arXiv:2303.06646v1 [math.RT] 12 Mar 2023

伪簇倾斜子范畴的正合范畴的商 *†

JieXu, Yuefei Zheng ‡*College of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, Shaanxi Province, China*Email addresses: xujiejie@nwafu.edu.cn; zhengyf@nwafu.edu.cn

摘要

我们从正合范畴被簇倾斜子范畴取商后成为阿贝尔范畴这一事实出发，引入伪簇倾斜子范畴的概念。我们证明，在伪簇倾斜的情形下，所得的商总是半阿贝尔的。此外，当且仅当满足某些自正交条件时，它才是阿贝尔的。我们重新考察了由分裂合流得到的合流的阿贝尔商范畴，并得到存在唯一的正合子结构，使其成为簇商。

1 引言

设 $\mathcal{T}$ 是一个三角范畴， $\triangle(\mathcal{T})$ 是由三角组成的加性范畴。Neeman 在其专著 [11, 第 5 章1] 中证明， $\triangle(\mathcal{T})$ 模掉类似同伦关系后的商必为阿贝尔范畴。当我们用合流替换三角时，正合范畴的情形同样如此，见 [12, 第 1]节。事实上，Lin 对后来的阿贝尔结构进行了更为详细的讨论，见 [8]。在同调代数中，众所周知，构造阿贝尔商的重要方法之一是簇倾斜理论。

我们大致回顾一下上述观点下的簇倾斜理论。簇范畴中的簇倾斜对象这一概念最早出现在 [2] 中。簇范畴关于一个簇倾斜对象的加性闭包的商，同相应的簇倾斜代数的模范畴同构，因而是一个阿贝尔范畴；这是 [3] 中的主要结果之一。Koenig 和 Zhu 证明，任何具有簇倾斜子范畴的三角范畴中都存在这一阿贝尔商[7]。在某些温和条件下，Beligiannis 证明了阿贝尔商可以刻画簇倾斜子范畴 [1, 定理 F]。正合范畴的情形也在 [5, 9] 中得到了研究。

设 $(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 是一个正合范畴，其正合结构为 $\mathcal{E}$。那么融合范畴，记作 $\mathcal{E}(\mathcal{M})$，也是一个正合范畴，其正合结构按次数计算。我们将 $\mathcal{M}$ 上的这一正合结构记为 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$。设 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 是分裂合流类。我们的重点是，如何将阿贝尔商 $\mathcal{E}(\mathcal{M})/\mathcal{SM}$ 与 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 中的簇倾斜理论联系起来。

让我们回顾一下正合范畴中簇倾斜子范畴的定义。加性子范畴 $\mathcal{P}$ of $(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 是簇倾斜子范畴，当且仅当：(1) $\mathcal{P}$ 是强函子有限的；(2) $\mathcal{P}$ 是极大自正交的。可以看出，该定义等价于：(1′) 对任意 $X\in\mathcal{M}$,

2020 Mathematics Subject Classification: 18E10, 18E13
†*Keywords*: 范畴的商；阿贝尔范畴；融合。
‡通讯作者

存在两个融合 $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Q_0 \to Q_1 \to 0$ 和 $0 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\beta} X \to 0$，其中 Q_0、Q_1、P_0 和 $P_1 \in \mathcal{P}$，且 α（分别地，β）是一个 $\mathcal{P}$-预包络（分别地，$\mathcal{P}$-预覆盖）；(2′) $\mathcal{P}$ 是自正交的。若 $\mathcal{P}$ 满足 (1′)，则称 $\mathcal{P}$ 为 *pseudo-cluster tilting subcategory*。一个有趣的现象是，$\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 总是 ($\mathcal{E}(\mathcal{M})$ $\mathcal{E}$) 的伪簇倾斜子范畴，参见命题 4.1。因此，我们考虑正合范畴关于伪簇倾斜子范畴的商，并得到如下结果。与 [1, 定理 F] 和 [9, 定理 1.6] 比较。

定理 1.1. 设 $\mathcal{M}$ 为一个正合范畴，$\mathcal{P}$ 为一个伪簇倾斜子范畴 .

(1) $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 是一个半阿贝尔范畴;

(2) $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 是一个阿贝尔范畴，当且仅当以下条件之一成立

(i) 子范畴 $\mathcal{P}$ 关于 $\mathcal{S}$ 是自正交的；(ii) 子范畴 $\mathcal{P}$ 关于 $\mathcal{T}$ 是自正交的。

其中 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 是融合的两个特殊类，详见第 3 节。

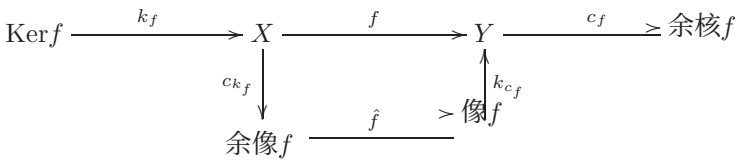
接下来我们考察这一对（$\mathcal{S}(\mathcal{M})$，（$\mathcal{E}(\mathcal{M})$ $\mathcal{E}$）），并将定理1.1 中的自正交条件推广到正合子结构（$\mathcal{E}(\mathcal{M})$ $\mathcal{E}_0$），其中融合在中间次数处分裂。阿贝尔商 $\mathcal{E}(\mathcal{M})/\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 与簇倾斜理论之间的关系如下。参见[12, 第 1] 节和 [8, 定理 4。8]。

