{U}^{(1)})$，依此类推）。

校正步骤中特征脚点的位置为：

$$x_0^k=x-\lambda_k^*\Delta t\,,k=1,m \tag{23}$$

最后，校正器值 es are:

$$\boldsymbol{U}(t^{n+1},x)=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{R}_k^*\,\boldsymbol{L}_k^*\boldsymbol{U}\left(t^n,x_0^k\right) \tag{24}$$

针对 Burgers方程的 AF格式与前文介绍的算法相似，但存在一些差异。第一个差异是，重构（5）针对每个变量独立进行。第二个差异是，使用（21）—（24）更新单元边界上的点值 $\boldsymbol{U}(t^{n+1},x_{i+1/2})$ 和 $\boldsymbol{U}(t^{n+1/2},x_{i+1/2})$。

3.3. Sod激波管问题

利用广为人知的Sod激波管问题（Sod，1978年）研究AF格式对欧拉方程的性能。考虑 $x\in[-1\,,1]$ 以及以下（无量纲）初始条件：

$$\begin{cases}\rho=1\,,p=1,u=0\;for\;x\le 0\\ \rho=0.125\,,p=0.1\,,u=0\;for\;x>0\end{cases} \tag{25}$$

数值模拟采用库朗数 $Cou=0.7$，计算至（无量纲）最大时间 $t=0.4$。图3展示了AF格式结果与该问题精确解之间的比较。可以看出，AF格式能够毫不费力地捕捉不连续解。虽然存在一些轻微振荡，但必须记住，图3所示结果是在未采用任何限制或耗散的情况下获得的。在AF背景下，Maeng（2017）和Barsukow（2021）已对限制进行了研究，但要找到一种遵循AF格式理念（简单、紧凑、由物理驱动）的合适限制器，仍是一个有待解决的研究问题。尽管如此，如此处所示，即使不采用任何限制，也能获得良好的结果。

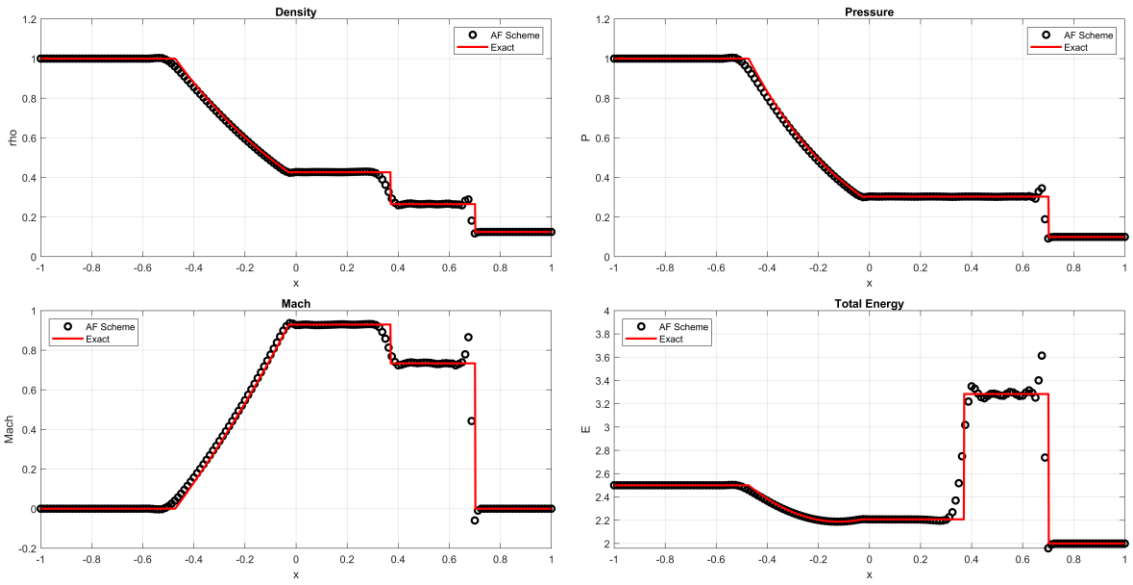


图3. 欧拉方程的Sod激波管问题。在$\boldsymbol{t=0}$处获得解。 **4** 采用$\boldsymbol{N=80}$ 个网格单元和$\boldsymbol{\sigma=0}$。 **7**。绘制的结果同时包括边界点值和单元平均值。

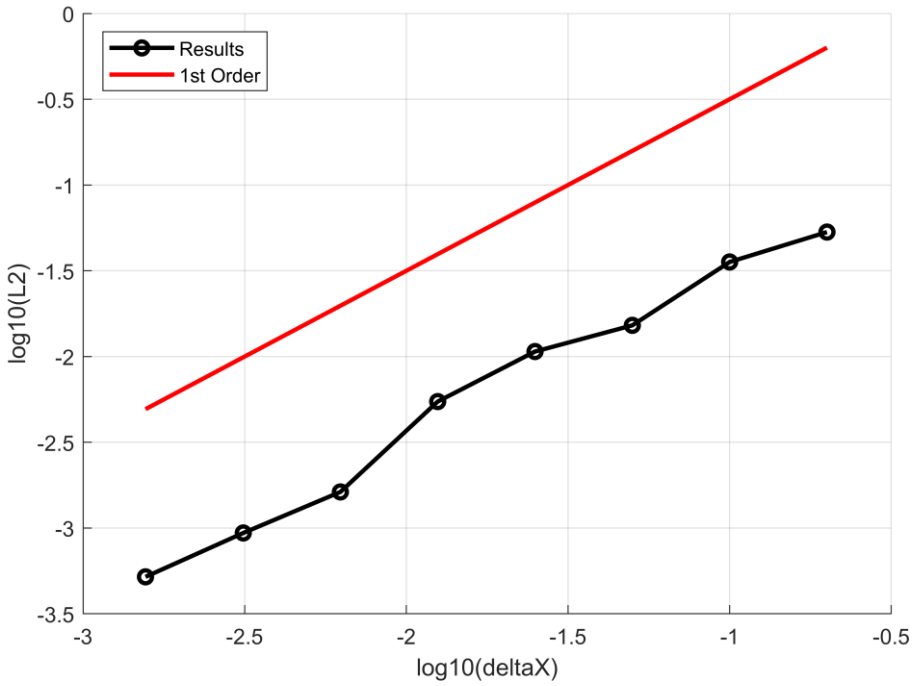


图4. 欧拉方程解的收敛阶。 **4** 通过相对于精确解的$\boldsymbol{L2}$ 误差测得$\boldsymbol{t = 0}$。图中还给出了对应于**1st** 阶的直线以供参考。

接下来，检查收敛阶。计算了不断提高网格密度时解与精确解之间的密度误差$L2$ 范数，计算时间为 $t = 0.4$，并将结果绘制于图4中。最粗网格层级包含 $N = 5$ 个单元，随后每个网格层级的单元数量加倍。正如预期的那样，当解中存在移动间断时，该格式的精度阶会降低；对于此测试案例，AF格式以一阶精度收敛。

4. 扩散与源项的处理

AF格式处理扩散方程的能力，是其应用于纳维-斯托克斯系统的关键一步。Nishikawa等（2014）以及Nishikawa和Roe（2016）的研究已经开发出一种AF格式，并将其应用于扩散方程。本文采用的格式与上述作者使用的格式有所不同，但保留了扩散方程的一阶双曲系统形式。该形式由Nishikawa（2007）提出，并且当弛豫时间趋于零时，与扩散方程等价。

4.1. 扩散方程的双曲型 formulation

考虑一维扩散方程：

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial x}\right) \tag{26}$$

其中，ν 是一个（通常较小的）ifusion coefficien

转化为 Nishikawa（2007）的双曲系统表述：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}-\dfrac{\partial P}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial P}{\partial t}-\dfrac{\nu}{T}\dfrac{\partial U}{\partial x}=-\dfrac{\nu}{T}\dfrac{P}{\nu}\end{cases} \tag{27}$$

这里，$P=\nu\partial U/\partial x$ 且 T 系统（27）在弛豫时间趋于零的极限下等价于（26）。对于 the relaxation time. If
稳态解，可以选择较大的 T，但对于时间精确非定常解，必须谨慎选择 T，并使其足够小。为获得最佳结果，建议采用双时间步进方法（Mazaheri 和 Nishikawa，2014）。式（27）的优点在于系统具有双曲性，这意味着为对流主导现象开发的 AF 格式也可以扩展应用于扩散问题。其缺点是需要处理由较小弛豫时间 T 引起的刚性源项。

系统（27）可以写成典型的守恒律形式（带源项的守恒律）：

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}=\boldsymbol{PS} \tag{28}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 起到预条件器的作用，ioning matrix.

各项如下：

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}U\\P\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-P\\-U\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0\\-\dfrac{P}{\nu}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\dfrac{\nu}{T}\end{bmatrix} \tag{29}$$

为便于说明　tation, the following variable is introduced:

$$a_v=\sqrt{\frac{\nu}{T}} \tag{30}$$

此外，为便于获取验证解，还需添加一个额外的源项 S_1，其确切形式在应用阶段定义：

ons to take

$$\boldsymbol{PS}=\begin{bmatrix}S_1\\-\dfrac{P}{T}\end{bmatrix} \tag{31}$$

特征值和特征向量系统可以毫无困难地确定：s

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}a_v&0\\0&-a_v\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&1\\-a_v&a_v\end{bmatrix}\quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2a_v}\\\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2a_v}\end{bmatrix} \tag{32}$$

公式 (21)–(24) 中定义的 ion of sufficient to apply the AF predictor
和 (32) 中定义的矩阵正是应用 AF 预测器公式求解之前，还必须考虑源项。

4.2. 带源项的演化算子

首先，必须将源项纳入边界点值的演化算子中。在将公式 (28) 左乘 $\boldsymbol{L}$ 并定义特征变量为$\mathbf{W} = \boldsymbol{LU}$后，可得到特征系统：

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \boldsymbol{S^w} \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{S^w} = \boldsymbol{LPS}$。

由于扩散系统是线性的，特征变量可以显式确定：

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{U}{2} - \dfrac{P}{2a_v} \\ \dfrac{U}{2} + \dfrac{P}{2a_v} \end{bmatrix} \tag{34}$$

特征变量的值 W_k n 可通过沿特征曲线 characteristic variables $x - \lambda_k \Delta t$ 对常微分方程 $dW_k/dt = S_k^w$ 积分一个时间步长而获得：

$$\int_{W_k(t^n, x-\lambda_k \Delta t)}^{W_k(t^{n+1}, x)} \frac{dW_k}{S_k^w(W_1, W_2)} = \Delta t \, , k = 1,2 \tag{35}$$

可以看出，S_k^w 是 riables W_k is a function of the characteristic va

$$\boldsymbol{S^w} = \begin{bmatrix} \dfrac{S_1}{2} - \dfrac{P}{2a_v T} \\ \dfrac{S_1}{2} + \dfrac{P}{2a_v T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{S_1}{2} + \dfrac{1}{2T}(W_1 - W_2) \\ \dfrac{S_1}{2} + \dfrac{1}{2T}(W_2 - W_1) \end{bmatrix} \tag{36}$$

