arXiv:2303.06645v1 [math.RT] 12 Mar 2023

字符串代数的 Cohen-Macaulay Auslander代数

YU-ZHE LIU 和 CHAO ZHANG*

Abstract. 本文明确构造了任意字符串代数的 Cohen-Macaulay Auslander代数。此外，我们证明，一类称为具有 G-condition 的字符串代数的特殊字符串代数是表示有限的，当且仅当它们的 Cohen-Macaulay Auslander代数是表示有限的。最后，我们利用温和代数的 Cohen-Macaulay Auslander代数刻画其自内射维数。

1. Introduction

Gorenstein投射（=G-投射）模由 Auslander 于 [2, 4], 引入。它们是投射模的自然推广，旨在提供 Noether环的一些同调不变量。在 [5, 9], ，Auslander和Buchweitz从更具范畴论的角度研究了 G-投射模。此后，代数学家发现，G-投射模在交换代数、代数几何和相对同调代数等领域有一些重要应用 [7, 8, 13, 16, 19, 21, 23, 29, 33, 等]。近期研究表明，Gorenstein环上的模 X 是 Gorenstein-投射模，当且仅当 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}_A(X, \mathrm{Add}P) = 0$ [16, 推论 11.5。3]。此外，Beligiannis 证明，对于任意 Gorenstein代数 A，模 X 是 G-投射模，当且仅当 $\mathrm{Tor}^A_{\geq 1}(D({}_AA)\ X) = 0$ [7,命题 3。10]。如果 $A \cong \mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是单项式代数，那么 G-投射模可以用其有界箭图（$\mathcal{Q}, \mathcal{I}$）上的 PPS 来描述。此外，还可以在三角矩阵代数 $\left(\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & A' \end{smallmatrix}\right)$ 上构造 Gorenstein-投射模，其中 $M = {}_AM_{A'}$ 是一个（A, A'）-双模（见 [19, 21, 23, 29, 33]）。

Artin代数 A的 Auslander代数在 [3] 中被定义为所有不可分解 A-模的自同态代数，其特征是整体维数至多为 2 且主维数至少为 2。为研究有限 Cohen-Macaulay 型（=有限CM型）代数，Beligiannis 以类似于 Auslander代数的方式，引入了代数 A的 Cohen-Macaulay Auslander代数（=CM-Auslander代数） B，即 [8], 中所有不可分解 G-投射左（分别为右） A-模之直和的自同态代数，该代数也称为相对Auslander代数。CM-Auslander代数具有许多重要性质。已证明， A的同调维数与 B 的同调维数密切相关（见 [8, 第 6]节）。如果 A是 CM-有限的，那么 A是 Gorenstein 当且仅当 gl.dim $B < \infty$ [22]。此外，CM-有限代数的 CM-Auslander代数是 CM-自由的，见 [20, 定理 4.5]。A 的许多其他性质也可以通过其 CM-Auslander代数反映出来，例如 [11, 12, 18, 25, 26]。因此，自然会考虑如下问题。

问题1.1. 如何表示有限 CM-型代数的 CM-Auslander代数?

在 [11, 12], Chen和Lu给出了构造所有（斜）gentle代数的CM-Auslander代数的方法，并证明了（斜）gentle代数是表示有限的，当且仅当其CM-Auslander代数是表示有限的。因此，自然可以提出如下进一步的问题。

*通讯作者。MSC2020：16G10、16G70、16P10。关键词：Gorenstein-投射模、表示型、温和代数、自内射维数。

问题1.2. 如果 A （分别为 B）是表示有限代数，那么 B （分别为 A）是否也是表示有限代数?

在本文中，k 是一个代数闭域，任意有限维代数 A is 都同构于 $\mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$，其中 $\mathcal{Q}$ 是一个有限箭图， $\mathcal{I}$ 是一个容许理想。箭图 $\mathcal{Q}$ 是一个四元组（$\mathcal{Q}_0$、 $\mathcal{Q}_1$、 s、 t），其中 $\mathcal{Q}_0$ 和 $\mathcal{Q}_1$ 分别是有限顶点集和箭集， s、 t 是将 $\mathcal{Q}_1$ 中的任意箭分别映射到其起点和终点的函数。对于任意两个箭 a_1 和 a_2 ，若 $t(a_1) = s(a_2)$，则a_1 与 a_2 的复合记作 a_1a_2。所有 A 上的模都是有限生成的右 A-模；我们用 $\mathrm{mod}A$ 表示 A 的有限生成右 A-模范畴。对于 $\mathrm{mod}A$ 的任意满子范畴 $\mathcal{C}$ ，记 $\mathrm{ind}(\mathcal{C})$ 为包含 $\mathcal{C}$中所有不可分解对象的 $\mathcal{C}$ 满子范畴。对于任意模 $M \in \mathrm{mod}A$，分别用 $\mathrm{proj.dim}M$ 和 $\mathrm{inj.dim}M$ 表示 M 的投射维数和内射维数。此外，$\mathrm{gl.dim}A$ 表示 A 的整体维数。

本文旨在描述字符串代数上的所有 G-投射模，并通过$\mathsf{G}\text{-}\mathrm{proj}A$ 所提供的字符串代数 Auslander-Reiten 箭图描述，计算 A 中所有不可约态射。该描述见 [10], 其中$\mathsf{G}\text{-}\mathrm{proj}A$ 是由不可分解 G-投射模A 诱导的满子范畴 A-模。更准确地说，字符串代数上的所有 G-投射模均由（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{I}$）中的某些有向环给出，而字符串代数的 CM-Auslander代数可由下述定理刻画。

定理 1.3。（定理3.15）设 A 是一个字符串代数，且 B 是其 CM-Auslander代数。那么 $B \cong A^{\mathrm{CMA}} = \Bbbk\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}/\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$，其中（$\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}$, $\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$）是由构造*3.14*给出的有界箭图。

上述定理为问题1.1 在字符串代数的情形下提供了一个部分答案。此外，我们可以判断字符串代数 A 的 CM-Auslander代数是否表示有限。作为应用，我们发现问题1.2 一般而言并不成立（见例3.7 和3.8）。然而，对于满足G-条件的字符串代数，该结论成立；也就是说，这类字符串代数中，所有能提供至少一个 G-投射模的有向环都是 gentle 关系圈（见第4.1小节），如下述定理所示。

定理 1.4。 （定理 4.3） 设 A是一个满足 G-条件的字符串代数，且A^{CMA} 是其 CM-Auslander代数。则 A 表示有限当且仅当 A^{CMA}表示有限。

与有限维代数的表示型类似，导出表示型主要考虑导出范畴中对象的分类与分布，这一研究方向由 Vossieck 开创 [28]。他定义并分类了导出离散代数，其中包括不满足时钟条件的温和单环代数（即不含同伦带的温和代数）这一类型。导出表示型也在其他相关工作中得到研究，例如 [30–32]。作为另一项应用，本文考察了温和代数及其 CM-Auslander代数的导出表示型之间的关系。

本文的组织如下。在第 2 节中，回顾字符串代数和温和代数的一些预备知识。第 3 节明确构造任意字符串代数的 CM-Auslander代数，并通过 CM-Auslander代数描述任意字符串代数的表示型。此外，本文针对字符串代数情形对问题 1.1 给出了部分答案，并对问题 1.2 作了否定（见注 4.4）。作为应用，最后一节展示了温和代数的一些结果，这些结果最初在 [12]和 [8] 中得到证明。

2. String algebras and gentle algebras

设（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{I}$）为一个有界箭图。回路 $\mathscr{C}$（长度为 n）是底层图 $\mathcal{Q}$ 上长度为 n 的路径，并且其起点与终点重合。回路

$\mathscr{C}$是（$\mathcal{Q}$，$\mathcal{I}$）的一个环，当且仅当 $\mathscr{C}$上的任意两支箭均不相同。若环 $\mathscr{C} = c_1 \cdots c_n$ 满足：任意 c_i 和 c_{i+1} 都是箭，并且满足 $t(c_i) = s(c_{i+1})$（$1 \leq i \leq n-1$），则称环 $\mathscr{C} = c_1 \cdots c_n$ 为有向环。此外，如果存在 $\mathcal{I}$ 的生成元 r_0、r_1、$\cdots$、r_{t-1}，使得

(1) r_0、r_1、$\cdots$、r_{t-1}是 $\mathscr{C}$上的路径；(2) 对任意 $0 \leq i \leq t-1$，路径$r_{\overline{i}}$和$r_{\overline{i+1}}$重叠，即 $t(r_{\overline{i}})$位于 $s(r_{\overline{i+1}})$与 $t(r_{\overline{i+1}})$之间，且 $s(r_{\overline{i+1}})$位于 $s(r_{\overline{i}})$与 $t(r_{\overline{i}})$之间，其中$\overline{i}$ 是 i 模 t的代表元。

无关系的环（分别为回路）是指这样的环 $\mathscr{C}$（分别为回路）：$\mathscr{C}$ 上的所有路径都不属于 $\mathcal{I}$。

对于任意两个长度为 l的路径 $p = a_1 a_2 \cdots a_l$和长度为 m（$1 \leq i < l \leq i+m$）的路径 $q = a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_{i+m}$，我们分别记为 $p \sqcap q = a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_l$和 $p \sqcup q = a_1 a_2 \cdots a_{i+m}$。

2.1. 字符串代数。若箭图 $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ 满足以下条件，则称其为字符串箭图：

- $\mathcal{Q}$ 的每个顶点至多是两条箭的起点和终点。
- 对于每条箭 $\alpha: x \to y$，至多存在一条箭 β，其起点（分别为终点）是 y（分别为 x），且满足 $\alpha\beta \notin \mathcal{I}$（分别为 $\beta\alpha \notin \mathcal{I}$）。
- $\mathcal{I}$ 是容许的，且由长度为 ≥ 2 的路径生成。

此外，若字符串箭图 $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ 满足以下条件，则称其为 gentle：

- 对于每条箭 $\alpha: x \to y$，至多存在一条箭 β，其起点（分别为终点）是 y（分别为 x），且满足 $\alpha\beta \in \mathcal{I}$（分别为 $\beta\alpha \in \mathcal{I}$）。
- 的所有生成元都是长度为二的 $\mathcal{I}$ 路径。

定义 2.1. 字符串（分别地，温和）代数是一个有限维 k-代数 A，它同构于 $\mathbf{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$，其中（$\mathcal{Q}$，$\mathcal{I}$）是一个字符串（分别地，温和）箭图。

注 2.2. 任意温和代数都是字符串代数。此外，定义 2.1 中的所有字符串代数都是有限维的，因此字符串代数的箭图是有限的，即 $\sharp\mathcal{Q}_0 < \infty$ 和 $\sharp\mathcal{Q}_1 < \infty$。

对于任意箭 $a \in \mathcal{Q}_1$，我们将 a^{-1} 记作 a 的形式逆，其中 $s(a^{-1}) = t(a)$ 且 $t(a^{-1}) = s(a)$，并令 $\mathcal{Q}_1^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in \mathcal{Q}_1\}$ 表示所有箭的形式逆的集合。形式逆自然地延拓到任意路径，即对于任意路径 $\wp = a_1 a_2 \cdots a_l (\notin \mathcal{I})$，形式逆路径为 $\wp^{-1} = a_l^{-1} a_{l-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$。注意，对于对应于 $v \in \mathcal{Q}_0$的任意平凡路径 e_v，我们定义 $e_v^{-1} = e_v$。

定义 2.3。字符串是一列 $s = (\wp_1, \wp_2, \ldots, \wp_n)$，满足：

(1) 对任意 $1 \leq i \leq n$，$\wp_i$ 和 $\wp_i^{-1}$ 中有一个是 $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ 的路径；(2) 若 $\wp_i$ 是一条路径（分别为一条路径的形式逆），则 $\wp_{i+1}$ 是一条路径的形式逆（分别为一条路径）；(3) 对所有 $1 \leq i \leq n-1$，均有 $t(\wp_i) = s(\wp_{i+1})$。

此外，带 $b = (\wp_1, \wp_2, \ldots, \wp_n)$ 是满足以下条件的字符串：

(4) $t(\wp_n) = s(\wp_1)$；(5) b 不是某个字符串的非平凡幂，即不存在字符串 s，使得对于某个 $m \geq 2$ 有 $b = s^m$；(6) b^2 是一个字符串。

注 2.4. 字符串 $s = (\wp_1, \wp_2, \cdots, \wp_n)$ 上的顶点 $v \in \mathcal{Q}_0$ 称为 s 的自交点，如果存在两个整数 $1 \leq i \neq j \leq n$ 使得 v 同时是 $\wp_i$ 上的顶点和 $\wp_j$ 上的顶点，即 v 是 s 至少两次与自身相交的顶点。