定理 1.2. 设（$\mathcal{E}$，$\mathcal{M}$）为一个正合范畴。则 $\mathcal{E}(\mathcal{M})/\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 是一个阿贝尔范畴。此外，（$\mathcal{E}(\mathcal{M})$ $\mathcal{E}_0$）是使其成为簇商的唯一正合结构。

本文组织如下。在第 2 节中，我们给出预备定义和结果。在第 3 节中，我们将证明定理 1.1，证明分为两部分。在第 4 节中，我们讨论对（$\mathcal{S}(\mathcal{M})$，（$\mathcal{E}(\mathcal{M})$ $\mathcal{E}$）并证明定理 1.2。在本文中，对于一个加性范畴，我们总是假设它在同构下封闭。对于一个加性满子范畴，我们是指它在有限直和及直和项下封闭。

2 预备知识

本节介绍一些定义和后续使用的同调事实。设 $\mathcal{M}$ 为一个加性范畴，且 $f\colon X \to Y$ 为一个态射。f 的弱核是一个态射 $g\colon K \to X$，满足$fg = 0$，使得任意满足 $fh = 0$的态射 h都可分解为经过 g。f 的弱核 g 是核，当且仅当它是一个单态射。对偶地，弱余核和余核也有相应的事实。我们记 $f\colon X \to Y$的核为 $k_f\colon \mathrm{Ker}f \to X$，并记其余核为 $c_f\colon Y \to \mathrm{Coker}f$。$f$的余像，即 k_f的余核，记为$c_{k_f}\colon X \to \mathrm{Coim}f$。$f$的像，即 c_f的ˆ核，记为 $k_{c_f}\colon \mathrm{Im}f \to Y$。存在唯一的态射 $f\colon \mathrm{Coim}f \to \mathrm{Im}f$，使下图交换。



定义 2.1。 *([4, 13])* 一个 $\mathcal{M}$ 具有核和余核的加性范畴称为半阿贝尔范畴ˆ， $f:\ X \to Y$对于任意态射，典范态射 $f:\ \mathrm{Coim} f \to \mathrm{Im} f$ 既是满态射ˆ又是单态射；当 f 是同构时，它称为阿贝尔范畴。

注 2.2. 在一些文献中，同时为满态射和单态射的态射被称为正则*[13]*。可以看出，半阿贝尔范畴是阿贝尔范畴，当且仅当正则态射与同构相重合。

设 $\mathcal{P}$是 $\mathcal{M}$的一个加性满子范畴。令 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y)$ 表示 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)$ 中可经由 $\mathcal{P}$中的某个对象分解的态射所组成的子集。则 $\mathcal{I}:=\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y) | X \text{ 是 } Y \in \mathcal{M}\}$ 的一个理想，相应的商范畴记为 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$。这是一个积在 $\mathcal{M}$中计算的加性范畴。存在一个加性函子 $\mathcal{Q}:\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{P}$，它是满且稠密的。对于一个对象 $X \in \mathcal{M}$，我们将 $\underline{X}$ 记为 X 在 $\mathcal{Q}$下的像。因此， $\underline{X}$ 在 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中为 0，当且仅当 $X \in \mathcal{P}$。对于 $f:\ X \to Y$中的一个态射 $\mathcal{M}$，我们将 $\underline{f}$ 记为 f 在 $\mathcal{Q}$下的像。则 $\underline{f}$ 在$\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中为 0，当且仅当它可经由 $\mathcal{P}$中的某个对象分解。我们需要以下事实，参见 [6, 定理 2.2]。

引理 2.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个加性范畴， $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个加性满子范畴。设 $f:\ X \to Y$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个态射。那么， $\underline{f}$ 是 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中的一个同构，当且仅当存在 P 和 Q 属于 $\mathcal{P}$，使下列 $\mathcal{M}$ 中的交换图补全为:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle p} \\ X \oplus P & \xrightarrow{\widetilde{f}} & Y \oplus Q \end{array}$$

˜其中 f 是一个同构，且垂直态射分别为典范嵌入和投影。

注记 2.4. 在上述交换图中，我们可以取 $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、 $p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$。因此，根据矩阵记号，我们有 $\widetilde{f} = \begin{pmatrix} f & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其中 $b:\ P \to Y$、 $d:\ P \to Q$ 以及 $c:\ X \to Q$.

我们分别回顾预覆盖和预包络的定义。设态射 $f:\ P \to X$ 属于 $\mathcal{M}$，且满足 $P \in \mathcal{P}$，如果任意态射 $g:\ Q \to X$ 满足 $Q \in \mathcal{P}$ 都可经过 f 分解，则称其为 X 的 $\mathcal{P}$-预覆盖。若任意 $X \in \mathcal{M}$ 都有一个 $\mathcal{P}$-预覆盖，则称 $\mathcal{P}$ 为逆变有限子范畴。预包络和协变有限子范畴的概念由对偶地定义。

现在设 $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ 是一个正合范畴，其中 $\mathcal{E}$ 是相应的正合结构，即融合类。若对于任意 $X \in \mathcal{M}$，都存在一个 $\mathcal{P}$-预覆盖 $f:\ P \to X$ 与 $\mathcal{E}$ 相容，即 $f:\ P \to X$ 是一个膨胀，则称 $\mathcal{P}$ 为强逆变有限。对偶地，我们有强协变有限的概念。若 $\mathcal{P}$ 同时是强逆变有限和强协变有限的，则称子范畴 $\mathcal{P}$ 是强函子有限的。