可以为特征变量得到一个精确的演化方程 analytically determine the integral in (35) and

$$\begin{aligned} W_1(t^{n+1}, x) &= W_1(t^n, x - \lambda_k \Delta t) e^{\frac{\Delta t}{2T}} + \left(1 - e^{\frac{\Delta t}{2T}}\right)(W_2(t^n, x) - S_1 T) \\ W_2(t^{n+1}, x) &= W_2(t^n, x - \lambda_k \Delta t) e^{\frac{\Delta t}{2T}} + \left(1 - e^{\frac{\Delta t}{2T}}\right)(W_1(t^n, x) - S_1 T) \end{aligned} \tag{37}$$

单独进行。可能不适用于非线性方程组，因为特征变量只能在更一般的意义下定义 above approach in which each characteristic equation is integrat $\partial \mathbf{W}$，并且特征值是所有特征变量的函数。

作为一种更通用替代方法的起点，某点处的特征变量由特征曲线的脚点处的特征变量值C^k 加上源项S_k^w 在特征曲线脚点与所关注点之间经过一个时间步长的积分效应得到。这个起点仍然针对每个特征方程分别处理，但接下来的步骤将依赖于对预测-校正格式的修改；事实证明，该格式对于不含源项的方程效果良好。我们有：

$$\partial W_k(t^{n+1},x) = \partial W_k(t^n, x-\lambda_k\Delta t) + \int_0^{\Delta t} S_k^w dt \ , k = 1,2 \tag{38}$$

利用积分变量变换，可将积分转换为空间上的积分，并且知道沿着特征曲线 $x-\lambda_k t = constant$：

$$\partial W_k(t^{n+1},x) = \partial W_k(t^n, x-\lambda_k\Delta t) + \int_{x-\lambda_k\Delta t}^{x} \frac{S_k^w(t^n,x)}{\lambda_k} dx \ , k = 1,2 \tag{39}$$

例如，采用辛普森 1/3 求积可实现 3 阶精度。对于非线性方程组，积分下的特征值必须在适当的时间和坐标处计算：

$$\begin{aligned}&\int_{x-\lambda_k\Delta t}^{x} S_k^w(t^n,x)dx \\ &\cong \frac{\lambda_k(t^n,x-\lambda_k\Delta t)\Delta t}{6}\left(\frac{S_k^w(t^n,x-\lambda_k\Delta t)}{\lambda_k(t^n,x-\lambda_k\Delta t)} + 4\frac{S_k^w\left(t^n,x-\lambda_k\frac{\Delta t}{2}\right)}{\lambda_k\left(t^n,x-\lambda_k\frac{\Delta t}{2}\right)} + \frac{S_k^w(t^n,x)}{\lambda_k(t^n,x)}\right)\end{aligned} \tag{40}$$

Where $\lambda_k(t^n,x-\lambda_k\Delta t)$ $\lambda_k(W_1(t^n,x-\lambda_k\Delta t), W_2(t^n,x-\lambda_k\Delta t), \dots)$，其他项同理。

有了起点后，可得：

$$\begin{aligned}\partial \boldsymbol{U}(t^{n+1},x) &= \boldsymbol{L}^{-1}\partial \mathbf{W}(t^{n+1},x) = \boldsymbol{R}\partial \mathbf{W}(t^{n+1},x) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}_k\, \partial W_k(t^{n+1},x) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}_k \left[\partial W_k(t^n,x-\lambda_k\Delta t) + \int_{x-\lambda_k\Delta t}^{x} \frac{S_k^w}{\lambda_k} dx\right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}_k \Bigg[\partial W_k(t^n,x-\lambda_k\Delta t) \\ &\quad + \frac{\lambda_k\Delta t}{6}\left(\frac{S_k^w(t^n,x-\lambda_k\Delta t)}{\lambda_k(t^n,x-\lambda_k\Delta t)} + 4\frac{S_k^w\left(t^n,x-\lambda_k\frac{\Delta t}{2}\right)}{\lambda_k\left(t^n,x-\lambda_k\frac{\Delta t}{2}\right)} + \frac{S_k^w(t^n,x)}{\lambda_k(t^n,x)}\right)\Bigg] \\ &= \sum_{k=1}^{m}\Bigg[\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{L}_k\partial \boldsymbol{U}(t^n,x-\lambda_k\Delta t) + \frac{\lambda_k\Delta t}{6}\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{Q}(t^n,x-\lambda_k\Delta t) \\ &\quad + \frac{2\lambda_k\Delta t}{3}\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{Q}\left(t^n,x-\lambda_k\frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\lambda_k\Delta t}{6}\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{Q}(t^n,x)\Bigg]\end{aligned} \tag{41}$$

在上述 $Q_k = S_k/\lambda_k$ 中，the notation was introduced.

(21)–(24) 中定义的 AF 预测-校正演化算子现在可以更新，以考虑源项。首先，确定一组预测特征脚点位置：

$$x_0^{lk} = x - \frac{\lambda_l + \lambda_k}{2}\Delta t\,, l,k = 1,m$$
$$x2_0^{lk} = x - \frac{\lambda_l + \lambda_k}{2}\frac{\Delta t}{2}\,, l,k = 1,m \tag{42}$$

接下来，确定 p　　redictor values:

$$\boldsymbol{U}^{(l)}(t^{n+1},x) = \sum_{k=1}^{m}\left[\boldsymbol{RI}_k\boldsymbol{LU}\left(t^n,x_0^{lk}\right) + \frac{\lambda_k\Delta t}{6}\boldsymbol{RI}_k\boldsymbol{LQ}\left(t^n,x_0^{lk}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2\lambda_k\Delta t}{3}\boldsymbol{RI}_k\boldsymbol{LQ}\left(t^n,x2_0^{lk}\right) + \frac{\lambda_k\Delta t}{6}\boldsymbol{RI}_k\boldsymbol{LQ}(t^n,x)\right]\,, l = 1,m \tag{43}$$

校正器　ctor step characteristic foot locations are:

$$x_0^k = x - \lambda_k^*\Delta t\,, k = 1,m$$
$$x2_0^k = x - \lambda_k^*\frac{\Delta t}{2}\,, k = 1,m \tag{44}$$

最后，校正器的值　　es are:

$$\boldsymbol{U}(t^{n+1},x) = \left[\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{R}_k^*\,\boldsymbol{L}_k^*\boldsymbol{U}\left(t^n,x_0^k\right) + \frac{\lambda_k^*\Delta t}{6}\boldsymbol{R}_k^*\boldsymbol{L}_k^*\boldsymbol{Q}\left(t^n,x_0^k\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2\lambda_k^*\Delta t}{3}\boldsymbol{R}_k^*\boldsymbol{L}_k^*\boldsymbol{Q}\left(t^n,x2_0^k\right) + \frac{\lambda_k^*\Delta t}{6}\boldsymbol{R}_k^*\boldsymbol{L}_k^*\boldsymbol{Q}(t^n,x)\right] \tag{45}$$

4.3. 包含　**on of source term in conservative update**

为计入源项，必须更新的第二个方面是网格单元平均守恒律。其写法如下：

$$\overline{\boldsymbol{U}}_i^{n+1} - \overline{\boldsymbol{U}}_i^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{\boldsymbol{F}}\left(x_{i+1/2}\right) - \overline{\boldsymbol{F}}\left(x_{i-1/2}\right)\right) + \frac{1}{\Delta x}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\boldsymbol{S}dx\,dt \tag{46}$$

采用辛普森三分之一求积公式并非可行选项，因为可用的求积点不足。approximate the integrals is not a 更具体地说，目前仅已知当前时间 $\overline{\boldsymbol{U}}_i^n$ 的网格单元平均值，而未知 $\overline{\boldsymbol{U}}_i^{n+1/2}$ 或 $\overline{\boldsymbol{U}}_i^{n+1}$ 时刻的值，尽管辛普森公式要求这些值。

不过，可以定义一种重构，以利用所有可用的网格单元数据，包括网格单元边界 $\boldsymbol{U}(t^{n+1},x_{i+1/2})$、$\boldsymbol{U}(t^{n+1/2},x_{i+1/2})$ 等处更新后的值。这样，用于源项的重构将不同于用于该格式其他方面的重构（5）。

还必须提到，式（46）中的源项是线性的：

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\boldsymbol{S}dx\,dt = \boldsymbol{K}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\boldsymbol{U}dx\,dt \tag{47}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为一个 con　stant term.

Th该重构由 Barsukow 等（2021）获得，并且得到一个　　s:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U dx\, dt$$
$$= \Delta x \Delta t \left(\bar{U}_i^n + \frac{1}{12} U_{i-1/2}^{n+1} + \frac{1}{3} U_{i-1/2}^{n+1/2} - \frac{5}{12} U_{i-1/2}^n + \frac{1}{12} U_{i+1/2}^{n+1} \right. \tag{48}$$
$$\left. + \frac{1}{3} U_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{5}{12} U_{i+1/2}^n \right)$$

通过使用（48）和（47），可以在守恒更新（46）中使用之前确定每个网格单元中的源项值。

4.4. 通过双时间步进进行时间精确计算

如前所述，在弛豫时间趋于零的极限情况下，双曲型系统（27）等价于扩散方程（26）。在双时间格式中，可以通过在每个物理时间步内将（27）收敛至稳态解来实现这一点（Jameson，1991）。

考虑守恒律 (28) 使用以下后向差分公式对时间导数进行离散化：

$$\frac{\alpha}{\Delta t} \bar{\boldsymbol{U}}_i^{n+1} + \frac{\beta}{\Delta t} \bar{\boldsymbol{U}}_i^n + \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{\boldsymbol{U}}_i^{n-1} + \frac{\delta}{\Delta t} \bar{\boldsymbol{U}}_i^{n-2}$$
$$= -\frac{1}{\Delta x} \left(\bar{\boldsymbol{F}}(x_{i+1/2}) - \bar{\boldsymbol{F}}(x_{i-1/2}) \right) + \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \boldsymbol{S} dx\, dt \tag{49}$$

一阶ৎι er accurate in time formula has:

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0 \tag{50}$$

一种二阶精度的 ate in time formula has:

$$\alpha = 3/2, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 1/2, \quad \delta = 0 \tag{51}$$

三阶精度的 ate in time formula has:

$$\alpha = 11/6, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 3/2, \quad \delta = -1/3 \tag{52}$$

遵循 Jame son (1991), define the modified residual as:

$$\boldsymbol{R}^* = -\frac{1}{\Delta x} \left(\bar{\boldsymbol{F}}(x_{i+1/2}) - \bar{\boldsymbol{F}}(x_{i-1/2}) \right) + \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \boldsymbol{S} dx\, dt - \frac{\beta}{\Delta t} \bar{\boldsymbol{U}}_i^n - \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{\boldsymbol{U}}_i^{n-1} \tag{53}$$
$$- \frac{\delta}{\Delta t} \bar{\boldsymbol{U}}_i^{n-2}$$