如果两个字符串 $s = (\wp_1, \ldots, \wp_n)$ 和 $s' = (\wp'_1, \ldots, \wp'_n)$ 满足 $s' = s^{-1}$（即对所有 $1 \leq i \leq n$ 都有 $\wp'^{-1}_{n-i+1} = \wp_i$），则称它们等价，记为 $s \simeq s'$。如果以下条件之一成立，则称两个带 $b = (\wp_1, \ldots, \wp_n)$ 和 $b' = (\wp'_1, \ldots, \wp'_n)$ 等价，记为 $b \simeq b'$：

- 存在一个整数 $1 \leq j \leq n$，使得 $\wp'_{\overline{i}} = \wp_{\overline{i+j}}$ 对所有 $1 \leq i \leq n$均成立；

• 存在一个整数 $1 \leq j \leq n$，使得 $\wp_i'^{-1} = \wp_{(n+1-i)+j}$ ~~对所有~~ $1 \leq i \leq n$均成立，其中 $\overline{x}$是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$中 x模 n的代表元。我们用 Str(A)（分别用 Band(A)）表示所有字符串（分别为带）的等价类集合。

2.2. 字符串模与带模。

定义 2.5 （字符串模与带模）。[10, 节 3] 设 $s = a_1 \cdots a_n$是一个长度为 n的字符串。与 相关联的字符串模 M是一个不可分解模，定义如下 s

• 对于 s的每个顶点 v，$\dim_{\Bbbk} Me_v$等于 v被 s遍历的次数，否则为零；并且

• 箭 $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ 在 M上的作用是恒等态射，当且仅当 α是s的一个箭，否则为零。

设 $b = a_1 \cdots a_n$是一个长度为 n的带。与 b和 φ在 b以及 $\varphi \in$ Aut(k^n) 中的这一对相对应的带模 B是一个不可分解模，其构造如下：

• φ 是 k^n 的一个不可分解 k-线性自同构，满足 $n > 0$ （即，$\varphi \in$Aut(k^n) 是一个Jordan块，因为 k 是代数闭的）；

• 对于 s的每个顶点 v， Me_v 与 k^{mn} k-线性同构，其中 m 是 v 被 s 遍历的次数；否则为零；并且

•箭 $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ 在 B 上的作用为恒等态射，如果 $\alpha = a_i$ 对于$1 \leq i \leq n-1$ 成立；如果 $\alpha = a_n$，则为 φ（因此，如果 α不是 b的箭，则 $B\alpha = 0$）。

下面的定理表明，字符串代数上的任意不可分解模要么是字符串模，要么是带模。

定理 2.6. 设 A是一个字符串代数。则存在一个双射

$$\mathbb{M} : \mathsf{Str}(A) \cup (\mathsf{Band}(A) \times \mathscr{J}) \to \mathsf{ind}(\mathsf{mod}(A)),$$

其中 $\mathscr{J}$ 是所有具有非零特征值的 Jordan块的集合。

3. The Cohen-Macaulay Auslander algebras of string algebras

本节旨在描述字符串代数上的非平凡不可分解 Gorenstein-投射模（= NTIG-投射模）。

3.1. 完美对与完美路径。显然，所有射影模都是 G-投射的。若一个 G-投射模是射影模，则称其为平凡的。在 [13], 单项式代数上的所有 NTIG-投射模都可用完美路径刻画。在这里，单项式代数是指具有如下表示的代数：k$\mathcal{Q}/\mathcal{I}$，其中 $\mathcal{I}$ 由长度为 ≥ 2的路径生成。在本小节中，我们回顾 [13]中的相关概念和结果。

定义 3.1（完美对与完美路径）。设 $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ 是某个单项式代数的有界箭图。

（1） [13, 定义 3.3] 单项式代数 Λ 的 $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ 上的一个完美对，是指由两个非平凡路径 $(\wp_1, \wp_2)$ 构成的对，并满足以下条件。（i） $\wp_1$ 和 $\wp_2$ 是非平凡路径，使得 $t(\wp_1) = s(\wp_2)$ 且 $\wp_1\wp_2 = 0$。（ii）若存在满足 $t(\wp_1) = s(\wp)$（分别为 $t(\wp) = s(\wp_2)$）的非平凡路径 $\wp$，使得 $\wp_1\wp = 0$（分别为 $\wp\wp_2 = 0$），则 $\wp_2$（分别为 $\wp_1$）是 $\wp$的子路径。（2）[13, 定义 3.7] 完美路径序列（=PPS）是形如 $(p = \wp_1, \wp_2, \cdots, \wp_t = p)$ 的路径序列，其中任意一对 $(\wp_i, \wp_{i+1})$ 都是 $i = 1$、2、 $\cdots$、 t 的完美对。完美路径序列中的任意路径称为完美路径。

注 3.2. 如果 $(\wp_1, \wp_2, \cdots, \wp_{t-1}, \wp_1)$ 是一个 PPS，那么 $(\wp_2, \cdots, \wp_{t-1}, \wp_1, \wp_2)$ 也是如此，并且所有 $\wp_i$ 都是同一关系环 $\mathscr{C}$上的路径。

为了描述字符串代数 $A =$ k$\mathcal{Q}/\mathcal{I}$上的所有NTIG-投射模，我们需要以下引理，该引理描述了 A的有界箭图（$\mathcal{Q}$， $\mathcal{I}$）中的有向环至少包含一个PPS。

引理3.3. 设（$p = \wp_0, \ \wp_1, \ \cdots, \ \wp_{t-1} = p$）是字符串代数 $A = \mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$的有界箭图上的一个PPS，其中$\wp_{\overline{i}} = \alpha_{\overline{i},1}\cdots\alpha_{\overline{i},l_{\overline{i}}}$并且 $\overline{i}$模 t同余于 i。则以下陈述成立。

(1) 如果存在箭 α，其起点（分别为终点）是 $t(\wp_{\overline{i}}) = s(\wp_{\overline{i+1}}) \in \mathcal{Q}_0$，那么 $\wp_{\overline{i}}\alpha \neq 0$（分别为 $\alpha\wp_{\overline{i+1}} \neq 0$）。在此情况下，我们有 $\ell(\wp_{\overline{i}}) = 1 = \ell(\wp_{\overline{i+1}})$。（2）所有复合 $\wp_{\overline{i}}\wp_{\overline{i+1}}$ 必须是 $\mathcal{I}$ 的生成元（见 FIGURE 3.1）；

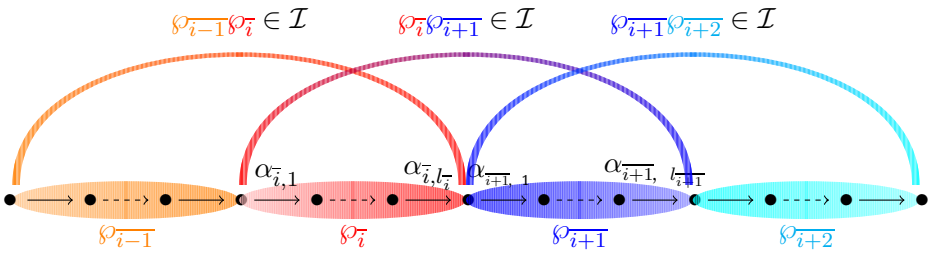


FIGURE 3.1. $\wp_{\overline{i-1}}\wp_{\overline{i}}$, $\wp_{\overline{i}}\wp_{\overline{i+1}}$ 和$\wp_{\overline{i+1}}\wp_{\overline{i+2}}$ 是 $\mathcal{I}$ 的生成元

证明。（1）假设存在一个箭 α，其起点（分别为终点）为 $s(\wp_{\overline{i}})$，且 $\wp_{\overline{i}}\alpha = 0$（分别为 $\alpha\wp_{\overline{i+1}} = 0$）。那么（$\wp_{\overline{i}}$, $\wp_{\overline{i+1}}$）不是完美对，因为 α 不是 $\wp_{\overline{i+1}}$（分别为 $\wp_{\overline{i}}$）的子路径。于是得到矛盾。因此，我们有

$$\wp_{\overline{i}}\alpha \neq 0 \ (\text{resp. } \alpha\wp_{\overline{i+1}} \neq 0).$$

此外，根据字符串代数的定义，我们有 $\ell(\wp_{\overline{i}}) = 1 = \ell(\wp_{\overline{i+1}})$。

(2) 假设存在一个整数 i，使得 $\wp_{\overline{i}}\wp_{\overline{i+1}}$ 不是 $\mathcal{I}$ 的生成元。由于 $\wp_{\overline{i}}\wp_{\overline{i+1}} = 0$，可知 $\wp_{\overline{i}}\wp_{\overline{i+1}}$ 具有一个非平凡子路径 $\wp$，该子路径是 $\mathcal{I}$ 的生成元。于是

- $\wp'_{\overline{i}} = \wp_{\overline{i}} \sqcap \wp$ and $\wp'_{\overline{i+1}} = \wp \sqcap \wp_{\overline{i+1}}$ are non-trivial path on $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$;
- $\wp'_{\overline{i}} \sqcup \wp'_{\overline{i+1}} = \wp$ (see FIGURE 3.2).

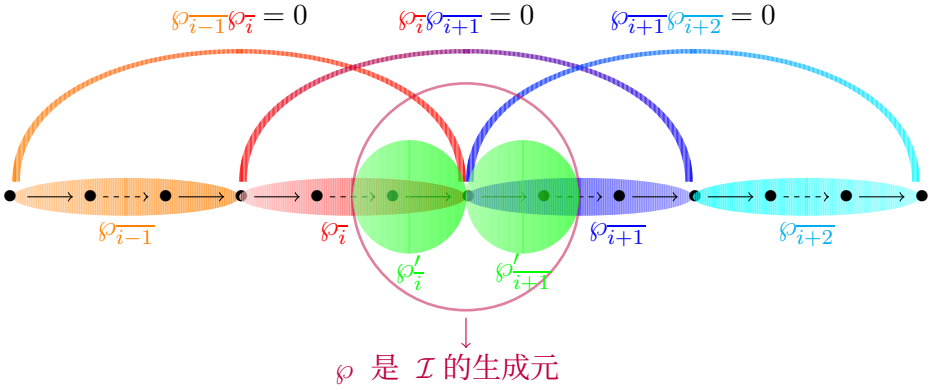


FIGURE 3.2. $\wp_{\overline{i}}\wp_{\overline{i+1}}$ 具有一个非平凡子路径 $\wp$，该子路径是 $\mathcal{I}$ 的生成元

因此，

$$\wp'_{\overline{i}}\wp_{\overline{i+1}} = 0 \text{ and } \wp_{\overline{i}}\wp'_{\overline{i+1}} = 0,$$

这就产生了矛盾，因为 $\wp'_{\overline{i}}$ 和 $\wp'_{\overline{i+1}}$ 分别是 $\wp_{\overline{i}}$ 和 $\wp_{\overline{i+1}}$ 的非平凡子路径。□

设 ($p = \wp_1$, $\wp_2$, $\cdots$, $\wp_t = p$) 是字符串代数 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 上关系环 $\mathscr{C}$ 的一个 PPS。根据引理 3.3，所有形如 $\wp_{\overline{i}}\wp_{\overline{i+1}}$ 的路径都是 $\mathcal{I}$ 的生成元，它们是 $\mathscr{C}$ 上的路径。因此，我们得到零关系序列 ($\wp_1\wp_2$, $\wp_2\wp_3$, $\cdots$, $\wp_{t-1}\wp_t$, $\wp_t\wp_1$)，并将其称为与上述 PPS 对应的 完美关系序列 (=PRS)。此外，下面的命题可直接得到。

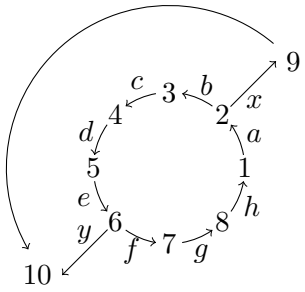
命题 3.4。 $\mathcal{I}$ 的生成元序列（r_0、r_1、$\cdots$、r_{t-1}）是一个 PRS，当且仅当以下陈述成立。

- $r_{\overline{i}} = (r_{\overline{i-1}} \sqcap r_{\overline{i}}) \cdot (r_{\overline{i}} \sqcap r_{\overline{i+1}})$。
- 对于任意 $i \in \mathbb{N}$，如果存在一个箭 α（分别为 β），使得 $t(\alpha) = s(\wp_{\overline{i}})$（分别为 $s(\beta) = t(\wp_{\overline{i-1}})$），则 $\alpha\wp_{\overline{i}} \neq 0$（分别为 $\beta\wp_{\overline{i-1}} \neq 0$），其中 $\wp_{\overline{i}} = r_{\overline{i}} \sqcap r_{\overline{i+1}}$ 对所有 i 均成立。