我们称 $\mathcal{M}$ 中的融合 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, -)$-正合，若对于任意 $P \in \mathcal{P}$，序列 $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(P,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(P,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(P,Z) \to 0$ 在阿贝尔

群范畴中是正合的。对偶地，我们称 $\mathcal{M}$ 中的融合 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合，若对于任意 $P \in \mathcal{P}$，序列 $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(Z,P) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(Y,P) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,P) \to 0$ 是正合的。

引理 2.5. 设 $\mathcal{M}$为一个正合范畴， $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{M}$的一个满子范畴。

(1) 如果 $\mathcal{P}$ 是强协变有限的，那么对于 $\mathcal{M}$中的任意态射 $f: X \to Y$，存在某个$Q \in \mathcal{P}$ 以及一个融合 $0 \to X \to Y \oplus Q \to Z \to 0$，该融合是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的。(2) 如果 $\mathcal{P}$ 是强逆变有限的，那么对于 $\mathcal{M}$中的任意态射 $g: Y \to Z$，存在某个$P \in \mathcal{P}$ 以及一个融合 $0 \to X \to Y \oplus P \to Z \to 0$，该融合是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},-)$-正合的。

证明。(1) 由于 $\mathcal{P}$ 是强协变有限的，我们可以取一个 $\mathcal{P}$-预包络 $\alpha: X \to Q$，它是一个膨胀。考虑 $\alpha: X \to Q$ 和 $f: X \to Y$ 的如下推出。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow \\ Q & \longrightarrow & Z \end{array}$$

我们有一个融合 $0 \to X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ -\alpha \end{pmatrix}} Y \oplus Q \longrightarrow Z \to 0$ 在 $\mathcal{M}$ 中，由 [4, 命题 2。12]。由于 α 是一个

$\mathcal{P}$-预包络，对于任意态射 $\beta: X \to Q'$ 满足 $Q' \in \mathcal{P}$，存在 $\gamma: Q \to Q'$ 使得 $\beta = \gamma\alpha$，于是我们得到中的如下交换图 $\mathcal{M}$。

$$\begin{array}{ccccc} & & Q' & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & -\gamma \end{pmatrix}} & \\ & & {\scriptstyle\beta}\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ -\alpha \end{pmatrix}} & Y \oplus Q \end{array}$$

也就是说，融合 $0 \to X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ -\alpha \end{pmatrix}} Y \oplus Q \longrightarrow Z \to 0$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的。

(2) 是其对偶。

□

3 商范畴 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$

设 $\mathcal{M}$ 是一个正合范畴， $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个加性满子范畴。在本节中，我们考察商范畴 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 的阿贝尔结构。我们需要以下设置。

▲ $\mathcal{P}$ 是强协变有限的，并且对于任意 $X \in \mathcal{M}$，存在一个融合 $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Q_0 \to Q_1 \to 0$，其中 Q_0、$Q_1 \in \mathcal{P}$ 使得 α 是一个 $\mathcal{P}$-预包络。▼ $\mathcal{P}$ 是强逆变有限的，并且对于任意 $X \in \mathcal{M}$，存在一个融合 $0 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\beta} X \to 0$，其中 P_0、$P_1 \in \mathcal{P}$ 使得 β 是一个 $\mathcal{P}$-预覆盖。

注 3.1。（1） ▲ 中的融合 $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Q_0 \to Q_1 \to 0$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的；

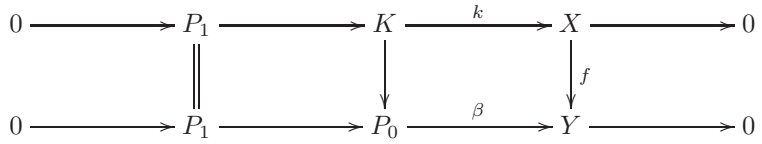
（2） ▼ 中的融合 $0 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\beta} X \to 0$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, -)$-正合的；

(3) 它 可以看出，如果 $\mathcal{P}$ 同时满足 ▲ 和 ▼，则 $\mathcal{P}$ 是一个伪簇倾斜子范畴。

命题 3.2. 设 $\mathcal{M}$ 是一个正合范畴， $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个满子范畴。

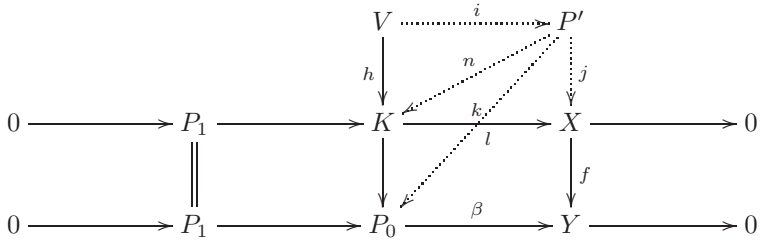
（1）如果 $\mathcal{P}$ 满足条件 ▲，那么 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 有余核。（2）
如果 $\mathcal{P}$ 满足条件 ▼，那么 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 有核。