The dual time problem is formulated as:

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{U}}_i}{d\tau} = -\frac{\alpha}{\Delta t} \bar{\boldsymbol{U}}_i + \boldsymbol{R}^* \tag{54}$$

现在可以使用双时间步长 $\Delta\tau$ ied towards steady 进行时间推进。在向稳态进行双时间推进的过程中，由物理时间导数离散化产生的各项保持不变。此外，如果采用显式双时间格式，则必须对式（54）右端的第一项进行隐式离散化，以确保足够的稳定性：

$$\bar{\boldsymbol{U}}_i^{k+1} - \bar{\boldsymbol{U}}_i^{k} = -\frac{\alpha\Delta\tau}{\Delta t}\bar{\boldsymbol{U}}_i^{k+1} + \Delta\tau\boldsymbol{R}^* \tag{55}$$

一旦双时间推进达到稳态，即可获得下一个物理时间步的解：

$$\bar{\boldsymbol{U}}_i^{n+1} = \bar{\boldsymbol{U}}_i^{k+1} \tag{56}$$

4.5. 边界条件

在 AF 方法中，与许多有限体积求解器一样，最方便的方法可能是让求解器使用（11）确定穿过计算域边界的数值通量。假设 $N = 1$ 是与区域左侧相邻的第一个单元，则可以在虚拟幽灵单元 $N = 0$ 中指定原始变量或守恒变量的狄利克雷边界条件，穿过边界的通量为：

$$F_{1/2} = \frac{\Delta t}{6}\left(F\left(U\left(t^n, x_{1/2}\right)\right) + 4F\left(U\left(t^{n+1/2}, x_{1/2}\right)\right) + F\left(U\left(t^{n+1}, x_{1/2}\right)\right)\right) \tag{57}$$

where x_1 is the coordinate of the first cell centre, and $x_{1/2}$ and $x_{3/2}$ are the 第一个单元左右面的坐标。

要使用（57），必须在边界面上推进守恒变量。然而，当方程中存在源项时，只能将其贡献从物理域内部的点加入。

扩散方程的特征值为：

$$\begin{bmatrix} a_v \\ -a_v \end{bmatrix} \tag{58}$$

第一个特征值为正，与之相关的特征曲线将从左边界 $x_{1/2}$ 进入区域。第二个特征值为负，其相关的特征曲线将在同一边界离开区域。

第一个特征变量沿相应的特征曲线保持不变。由于该特征曲线将区域外部（来自幽灵单元）的信息带入，因此不应包含源项的影响，得到：

$$W_1\left(t^{n+1}, x_{1/2}\right) = W_1\left(t^n, x_{1/2} - \lambda_1\Delta t\right) \tag{59}$$

或者，明确写为：

$$\frac{U_{1/2}^{n+1}}{2} - \frac{P_{1/2}^{n+1}}{2a_v} = \frac{U_0}{2} - \frac{P_0}{2a_v} \tag{60}$$

这里，通过 U_0 和 P_0，我们定义幽灵单元内的值，并假设这些值在时间上保持不变，且通过狄利克雷边界条件给出。

第二条特征曲线将区域内部的信息带入，因此必须包含源项的影响：

$$W_2\left(t^{n+1}, x_{1/2}\right) = W_2\left(t^n, x_{1/2} - \lambda_2\Delta t\right) + \int_{x_{1/2}-\lambda_2\Delta t}^{x_{1/2}} \frac{S_2^w(t^n, x)}{\lambda_2}dx \tag{61}$$

区域中第一个单元的积分，为便于表示，记作：

gral can be determined as explained previously, using data f

$$\int_{x_{1/2}-\lambda_k\Delta t}^{x_{1/2}} \frac{S_2^w(t^n,x)}{\lambda_2}dx = I_2 \tag{62}$$

那么，

$$\frac{U_{1/2}^{n+1}}{2} + \frac{P_{1/2}^{n+1}}{2a_v} = \frac{U_d}{2} - \frac{P_d}{2a_v} + I_2 \tag{63}$$

这里， U_d 和 P_d 是利用时间层级t^n的数据，在特征曲线$d = x_{1/2} - \lambda_2\Delta t$的起点处进行的 U P 构造。

方程（60）和（63）可用于求解边界 $x_{1/2}$上的守恒变量值：

$$\begin{aligned} P_{1/2}^{n+1} &= \frac{1}{2}(P_d + P_0) + \frac{a_v}{2}(U_d - U_0) + a_v I_2 \\ U_{1/2}^{n+1} &= U_0 + \frac{1}{a_v}\left(P_{1/2}^{n+1} - P_0\right) \end{aligned} \tag{64}$$

确定 y 后，即可利用（57）计算通过边界的通量。

对于区域的右边界$x_{N+1/2}$，采用类似的方法。已知在右边界处，第一条特征曲线离开区域，而第二条特征曲线从提供狄利克雷边界条件的幽灵单元$N+1$ 进入区域，因此可得到以下该边界上的守恒变量值方程：

$$\begin{aligned} P_{N+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{2}(P_d + P_0) - \frac{a_v}{2}(U_d - U_0) - a_v I_1 \\ U_{N+1/2}^{n+1} &= U_0 - \frac{1}{a_v}\left(P_{N+1/2}^{n+1} - P_0\right) \end{aligned} \tag{65}$$

4.6. 应用 to the diffusion equation

定义了 AF格式的所有要素后，可以考虑一个非定常算例。对于扩散方程（28），考虑以下附加源项：

$$S_1 = 0.1e^{0.05x} \tag{66}$$

该方程在 $x \in [-3\pi/2、\ 3\pi/2]$ 中求解，其中 $\nu = 0.01$。Dirichlet 边界条件为： ndary

$$\begin{aligned} U(t,-3\pi/2) &= 0.1e^{-0.05\frac{3\pi}{2}} \\ U(t,3\pi/2) &= 0.1e^{0.05\frac{3\pi}{2}} \end{aligned} \tag{67}$$

初始条件为 s:

$$U(0,x) = \cos x \tag{68}$$

按照Nishikawa（2007）的做法，relaxation time设为$\tau = L^2/\nu$， $L = 1/2\pi$数值模拟采用$N = 25$ The 网格单元进行，物理时间步长为$\Delta t = 0$。$1\ s$，双时间库朗数为$\sigma = 0.9$，双时间稳态收敛判据为10^{-10}。模拟运行至总物理时间$20\ s$。

图5对比了AF格式的结果与采用空间四阶精度、时间三阶精度的有限差分（FD）解对同一问题所得的结果，该有限差分解在$N = 2560$ 网格点上运行。有限差分解被作为替代的“精确”解，并在处计算AF解在网格密度增加时与FD解之间的$L2$ 误差范数，结果绘于图6中。最粗网格层级包含$N = 5$ 个单元，随后每个网格层级的单元数加倍。可以观察到，对于扩散方程，AF格式以三阶精度实现了收敛。

5. 纳维–斯托克斯方程求解进展

一维纳维–斯托克斯方程具有以下形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = \mathbf{0} \tag{69}$$

各项分别为：

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau \\ \rho u H - \tau u + q \end{bmatrix} \tag{70}$$

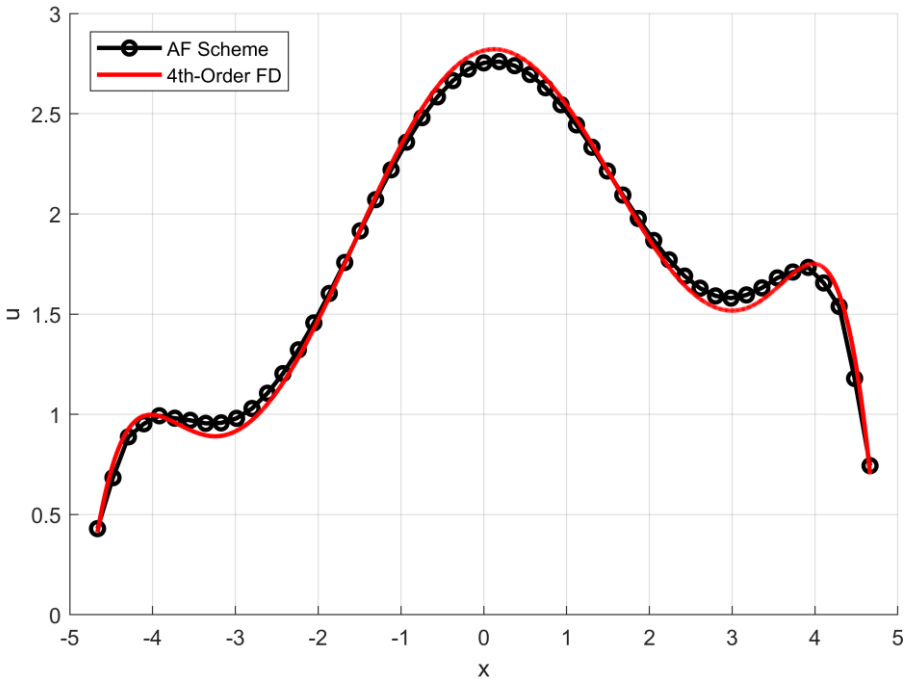


图5. 使用AF和四阶FD，通过扩散方程的双曲系统形式获得的非定常解。AF的绘图结果同时包括边界点值和单元平均值。

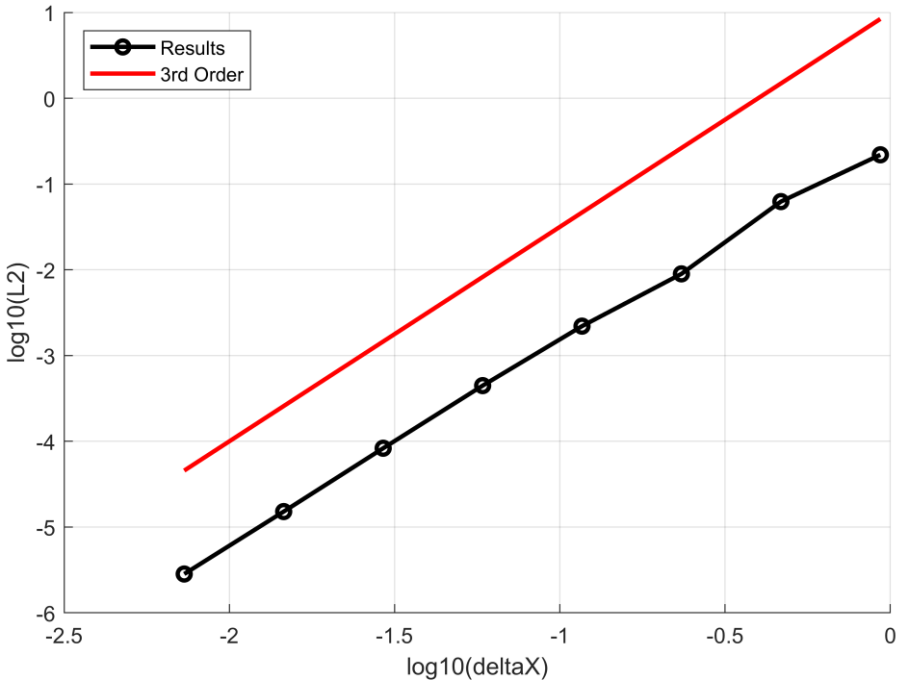


图6. 通过相对于有限差分解的$L2$ 误差，测得扩散方程双曲系统形式的非定常解的收敛阶。图中以一条对应于3^{rd} 阶的直线作为参考。

其中：

$$\tau = \frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$q = -\frac{\gamma\mu}{Pr(\gamma-1)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{71}$$