构造 3.5。 根据命题 3.4，我们可以使用 PRS 找到所有 PPS。

步骤 1。找到一个关系环 $\mathscr{C}$，其属于（$\mathcal{Q}$、$\mathcal{I}$）。步骤 2。如果在 $\mathscr{C}$ 上存在一个 PRS（r_0、r_1、$\cdots$、r_{t-1}），则（$p = \wp_1$、$\wp_2$、$\cdots$、$\wp_n = p$）根据引理 3.3 是一个 PPS，其中 $\wp_{\overline{i}}$ 是 $\mathscr{C}$（$0 \leq i \leq t-1$）上的路径。否则，$\mathscr{C}$不提供 PPS。

例 3.6. 设 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是一个字符串代数，其中 $\mathcal{Q} =$



a以及 $\mathcal{I} = \langle abcd、\ cdef、\ efgh、\ ghab、\ habc、\ defg、\ ax、\ ey\rangle$。共有如下八个完美关系序列：

$$s_{11} = (abcd, defg, efgh, habc, abcd), \qquad s_{12} = (defg, efgh, habc, abcd, defg),$$
$$s_{13} = (efgh, habc, abcd, defg, efgh), \qquad s_{14} = (habc, abcd, defg, efgh, habc);$$
$$s_{21} = (abcd, cdef, efgh, ghab, abcd), \qquad s_{22} = (cdef, efgh, ghab, abcd, cdef),$$
$$s_{23} = (efgh, ghab, abcd, cdef, efgh), \qquad s_{24} = (ghab, abcd, cdef, efgh, ghab).$$

因此，我们得到完美路径与 PPS 之间如下的对应关系：

$$p_{11} = abc \leftrightarrow (abc, d, efg, h, abc), \qquad p_{12} = d \leftrightarrow (d, efg, h, abc, d),$$
$$p_{13} = efg \leftrightarrow (efg, h, abc, d, efg), \qquad p_{14} = h \leftrightarrow (h, abc, d, efg, h);$$
$$p_{21} = ab \leftrightarrow (ab, cd, ef, gh, ab), \qquad p_{22} = cd \leftrightarrow (cd, ef, gh, ab, cd),$$
$$p_{23} = ef \leftrightarrow (ef, gh, ab, cd, ef), \qquad p_{24} = gh \leftrightarrow (gh, ab, cd, ef, gh).$$

3.2. Gorenstein 投射模。设 A 是一个有限维 k-代数。=G-投射模是 G 中的一个模，它具有一个 $\mathrm{Hom}_A(-, A)$-正合的完备投射分解，也就是说，存在一个投射模的正合序列

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \xrightarrow{d^1} P^2 \longrightarrow \cdots$$

在 mod$A$ 上施加函子 Hom 后仍保持正合$_A(-, A)$，使得 $G \cong \mathrm{Im}d^{-1}$ [4, 15]。我们将 G-proj(A) 记为 mod$A$ 的满子范畴，其对象均为 G-投射模。显然，任何投射模都是 G-投射模。若一个 G-投射模不是投射模，则称其为非平凡 G-投射模。

下面的定理给出了 NTIG-投射模的描述。

定理 3.7 ([13, 定理 4。1])。 设 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是一个单项式代数。则存在一个双射

$$\mathsf{per.path}(\mathcal{Q},\mathcal{I}) \to \mathsf{NTIG\text{-}proj}(A), p \mapsto pA$$

从所有完美路径的集合到所有 NTIG-投射模的集合。

例3.8。 设 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是例 3.6中给出的字符串代数。所有 NTIG-投射模为 $abcA \cong$(4)、$dA \cong \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$、 $efgA \cong$(8) 、 $hA \cong \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$、 $abA \cong \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$、 $cdA \cong \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$、 $efA \cong \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$、 $cdA \cong \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$。

3.3. G-投射(A)中的不可约态射。本小节旨在描述 G-投射(A)中的不可约态射。

首先，我们回顾字符串代数上字符串模之间不可约态射的描述 [10]。设 w 是一个字符串。从$\mathbb{M}(w)$出发的不可约态射可以通过在字符串 w 的左侧或右侧进行修改来描述:

情形 1。如果存在一个箭 $a \in \mathcal{Q}_1$，使得 aw 是一个字符串，那么令 v 为从 $s(a)$ 开始的极大正向字符串，并定义 w_l 为字符串 $v^{-1}aw$。情形 2。如果不存在箭 $a \in \mathcal{Q}_1$，使得 aw 是一个字符串，那么，或者 w 是一个正向字符串，或者我们可以写成 $w = va^{-1}w'$，其中 $a \in \mathcal{Q}_1$， w' 是一个字符串，而 v 是从 $s(w)$ 开始的极大正向子字符串。在前一种情形下，我们定义 w_l 为平凡字符串；在后一种情形下， $w_l := w'$。字符串 $v^{-1}a$ 和 va^{-1} 分别称为钩和余钩（分别参见 Figure 3.3 中的 (L1) 和 (L2)）。对偶地，在 Figure 3.4所示的情形下，我们也可以定义钩和余钩。

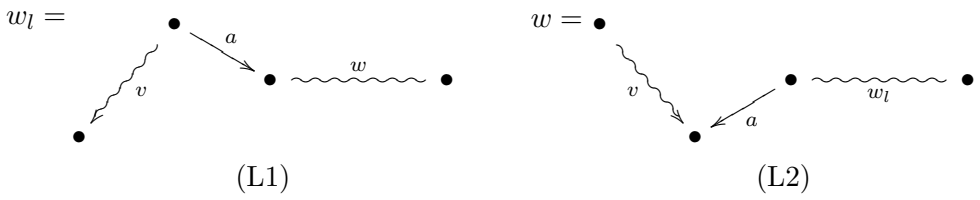


Figure 3.3. 左：在 $s(w)$ 上添加一个钩；右：从 $s(w)$ 中移除一个余钩

的定义是 w_r 对偶的（分别参见 Figure 3.4 中的（R1）和（R2））。

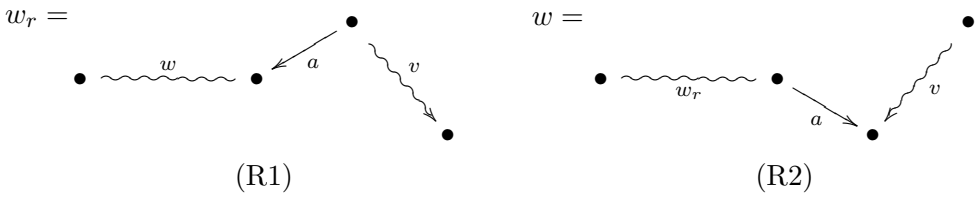


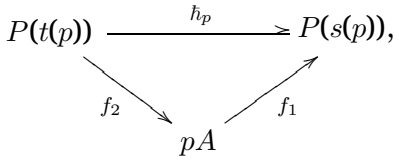
Figure 3.4. 左：在 $t(w)$ 上添加一个钩；右：从 $t(w)$ 中移除一个余钩

众所周知，两个字符串模之间的任意不可约态射都具有以下形式之一:

（L1）单态射 $\mathsf{M}(w) \hookrightarrow \mathsf{M}(w_l)$；（R1）单态射 $\mathsf{M}(w) \hookrightarrow \mathsf{M}(w_r)$；（L2）满同态 $\mathsf{M}(w_l) \twoheadrightarrow \mathsf{M}(w)$；（R2）满同态 $\mathsf{M}(w_r) \twoheadrightarrow \mathsf{M}(w)$。

接下来，我们给出一些引理来描述 G-投射(A)中的不可约态射。

引理 3.9. 设 $A = \mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是一个字符串代数，且 $G \cong pA$ 是一个 NTIG-射影模，其中 p 是由关系环 $\mathscr{C}$ 上的 PPS ($p = \wp_1, \wp_2, \cdots, \wp_t = p$) 给出的路径。那么，与路径 p 对应的同态 $\hbar_p\colon P(t(p)) \to P(s(p))$ 具有如下分解



其中，f_1（分别为 f_2）不能通过任何不可分解投射模分解。

证明。假设 $\wp_i = \alpha_{i,1}\alpha_{i,2}\cdots\alpha_{i,l_i}$ $(1 \le i \le t-1)$、$t(\alpha_{i,j}) = v_{i,j}$ $(1 \le j \le l_i)$ 以及 $e_{i,j}$ 是对应于 $v_{i,j}$ 的幂等元。那么对应于 $P(t(p))$ 的字符串等于

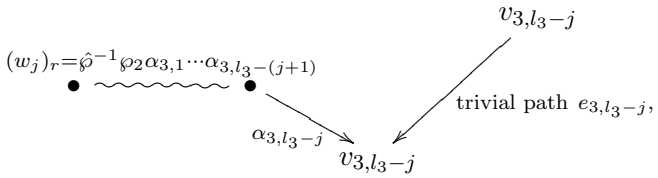
$$\mathbb{M}^{-1}(e_{1,l_1}A) = \hat{\wp}^{-1}\wp_2\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\cdots\alpha_{3,l_3-1} = (\hat{\wp}^{-1}\wp_2\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\cdots\alpha_{3,l_3-2})\cdot\alpha_{3,l_3-1}e_{3,l_3-1}$$

这可以看作字符串 w_1，其中 $\hat{\wp}$ 是一条从点 $t(p) = t(\wp_1) = s(\wp_2)$ 出发的路径。

- 如果 $\ell(\wp_2) = \ell(\wp_3) = 1$（在此情形下，$l_2 = l_3 = 1$ 和 $w_1 = \hat{\wp}^{-1}\alpha_{2,1}$），并且存在一个箭 ($\neq \alpha_{2,1}$) 终止于 v_{2,l_2}，直接删除 w_1的最后一条箭 $\alpha_{2,1} = \wp_2$，我们得到 $w_2 = \hat{\wp}^{-1}$ 满足 $\mathrm{M}(w_2) \cong \mathrm{M}(\hat{\wp}) \cong pA$（注意，根据完美对的定义，如果 $\ell(p) > 1$，那么 $\ell(\hat{\wp}) = 0$），并且由 $\wp_2 = \alpha_{2,1}$ 诱导的同态 $\hbar_{\wp_2}$ 不是不可约的，因为 $\hbar_{\wp_2}$ 具有典范分解。
- 否则，不存在箭 $\beta_{3,j}$ ($\neq \alpha_{3,j}$) 终止于 $v_{3,j}$，使得 $\beta_{3,j}\alpha_{3,j+1} \neq 0$ $(1 \le j \le l_3 - 1)$。于是，根据（R2），我们有
$$(w_1)_r = \hat{\wp}^{-1}\wp_2\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\cdots\alpha_{3,l_3-2}\ (=: w_2),$$
并得到一个不可约同态 $\hbar_{\alpha_{3,l_3-2}} \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{M}(w_1),\mathrm{M}(w_2))$，该同态由长度为一的路径 α_{3,l_3-2} 诱导。

因此，对于任意 $1 \le j < l_3 - 1$，我们有

$$w_j = \hat{\wp}^{-1}\wp_2\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\cdots\alpha_{3,l_3-j} = (\hat{\wp}^{-1}\wp_2\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\cdots\alpha_{3,l_3-(j+1)})\alpha_{3,l_3-j}e_{3,l_3-j} =$$



并且 $w_{j+1} = \hat{\wp}^{-1}\wp_2\alpha_{3,1}\cdots\alpha_{3,l_3-(j+1)}$ 等于 $(w_j)_r$，或者等于删除 w_j 的最后一支箭后得到的字符串。容易看出，$\mathrm{M}(w_{l_3-1}) \cong pA$。

另一方面，假设 $\hat{\wp} = \beta_1\cdots\beta_s$。那么 w_{l_3-1} 等价于

$$(\alpha_{2,l_2-1}^{-1}\cdots\alpha_{2,1}^{-1}\beta_1\cdots\beta_{s-1})\beta_s e_{t(\beta_s)} =: \hat{w}_1.$$