证明。我们只证明（2），（1）只是其对偶。设 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathcal{M}$ 中的任意态射。根据假设，存在一个融合 $0 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\beta} Y \to 0$，其中 P_0、$P_1 \in \mathcal{P}$，且 $\beta\colon P_0 \to Y$ 是一个 $\mathcal{P}$-预覆盖。考虑 f 和 β 在 $\mathcal{M}$ 中的如下拉回。



我们断言 $\underline{K}$ 是 $\underline{f}$ 的核。设存在态射 $g\colon U \to X$，其位于 $\mathcal{M}$ 中，并且 $\underline{fg}=0$ 在 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中成立，则存在 P 中的一个对象 $\mathcal{P}$，使得 fg 经由 P 分解。由于 $\beta\colon P_0 \to Y$ 是 $\mathcal{P}$-预覆盖，因此 fg 经由 P_0 分解。根据拉回的泛性质，我们得到 g 经由 K 分解，因此 $\underline{K}$ 是 $\underline{f}$ 的弱核。

还需证明 $\underline{k}$ 是 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中的单态射。设 $h\colon V \to K$ 是 $\mathcal{M}$ 中的对象，并假设 $\underline{kh}=0$。于是存在一个对象 $P' \in \mathcal{P}$ 以及态射 $i\colon V \to P'$ 和 $j\colon P' \to X$，使得 $kh = ji$。由于 $\beta\colon P_0 \to Y$ 是一个 $\mathcal{P}$-预覆盖，存在态射 $l\colon P' \to P_0$，使得 $fj = \beta l$。我们在 $\mathcal{M}$ 中有如下交换图。



根据拉回的泛性质，存在唯一的态射 $n\colon P' \to K$，使得 $j = kn$。于是得到 $k(ni - h) = 0$。因此，态射 $ni - h$ 可分解通过 P_1，从而 $ni - h = 0$。这意味着 $\underline{h} = 0$，且 $\underline{k}$ 是 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中的单态射。因此，$\underline{k}\colon \underline{K} \to \underline{X}$ 是 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中 $\underline{f}$ 的核。

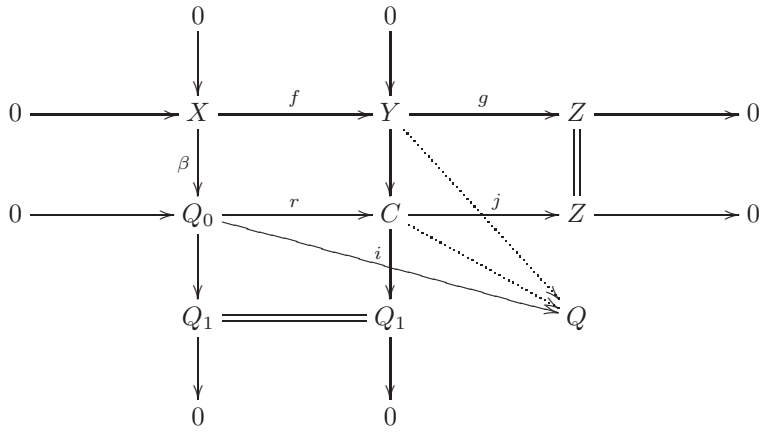
□

引理 3.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个正合范畴， $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 的满子范畴。

(1) 若 $\mathcal{P}$ 满足条件 ▲，则对于任意 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-, \mathcal{P})$-正合的融合 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$，有 $\underline{Z}$ 是 $\underline{f}$ 的余核。

(2) 如果 $\mathcal{P}$ 满足条件 ▼，那么对于任意 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, -)$-精确的融合 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$，我们有 $\underline{X}$ 是 $\underline{g}$的核。

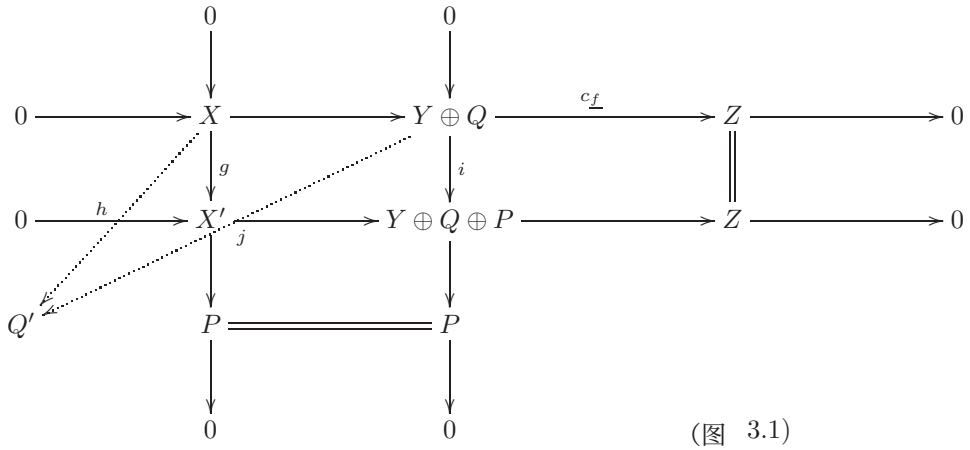
证明。为方便起见，我们只证明（1），（2）可通过类似论证得到。对于 $\mathcal{M}$中的对象 X，存在一个融合 $0 \to X \xrightarrow{\beta} Q_0 \longrightarrow Q_1 \to 0$，其中 Q_0、$Q_1 \in \mathcal{P}$ 和 $\beta\colon\ X \to Q_0$是一个 $\mathcal{P}$-预包络。考虑 f 的如下推出图：$X \to Y$ 以及 $\mathcal{M}$中的 $\beta\colon\ X \to Q_0$。