其中，ρ 为密度，u 为速度，E 为比总能，p 为压力，H 为比总焓，τ 为黏性应力，q 为热流。假设流体还满足理想气体状态方程，该方程可方便地写为$p = (\gamma-1)(\rho E - \rho u^2/2)$，其中$\gamma$ 为比热比；对于空气，其值为$\gamma = 1.4$。假设动力黏度μ 仅为温度的函数，通常通过 Sutherland's定律表示；空气的普朗特数为$Pr = 0.72$。

5.1. 纳维–斯托克斯方程的双曲型 formulation

与扩散方程所采用的方法类似，纳维–斯托克斯方程被重构为一阶双曲系统。该双曲型 formulation 采用的是 Nishikawa （ 2011 ）的方法。

Let:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\mu_v}{T_v}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\tau}{T_v}$$
$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\mu_h}{T_h}\frac{1}{\gamma-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{q}{T_h} \tag{72}$$

其中 $\mu_v = 4\mu/3$、 $\mu_h = \gamma\mu/Pr$，而 T_v 和 T_h 是弛豫时间。正如前文针对扩散方程所讨论的，在弛豫时间趋于零的极限下，双曲型重构等价于式（70）。

该双曲型化纳维–斯托克斯方程具有以下形式 pe:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = \boldsymbol{PS} \tag{73}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 起到预条件 ioning matrix.

各项如下：

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \\ \tau \\ q \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tau \\ \rho u H - \tau u + q \\ -u \\ \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\tau}{\mu_V} \\ -\frac{q}{\mu_H} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_v}{T_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h}{T_h} \end{bmatrix} \tag{74}$$

显然，首要任务是计算雅可比矩阵 $\boldsymbol{A} = \partial \boldsymbol{F}/\partial \boldsymbol{U}$ 的特征值和特征向量。Nishikawa（2011）以及后续关于该主题的研究（例如 Li 等，2018）均未分析完整的雅可比矩阵。事实上，为该系统完整雅可比矩阵的特征值确定解析解至今仍然十分困难。不过，为使论述完整，现将一些相关说明列于此处，并希望未来能开展进一步研究。

5.2. 雅可比矩阵特征值

守恒变量下的雅可比矩阵为：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma - 3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma - 1 & -1 & 0 \\ -\gamma u E + (\gamma - 1)u^3 + \frac{u\tau}{\rho} & \gamma E - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 - \frac{\tau}{\rho} & \gamma u & -u & 1 \\ a_v^2 u & -a_v^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_h^2(u^2 - E) & -a_h^2 u & a_h^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{75}$$

In primitive variables it is:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \rho a^2 - (\gamma - 1)\tau & u & 0 & \gamma - 1 \\ 0 & -\rho a_v^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_h^2 a^2}{\gamma(\gamma - 1)} & 0 & \frac{a_h^2}{\gamma - 1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{76}$$

引入 a being the speed of sound, $\boldsymbol{Q} = [\rho, u, p, \tau, q]^T$ 变量和以下符号：being the primitive

$$a_v = \sqrt{\frac{\mu_v/\rho}{T_v}} = \sqrt{\frac{\nu_v}{T_v}} \quad a_h = \sqrt{\frac{\mu_h/\rho}{T_h}} = \sqrt{\frac{\nu_h}{T_h}} \tag{77}$$

可以获得原始雅可比矩阵 tain the characteristic polynomial of the pr

$$|\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$$
$$(u-\lambda)c_1 + \lambda(u-\lambda)^2 c_2 + \lambda c_3 + \lambda^2(u-\lambda)^3 - \lambda^2(u-\lambda)c_4 = 0 \tag{78}$$

该变量 ious terms are:

$$c_1 = a_v^2 a_h^2$$
$$c_2 = a_h^2 + a_v^2$$
$$c_3 = -\frac{a_h^2 a^2}{\gamma} \tag{79}$$
$$c_4 = a^2 - (\gamma - 1)\frac{\tau}{\rho}$$

到目前为止，尝试求解式（78）根的任何努力都未能成功。假设采用双时间方法，其中弛豫时间可以按照扩散方程相关工作的方式定义，$T_v = L^2/\nu_v$ 和 $T_h = L^2/\nu_h, L = 1/2\pi$，对式（76）进行数量级分析表明，项$-\rho a_v^2$和$a_h^2/(\gamma - 1)$均为 o$(10^{-10})$，与雅可比矩阵中的其他所有项相比至少低 4 个数量级。

忽略这两项后，特征多项式可简化为：

$$\lambda((u-\lambda)^2 c_2 + c_3 + \lambda(u-\lambda)^3 - \lambda(u-\lambda)c_4) = 0 \tag{80}$$

现在，可以解析地确定剩余四次多项式中的一个（例如，使用 Ferrari 解法）。计算过程极其繁琐，而且将所得特征值与式（78）的数值解进行比较时，可以观察到一些差异。

图 7 和图 8 比较了简化后的特征多项式（80）与完整多项式（78）。图 7 的结果对应于一般的超声速流，其中 $u/a_\infty = 1.61$ 且 $p/(\rho_\infty a_\infty^2) = 4.51$；图 8 的结果对应于一般的亚声速流，其中 $u/a_\infty = 0.82$ 且 $p/(\rho_\infty a_\infty^2) = 10.1$。结果表明，无论所考虑的流动情形如何，特征多项式根之间的匹配程度都不是恒定的。此外，即使使用特征多项式（78），通过适当的求根算法以数值方式确定多项式的根，其计算代价也高得无法在演化阶段用于 AF 方法，因此不能被视为任何接近可行的方法。因此，需要寻找一种替代使用完整雅可比矩阵（75）的方法。

尽管确定双曲型 Navier–Stokes 系统完整雅可比矩阵特征值的解析解仍然难以实现，但可以通过数值计算验证，至少在变量值的典型范围内，这些特征值为实数。虽然这并不能对该系统的双曲性给出决定性证明，但确实提供了有用的检验，并增强了继续推进该算法的信心。

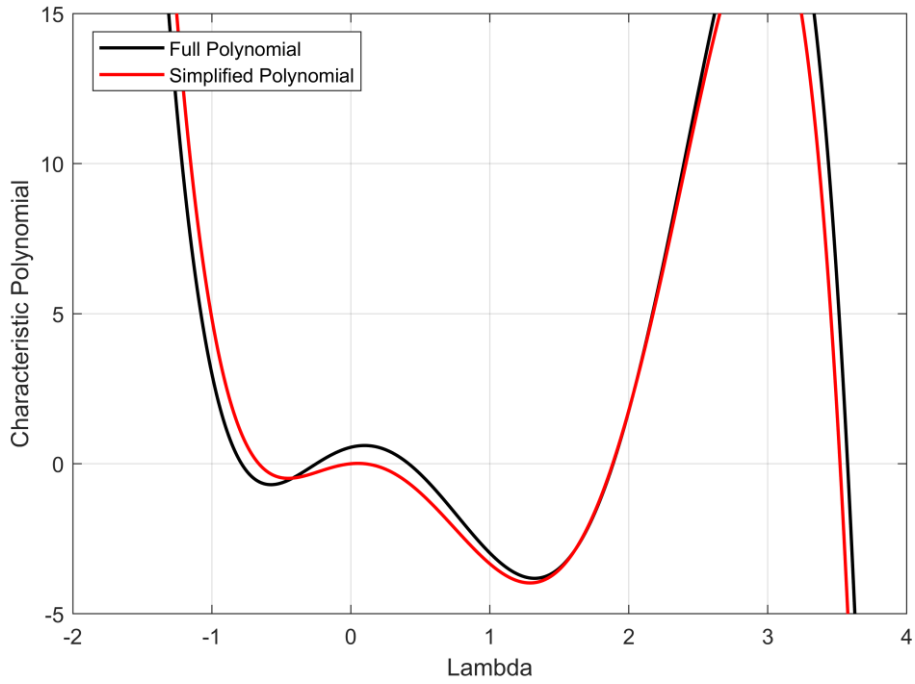


图 7. 一般超声速流动下双曲型纳维–斯托克斯方程的完整特征多项式及其简化形式。

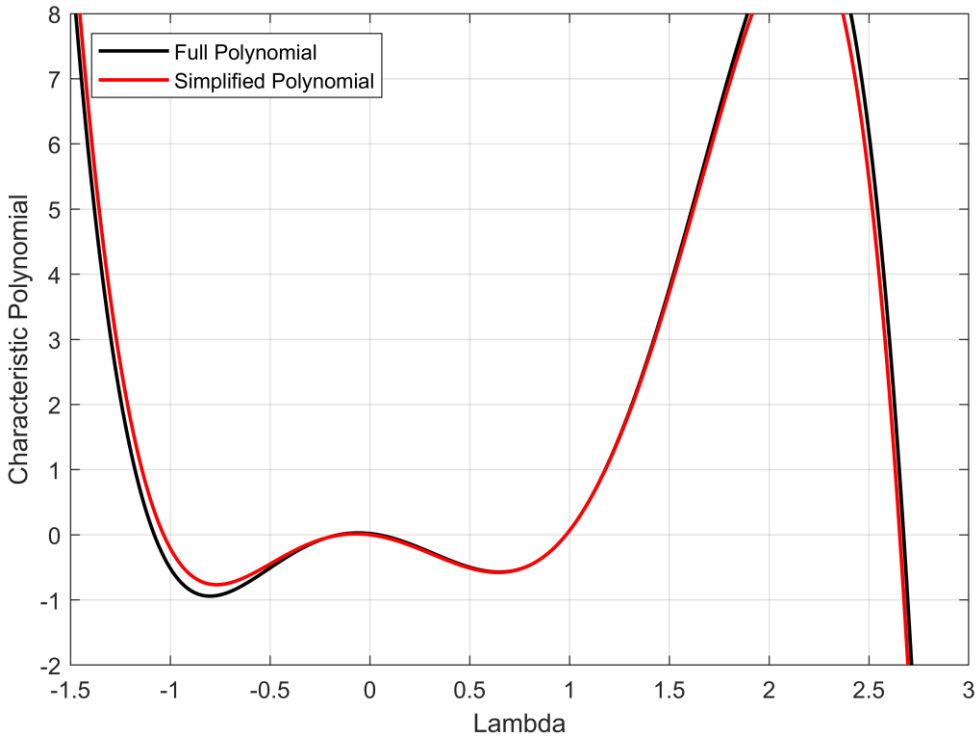


图 8. 一般亚声速流动下双曲型纳维–斯托克斯方程的完整特征多项式及其简化形式。

n　　对以下典型变量值范围进行了数值检验　　：

$$\begin{aligned}
&\frac{u}{a_\infty} \in [0,5]\\
&\frac{\mu}{\mu_\infty} \in [0.1,10]\\
&\frac{T}{T_\infty} \in [0.1,10]\\
&\frac{\rho}{\rho_\infty} \in [0.1,20]\\
&\frac{\tau}{\mu_\infty a_\infty / L_\infty} \in [-3,3]
\end{aligned} \tag{81}$$