类似地，我们有 $\hat{w}_j = \alpha_{2,l_2-1}^{-1}\cdots\alpha_{2,1}^{-1}\beta_1\cdots\beta_{s-(j-1)}$ 是满足下述条件的字符串：$\hbar_{\beta_{s-(j-1)}}\colon \mathrm{M}(\hat{w}_j) \to \mathrm{M}(\hat{w}_{j+1})$ 要么是 $\mathrm{mod}A$ 中的不可约同态，要么是不被任何不可分解投射模分解的满同态。我们得到一个同态

$$\hbar_{\hat{\wp}} : \mathbb{M}(\hat{w}_1) \to \mathbb{M}(\hat{w}_{s+1}),$$

其中 $\hat{w}_{s+1}$ 等价于

$$\hat{w}_{s+1}^{-1} = \alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\cdots\alpha_{2,l_2-1} =: \omega_1.$$

于是有如下两种情况：

- $\ell(\wp_{t-1}) = \ell(\wp_1) = 1$。在此情况下，$\wp_1$ 是一个箭，我们有 $(\omega_1)_l = \tilde{\wp}^{-1}\wp_1\omega_1$，且 $\mathrm{M}((\omega_1)_l) \cong e_{s(\wp_1)}A = P(s(p))$。

• 否则，根据字符串代数的定义，对于任意以 $v_{1,\ j}$（分别以 $v_{1,\ j-1}$）为终点（分别为起点）的箭 $\gamma_{1,\ j}$（$\neq \alpha_{1,\ j}$），其中 $1 \leq j \leq l_1 - 1$（分别为 $1+1 \leq j \leq l_1$），我们总有 $\gamma_{1,\ j}\alpha_{1,\ j+1} = 0$（分别为 $\alpha_{1,\ j-1}\gamma_{1,\ j} = 0$）。因此，我们可以将（L1）应用于$\omega_1$，从而得到字符串

$$\omega_2 = \alpha_{1,l_1}\omega_1 = \alpha_{1,l_1} \cdot (\alpha_{2,1} \cdots \alpha_{2,l_2-1}).$$

重复上述步骤，我们得到一个从 M 到 pA 的态射，其中

$$M \cong \mathbb{M}\big((\alpha_{2,l_2-1}^{-1} \cdots \alpha_{2,1}^{-1}) \cdot \wp_1^{-1}\big).$$

注意到 M 是 $\mathrm{rad}P(t(a))$ 的一个直和项。因此，存在一个从 pA到 $P(t(p))$ 的同态。

因此， $\hbar_p$ 在 G-proj(A) 中不是不可约的，并具有如下分解:

$$\begin{array}{ccc} P(t(p)) & \xrightarrow{\hbar_p} & P(s(p)). \\ & {\scriptstyle f_2=\tilde{\wp}p\hat{\wp}\cdot(?)} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle f_1=p\cdot(?)} & \\ & pA & \end{array} \tag{3.1}$$

接下来，我们证明 $f_2 = \tilde{\wp}p\hat{\wp} \cdot (?)$ 和 $f_1 = p \cdot (?)$ 分别不能通过任何不同构于 $P(t(p))$ 和 $P(s(p))$ 的不可分解投射模进行分解。假设存在一个不可分解投射模 $P \ncong P(s(p))$ 以及两个同态 $g_2 \colon pA \to P$ 和 $g_1 \colon P \to P(s(p))$，使得 $f_1 = g_1g_2$。考虑 g_2的典范分解 $g_2 = g_{21}g_{22}$：

$$pA \xrightarrow{g_{22}} g_{22}(pA) \xrightarrow{g_{21}} P, \quad pA \xrightarrow{g_2} P,$$

我们有以下两种情形，它们分别导出矛盾。

(1) 若 $\hat{\wp} = \gamma_1 \cdots \gamma_l$ 是长度为 $l \geq 1$的路径，则由命题 3.4, $\alpha_{1,\ell_1}\gamma_1 \neq 0$。因此，根据字符串代数的定义，我们有 $\ell(\wp_1) = 1 = \ell(\wp_2)$ 和 $\ell_1 = 1$。在这种情形下，

$$\begin{gathered} \mathbb{M}^{-1}(pA) = \hat{\wp},\ \mathbb{M}^{-1}(P(s(p))) = \tilde{\wp}^{-1}\alpha_{1,1}\gamma_1 \cdots \gamma_l, \\ \text{and } \mathbb{M}^{-1}(g_{22}(pA)) = \gamma_1 \cdots \gamma_{l'}, \text{ where } 1 \leq l' \leq l. \end{gathered}$$

由于 $g_{21}(pA)$ 是 P 的子模，且 A 是字符串代数，因此存在一条从 $v \in Q_0$ 到 $s(p)$ 的路径 q，使得

$$\mathbb{M}^{-1}(P) = \mathbb{M}^{-1}(P(v)) = \hat{q}^{-1}q\alpha_{1,1}\gamma_1 \cdots \gamma_{l'} \neq 0$$

对于某条路径 $\hat{q}$ 起始于 v，如 Figure 3.5所示，若存在 $\gamma_{l'+1}$ 起始于 $t(\gamma_{l'})$ 的路径，则路径 $qp\gamma_1 \cdots \gamma_{l'+1}$ 是 $\mathcal{I}$中的一个生成元。容易看出，根据 P 的典范分解，$P(s(p))$ 的任意商都不是 g_1的子模，这是矛盾的。

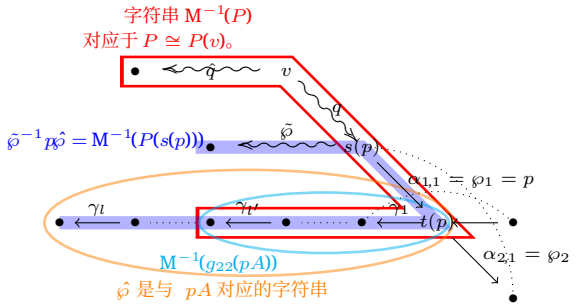


Figure 3.5. $\hat{\wp}$ 是长度为 $l \geq 1$ 的路径的情形

(2) 如果 $\hat{}\wp$ 是平凡的，那么 $\wp_1$ 和 $\wp_2$ 的长度都大于或等于 1。 $\ell(\wp_1) = \ell(\wp_2) = 1$ 的情形与情形 (1) 类似。我们只考虑至少有一个 $\ell(\wp_2) > 1$ 和 $\ell(\wp_1) > 1$ 成立的情形。注意，没有箭 α终止于 $t(p)$。否则，根据字符串代数的定义，有 $\alpha\alpha_{2,1} \in \mathcal{I}$，那么 $(\wp_1, \wp_2)$ 不是完美对，这与命题 3.4 矛盾。因此，与 $g_{22}(pA)$ 对应的字符串是 $\alpha_{2,1}\cdots\alpha_{2,l_2'}$，其中 $1 \le l_2' \le l_2 - 1$。 $g_{22}(pA)$ 是 P的子模，于是存在一条路径 q 从 $v \in \mathcal{Q}_0$ 到 $s(p)$，使得

$$\mathbb{M}^{-1}(P(v)) = \mathbb{M}^{-1}(p) = \hat{q}^{-1}qp\alpha_{2,1}\cdots\alpha_{2,l_2'},$$

对于从 v 开始的某个 $\hat{}q$，见 FIGURE 3.6 （注意，如果存在一个箭 $\delta_{1,i}(\neq \alpha_{1,i}$, $1 \le i \le \ell_1 - 1)$，其终点为 $t(\delta_{1,i}) = v_{1,i}$，那么 $\delta_{1,i}\alpha_{1,i+1} \in \mathcal{I}$）。容易看出， P 的任何商都不是 $P(s(p))$ 的子模，这是矛盾的。

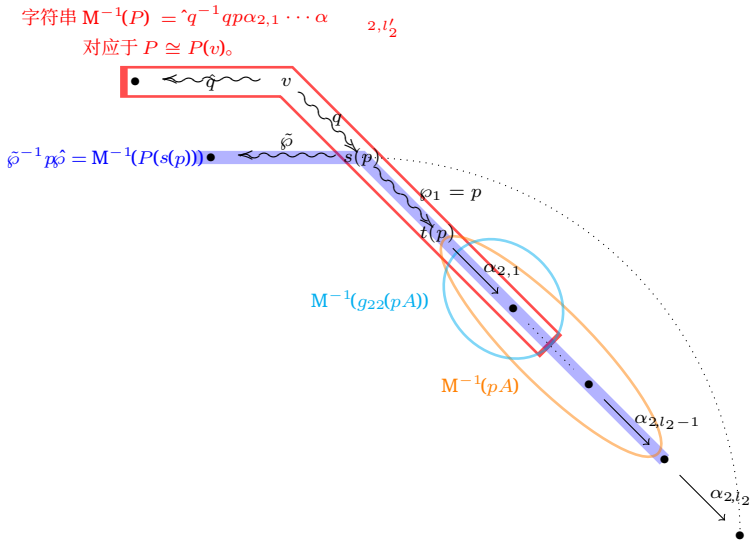


FIGURE 3.6. $\wp$ 是平凡路径的情形

类似地，我们可以证明， $f_2 = \tilde{\wp}p\hat{}\wp \cdot$ (?)不能通过任何与 $P(t(p))$不同构的不可分解射影模分解。□

引理3.10。 设 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是至少包含一个关系环的字符串代数$\mathscr{C} = \alpha_1\cdots\alpha_\ell$，长度为 ℓ，且 $p_{[i,i+j]}$ 是长度为 $\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i+j-1} \neq 0$ 的路径 j，其中指标必要时按模 l 取值。设 $p_{[1,l]}A$ 和 $p_{[1,n]}A$ 是 A $(l < n)$上的两个 NTIG-投射模，则存在一个同态 $\hbar_{p_{[l,n]}}$: $p_{[1,n]}A \to p_{[1,l]}A$，由路径 $p_{[l,n]}$ 在 $\mathscr{C}$上诱导。此外，若对所有 $p_{[1,m]}A$ 而言都不是 G-投射$l < m < n$，则

$$\dim_{\Bbbk} \mathrm{Irr}_{\mathsf{G\text{-}proj}(A)}(p_{[1,n]}A, p_{[1,l]}A) = 1.$$

证明。假设存在一个整数 m $(l < m < n)$，使得 $p_{[1,m]}A$ 是一个 NTIG-射影模。令 s $(\alpha_i) = i$ 对所有 $1 \le i \le n-1$ 均成立。注意到

$$\mathbb{M}^{-1}(p_{[1,n]}A) = p_n^{-1}\cdot(\alpha_n\cdots\alpha_N) \notin \mathsf{proj}(A)$$
$$\text{for some path } p_n \text{ starting at } n \text{ and } N \ge n,$$

那么我们有

$$\mathbb{M}^{-1}(p_{[1,m]}A) = p_m^{-1}\cdot(\alpha_m\cdots\alpha_{n-1})\cdot(\alpha_n\cdots\alpha_N) \notin \mathsf{proj}(A)$$
$$\text{for some path } p_m \text{ starting at } m,$$

and

$$\mathbb{M}^{-1}(p_{[1,l]}A) = p_l^{-1}\cdot(\alpha_l\cdots\alpha_{m-1})\cdot(\alpha_m\cdots\alpha_{n-1})\cdot(\alpha_n\cdots\alpha_N)\notin \mathsf{proj}(A)$$
$$\text{for some path } p_l \text{ starting at } l,$$

其中 $p_k=\beta_{k,\ 1}\cdots\beta_{k,\ u_k}$ $(1\le k\le n)$ 是一条长度为 u_k、起点为 $k\in\mathcal{Q}_0$的路径。类似于引理3.9的证明，我们得到三个同态

$$\begin{aligned} &\hbar_{[m,n]}\in \mathrm{Hom}_A(p_{[1,n]}A, p_{[1,m]}A),\\ &\hbar_{[l,m]}\in \mathrm{Hom}_A(p_{[1,m]}A, p_{[1,l]}A),\\ \text{and}\quad &\hbar_{[l,n]}\in \mathrm{Hom}_A(p_{[1,n]}A, p_{[1,l]}A)\end{aligned}$$

分别由路径$p_{[m,n]}$、 $p_{[l,m]}$ 和$p_{[l,n]}$诱导。容易看出，$\hbar_{[l,n]}=\hbar_{[l,m]}\hbar_{[m,n]}$，即当且仅当 $\hbar_{[l,n]}$ 在 G-投射(A)中不可约时， $p_{[1,m]}A$ 是一个 NTIG-射影模。