设 Q 是 $\mathcal{P}$ 中的任意对象，且 $i\colon\ Q_0 \to Q$ 是一个任意态射。由于融合 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的，因此存在一个态射 $j\colon\ Y \to Q$，使得 $i\beta = jf$。根据推出的泛性质，存在唯一的态射 $C \to Q$，使得 i经由 r 分解：$Q_0 \to C$。这表明第二行是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的。由于 $Q_0 \in \mathcal{P}$，我们推断第二行是分裂的。因此，我们得到 $C \cong Q_0 \oplus Z$ 在 $\mathcal{M}$ 中，故根据引理 2.3，$\underline{j}\colon\ \underline{C} \to \underline{Z}$ 是 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中的同构。根据命题 3.2，$\underline{g}\colon\ \underline{Y} \to \underline{Z}$ 是 $\underline{f}$ 的余核。 □

定理 3.4. 设 $\mathcal{M}$ 是一个正合范畴，$\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个伪簇倾斜子范畴。则 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 是一个半阿贝尔范畴。

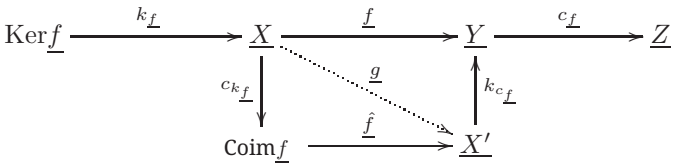
证明。设 $f\colon\ X \to Y$ 属于 $\mathcal{M}$。由引理 2.5，存在一个融合 $0 \to X \to Y \oplus Q \to Z \to 0$，满足 $Q \in \mathcal{P}$，且其为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合。由引理 3.3，知 $\underline{Z}$是 $\underline{f}$的余核。我们还可以得到一个融合 $0 \to X' \to Y \oplus Q \oplus P \to Z \to 0$，满足 $P \in \mathcal{P}$，且其为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},-)$-正合，于是 $\underline{X'}$ 是 $c_{\underline{f}}$的核。设 $i\colon\ Y \oplus Q \to Y \oplus Q \oplus P$为典范嵌入。于是得到如下交换图。



（图 3.1）

我们断言， $\underline{g}$ 是 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$中的满态射。事实上，对于任意态射 $h\colon\ X \to Q'$，满足 $Q' \in \mathcal{P}$，由于第一行是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的，存在态射 $j\colon\ Y \oplus Q \to Q'$，使得 h 可经由 $X \to Y \oplus Q$分解。由于中间列分裂， j 可经由 i分解。这意味着 h 可经由 g分解，从而第一列是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的。由引理 3.3， $\underline{P}$ 是 $\underline{g}$在 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$中的余核。由 $P \in \mathcal{P}$这一事实，我们推得 $\underline{g}$ 是 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中的满态射。

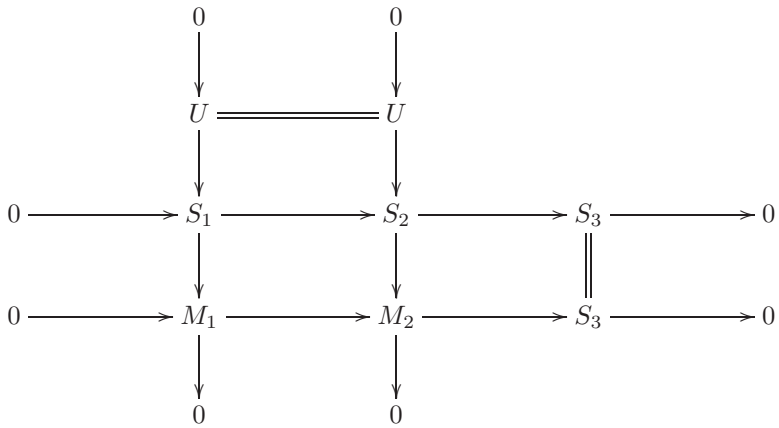
由于 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 既有核又有余核，因此我们在 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$中得到如下交换图。



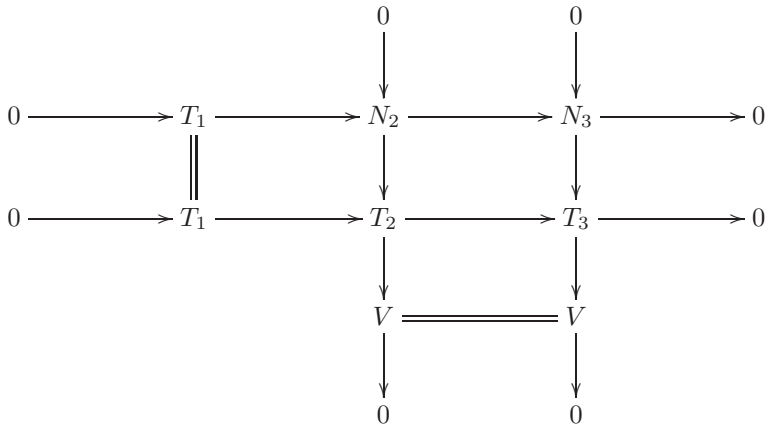
ˆ ˆ 可以看出，典范态射 $\underline{f}$ 是满态射。对偶地，我们可以证明 $\underline{f}$ 是单态射。因此， $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 是一个半阿贝尔范畴，正如所要求的那样。 □