对于每个变量，在上下限之间等距选取了 15 个值（linspace(a, b, 15)）。针对上述定义的变量值之间的所有可能组合，生成了系数 (79) 和特征多项式 (78)，最终得到接近 760,000 个不同的案例。对于每个案例，使用 MATLAB 计算伴随矩阵的特征值，从而确定多项式的根。经验证，在此处考虑的所有案例中，全部五个根均为实数。

5.3. 一种算子分裂方法

作为一种替代方案，本文考虑采用算子分裂方法。将通量向量分解为无黏性分量和黏性分量：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F^I} + \boldsymbol{F^V} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho u H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau \\ -\tau u + q \\ -u \\ \dfrac{1}{\gamma - 1}\dfrac{p}{\rho} \end{bmatrix} \tag{82}$$

因此，双曲型形式为mulation of the Navier-Stokes equations

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{F^I}}{\partial x} + \boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{F^V}}{\partial x} = \boldsymbol{PS} \tag{83}$$

将其分为两个不同的 p　roblems is written as:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{F^I}}{\partial x} = \boldsymbol{0}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{F^V}}{\partial x} = \boldsymbol{PS}
\end{aligned} \tag{84}$$

5.4. 无黏性流问题　　em

无黏性通量 $\boldsymbol{F^I}$ 是欧拉通量，扩展后增加了两个零项。无黏性雅可比矩阵 $\boldsymbol{P}\partial\boldsymbol{F^I}/\partial\boldsymbol{U}$ 的三个非零特征值和特征向量与欧拉方程的相同。式（74）中定义的预条件矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不影响无黏性特征值和特征向量，因为包含弛豫时间的对角项只与 $\boldsymbol{F^I}$的零元素相乘。

采用针对欧拉方程所提出的相同预测-校正格式，来演化单元边界上的点自由度：

$$
\begin{gathered}
x_0^{lk} = x - \frac{\lambda_l + \lambda_k}{2}\Delta t\ , l,k = 1,m \\
\boldsymbol{U}^{(l)}(t^{n+1},x) = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{U}\left(t^n, x_0^{lk}\right)\ , l = 1,m \\
x_0^k = x - \lambda_k^* \Delta t\ , k = 1,m \\
\boldsymbol{U}(t^{n+1},x) = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}_k^{\boldsymbol{I}^*} \boldsymbol{L}_k^{\boldsymbol{I}^*} \boldsymbol{U}\left(t^n, x_0^k\right)
\end{gathered}
\tag{85}
$$

网格单元平均值 e values at the new time level are obtained as:

$$
\overline{\boldsymbol{U}}_i^{n+1} - \overline{\boldsymbol{U}}_i^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\overline{\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{I}}}\left(x_{i+1/2}\right) - \overline{\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{I}}}\left(x_{i-1/2}\right)\right) \tag{86}
$$

守恒变量的边界条件在索引为 0 和 N + 1 的虚拟胞元单元中指定，其中区域首末边界面的变量值 $x_{1/2}$ 和$x_{N+1/2}$ 根据局部特征进行演化。欧拉方程的基于特征的边界条件得到了广泛应用（例如参见 Blazek (2015)）。

ons (Dirichlet or Neumann) for the primitive

5.5 黏性流动问题

黏性雅可比矩阵为:

$$
\boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{V}}}{\partial \boldsymbol{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{u\tau}{\rho} & -\dfrac{\tau}{\rho} & 0 & -u & 1 \\ a_v^2 u & -a_v^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_h^2(u^2 - E) & -a_h^2 u & a_h^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{87}
$$

特征值 of the viscous Jacobian are obtained as:

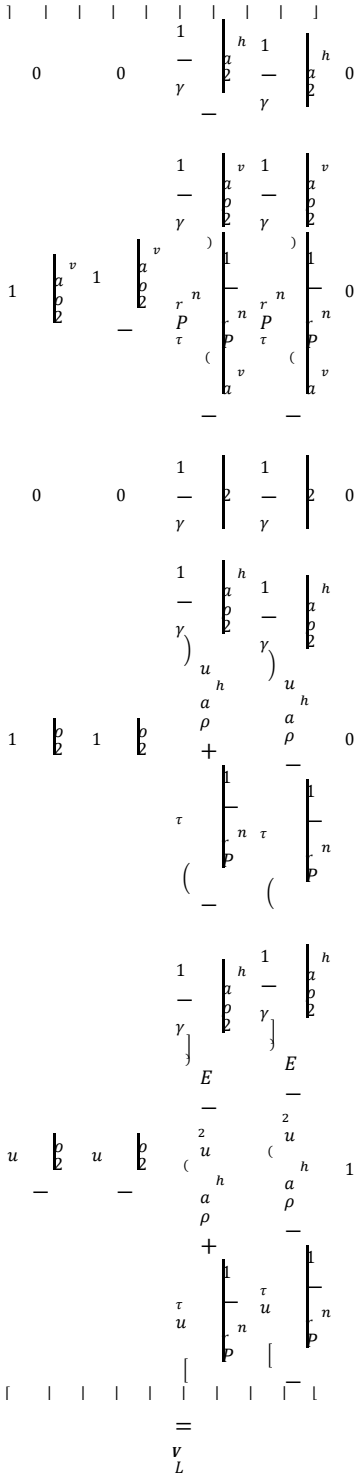
$$
\begin{gathered}
\lambda_{1,2} = \mp a_v \\
\lambda_{3,4} = \mp a_h \\
\lambda_5 = 0
\end{gathered}
\tag{88}
$$

以及相应的右特征 envectors:

$$
\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \rho & \rho & 0 & 0 & u \\ \rho u + \dfrac{\tau P r_n}{a_v(P r_n - 1)} & \rho u - \dfrac{\tau P r_n}{a_v(P r_n - 1)} & \dfrac{1}{\gamma - 1} & \dfrac{1}{\gamma - 1} & E \\ \rho a_v & -\rho a_v & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\tau}{P r_n - 1} & -\dfrac{\tau}{P r_n - 1} & -\dfrac{a_h}{\gamma - 1} & \dfrac{a_h}{\gamma - 1} & 0 \end{bmatrix} \tag{89}
$$

其中 $P r_n = a_v\ a_h^2 / \ ^2$.

左特征向量为:



(90)

现引入以下符号:

$$\tau_n = \frac{\tau}{Pr_n - 1} \quad b_h = \frac{\gamma - 1}{2\rho a_h} \quad b_\nu = \frac{\gamma - 1}{2\rho a_\nu} \quad a_p = \frac{\tau Pr_n}{a_\nu (Pr_n - 1)}$$
$$c^+ = u\tau_n + \rho a_h \left(\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{\gamma(\gamma - 1)}\right) \quad c^- = u\tau_n - \rho a_h \left(\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{\gamma(\gamma - 1)}\right) \tag{91}$$
$$\tau^+ = \tau_n + \rho a_h u \quad \tau^- = \tau_n - \rho a_h u$$

之后, 问题可写出:

$$\partial \boldsymbol{W}^{\boldsymbol{V}} = \begin{bmatrix} -\frac{u\partial\rho}{2\rho} + \frac{\partial u}{2\rho} + \frac{b_\nu \partial\tau}{\gamma - 1} \\ -\frac{u\partial\rho}{2\rho} + \frac{\partial u}{2\rho} - \frac{b_\nu \partial\tau}{\gamma - 1} \\ c^+ b_h \partial\rho - \tau^+ b_h \partial u + \frac{\gamma - 1}{2}\partial p - a_p b_\nu \partial\tau - \rho b_\nu \partial q \\ -c^- b_h \partial\rho + \tau^- b_h \partial u + \frac{\gamma - 1}{2}\partial p - a_p b_\nu \partial\tau + \rho b_\nu \partial q \\ \partial\rho \end{bmatrix} \tag{92}$$

采用针对双曲扩散方程所介绍的相同预测-校正格式进行演化:

$$x_0^{lk} = x - \frac{\lambda_l + \lambda_k}{2}\Delta t \,, l, k = 1, m$$
$$x2_0^{lk} = x - \frac{\lambda_l + \lambda_k}{2}\frac{\Delta t}{2} \,, l, k = 1, m$$
$$\boldsymbol{U}^{(l)}(t^{n+1}, x) = \sum_{k=1}^{m} \Big[\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{U}\big(t^n, x_0^{lk}\big) + \frac{\lambda_k \Delta t}{6} \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{Q}\big(t^n, x_0^{lk}\big)$$
$$+ \frac{2\lambda_k \Delta t}{3} \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{Q}\big(t^n, x2_0^{lk}\big) + \frac{\lambda_k \Delta t}{6} \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{I}_k \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{Q}(t^n, x)\Big] \,, l = 1, m \tag{93}$$
$$x_0^k = x - \lambda_k^* \Delta t \,, k = 1, m$$
$$x2_0^k = x - \lambda_k^* \frac{\Delta t}{2} \,, k = 1, m$$
$$\boldsymbol{U}(t^{n+1}, x) = \Bigg[\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}_k^{\boldsymbol{V}^*} \boldsymbol{L}_k^{\boldsymbol{V}^*} \boldsymbol{U}\big(t^n, x_0^k\big) + \frac{\lambda_k^* \Delta t}{6} \boldsymbol{R}_k^{\boldsymbol{V}^*} \boldsymbol{L}_k^{\boldsymbol{V}^*} \boldsymbol{Q}\big(t^n, x_0^k\big)$$
$$+ \frac{2\lambda_k^* \Delta t}{3} \boldsymbol{R}_k^{\boldsymbol{V}^*} \boldsymbol{L}_k^{\boldsymbol{V}^*} \boldsymbol{Q}\big(t^n, x2_0^k\big) + \frac{\lambda_k^* \Delta t}{6} \boldsymbol{R}_k^{\boldsymbol{V}^*} \boldsymbol{L}_k^{\boldsymbol{V}^*} \boldsymbol{Q}(t^n, x)\Bigg]$$