接下来，我们证明 $\dim_{\Bbbk}\mathrm{Irr}^{\mathsf{G\text{-}proj}(A)}(p_{[1,n]}A, p_{[1,l]}A)=1$。我们知道，$\mathrm{Irr}^{\mathsf{G\text{-}proj}(A)}(p_{[1,n]}A$, $p_{[1,l]}A)$中的所有态射都是由（$\mathcal{Q},\mathcal{I}$）上的某些路径诱导的，这些路径的起点为 l，终点为 n。假设存在一条路径 $p'=\beta_1\cdots\beta_s(s\ge 1)$，满足 $s(p')=l$且 $t(p')=n$，使得 $p'\ne p_{[l,n]}$。注意到 $l(p_{[1,n]})>l(p_{1,l})\ge 1$，根据字符串代数的定义，我们有 $\beta_s\alpha_{n+1}=0$。由于 $p_{[1,n]}A$ 是一个 NTIG-射影模，存在一条在（$\mathscr{C}$）上从 $t(p_{[1,n]}A)$出发的路径 p''，使得（$p_{[1,n]}, p''$）是一个完美对。因此，由 $\beta_s\alpha_{n+1}=0$可得 $\beta_s p''=0$。根据完美对的定义，$p_{[1,n]}$ 是 β_s的一个子路径。于是得到矛盾。因此，从顶点 l 到顶点n存在唯一一条路径，结论得证。

□

对偶地，我们有以下引理。

引理 3.11。 沿用引理 *3.10*中的记号。若存在两个 NTIG-射影模 $p_{[l,\ell]}A$ 和 $p_{[n,\ell]}A$ 上的 $A(l>n)$，则存在一个同态 $\hbar_{p_{[n,l]}}: p_{[l,\ell]}A\to p_{[n,\ell]}A$ 由路径 $p_{[n,l]}$ 诱导，该路径位于 $\mathscr{C}$ 上。此外，若对所有 $p_{[m,\ell]}A$ 而言都不是 G-投射模，则 $n<m<l$,

$$\dim_{\Bbbk}\mathrm{Irr}_{\mathsf{G\text{-}proj}(A)}(p_{[l,\ell]}A, p_{[n,\ell]}A)=1.$$

根据引理 3.9、 3.10 和 3.11，我们得到以下引理。

引理3.12。 沿用引理 *3.9*中的记号。若 $\ell(p)=1$，则

$$\dim_{\Bbbk}\mathrm{Irr}_{\mathsf{G\text{-}proj}(A)}(P(t(p)),G)=1=\dim_{\Bbbk}\mathrm{Irr}_{\mathsf{G\text{-}proj}(A)}(G,P(s(p))). \tag{3.2}$$

有限维 $\Bbbk$-代数 A 若 CM-有限，则 $\mathsf{ind}(\mathsf{G\text{-}proj}(A))$ 中至多包含有限个不可分解 G-投射模（按同构计）。 A 若 CM-自由，则 $\mathsf{G\text{-}proj}(A)=\mathsf{proj}(A)$，见 [8]。

推论 3.13. 设 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是一个字符串代数，则以下结论成立。

(1) A 是 CM-有限的。(2) A 是 CM-自由的，当且仅当有界箭图 $(\mathcal{Q},\mathcal{I})$ 上不存在 PPS。

证明。 (1) 由于字符串代数 $A=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{Q}_\ell}\Bbbk\mathfrak{p}$ 是有限维的（$\mathcal{Q}_\ell$ 是所有长度为 ℓ 的路径的集合）， $\mathcal{Q}_{\ge 0}:=\bigcup_{\ell=1}\mathcal{Q}_\ell$ 是一个有限集。另一方面，根据定理 3.7，任意 NTIG-射影模都同构于 pA，其中 p 是一个完美路径。因此，不可分解 G-投射模的数量（按同构计）小于或等于 $\mathcal{Q}_{\ge 0}$中的元素数量。因此 A 是 CM-有限的。

(2) 这是定理 3.7的直接推论。 □

3.4. 字符串代数的 Cohen-Macaulay Auslander代数。 A 的 Cohen-Macaulay Auslander代数（= CM-Auslander代数） B 是所有两两不同构的 G-投射 A-模之直和的自同态代数，即

$$B = \mathrm{End}_A\Big(\bigoplus_{G\in \mathsf{ind}(\mathsf{G\text{-}proj}(A))} G\Big)$$

（见 [8,第 6 节。2]）

在本小节中，我们计算字符串代数的 CM-Auslander代数。显然，CM-有限代数的 CM-Auslander代数是有限维的。因此，根据推论3.13，任意字符串代数的 CM-Auslander代数都是有限维的。

构造 3.14. 设 $A = \mathrm{k}\mathcal{Q}/I$ with $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$ 是一个字符串代数，且 $\mathscr{G}^l(A)$ 是所有形如 pA 的 NTIG- 投射模的集合，其中 p 是一条长度为 l 的路径。因此，ind(G- 投射 (A)) $= \bigcup_{l\geq 1}\mathscr{G}^l(A)$，并且对于任意 $pA \in \mathscr{G}^l(A) \neq \varnothing$，根据引理3.3，存在一个关系环 $\mathscr{C}$，使得 p 是 $\mathscr{C}$ 上的一条路径。定义 $A^{\mathrm{CMA}} = \mathrm{k}\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}/\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$，其有界箭图 $(\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}, \mathcal{I}^{\mathrm{CMA}})$ 按照以下步骤构造。

步骤 1. 令 $\mathcal{Q}_0^{\mathrm{CMA}} = \mathcal{Q}_0' \cup \mathcal{Q}_0$ 为具有双射 $\mathfrak{v}$: ind(G-投射(A)) $\to \mathcal{Q}_0' \cup \mathcal{Q}_0$ 的集合，该双射将任意不可分解投射模 $P(v)$ 映射到顶点 $v \in \mathcal{Q}_0$，并将 NTIG-射影模映射到 $\mathcal{Q}_0'$中的一个顶点。

步骤 2. 令

$$\mathcal{Q}_1^0 = \mathcal{Q}_1 \backslash \{\alpha \in \mathcal{Q}_1 \mid \alpha A \in \mathscr{G}^1(A)\},$$

并令 $\mathcal{Q}_1^1$ 为如下集合：对于每个 $\alpha A \in \mathscr{G}^1(A)$，在 $\mathcal{Q}_1^0$ 中添加箭 α^- : $s(\alpha) \to \mathfrak{v}(\alpha A)$ 以及箭 α^+ : $\mathfrak{v}(\alpha A) \to t(\alpha)$。在此情形下，我们有 $\mathcal{Q}_1^1 \supseteq \mathcal{Q}_1^0$（因此有 $\mathcal{Q}_1^1 = \mathcal{Q}_1^0 \cup \mathcal{Q}_1^1$）。

步骤 3. 我们通过向 $\mathcal{Q}_1^{l-1}$添加以下箭来定义集合 $\mathcal{Q}_1^l$。对于每个 $pA \in \mathscr{G}^l(A)$，——如果存在 NTIG-射影模 $qA \in \mathscr{G}^m(A)$，满足 $m < l$，使得 $s(p) = s(q)$（分别为 $t(p) = t(q)$），且不存在 NTIG-射影模 $rA \in \mathscr{G}^n(A)$，满足 $m < n < l$，使得 $s(p) = s(r)$（分别为 $t(p) = t(r)$），则向 $\mathcal{Q}_1^{l-1}$添加箭 a_{qp}： $\mathfrak{v}(qA) \to \mathfrak{v}(pA)$（分别为 a_{pq}： $\mathfrak{v}(pA) \to \mathfrak{v}(qA)$）；—— 否则，向 $\mathcal{Q}_1^{l-1}$添加一对箭 $a_{s(p)p}$: $s(p) \to \mathfrak{v}(pA)$ 和 $a_{pt(p)}$: $\mathfrak{v}(pA) \to t(p)$。

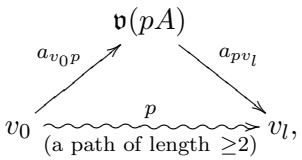
步骤 4. 令 $\mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}} = \bigcup_{i\geq 0}\mathcal{Q}_1^i$ 和 $\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}$ 为箭图 $(\mathcal{Q}_0^{\mathrm{CMA}}, \mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}}, s, t)$，其中函数$s$ 和 t 分别将 $\mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}}$ 中的任意一条箭映射到其在 $\mathcal{Q}_0^{\mathrm{CMA}}$ 中的起点和终点。

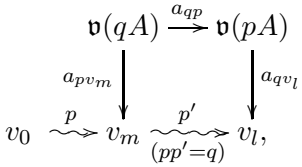
步骤 5. $\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$ 的生成元由以下三种类型给出。

($\mathcal{R}1$) 对于 $\mathcal{Q}$ 上的任意一条长度为 t 的路径 $\wp = a_1a_2\cdots a_t$，若它是 $\mathcal{I}$的生成元，则有 $\wp^* = a_1^*a_2^*\cdots a_t^* \in \mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$，其中

$$a_i^* = \begin{cases} a_i^-a_i^+ \ \left(\begin{smallmatrix}\text{which is a path of}\\ \text{length two on } \mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}\end{smallmatrix}\right), & \text{if } a_i \notin \mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}} \text{ and } 1 < i < t;\\ a_1^+, & \text{if } i = 1 \text{ and } a_1 \notin \mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}};\\ a_t^-, & \text{if } i = t \text{ and } a_t \notin \mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}};\\ a_i\ (\in \mathcal{Q}_1), & \text{otherwise.}\end{cases}$$

($\mathcal{R}2$) $\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}$ 的任何包含至少一个对应于 NTIG-射影模的顶点的基本圈都是可交换的。也就是说，对于 $\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}$ 中以下列形式之一的任意环

(i)


(ii)


(iii) $$\begin{array}{ccc} \mathfrak{v}(pA) & \xrightarrow{a_{pq}} & \mathfrak{v}(qA) \\ {\scriptstyle a_{pv}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_{qr}} \\ v & \xrightarrow{a_{vr}} & \mathfrak{v}(rA), \end{array}$$ (iv) $$\begin{array}{ccc} \mathfrak{v}(qA) & \xrightarrow{a_{qr}} & \mathfrak{v}(rA) \\ {\scriptstyle a_{qp}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_{rs}} \\ \mathfrak{v}(pA) & \xrightarrow{a_{ps}} & \mathfrak{v}(sA), \end{array}$$

相应图中的组合 $p - a_{v_0p}a_{pv_l}$、$a_{pv_m}p' - a_{pq}a_{qv_l}$、$a_{pv}a_{vr} - a_{pq}a_{qr}$ 和 $a_{qp}a_{ps} - a_{qr}a_{rs}$ 是 $\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$ 中的生成元。

($\mathcal{R}3$) 对于一个箭头序列

$$s(p_1) \xrightarrow{a_{s(p_1)p_1}} \mathfrak{v}(p_1A) \xrightarrow{a_{p_1p_2}} \mathfrak{v}(p_2A) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{a_{p_{m-1}p_m}} \mathfrak{v}(p_mA) \xrightarrow{a_{p_mt(p_m)}} t(p_m)$$

in $\mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}}$, if $p_1, p_2, \cdots, p_m$ are paths on $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ such that $p_1 \sqcup p_2 \sqcup \cdots \sqcup p_m \in \mathcal{I}$, then $a_{s(p_1)p_1}a_{p_1p_2}\cdots a_{p_{m-1}p_m}a_{p_mt(p_m)} \in \mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$.