在本节余下部分，我们检验商 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$的阿贝尔性。由于我们已经证明$\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 总是一个半阿贝尔范畴，因此我们只需证明 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$中的任意正则态射都是同构。注意，如果 $\mathcal{P}$ 是一个簇倾斜子范畴，即 $\mathcal{P}$ 相对于所有融合都是自正交的，那么 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 根据 [5]总是一个阿贝尔范畴。下面，我们引入两类特殊的融合 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$。

若融合 $0 \to S_1 \to S_2 \to S_3 \to 0$ 出现在如下交换图中，则称其属于 $\mathcal{S}$，其中第二列中的融合是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},-)$-正合的，第三行中的融合是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的。



对偶地，若融合 $0 \to T_1 \to T_2 \to T_3 \to 0$ 出现在以下交换图中，则它属于 $\mathcal{T}$；其中第二列中的融合是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的，第一行中的融合是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},-)$-正合的。



注 3.5. 读者可以验证以下两个断言成立。

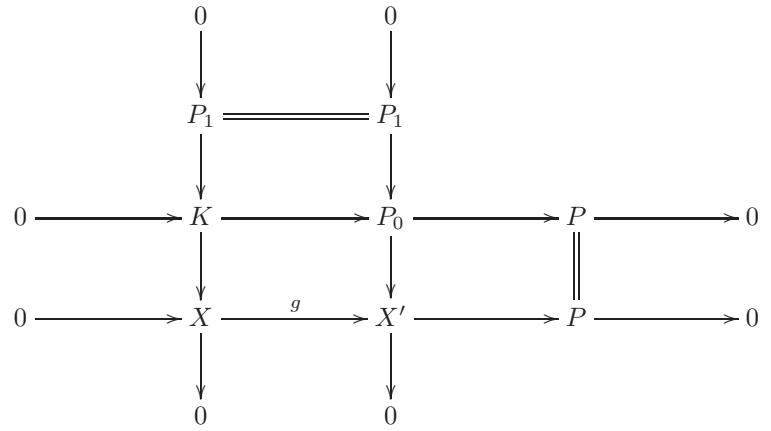
(1) 若一个融合是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},-)$-正合或 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合，则它属于 $\mathcal{S}$；(2) 若一个融合是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},-)$-正合或 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合，则它属于 $\mathcal{T}$。

定理 3.6. 设 $\mathcal{M}$ 为一个正合范畴，$\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{M}$ 的伪簇倾斜子范畴。则以下命题等价。

(1) $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 是一个阿贝尔范畴；(2) 子范畴 $\mathcal{P}$ 关于 $\mathcal{S}$ 是自正交的；(3) 子范畴 $\mathcal{P}$ 关于 $\mathcal{T}$ 是自正交的。

证明。我们只证明 (1) 与 (2) 等价，(1) 与 (3) 的等价性是对偶的。

(2)⇒(1) 我们将证明，$\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中的正则态射必为同构。为方便起见，我们沿用定理 3.4 证明中的记号。设 $\underline{f}\colon \underline{X}\to\underline{Y}$ 是 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中由 $f\colon X\to Y$ 在 $\mathcal{M}$ 中诱导的一个单态射。于是得到融合 $0\to X\xrightarrow{g} X'\to P\to 0$，其中 $P\in\mathcal{P}$，该融合如图 3.1 所示是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的。对于对象 X'，存在一个融合 $0\to P_1\to P_0\to X'\to 0$，其中 P_0、$P_1\in\mathcal{P}$，该融合是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},-)$-正合的。考虑如下交换图。



可以证明，融合 $0 \to K \to P_0 \to P \to 0$ 属于 $\mathcal{S}$。考虑图 3.1 中 $\mathcal{M}$ 内的如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \oplus Q \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ X' & \longrightarrow & Y \oplus Q \oplus P \end{array}$$

它在半阿贝尔范畴 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$中诱导出如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xrightarrow{\underline{f}} & \underline{Y} \oplus \underline{Q} \\ {\scriptstyle \underline{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{i}} \\ \underline{X'} & \xrightarrow{k_{c_{\underline{f}}}} & \underline{Y} \oplus \underline{Q} \oplus \underline{P} \end{array}$$

由于 $\underline{i}$ 根据引理2.3 是同构，且 $\underline{f}$ 是单态射，我们推断 $\underline{g}$ 是单态射。这意味着 K 属于 $\mathcal{P}$，因为 $\underline{K}$ 是 $\underline{g}$ 的核（根据命题3.2）。我们有融合 $0 \to K \to P_0 \to P \to 0$ 分裂。因此，$0 \to X \xrightarrow{g} X' \to P \to 0$ 也分裂。于是，在上述图中，两列在 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$中全都是同构，因此 $\underline{f}$ 是一个核。这意味着 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 中的任意单态射都必须是一个核。其余内容是众所周知的，见 [10,第 199]页。