通过在一个物理时间步内将对偶时间问题收敛至稳态，可以获得新时间层的单元平均值:

$$\overline{\boldsymbol{U}}_i^{k+1} - \overline{\boldsymbol{U}}_i^k = -\frac{\alpha \Delta\tau}{\Delta t} \overline{\boldsymbol{U}}_i^{k+1} + \Delta\tau \boldsymbol{R}^*$$
$$\boldsymbol{R}^* = -\frac{1}{\Delta x}\Big(\overline{\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{V}}}\big(x_{i+1/2}\big) - \overline{\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{V}}}\big(x_{i-1/2}\big)\Big) + \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \boldsymbol{S} dx\, dt - \frac{\beta}{\Delta t} \overline{\boldsymbol{U}}_i^n \tag{94}$$
$$- \frac{\gamma}{\Delta t} \overline{\boldsymbol{U}}_i^{n-1} - \frac{\delta}{\Delta t} \overline{\boldsymbol{U}}_i^{n-2}$$

$$\bar{\boldsymbol{U}}_i^{n+1} = \bar{\boldsymbol{U}}_i^{k+1}$$

为实现边界网格单元，首先需要注意，第一和第三个特征值始终为负，而第二和第四个特征值始终为正。

与第二个和第四个特征值相关的特征曲线将在左边界 $x_{1/2}$处进入区域。由于这些特征曲线将区域外部（来自幽灵单元）的信息带入，因此不应包含源项的影响，得到：

$$\begin{aligned} \partial W_2\left(t^{n+1}, x_{1/2}\right) &= \partial W_2\left(t^n, x_{1/2} - \lambda_2 \Delta t\right) \\ \partial W_4\left(t^{n+1}, x_{1/2}\right) &= \partial W_4\left(t^n, x_{1/2} - \lambda_4 \Delta t\right) \end{aligned} \tag{95}$$

第一个和第三个特征线在区域内部传播，因此必须包含源项的影响：

$$\begin{aligned} \partial W_1\left(t^{n+1}, x_{1/2}\right) &= \partial W_1\left(t^n, x_{1/2} - \lambda_1 \Delta t\right) + \int_{x_{1/2}-\lambda_1 \Delta t}^{x_{1/2}} \frac{S_1^w(t^n, x)}{\lambda_1} dx \\ \partial W_3\left(t^{n+1}, x_{1/2}\right) &= \partial W_3\left(t^n, x_{1/2} - \lambda_3 \Delta t\right) + \int_{x_{1/2}-\lambda_3 \Delta t}^{x_{1/2}} \frac{S_3^w(t^n, x)}{\lambda_3} dx \end{aligned} \tag{96}$$

这些特征线在区域的第一个单元中，为便于记号表示，记为

$$\int_{x_{1/2}-\lambda_1 \Delta t}^{x_{1/2}} \frac{S_1^w(t^n, x)}{\lambda_1} dx = I_1 \qquad \int_{x_{1/2}-\lambda_3 \Delta t}^{x_{1/2}} \frac{S_3^w(t^n, x)}{\lambda_3} dx = I_3 \tag{97}$$

根据边界条件，左边界 $x_{1/2}$ 处的值被视为已知，并取自无黏流动问题的边界条件。遵循 Whitfield and Janus（1984）推导基于特征线的边界条件的方法，并使用下标 0 表示来自幽灵单元的值，使用下标 d 表示来自第一个单元内部的值，可得到以下边界条件组：

$$\begin{aligned} u_{1/2} &= \frac{1}{2}(u_d + u_0) + \frac{u}{2}\left(2\,\rho_{1/2} - \rho_0 - \rho_d\right) + \frac{\rho b_\nu}{\gamma - 1}(\tau_d - \tau_0) + \rho I_1 \\ \tau_{1/2} &= \tau_0 + \frac{(\gamma - 1)u}{2\rho b_\nu}\left(\rho_0 - \rho_{1/2}\right) + \frac{\gamma - 1}{2\rho b_\nu}\left(u_{1/2} - u_0\right) \\ q_{1/2} &= \frac{1}{2}(q_0 + q_d) + \frac{c^+ b_h}{2\rho b_\nu}\left(\rho_{1/2} - \rho_d\right) - \frac{c^- b_h}{2\rho b_\nu}\rho_0 + \frac{\gamma - 1}{4\rho b_\nu}(p_0 - p_d) \\ &\quad - \frac{\tau^+ b_h}{2\rho b_\nu}\left(u_{1/2} - u_d\right) - \frac{\tau^- b_h}{2\rho b_\nu}\left(u_{1/2} - u_0\right) + \frac{a_p}{2\rho}(\tau_d - \tau_0) - \frac{I_3}{2\rho b_\nu} \\ p_{1/2} &= p_0 + \frac{2c^- b_h}{\gamma - 1}\left(\rho_{1/2} - \rho_0\right) - \frac{2\tau^- b_h}{\gamma - 1}\left(u_{1/2} - u_0\right) + \frac{2a_p b_\nu}{\gamma - 1}\left(\tau_{1/2} - \tau_0\right) \end{aligned} \tag{98}$$

通过参考状态计算 $u/2$ $b_\nu/(\gamma - 1)$ $c^+ b_h/(2\rho b_\nu)$ e，该参考状态通常使用内部点（例如点d）的值进行设置。对于区域的右边界 $x_{N+1/2}$，也采用类似的方法。

5.6. 算子分裂后的三阶精度解

必须确保算子分裂方法具有所需的精度阶。如果只需要时间上的一阶或二阶精度，则可以使用 Lie 分裂或 Strang 分裂等经典分裂格式。Jia 和 Li（2011年）表明，通过对一阶和二阶结果进行适当组合，可以利用算子分裂获得更高精度的结果。

考虑以下常微分方程：

$$\frac{dU}{dt} = F_1(U) + F_2(U) \tag{99}$$

最知名的 Lie 分裂方法之一（Trotter，1959年对此进行了非常详尽的阐述）在时间上具有一阶精度，并包含以下步骤：

$$\begin{gathered} assume\ U(t^n)\ is\ known \\ solve\ \frac{dU^*}{dt} = F_1(U^*)\ between\ t^n\ and\ t^{n+1} \\ with\ initial\ condition\ U^*(t^n) = U(t^n) \\ solve\ \frac{dU^{**}}{dt} = F_2(U^{**})\ between\ t^n\ and\ t^{n+1} \\ with\ initial\ condition\ U^{**}(t^n) = U^*(t^{n+1}) \\ set\ U(t^{n+1}) = U^{**}(t^{n+1}) \end{gathered} \tag{100}$$

同样具有时间上一阶精度的是 Strang 分裂（Strang，1968年）：

$$\begin{gathered} assume\ U(t^n)\ is\ known \\ solve\ \frac{dU^*}{dt} = F_1(U^*)\ between\ t^n\ and\ t^{n+1/2} \\ with\ initial\ condition\ U^*(t^n) = U(t^n) \\ solve\ \frac{dU^{**}}{dt} = F_2(U^{**})\ between\ t^n\ and\ t^{n+1} \\ with\ initial\ condition\ U^{**}(t^n) = U^*\left(t^{n+1/2}\right) \\ solve\ \frac{dU^{***}}{dt} = F_1(U^{***})\ between\ t^{n+1/2}\ and\ t^{n+1} \\ with\ initial\ condition\ U^{***}\left(t^{n+1/2}\right) = U^{**}(t^{n+1}) \\ set\ U(t^{n+1}) = U^{***}(t^{n+1}) \end{gathered} \tag{101}$$

考虑函数 f ollowing combination of splitting techniques:

$$\begin{gathered} solve\ using\ Lie\ splitting\ and\ the\ order\ F_1 \to F_2\ to\ get\ U_1 \\ solve\ using\ Lie\ splitting\ and\ the\ order\ F_2 \to F_1\ to\ get\ U_2 \\ solve\ using\ Strang\ splitting\ and\ the\ order\ F_1 \to F_2 \to F_1\ to\ get\ U_3 \\ solve\ using\ Strang\ splitting\ and\ the\ order\ F_2 \to F_1 \to F_2\ to\ get\ U_4 \end{gathered} \tag{102}$$

最后，

$$U(t^{n+1}) = \frac{2}{3}(U_3 + U_4) - \frac{1}{6}(U_1 + U_2) \tag{103}$$

为展示该方法，采用了 Jia 和 Li（2011年）提出的方法。 illustrate the third-order accurate

首先，将（99）写成作用于关注变量的两个算子：

$$\frac{dU}{dt} = (F_1 + F_2) * U \tag{104}$$

一个时间步长内的解 step is given by:

$$U(t^{n+1}) = e^{\Delta t(F_1+F_2)} * U(t^n) \tag{105}$$

令 $\widehat{U}(t^{n+1})$ 为解方法。误差为 obtained by a splitting a n give

$$E(t^{n+1}) = U(t^{n+1}) - \widehat{U}(t^{n+1}) = E_{ops} * U(t^n) \tag{106}$$

这里，新的 E_{ops} y defined operator 误差算子。如果 splitting e $o(\Delta t^{p+1})$ 阶，分裂具有 is called the E_{ops} 精度阶。

由公式 (102) 中定义的四种分裂技术得到的解为 :

$$\begin{aligned}
\widehat{U}_1(t^{n+1}) &= e^{\Delta t F_2} e^{\Delta t F_1} * U(t^n) \\
\widehat{U}_2(t^{n+1}) &= e^{\Delta t F_1} e^{\Delta t F_2} * U(t^n) \\
\widehat{U}_3(t^{n+1}) &= e^{\frac{\Delta t}{2}F_1} e^{\Delta t F_2} e^{\frac{\Delta t}{2}F_1} * U(t^n) \\
\widehat{U}_4(t^{n+1}) &= e^{\frac{\Delta t}{2}F_2} e^{\Delta t F_1} e^{\frac{\Delta t}{2}F_2} * U(t^n)
\end{aligned} \tag{107}$$

考虑最终解 tion given by:

$$\widehat{U}(t^{n+1}) = \alpha\left(\widehat{U}_3 + \widehat{U}_4\right) + \beta\left(\widehat{U}_1 + \widehat{U}_2\right) \tag{108}$$

相应的 splitting error operator is:

$$\begin{aligned}
E_{ops} = e^{\Delta t(F_1+F_2)} - \alpha\left(e^{\frac{\Delta t}{2}F_1} e^{\Delta t F_2} e^{\frac{\Delta t}{2}F_1} + e^{\frac{\Delta t}{2}F_2} e^{\Delta t F_1} e^{\frac{\Delta t}{2}F_2}\right) \\
-\beta(e^{\Delta t F_2} e^{\Delta t F_1} + e^{\Delta t F_1} e^{\Delta t F_2})
\end{aligned} \tag{109}$$