定理 3.15. 设 A 为字符串代数，则其 CM-Auslander代数同构于 A^{CMA}。

证明。 设 $A = \Bbbk\mathcal{Q}^A/\mathcal{I}^A$，且其 CM-Auslander代数为 $B = \Bbbk\mathcal{Q}^B/\mathcal{I}^B$，其中$\mathcal{I}^B$ 是容许的。由引理 3.9、3.10、3.11 和 3.12，以及构造 3.14，可得$\mathcal{Q}^B = \mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}$。

接下来，我们计算 $\mathcal{I}^B$。事实上， $\mathcal{I}^B$ 的生成元分为两类，分别由 $\mathcal{I}$ 的生成元和 NTIG-投射模自然给出:

- $\mathcal{I}$ 的生成元给出了 $\mathcal{I}^B$ 中的一部分关系（见（1））；
- 其余部分由 NTIG-投射模给出（见（2）和（3））。

（1）对于 $\mathcal{I}^A$ 的任意长度为 t 的生成元 $\wp = a_1a_2\cdots a_t$， a_i 对应于一个同态 $\hbar_{a_i}: P(t(a_i)) \to P(s(a_i))$，它属于 mod$A$。在 G-proj($A$) 中，由引理3.12可知，当且仅当 a_iA 是一个 NTIG-射影模时，该态射不可约。如果 ind(G-proj(A)) 包含 a_iA 和 $2 < i < t$，那么 $a_i \notin \mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}}$ 和 a_i^-， $a_i^+ \in \mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}}$。在这种情况下， $\hbar_{a_i}$ 有一个分解

$$\begin{array}{ccc} P(t(a_i)) & \xrightarrow{\hbar_{a_i}} & P(s(a_i)), \\ & {\scriptstyle \hbar_2}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \hbar_1} & \\ & a_iA & \end{array}$$

其中， $\hbar_1$ 和 $\hbar_2$ 是 G-proj(A) 中的不可约态射，分别对应于 $a_{a_is(a_i)} = a_i^-$和$a_{t(a_i)a_i} = a_i^+$。若 $a_i \notin \mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}}$ 和 $1 < i < t$，则定义 $a_i^* = a_i^-a_i^+$；否则，$a_i^* = a_i$。然后 $\wp^* = a_1^*a_2^*\cdots a_{t-1}^*a_t^* = 0$ 作用于 $(\mathcal{Q}^A, \mathcal{I}^A)$，其中

$$a_1^* \ (\text{resp. } a_t^*) = \begin{cases} a_1^+ \ (\text{resp. } a_t^-), & \text{if } a_1 \notin \mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}} \ (\text{resp. } a_t \notin \mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}}); \\ a_1 \ (\text{resp. } a_t), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，显然有 $\wp^* = 0$ 属于 $(\mathcal{Q}^B, \mathcal{I}^B)$。

（2） 的任意基本环，只要至少有一个顶点对应于 NTIG-射影模，就是构造 3.14 步骤 5（2）中给出的四种形式（i）—（iv）之一。其交换性由路径的复合给出。更准确地说，（i）的交换性可由引理 3.9证明；（ii）、（iii）和（iv）的交换性可由引理3.10 或引理 3.11证明。

（3）设

$$s(p_1) \xrightarrow{a_{s(p_1)p_1}} \mathfrak{v}(p_1A) \xrightarrow{a_{p_1p_2}} \mathfrak{v}(p_2A) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{a_{p_{m-1}p_m}} \mathfrak{v}(p_mA) \xrightarrow{a_{p_mt(p_m)}} t(p_m)$$

是 $\mathcal{Q}_1^{\mathrm{CMA}}$ 中的一个箭头序列，使得 $p_1 \sqcup \cdots \sqcup p_m$ 是 $\mathcal{I}$ 的生成元，其中$p_i = \alpha_{i,\,1}\cdots\alpha_{i,\,\ell_i}$ 是长度为 $\ell_i (1 \le i \le m)$ 的路径。我们有

$$p_i \sqcap p_{i+1} = \alpha_{i,j_i}\alpha_{i,j_i+1}\cdots\alpha_{i,\ell_i} = \alpha_{i+1,1}\cdots\alpha_{i+1,\ell_i-j_i+1} \ (1 \le j_i \le \ell_i), \tag{3.3}$$

or

$$p_i \sqcap p_{i+1} = e_{t(p_i)} = e_{s(p_{i+1})}. \tag{3.4}$$

令 $\hbar_\star$ 为 G-proj(A) 中对应于 $a_\star$ 的不可约态射，其中 $\star \in \{s(p_1)p_1,\ p_1p_2,\ \cdots,\ p_{m-1}p_m,\ p_mt(p_m)\}$。若 (3.3)（分别地，(3.4)）成立，则 $\hbar_{p_ip_{i+1}}$ 是由路径诱导的态射

$$\tilde{p}_i = \alpha_{i,1}\cdots\alpha_{i,j_i-1} \text{ (resp. } \tilde{p}_i = \alpha_{i,1}\cdots\alpha_{i,\ell_i} = p_i\text{), where } 1 \le i \le m-1.$$

否则，$\hbar_{s(p_1)p_1}$ 和 $\hbar_{p_mt(p_m)}$ 分别是由路径 $\tilde{p}_0 = e_{s(p_1)}$ 和$\tilde{p}_m = p_m$诱导的态射。因此，

$$\hbar = \hbar_{p_mt(p_m)}\hbar_{p_{m-1}p_m}\cdots\hbar_{p_1p_2}\hbar_{s(p_1)p_1} \in \mathrm{Hom}_A(e_{t(p_m)}A, e_{s(p_1)}A)$$

是由路径诱导的态射

$$\begin{aligned}
&\tilde{p}_0\tilde{p}_1\cdots\tilde{p}_{m-1}\tilde{p}_m\\
=&e_{s(p_1)}\cdot\Big(\prod_{i=1}^{m-1}\alpha_{i,1}\cdots\alpha_{i,j_i-1}\Big)\cdot(\alpha_{m,1}\cdots\alpha_{m,\ell_m}) \quad (\text{Note that } \alpha_{i,j_i} = \alpha_{i+1,1})\\
=&p_1\sqcup p_2\sqcup\cdots\sqcup p_m \in \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

我们得到 $\hbar = 0$，等价地，$a_{s(p_1)p_1}a_{p_1p_2}\cdots a_{p_{m-1}p_m}a_{p_mt(p_m)}$是 $\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$ 的一个生成元。□

例 3.16。 设 A 为例 3.6中给出的字符串代数。在 A上有八个 NTIG- 射影模：

$$\begin{array}{llll}
abcA \cong S(4) = (4), & dA \cong \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}, & efgA \cong S(8) = (8), & hA \cong \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\\
abA \cong \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, & cdA \cong \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}, & efA \cong \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}, & ghA \cong \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.
\end{array}$$

的CM-Auslander代数 A 是 $A^{\mathrm{CMA}} = \Bbbk\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}/\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$，其中 $\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}$ 如图FIGURE 3.7所示以及

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}} =&\langle abcd^-, cd^-d^+ef, efgh^-, gh^-h^+ab, h^+abc, d^+efg, ax, ey,\\
&\beta_1\alpha_2, \beta_2d^-\alpha_3, \beta_3\alpha_4, \beta_4h^+\alpha_1, h^+\alpha_1\gamma_1, \delta_1d^-, d^+\alpha_3\gamma_2, \delta_2h^-,\\
&\alpha_1\beta_1 - ab, \alpha_2\beta_2 - cd^-, \alpha_3\beta_3 - ef, \alpha_4\beta_4 - gh^-,\\
&\gamma_1\delta_1 - \beta_1c, \gamma_2\delta_2 - \beta_3g\rangle.
\end{aligned}$$

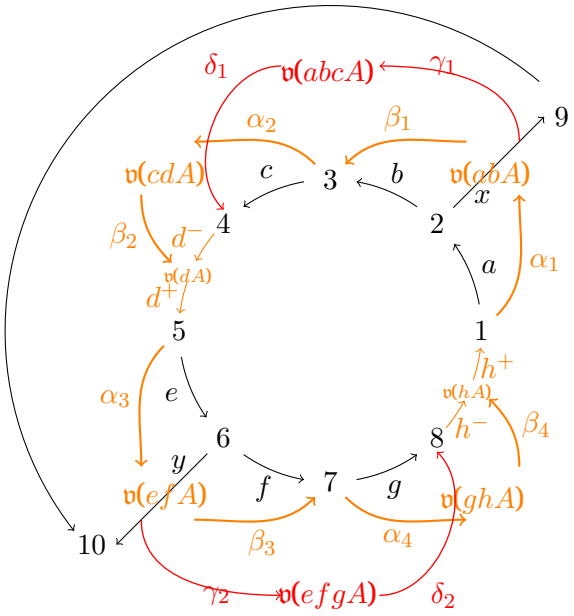
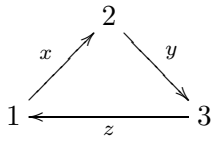


FIGURE 3.7. 例中代数的 CM-Auslander代数 3.6

例3.17。设 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是字符串代数，其有界箭图为$\mathcal{Q}$ =



以及 $\mathcal{I} = \{xyzx, yzxy, zxyz\}$。我们可以验证 A 是自内射的。因此，所有不可分解模都是G-投射的，也就是说，

$$\begin{aligned}\text{ind}(\text{mod}\, A) &= \text{ind}(\text{G-proj}(A))\\ &= \{P(1), P(2), P(3), xA, yA, zA, xyA, yzA, zxA, xyzA, yzxA, zxyA\}.\end{aligned}$$

CM-Auslander代数 A^{CMA} 同构于 $\Bbbk\mathcal{Q}^{\text{CMA}}/\mathcal{I}^{\text{CMA}}$，其中 $\mathcal{Q}^{\text{CMA}}$ 见图 FIGURE 3.8，并且 $\mathcal{I}^{\text{CMA}}$ 由以下元素生成

$$\begin{array}{lll} a_{x2}a_{2y}a_{y3}a_{3z}a_{z1}a_{1x}, & a_{y3}a_{3z}a_{z1}a_{1x}a_{x2}a_{2y}, & a_{z1}a_{1x}a_{x2}a_{2y}a_{y3}a_{3z}, \\ a_{x2}a_{2y} - a_{x,xy}a_{xy,y}, & a_{y3}a_{3z} - a_{y,yz}a_{yz,z}, & a_{z1}a_{1x} - a_{z,zx}a_{zx,x}, \\ a_{zx,x}a_{x,xy} - a_{zx,zxy}a_{zxy,xy}, & a_{xy,y}a_{y,yz} - a_{xy,xyz}a_{xyz,yz}, & a_{yz,z}a_{z,zx} - a_{yz,yzx}a_{yzx,zx}, \\ a_{zxy,xy}a_{xy,xyz}, & a_{xyz,yz}a_{yz,yzx}, & \text{and } a_{yzx,zx}a_{zx,zxy}. \end{array}$$

注意，满足（$\mathcal{R}3$）的其他路径（见构造 3.14 步骤 5）都是

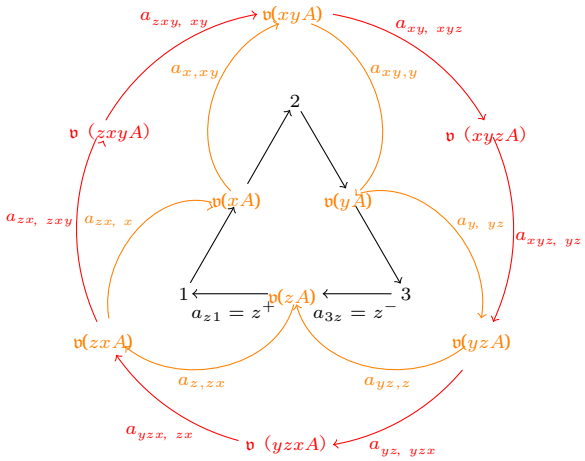


FIGURE 3.8. 示例中字符串代数的 CM-Auslander代数3.17

$\mathcal{I}^{\text{CMA}}$。例如，

$$a_{x,xy}a_{xy,y}a_{y,yz}a_{yz,z}a_{z,zx} = (a_{x,xy}a_{xy,xyz}) \cdot (a_{xyz,yz}a_{yz,yzx}) \cdot a_{yzx,zx} \in \mathcal{I}^{CMA}$$

because $a_{xyz,yz}a_{yz,yzx} \in \mathcal{I}^{\text{CMA}}$.