(1)⇒(2) 设 $0 \to P \to X \to Q \to 0$ 是一个融合，其中 P、 $Q \in \mathcal{P}$ 属于 $\mathcal{S}$。那么我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & U & = & U & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & X & \xrightarrow{p} & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{m} & M_2 & \xrightarrow{q} & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

其中第三行为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\ \mathcal{P})$-正合。由此根据引理3.3，可得 $\underline{m}$： $\underline{M_1} \to \underline{M_2}$ 是一个满态射。由于第二列是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},\ -)$-正合，可以验证 P 是 $\underline{m}$在 $\mathcal{M}/\mathcal{P}$中的一个弱核，因此 $\underline{m}$ 是一个单态射。根据假设， $\mathcal{M}/\mathcal{P}$ 是一个阿贝尔范畴，这表明 $\underline{m}$ 是一个同构。

我们有如下交换图 $\mathcal{M}$ 其中 P'， $P'' \in \mathcal{P}$根据引理 2.3。

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{m} & M_2 \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle p} \\ M_1 \oplus P' & \xrightarrow{\widetilde{m}} & M_2 \oplus P'' \end{array}$$

由于 $\widetilde{m}=\begin{pmatrix} m & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是同构。记其逆映射为 $\widetilde{m}^{-1}=\begin{pmatrix} m_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$。我们有$m_1m+b_1c=1$。考虑态射 $c\colon\ M_1\to P''$，由于 $0\to M_1\xrightarrow{m}M_2\to Q\to 0$ 是 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(-,\mathcal{P})$-正合的，存在 $v\colon\ M_2\to P''$ 使得 $c=vm$。因此， m 是一个截面，且 $0\to M_1\xrightarrow{m}M_2\to Q\to 0$分裂。容易看出 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},p)=\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},r)\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathcal{P},q)$是一个满态射，这意味着$0\to P\to X\to Q\to 0$ 分裂。因此，满子范畴 $\mathcal{P}$ 关于 $\mathcal{S}$是自正交的。

□

4 重新审视合流范畴

设 $(\mathcal{M},\mathcal{E})$ 是带有正合结构 $\mathcal{E}$ 的正合范畴。本节将重新审视 $\mathcal{M}$ 的合流范畴，记为 $\mathcal{E}(\mathcal{M})$。 $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ 中的对象都是 $\mathcal{M}$ 的合流，我们总是将合流 $0\to X_1\xrightarrow{x_1}X_2\xrightarrow{x_2}X_3\to 0$ 视为一个集中在次数 -1、0 和 1 上的复形，简写为 $X^\bullet$。一个态射 $f^\bullet\colon\ X^\bullet\to Y^\bullet$ 是如下交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

众所周知， $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ 是一个加性范畴。我们在 $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ 上引入四种正合结构。第一种是逐次数计算的通常正合结构，记为 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$。第二种是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\mathcal{E}_0^{-1})$，即 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 中在次数 0 和 -1 上分裂的合流。对偶地，我们有 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^1)$。最后一种是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$，即 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 中在次数 0 上分裂的合流。于是可以看出

$$(\mathcal{E}(\mathcal{M}),\mathcal{E}_0^{-1})\preceq(\mathcal{E}(\mathcal{M}),\mathcal{E}_0)\preceq(\mathcal{E}(\mathcal{M}),\mathcal{E})$$

$$(\mathcal{E}(\mathcal{M}),\mathcal{E}_0^{1})\preceq(\mathcal{E}(\mathcal{M}),\mathcal{E}_0)\preceq(\mathcal{E}(\mathcal{M}),\mathcal{E})$$

下文中，为简便起见，我们始终将 $0\to X_1\xrightarrow{x_1}X_2\xrightarrow{x_2}X_3\to 0$ in $\mathcal{M}$ 中的一个融合写作 $X_1\xrightarrow{x_1}X_2\xrightarrow{x_2}X_3$。

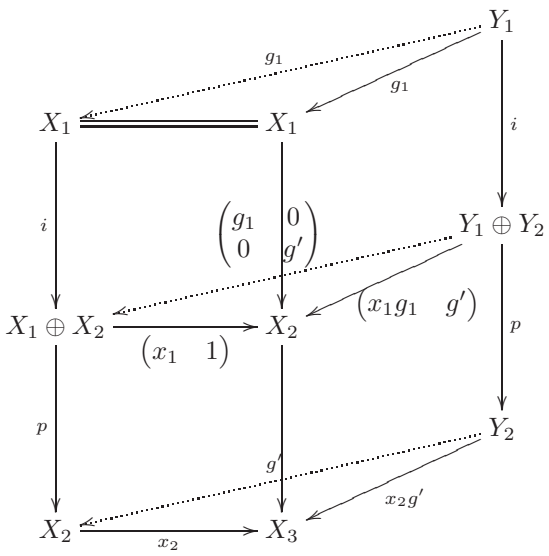
设 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 是由所有分裂合流组成的 $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ 的满子范畴。对于任意对象$X^\bullet$：$0\to X_1\xrightarrow{x_1}X_2\xrightarrow{x_2}X_3\to 0$ in $\mathcal{E}(\mathcal{M})$，我们得到如下图表，其中 i 和 p 分别是典范嵌入和投影。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X_1 & = & X_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle x_1} & & \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\binom{1}{-x_1}} & X_1\oplus X_2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \end{pmatrix}} & X_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle x_2} & & \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{-x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