接下来是 following identities: 贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式 are written using the Baker Campbell

$$\begin{aligned}
e^{\Delta t F_1} e^{\Delta t F_2} &= e^{\Delta t F_1 + \Delta t F_2 + \frac{\Delta t^2}{2}[F_1,F_2] + \frac{\Delta t^3}{12}[F_1,F_1,F_2] - \frac{\Delta t^3}{12}[F_2,F_1,F_2] + \sigma(\Delta t^4)} \\
e^{\Delta t F_2} e^{\Delta t F_1} &= e^{\Delta t F_1 + \Delta t F_2 + \frac{\Delta t^2}{2}[F_2,F_1] + \frac{\Delta t^3}{12}[F_2,F_2,F_1] - \frac{\Delta t^3}{12}[F_1,F_2,F_1] + \sigma(\Delta t^4)} \\
e^{\frac{\Delta t}{2}F_1} e^{\Delta t F_2} e^{\frac{\Delta t}{2}F_1} &= e^{\Delta t F_1 + \Delta t F_2 + \frac{\Delta t^3}{12}[F_2,F_2,F_1] - \frac{\Delta t^3}{24}[F_1,F_1,F_2] + \sigma(\Delta t^4)} \\
e^{\frac{\Delta t}{2}F_2} e^{\Delta t F_1} e^{\frac{\Delta t}{2}F_2} &= e^{\Delta t F_1 + \Delta t F_2 + \frac{\Delta t^3}{12}[F_1,F_1,F_2] - \frac{\Delta t^3}{24}[F_2,F_2,F_1] + \sigma(\Delta t^4)}
\end{aligned} \tag{110}$$

这里， $[F_1, F_2] = F_1F_2 - F_2F_1$ 是交换子，而 $[F_1, F_1, F_2] = \left[F_1, [F_1, F_2]\right]$ 是交换子的递归应用。

对（109）中的每一项进行泰勒级数展开，并仅保留截至 o(Δt^4) 的各项。

$$
\begin{aligned}
E_{ops} = I + \Delta t(F_1 + F_2) + \frac{\Delta t^2}{2}(F_1 + F_2)^2 + \frac{\Delta t^3}{6}(F_1 + F_2)^3 \\
-2\alpha I - 2\alpha\Delta t(F_1 + F_2) - \alpha\Delta t^2(F_1 + F_2)^2 \\
-\alpha\frac{\Delta t^3}{3}(F_1 + F_2)^3 - \alpha\frac{\Delta t^3}{24}\{[F_2, F_2, F_1] + [F_1, F_1, F_2]\} \\
-2\beta I - 2\beta\Delta t(F_1 + F_2) - \beta\Delta t^2(F_1 + F_2)^2 - \beta\frac{\Delta t^2}{2}\{[F_1, F_2] + [F_2, F_1]\} \\
-\beta\frac{\Delta t^3}{3}(F_1 + F_2)^3 \\
-\beta\frac{\Delta t^3}{12}\{[F_1, F_1, F_2] + [F_2, F_2, F_1] - [F_2, F_1, F_2] - [F_1, F_2, F_1]\} \\
-\beta\frac{\Delta t^3}{4}\{(F_1 + F_2)[F_1, F_2] + [F_1, F_2](F_1 + F_2)\} \\
-\beta\frac{\Delta t^3}{4}\{(F_1 + F_2)[F_2, F_1] + [F_2, F_1](F_1 + F_2)\} \\
+\sigma(\Delta t^4)
\end{aligned}
\tag{111}
$$

This is also written as:

$$
\begin{aligned}
E_{ops} = (1 - 2\alpha - 2\beta)I + (1 - 2\alpha - 2\beta)\Delta t(F_1 + F_2) \\
+\Delta t^2\left\{\frac{1}{2}(F_1 + F_2)^2 - \alpha(F_1 + F_2)^2 - \beta(F_1 + F_2)^2 - \frac{\beta}{2}\{[F_1, F_2] + [F_2, F_1]\}\right\} \\
+\Delta t^3\left\{\frac{1}{6}(F_1 + F_2)^3 - \frac{\alpha}{3}(F_1 + F_2)^3 - \frac{\alpha}{24}\{[F_2, F_2, F_1] + [F_1, F_1, F_2]\}\right. \\
-\frac{\beta}{3}(F_1 + F_2)^3 \\
-\frac{\beta}{12}\{[F_1, F_1, F_2] + [F_2, F_2, F_1] - [F_2, F_1, F_2] - [F_1, F_2, F_1]\} \\
-\frac{\beta}{4}\{(F_1 + F_2)[F_1, F_2] + [F_1, F_2](F_1 + F_2)\} \\
\left.-\frac{\beta}{4}\{(F_1 + F_2)[F_2, F_1] + [F_2, F_1](F_1 + F_2)\}\right\} \\
+\sigma(\Delta t^4)
\end{aligned}
\tag{112}
$$

要达到三阶精度，（112）中截至并包括 Δt^3项在内的所有项都必须相互抵消。相对容易验证，满足条件 $2\alpha + 2\beta = 1$ 的 α 和 β 的所有组合都能达到二阶精度。然而，计算表明，只有选择 $\alpha = 2/3$ 和 $\beta = -1/6$ 才能使三阶项相互抵消。计算过程极其冗长，故此处不予列出。

因此，对于分裂技术（102）–（103）的组合，E_{ops} =o(Δt^4)，所得解具有三阶精确性。

5.7. 精确解测试问题

使用制造的精确解研究 AF格式 对纳维–斯托克斯方程的性能。

考虑以下函数:

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + 0.1t\sin x \\ u &= 1 + 2\sin x \\ p &= 1 - 0.5\cos x \end{aligned} \tag{113}$$

该解定义在 $x \in [-\pi, \pi]$ 中。总能量根据上述原始变量使用 $\rho E = p/(\gamma - 1) + \rho u^2/2$ 计算。

然后将上述定义的函数代入（69），得到以下源项：

$$\begin{aligned} S_1 &= 0.1\sin x + (2 + 0.1t + 0.4t\sin x)\cos x \\ S_2 &= \left(0.6 + \frac{8}{3}\mu + 0.2\sin x\right)\sin x \\ &+ (4 + 0.1t + 8\sin x + 0.8t\sin x + 1.2t\sin^2 x)\cos x \\ S_3 &= \left(0.05 + 0.2\sin x + 0.2\sin^2 x + \frac{0.5\gamma}{\gamma - 1} + \frac{8}{3}\mu\right)\sin x \\ &+ \left(\frac{5\gamma - 3}{\gamma - 1} + 0.05t + 0.6t\sin x + 12\sin x + 1.8t\sin^2 x + 12\sin^2 x \right. \\ &\left. + 1.6t\sin^3 x\right)\cos x \\ &- \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{16}{3}\mu\right)(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &- \frac{\gamma\mu}{Pr(\gamma - 1)}\left[\frac{(0.5\cos x + 0.1t\sin x)(1 + 0.1t\sin x)}{(1 + 0.1t\sin x)^3} \right. \\ &\left. - \frac{0.2t\cos x\,(0.05t + 0.5\sin x - 0.1t\cos x)}{(1 + 0.1t\sin x)^3}\right] \end{aligned} \tag{114}$$

以下（115）中所述的矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使用此特定源项求解纳维-斯托克斯方程，将确保获得如（113）中所定义的精确解。

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ -\dfrac{\tau}{\mu_V} \\ -\dfrac{q}{\mu_H} \end{bmatrix} \tag{115}$$

所得解不具有物理意义，仅用于验证连续解的收敛阶。在 $t = 0.8$ 处计算不同网格密度下的解与精确解之间的密度误差的 $L2$ 范数，并绘制于图 9 中。最粗网格层级包含 $N = 5$ 个单元，后续每个网格层级的单元数量均加倍。可以观察到，对于 Navier-Stokes 制造解，所提出的 AF格式 达到了三阶精度的收敛。

5.8. Shu-Osher测试问题

另一个所考察的测试案例是具有黏性变体的高难度 Shu-Osher激波管问题（Shu和 Osher，1989年）。考虑 $x \in [-5, 5]$ 以及以下（无量纲）初始条件：

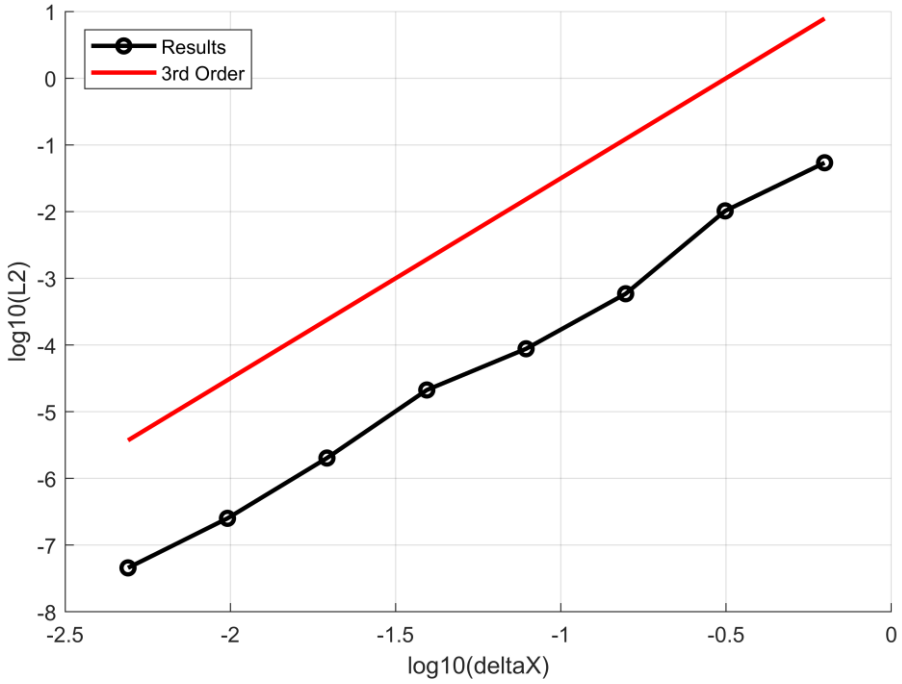


图 9. 通过 $L2$ 误差测得的双曲型 Navier–Stokes 系统非定常解相对于制造的精确解的收敛阶。图中给出了对应于 **3rd** 阶的直线以供参考。

$$\begin{cases} \rho = 3.857143\,, p = 10.33333\,, u = 2.629369\ for\ x \le -4 \\ \rho = 1 + 0.2\sin(\pi x)\,, p = 1\,, u = 0\ for\ x > -4 \end{cases} \tag{116}$$

网格单元数为 $N = 100$，库朗数为 $\nu = 0.5$，对应的（无量纲）最大时间为 $t = 1.8$。图 10 展示了采用上述参数的 AF格式结果与使用 $N = 600$ 个网格单元进行的参考模拟之间的比较。将较粗网格的解与较细网格的解进行比较，是 Shu-Osher 问题中常用的方法，因为该问题不存在解析解。可以观察到，AF格式仅使用相对较少的自由度，就能捕捉激波与正弦压力波之间的相互作用。$N = 20$ 网格不足以准确捕捉激波后的振荡，但 N =100 网格与 $N = 600$ 网格之间的差异相对较小。典型的间断有限体积格式需要更高的网格分辨率才能预测这一测试案例（例如参见 Cockburn 等，1989）。此外必须注意，图 10 所示结果是在没有任何限制或耗散的情况下获得的，这突出了 AF格式在涉及不连续解的问题中的良好表现。