4. APPLICATIONS

4.1. 满足 G-条件的字符串代数。本节主要研究一类特殊字符串代数的 CM-Auslander代数。

字符串代数 $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 的关系环 $\mathscr{C}$ 被称为 gentle 关系环（或禁环），如果 $\mathscr{C}$ 上的所有关系都是长度为二的路径。此外，如果所有提供 NTIG-投射模的关系环都是 gentle 关系环，则称字符串代数 A 满足 G-条件。

引理 4.1. 设 A 是一个满足 G-条件的字符串代数，且其有界箭图至少含有一个 gentle 关系环。那么，G-投射(A) 中的任意 NTIG-射影模都同构于 aA，其中 a 是 gentle 关系环上的一支箭。

证明。设 $A=\mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$，其中含有一个 gentle 关系环

$$\mathscr{C}=a_0a_1\cdots a_{n-1}\ (s(a_i)=i,0\leq i\leq n-1),$$

其中 $a_{\overline{j}}a_{\overline{j+1}}\in\mathcal{I}$ ($\overline{x}$ 等于 x 模 n）。根据构造 3.5，上述关系环提供 n 可由完美关系序列构造的 PPS

$$\{(a_{\overline{j}}a_{\overline{j+1}},a_{\overline{j+2}}a_{\overline{j+3}},\cdots,a_{\overline{j+n-2}}a_{\overline{j+n-1}})\}_{0\leq j\leq n-1}.$$

则 $\mathscr{C}$ 提供 n NTIG-投射模 $\{a_jA\}_{0\leq j\leq n-1}$。 □

则可由定理 3.15直接推导出以下结果。

推论 4.2. 设 $A=\mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 为一个字符串代数。

(1) 如果 A 满足 G-条件，则 $A^{\mathrm{CMA}}\cong\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}/\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$ 可通过以下步骤计算。步骤 1. 将 $(\mathcal{Q},\mathcal{I})$ 的 gentle关系环上的任意一条箭 $\alpha:x\to y$ 拆分为两条箭 $\alpha^-:x\to\mathfrak{v}(\alpha A)$ 和 $\alpha^+:\mathfrak{v}(\alpha A)\to y$，即可得到 $\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}$。步骤 2. $\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$ 由以下两类路径生成：(i) 所有长度为二且形如 $\alpha^+\beta^-$ (α 和 β 是同一 gentle关系环上的箭) 的路径；(ii) 所有形如 $\wp^*=\alpha_1^*\cdots\alpha_l^*$ 的路径，其中 $\wp=\alpha_1\cdots\alpha_l\in\mathcal{I}$。(2) 当且仅当 A 满足 G-条件时，A^{CMA} 是一个字符串代数。此外，在此情况下，A^{CMA} 是一个满足 G-条件的字符串代数，其所有关系环都不提供 NTIG-投射模。

感谢 [10], 字符串代数被认为是一类重要的驯性代数，其是否为表示有限由其是否含有带决定。以下结果表明，任何满足G-条件的字符串代数的表示类型都可以由其CM-Auslander代数确定。

定理4.3. 满足G-条件的字符串代数是表示有限的，当且仅当其CM-Auslander代数是表示有限的。

证明。如果字符串代数 $A=\mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 满足G-条件且为表示无限的，则有界箭图 $(\mathcal{Q},\mathcal{I})$ 上存在一个带 b（见 [24, 引理2.2], 或参见 [14, 27]）。因此，我们分以下两种情况讨论。

- 如果存在一个箭 α 位于 b 上，同时也是关系环 $\mathscr{C}$ 上的一个箭，其中关系环属于 $(\mathcal{Q},\mathcal{I})$，那么 α 对应于 $(\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}})$ 上长度为二的路径 $\alpha^*=\alpha^-\alpha^+$。在这种情况下，$b^*$ 也是 $(\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}})$ 上的一个带。
- 否则，b 也会作为（$\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$）中的一个带出现。

因此，A^{CMA} 是表示无限的。

若 $A=\mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是一个表示有限代数，则对于（$\mathcal{Q},\mathcal{I}$）的任意回路 $\mathscr{C}$，存在一条路径 $\wp$ 位于 $\mathscr{C}$ 上，使得 $\wp$ 是（$\mathcal{Q},\mathcal{I}$）的一个生成元。事实上，$\wp^*\in\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$ 是（$\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}},\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$）中回路 $\mathscr{C}^*$ 上的一条路径。根据推论 4.2，（$\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}},\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$）的任意回路都与（$\mathcal{Q},\mathcal{I}$）中的某个回路相对应，且这种对应是一一对应的。因此，（$\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}},\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$）不含带，即 A^{CMA} 是表示有限的。□

备注 4.4。对于一般的表示有限字符串代数 A，其 CM-Auslander代数 A^{CMA} 可能是表示无限的。例如，例 3.6 和 3.17 中给出的字符串代数是表示有限的，但它们的CM-Auslander代数是表示无限的。

设 A 是一个字符串代数。一方面，如果 A 满足 G-条件，那么根据定理 4.3的证明，很容易看出，$A^{\mathrm{CMA}}=\mathbb{k}\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}/\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$ 的 CM-Auslander代数 A 是一个字符串代数。反之，根据 CM-Auslander代数的构造，如果 A^{CMA} 的 CM-Auslander代数 A 不是字符串代数，那么 G-proj(A) 至少包含一个形如pA的非平凡不可分解 G-投射模，其中 p 是一个长度为 $l(p)\geq 2$的路径。在这种情况下，$\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$ 至少包含一个

交换关系（见构造 3.14、步骤 5（$\mathcal{R}2$））。因此，我们得到如下结果。

推论 4.5. 设 A 是一个字符串代数。那么， A^{CMA} 是字符串代数，当且仅当A是满足 G-条件的字符串代数。

4.2. 温和代数的 Cohen-Macaulay Auslander代数。 回顾一下，有限维 $\Bbbk$-代数称为温和代数，是指其有界箭图是温和的（参见第 2节）。显然，任意温和代数也是字符串代数。根据推论 A^{CMA}，温和代数 A 的 CM-Auslander代数可由推论 4.2计算，其中步骤 2(ii) 中描述的每条路径 $\wp^*$ 的长度 4.2 均为二。此外，根据温和代数的定义，可得以下推论，该推论最初由 Chen 和 Lu 在 [12, 定理 35].

推论 4.6. 设 $A = \mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是一个温和代数，则 $A^{\mathrm{CMA}} \cong \mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}/\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$，其中 ($\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}$, $\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$) 可按以下步骤计算。

步骤1. 通过将($\mathcal{Q},\mathcal{I}$)的每个gentle关系环上的箭 $\alpha:\ x \to y$ 拆分为两条箭 $\alpha^-:\ x \to \mathfrak{v}(\alpha A)$ 和 $\alpha^+:\ \mathfrak{v}(\alpha A)$，得到 $\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}} \to y$。

St步骤2. $\mathcal{I}$ 的所有生成元都是长度为二的路径，可分为两种情况：

情况1：gentle关系环上的长度为二的路径 a_1a_2；情况2：箭 a_1 和 a_2 不在gentle关系环上的长度为二的路径 a_1a_2，并且

$$\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}} = \langle \wp = a_1a_2 \mid \wp \ is\ a\ path\ satisfying\ \mathrm{Case}\ 1\ or\ \mathrm{Case}\ 2\rangle.$$

此外， A^{CMA} 是一个温和代数。

由于温和代数是满足G-条件的字符串代数，因此以下推论可由定理4.3直接推出，另见 [12]。

推论4.7. 温和代数是表示有限的，当且仅当其CM-Auslander代数是表示有限的。

现在，我们考察温和代数及其 CM-Auslander 代数的导出表示型。设 $X^\bullet = (X^t, d^t)$ 具有如下形式：

$$\cdots \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \longrightarrow \cdots$$

设其为有限维 k-代数 A 的导出范畴 $D^b(A)$ 中的一个不可分解复形。 $X^\bullet$ 的上同调维数向量为

$$\boldsymbol{d}(X^\bullet) := (\dim_{\Bbbk} \mathrm{H}^n(X^\bullet))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})},$$

其中，$\mathrm{H}^n(X^\bullet)$ =Ker(d^n)/Im(d^{n-1}) 是 $X^\bullet$ 的 n-上同调。此外，我们定义

- $X^\bullet$ 的上同调长度 hl($X^\bullet$) 定义为 max{dim$_{\Bbbk}$H^i($X^\bullet$) $\mid i \in \mathbb{Z}$},
- $X^\bullet$ 的上同调宽度 hw($X^\bullet$) 定义为 max$\{j - i + 1 \mid \mathrm{H}^i(X^\bullet) \neq 0 \neq \mathrm{H}^j(X^\bullet)\}$,
- $X^\bullet$ 的上同调范围 hr($X^\bullet$) 定义为 hl($X^\bullet$) $\cdot$ hw($X^\bullet$) 的乘积,

并称有限维 k-代数 A 是

- 导出离散的，若对任意 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{Z})}$，在 $D^b(A)$ 中，其上同调维数向量等于 $\boldsymbol{d}$ 的不可分解对象（在同构意义下）只有有限个。
- 强导出无界的，若存在一个序列 $r_1, r_2, \cdots \in \mathbb{N}$，使得对任意 $i \in \mathbb{N}$，在 $D^b(A)$ 中上同调范围为 r_i 的不可分解对象有无限多个（在同构与移位意义下）。

在 [ZH16], 中已经证明，任何代数要么是导出离散代数，要么是强导出无界代数。更准确地说，一个温和代数是导出离散代数，当且仅当其有界箭图不含同伦带（定义见 [1, 第 2 节2] ）。因此，根据定理4.3的证明，可得以下结果。

推论 4.8. 设 A 是一个温和代数。那么

(1) A 是导出离散的，当且仅当 A^{CMA} 是导出离散的。(2) A 是强导出无界的，当且仅当 A^{CMA} 是强导出无界的。

4.3. 关于温和代数的同调维数。回顾 [6, 第 2 节2], 温和代数 $A = \mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$的非平凡禁路 $F = \alpha_1 \cdots \alpha_n$是箭图 $\mathcal{Q}$ 上的一条路径，并满足 $\alpha_i\alpha_{i+1} \in \mathcal{I}$。平凡禁路是由 $v \in \mathcal{Q}_0$ 对应的平凡路径，满足以 v 为终点的箭至多有一条、以 v为起点的箭至多有一条；若 α、 $\beta \in \mathcal{Q}_1$ 满足 $t(\alpha) = v = s(\beta)$，则 $\alpha\beta \in \mathcal{I}$。如果禁路 F 满足以下条件之一，我们称其为禁线程。

- 对于任意满足 $t(\beta) = s(F)$ 以及 $t(F) = s(\beta')$ 的箭 β 和 β'，我们分别有 $\beta\alpha_1 \notin \mathcal{I}$和 $\alpha_n\beta' \notin \mathcal{I}$。
- F 是一个平凡禁路（在此情况下，F 被称为平凡禁线程）。

引理 4.9. 设 A是一个至少含有一个 gentle关系环 $\mathscr{C}$ 的温和代数，并且$F = \alpha_1 \cdots \alpha_n$是长度为 n的禁路。若存在一个整数 i满足 $1 \le i \le n$，使得 α_i 是 $\mathscr{C}$上的一条箭，则 F 是 $\mathscr{C}$上的一条禁路。

证明。假设 $\mathscr{C}$ 具有如下形式

$$\mathscr{C} = c_0c_1 \cdots c_{\ell-1} \text{ whose length is } \ell.$$

于是存在一个整数 j满足 $1 \le j \le \ell$，使得 $\alpha_i = c_j$。若 $\alpha_{i+1} \neq c_{\overline{j+1}}(i \le n-1)$，其中 $\overline{x}$ 模 ℓ等于 x，则 α_{i+1} 是从 $t(\alpha_i) = t(c_j)$ 出发的一条箭。根据温和代数的定义，我们有 $\alpha_i\alpha_{i+1} = c_j\alpha_{i+1} \notin \mathcal{I}$；由于 $\mathscr{C}$ 是一个 gentle关系环，故得到矛盾。因此，$\alpha_{i+1} = c_{\overline{j+1}}$ 是 $\mathscr{C}$上的一条箭。类似地，当 $i \ge 2$时，我们有 $\alpha_{i-1} = c_{\overline{j-1}}$。我们可以通过归纳法证明此引理。□

下面的引理表明，温和代数 A 的整体维数 gl.dim$A$ 和自内射维数 inj.dim$A$ 分别可以用禁路和禁线程来描述。

引理 4.10. 设 $A = \mathrm{k}\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是一个温和代数， $\mathfrak{f}(A)$ 是 A 的所有禁路的集合， $\mathfrak{F}(A)$ 是 A 的所有禁线程的集合。那么有

(1)

$$\mathrm{gl.dim}A = \sup_{F\in\mathfrak{f}(A)} \ell(F) = \begin{cases} \infty, & A \textit{ has at least one gentle relation cycle;} \\ \sup\limits_{F\in\mathfrak{F}(A)} \ell(F), & \textit{otherwise;} \end{cases}$$

(2) [17,定理 3.4]

$$\mathrm{inj.dim}A = \sup_{F\in\mathfrak{F}(A)} \ell(F).$$

B引理 4.9，温和代数 A 的所有禁路可分为两类:

(I) 位于 gentle 关系圈上的禁路;

(II) 所有箭均不属于任何 gentle 关系圈的禁路。我们将 $\mathfrak{f}_1(A)$（分别为 $\mathfrak{f}_2(A)$）记作属于 (I)（分别为 (II)）的所有禁路的集合，那么 $\mathfrak{f}_1(A) \cup \mathfrak{f}_2(A) = \mathfrak{f}(A)$。此外，容易看出

$$\mathrm{inj.dim}A = \sup_{F\in\mathfrak{f}_2(A)} \ell(F) \tag{4.1}$$

根据引理 4.10，我们立即得到任意温和代数 A 通过其 CM-Auslander代数的禁线程得到的自内射维数描述A^{CMA}。

此外，我们还有以下推论。

推论 4.11。设 A是一个温和代数。

（1）如果以下条件之一成立——

gl.dim$A < \infty$,

$-\ \mathrm{gl.dim}A=\infty$ *and* $\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CMA}}\geq 3$,
then

$$\mathrm{inj.dim}A^{\mathrm{CMA}}\ (=\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CMA}})\ =\mathrm{inj.dim}A.$$

（2）否则,

$$\mathrm{inj.dim}A^{\mathrm{CMA}}\ (=\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CMA}})\ =2\geq\mathrm{inj.dim}A.$$

证明。 由于 A 是温和代数，因此根据推论 A^{CMA} 4.6，A^{CMA} 的所有禁路都可由

$$\mathfrak{f}(A^{\mathrm{CMA}})=(\mathfrak{f}_1(A))^*\cup\mathfrak{f}_2(A)=\mathfrak{f}_2(A^{\mathrm{CMA}}) \tag{4.2}$$

其中

$$(\mathfrak{f}_1(A))^*=\bigcup_{F=\alpha_1\cdots\alpha_n\in\mathfrak{f}_1(A)}\{\alpha_1^-\alpha_1^+,\cdots,\alpha_n^-\alpha_n^+\},\ \text{and}\ \mathfrak{f}_1(A^{\mathrm{CMA}})=\varnothing.$$

若 $\mathrm{gl.dim}A<\infty$，则 $A\cong A^{\mathrm{CMA}}$。在此情形下，$\mathrm{inj.dim}A=\mathrm{gl.dim}A=\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CM\ A}}$.