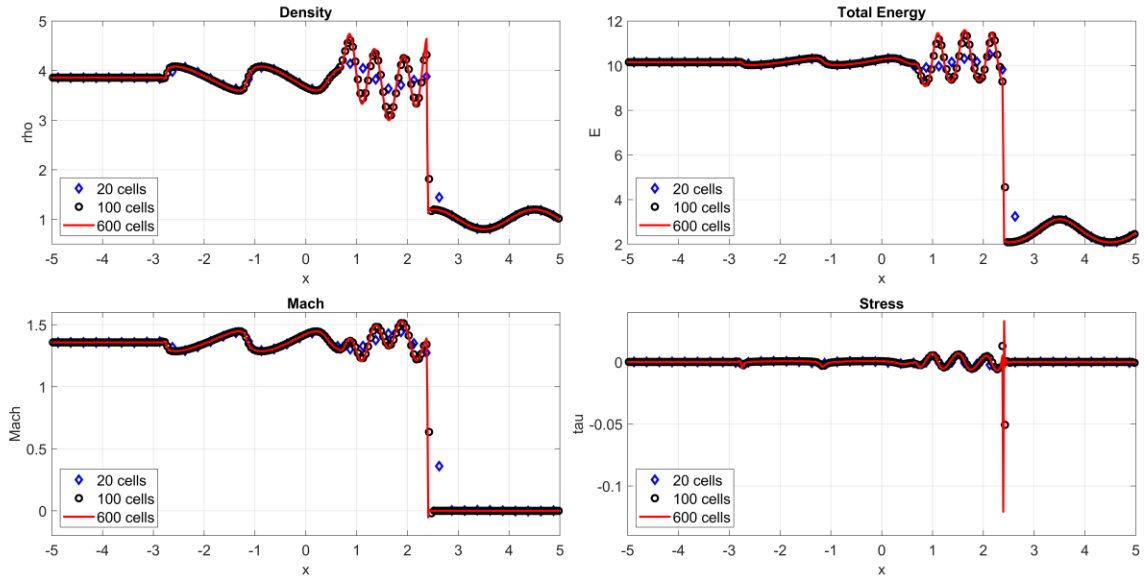


图 10. 纳维–斯托克斯方程的 Shu-Osher激波管问题。在 $\boldsymbol{t = 1.8}$ 处，通过 $\boldsymbol{N = 20}$、 $\boldsymbol{N = 100}$ 和$\boldsymbol{N = 600}$ 个网格单元以及$\boldsymbol{\nu = 0.5}$获得了解。绘制的结果同时包括边界点值和网格单元平均值。

最后，对收敛阶进行了检查。计算并绘制了图11，其中计算了在网格密度不断增加时的解与在N =2560个单元的网格上、t = 1.8处计算得到的解之间的$L2$ 范数密度误差。最粗网格层级包含N = 10 个单元，随后每个网格层级的单元数加倍。与欧拉方程中的应用一样，对于涉及移动间断的这一测试案例，该格式的精度阶降低，AF格式以一阶精度收敛。

6. 结论与未来工作

主动通量格式是一种具有额外自由度的有限体积格式。它采用连续重构，且无需黎曼求解器。对于单元边界上的额外自由度，使用演化算子进行处理。对于非线性方程和系统，必须构造近似演化算子。研究发现，可以为线性和非线性双曲系统定义高效的演化算子，并将其扩展以纳入线性源项的影响。结果验证了主动通量格式在空间上具有三阶精度，不过也可以将精度阶进一步提高。在可压缩黏性流动的数值计算中，可以推导出一种能够达到三阶精度的算子分裂方法。总体而言，与其他高阶格式相比，主动通量格式所需自由度更少，同时能够以较高精度很好地捕捉复杂流动物理。

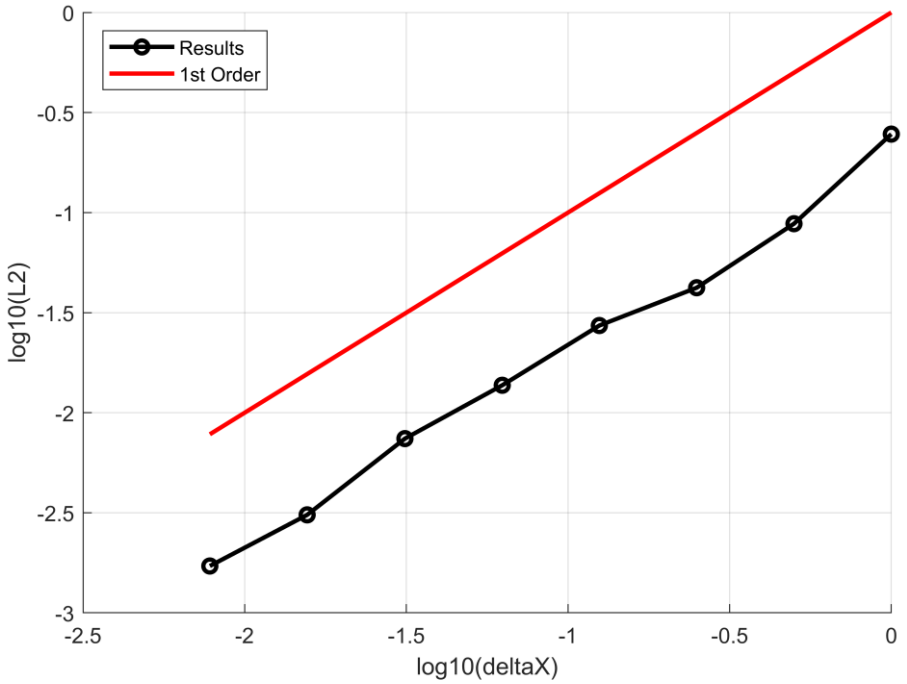


图11. 纳维–斯托克斯方程解的收敛阶，$t = 18$ 处的结果通过与具有$N = 2560$ 个单元的网格上的解比较，测得$L2$ 误差。图中显示了一条对应于1^{st} 阶的参考线。

未来有许多值得探索的方向。寻找一种符合主动通量格式理念（简单、紧凑、以物理为驱动）的合适限制器，是其中一个方向。采用隐式双时间方法进行时间精确计算，则是另一个方向。还需进一步研究双曲型Navier-Stokes公式完整雅可比矩阵的特征值和特征向量。虽然算子分裂方法达到了预期的精度阶，但由于每个时间步都需要获得四个不同的解，因此计算效率不高。只有通过处理完整雅可比矩阵的特征向量，才能解决这一问题。最后，还需研究将该格式（包括演化算子，以及用特征锥替代特征线）扩展到多维流动的可行性。

声明

资助和/或利益冲突

未获得任何资助以协助准备本手稿。

作者声明不存在与本文内容相关的利益冲突。

数据可用性

Data 经合理请求，可向通讯作者提供 t.

参考文献

Anderson, J.D.（1995）。《计算流体力学：基础与应用》。McGraw-Hill，纽约，美国 Barsukow, W., Hohm, J., Klingenberg, C., Roe, P.L.（2019）。笛卡尔网格上的主动通量格式及其低马赫数极限。《科学计算杂志》，81(1)，594–622 Barsukow, W.（2021）。非线性问题的主动通量格式。《科学计算杂志》，86(3)，1–34 Barsukow, W., Berberich, J.P. 和 Klingenberg, C.（2021）。关于带源项的双曲型偏微分方程主动通量格式。《SIAM科学计算杂志》，43(6)，4015-4042 Blazek, J.（2015）。《计算流体力学：原理与应用》。Elsevier，牛津，英国 Cockburn, B., Lin, S.-Y., Shu, C.-W.（1989）。守恒律的TVB Runge–Kutta局部投影间断Galerkin有限元方法III：一维系统。《计算物理学杂志》，84(1)，90–113 Eymann, T.A., Roe, P.L.（2011a）。主动通量格式。载于：第49届AIAA航空航天科学会议论文集

Eymann, T.A.，Roe, P.L.（2011年b）。系统主动通量格式。载于：第20届AIAA计算流体力学会议论文集

Eymann, T.A.，Roe, P.L.（2013）。多维主动通量格式。载于：第21届AIAA计算流体力学会议论文集

Fan, D.（2017）。非线性双曲守恒律的主动通量格式中的声学分量。博士论文，密歇根大学

He, F.（2021）。采用主动通量方法求解可压缩
纳维–斯托克斯方程的新一代数值格式。博士论文，密歇根大学

Jameson, A.（1991年）。使用多重网格进行含时计算：应用于绕翼型和机翼的非定常流。AIAA论文91-1596 Jia, H., Li, K.（2011年）。一种三阶精确算子分裂方法。《数学与计算机建模》，53(2)，387-396 LeVeque, R.（2002年）。双曲型问题的有限体积方法。剑桥大学出版社，剑桥，英国 Li, L., Lou, J., Luo, H., Nishikawa, H.（2018年）。一种新的双曲型纳维–斯托克斯公式及高效的重构间断Galerkin离散。载于：第48届AIAA流体动力学会议论文集 Maeng, J.（2017年）。非线性双曲守恒律中主动通量格式的对流分量。博士论文，密歇根大学

Mazaheri A., Nishikawa, H.（2014年）。含时平流–扩散问题的一阶双曲系统方法。NASA-TM-2014-218175 Nishikawa, H.（2007年）。扩散方程的一阶系统方法。I: 二阶残差分布格式。《计算物理学杂志》，227，315–352 Nishikawa, H.（2011年）。新一代双曲型纳维–斯托克斯格式：o(1/h)加速及精确的黏性/热通量。载于：第20届AIAA计算流体力学会议论文集 Nishikawa, H, Roe, P.L., Eymann, T.A.（2014年）。用于扩散的主动通量格式。载于：第7届AIAA理论流体力学会议论文集 Nishikawa, H., Roe, P.L.（2016年）。用于平流的三阶主动通量格式—

扩散：双曲扩散、边界条件与牛顿求解器。Computers and Fluids，125，71-81

Shu, C.W.、Osher, S.（1989）。本质无振荡激波捕捉格式的高效实现，第二部分。载于：《迎风与高分辨率格式》，328–374，Springer

Sod, G.A.（1978）。关于若干双曲守恒律系统有限差分方法的综述非线性双曲守恒律。《计算物理学杂志》，27(1)，1–31

Strang, G.（1968）。差分格式的构造与比较。SIAM数值分析杂志，4，506-517

Trotter, H.F.（1959年）。算子半群的乘积。美国数学学会会刊，10，545-551

Whitfield, D.L.、Janus, J.M.（1984年）。使用通量矢量分裂求解三维非定常欧拉方程。AIAA论文84-1552