若 $\mathrm{gl.dim}A=\infty$，则 A 具有 gentle 关系圈，记为 $\mathscr{C}_1,\cdots,\mathscr{C}_r$。假设 $\mathscr{C}_i=c_{i,1}\cdots c_{i,l_i}$ 和 $s(c_{i,j})=v_{i,j}(1\leq i\leq r,\ 1\leq j\leq l_i)$。那么，$A^{\mathrm{CMA}}$ 的箭图 $\mathcal{Q}^{\mathrm{CMA}}$ 可通过将所有箭 $c_{i,j}:v_{i,j}\to v_{i,j+1}$ 拆分为两个箭 $c_{i,j}^-:v_{i,j}\to\mathfrak{v}(c_{i,j}A)$ 和 $c_{i,j}^-:\mathfrak{v}(c_{i,j}A)\to v_{i,j+1}$得到，而容许理想 $\mathcal{I}^{\mathrm{CMA}}$ 可通过将$c_{i,j}c_{i,j+1}$ 替换为 $c_{i,j}^+c_{i,j+1}^-$得到。因此，A 的任意 gentle 关系环 $\mathscr{C}_i$ 都会变为 A^{CMA} 的一个有向环$\mathscr{C}_i^*=c_{i,1}^-c_{i,1}^+\cdots c_{i,l_i}^-c_{i,l_i}^+$，其长度为 $2l_i$；并且根据 (4.2)，$\mathscr{C}_i^*$上任意禁路的长度为二，因为它是 $(\mathfrak{f}_1(A))^*$ 中的一条路径。因此，由引理 4.10 (1)，我们有

$$\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CMA}}=\sup_{F\in\mathfrak{f}(A^{\mathrm{CMA}})}\ell(F)=\sup_{F\in\mathfrak{f}_2(A^{\mathrm{CMA}})}\ell(F)\geq 2.$$

若 $\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CMA}}\geq 3$，则

$$\mathrm{inj.dim}A\overset{(4.1)}{=\!=}\sup_{F\in\mathfrak{f}_2(A)}\ell(F)=\sup_{F\in\mathfrak{f}_2(A)\cup(\mathfrak{f}_1(A))^*}\ell(F)\overset{(4.2)}{=\!=}\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CMA}}.$$

因此 (1) 成立。否则,

$$2=\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CMA}}=\sup_{F\in\mathfrak{f}_2(A^{\mathrm{CMA}})}\ell(F)=\sup_{F\in(\mathfrak{f}_1(A))^*}\ell(F)\geq\sup_{F\in\mathfrak{f}_2(A)}\ell(F)=\mathrm{inj.dim}A.$$

注意到 $\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CMA}}<\infty$，因此 $\mathrm{inj.dim}A^{\mathrm{CMA}}=\mathrm{gl.dim}A^{\mathrm{CMA}}$。我们得到 (2)。 □

注 4.12。 推论 4.11 (1) 的更一般情形是

$$\mathrm{gl.dim}\Lambda^{\mathrm{CMA}}=\max\{\mathrm{inj.dim}({}_\Lambda\Lambda),\mathrm{inj.dim}(\Lambda_\Lambda)\},$$

其中 Λ 是任意有限 CM-型 Artin 代数，其 Λ G-dim(模Λ) 大于或等于 3；且推论 4.11 (2) 对整体维数为 ≤ 2的任意有限 CM-型 Artin 代数均成立。上述结论最早由 Beligiannis 证明（见 [8, 推论 6.8 (i)、(ii)、(iii) 和 (iv)]）。

Acknowledgements

本研究得到国家自然科学基金（项目编号：11961007、12061060、12171207）和贵州省科学技术基金（项目编号：[2020]1Y405）的资助。

References

[1] K. K. Arnesen、R. Laking 和 D. Pauksztello。温和代数的有界导出范畴中不可分解复形之间的态射。*Journal of Algebra*，467(1):1–46，2016。doi:10.1016/j.jalgebra.2016.07.019。[2] M. Auslander。Gorenstein 环，以及可交换代数中的挠`（载于：代数研讨会`，由 Pierre Samuel 主持´，1966/67）。*Secrétariat Mathématique*，1(1):69，1966。[3] M. Auslander。Artin代数的表示维数。*Queen Mary College Mathematics Notes*，1971。

[4] M. Auslander 和 M. Bridger。 *Stable module theory*。美国数学会回忆录，1969。[5] M. Auslander 和 R.-O. Buchweitz。极大 Cohen-Macaulay 逼近的同调理论（载于：Pierre Samuel 荣誉研讨会，奥赛，
1987 *Mémoires de la Société Mathématique*）。（），：–。doi：。/
de France N.S. 38 5 37, 1989 10 24033 339
msmf。。[6] D. Avella-Alaminos 和 C. Geiss。温和代数的组合导出不变量。 *Journal of*
Pure and Applied Algebra 212 1 228 243, 2008 10 1016 2007 05 014 ，（）：–。doi：。/
j.jpaa。。。。[7] A. Beligiannis。Cohen-Macaulay 模、（余）挠对与虚 Gorenstein 代数。 *Journal*
of Algebra 288 1 137 211, 2005 10 1016 2005 02 022 ，（）：–。doi：。/
j.jalgebra。。。。[8] A. Beligiannis。关于有限 Cohen-Macaulay 型的代数。 *Advances in Mathematics*，226(1)，2011。doi:10.1016/j.aim.2010.09.006。[9] R.-O. Buchweitz。Gorenstein 环上的极大 Cohen-Macaulay 模与 Tate 上同调。1986。未发表手稿。多伦多大学 TSpace，https://tspace.library.utoronto.ca /handle/1807/16682。[10] M. C. Butler 和 C. M. Ringel。中间项较少的 Auslander-Reiten 序列及其在字符串代数中的应用。 *Communications in Algebra*，15(1-2):145–179，1987。doi:10.1080/00927878708823416。[11] X. Chen 和 M. Lu。偏斜温和代数的 Cohen-Macaulay Auslander代数。 *Commu-*
nications in Algebra 45 2 849 865, 2017 10 1080 00927872 2016 1175601 2015, ，（）：–。doi：。/。。
（预印本见 arXiv:1502.03948）。[12] X. Chen 和 M. Lu。温和代数的 Cohen-Macaulay Auslander代数。 *Communications in*
Algebra 47 9 3597 3613, 2019 10 1080 00927872 2019 1570225 ，（）：–。doi：。/。。
[13] X.-W. Chen。单项式代数上的 Gorenstein投射模。 *Proceedings of the Royal*
Society of Edinburgh 148 1 1115 1134, 2018 10 1017 0308210518000185 ，A（）：–。doi：。/
S。[14] W. Crawley-Boevey。双串代数的驯性。
Archiv der Mathematik (Basel) 65 5 399 407, ，（）：–。doi：。/
1995 10 1007 01198070
BF。[15] E. E. Enochs 和 O. M. G. Jenda。Gorenstein 内射模与投射模。 *Mathematische*
Zeitschrift 220 1 611 633, 1995 10 1007 02572634 ，（）：–。doi：。/
BF。[16] E. E. Enochs 和 O. M. G. Jenda。 *Relative homological algebra*，第30卷。《数学中的 De Gruyter 论著》，2000。柏林、纽约：Walter de Gruyter，2011 doi:10.1515/9783110803662。[17] C. Geiss 和 I. Reiten。温和代数是 Gorenstein 代数，载于*topics* 10 *Representations of algebras and related* 15 10, 2002 ，第届国际会议论
文集，多伦多，加拿大，7月–8月。*Amer. Math. Soc. Providence RI Fields Institute Comm.*，1(45):129–133，2005。doi:10.1090/fic/045。[18] R. Hafezi。关于 Cohen-Macaulay Auslander代数。arXiv:1802.05156，2018。[19] O. Iyama、K. Kato 和 J.-I. Miyachi。同伦范畴与 Cohen-Macaulay 模的拼接。 *Journal of K-theory*，8(3):507–542，2011。10.1017/is011003007jkt143。[20] F. K¨onig 和 P. Zhang。从 CM-有限到 CM-自由。 *Journal of Pure and Applied Algebra*，220(2):782–801，2016。10.1016/j.jpaa.2015.07.016。[21] Z.-W. Li 和 P. Zhang。Gorenstein投射模的一种构造。
Journal of Algebra，323 6 1802 1812，2010 10 1016 2009 12 030（）：–。doi：。/j.jalgebra。。。。[22] Z.-W. Li 和 P. Zhang。有限 Cohen-Macaulay 型的 Gorenstein 代数。 *Advances in Mathematics*，223 1 728 734，2010 10 1016 2009 09 003（）：–。doi：。/j.aim。。。。[23] X.-H. Luo 和 P. Zhang。单表示与 Gorenstein投射模。 *Pacific Journal of*
Mathematics 264 1 163 194, 2013 10 2140 2013 264 163 ，（）：–。doi：。/
pjm。。。。[24] K. Mousavand。 τ-双倾有限性与双串代数。arXiv:1904.1151，2019。[25] S. Pan。Cohen-Macaulay Auslander代数的导出等价。 *Journal of Pure and Applied*
Algebra 216 2 355 363, 2012 10 1016 2011 06 017 ，（）：–。doi：。/
j.jpaa。。。。[26] Y. Qin。拼接、Cohen-Macaulay Auslander代数与 Gorenstein 投射猜想。arXiv:2001.01163，2020。[27] R. Vila-Freyer 和 W. Crawley-Boevey。双串代数的结构。 *Journal of the London*
Mathematical Society 57 1 41 54, 1998 10 1112 0024610798005821 ，（）：–。doi：。/
S。[28] D. Vossieck，具有离散导出范畴的代数， *J. Algebra*，243（2001），168-176。[29] B.-L. Xiong 和 P. Zhang。三角矩阵 Artin 代数上的 Gorenstein投射模。 *Jour-*
nal of Algebra and its Applications 11 04 1250066, 2012 10 1142 0219498812500661 ，（）：。doi：。/S。
[30] C. Zhang，关于强导出无界型。 *Journal of Pure and Applied Algebra*，220（
2016 1462 1474 10 1016 2015 09 012），-。doi：。/j.jpaa。。。。C. Zhang，Artin代数的导出
[31]
Brauer-Thrall 型定理 I。 *Communications in Algebra*，44 2016 3509 3517 10 1080 00927872 2015（），-。doi：。/。。
1085546
[32] C. Zhang、Y. Han，导出模范畴的 Brauer-Thrall 型定理。
Algebra and Representation Theory 19 2016 1369 1386 10 1007 10468 016 9622 ，（），-。doi：。/
7
s---[33] P. Zhang。Gorenstein投射模与对称拼接。
Journal of Algebra 388 65 80, ：–。doi：。/
2013 10 1016 2013 05 008
j.jalgebra。。。

Y.-Z. Liu School of Mathematics and statistics Guizhou University Guiyang 550025 P. , , R. China
, ,*Email address*: liuyz@gzu.edu.cn / yzliu3@163.com

C. Zhang School of Mathematics and statistics Guizhou University Guiyang 550025 P. , , „ R. China
Email address: zhangc@amss.ac.cn