可以检查出，上述图表中的第一列和第二列是分裂的，分别记为 $P_1^\bullet$和 $P_0^\bullet$。因此，我们在

$(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^{-1}) \preceq (\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 中得到一个融合 $P_0^\bullet, P_1^\bullet \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$。对偶地，我们在 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^1) \preceq (\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 中得到一个融合 $0 \to X^\bullet \xrightarrow{\beta^\bullet} Q_0^\bullet \to Q_1^\bullet \to 0$，其中 $Q_0^\bullet, Q_1^\bullet \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$。

现在令 $Y^\bullet$ 为 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 中的任意对象。则在同构意义下，不妨设 $Y^\bullet$ 具有 $0 \to Y_1 \xrightarrow{i} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{p} Y_2 \to 0$ 的形式，其中 i 和 p 分别为典范嵌入和投影。令 $g^\bullet : Y^\bullet \to X^\bullet$ 为任意态射。则有如下图表。



这表明 $P_0^\bullet \xrightarrow{\alpha^\bullet} X^\bullet$ 是一个 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$-预覆盖。对偶地，可以证明 $X^\bullet \xrightarrow{\beta^\bullet} Q_0^\bullet$ 是一个 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$-预包络。因此， $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 的强函子有限子范畴。我们已经证明了以下结果。

命题 4.1. 设 $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ 为一个正合范畴。则 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 中的一个伪簇倾斜子范畴。

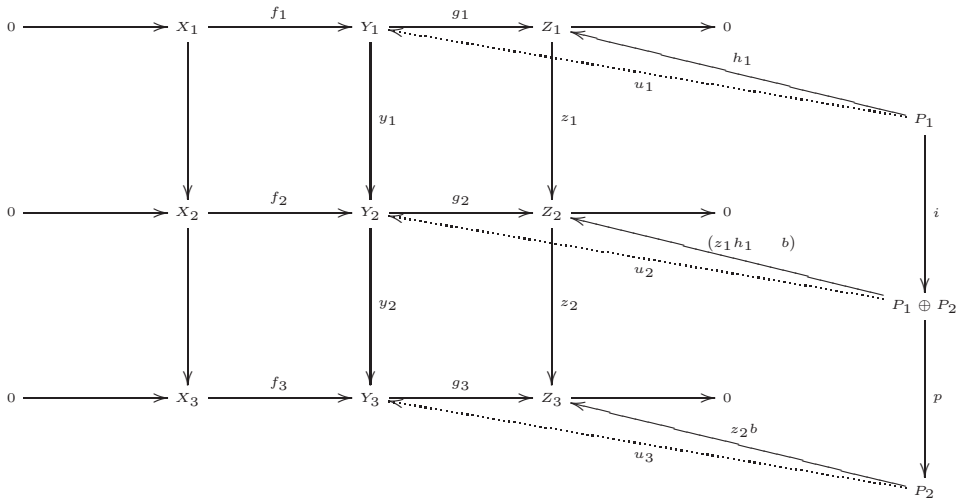
引理 4.2. 设 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 和 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 如上。设 $S\colon\ 0 \to X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \to 0$ 是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 中的一个融合。

(1) S 是 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{E}(\mathcal{M})}(\mathcal{S}(\mathcal{M})\ -)$-精确的，当且仅当它属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\mathcal{E}_0^{-1})$;

(2) S 是 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{E}(\mathcal{M})}(-, \mathcal{S}(\mathcal{M}))$-精确的，当且仅当它属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^1)$。

证明。我们只证明 (1)，(2) 是其对偶。设 S 是 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{E}(\mathcal{M})}(\mathcal{S}(\mathcal{M})\ -)$-精确的。根据命题 4.1，我们取 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^{-1})$ 中的一个融合 $0 \to P_1^\bullet \to P_0^\bullet \xrightarrow{r^\bullet} Z^\bullet \to 0$，其中有 $P_0^\bullet, P_1^\bullet \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$。于是 $r^\bullet$ 经过 $g^\bullet$分解。这意味着 S 在次数 -1 和 0 处分裂，因此它属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^{-1})$。

反之，假设 S属于（$\mathcal{E}(\mathcal{M})\mathcal{E}_0^{-1}$）。令 $P^\bullet$为 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 中的任意对象。则不妨设在同构意义下，$P^\bullet$具有 $0 \to P_1 \xrightarrow{i} P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{p} P_2 \to 0$ 的形式，其中 i 和 p 分别为典范嵌入和投影。令 $h^\bullet : P^\bullet \to Z^\bullet$ 为任意态射。则有如下图表。



存在两个态射 $s_1 : Z_1 \to Y_1$ 和 $s_2 : Z_2 \to Y_2$，使得 $g_1 s_1 = 1$ 和 $g_2 s_2 = 1$ 分别成立。令 $u_1 = s_1 h_1$、$u_2 = \begin{pmatrix} y_1 s_1 h_1 & s_2 b \end{pmatrix}$ 和 $u_3 = y_2 s_2 b$。容易验证，$u^\bullet : P^\bullet \to Y^\bullet$ 是一个态射，使得 $h^\bullet$ 经过 $g^\bullet$ 分解。因此，融合 S 是 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{E}(\mathcal{M})}(\mathcal{S}(\mathcal{M})\ -)$-正合的。

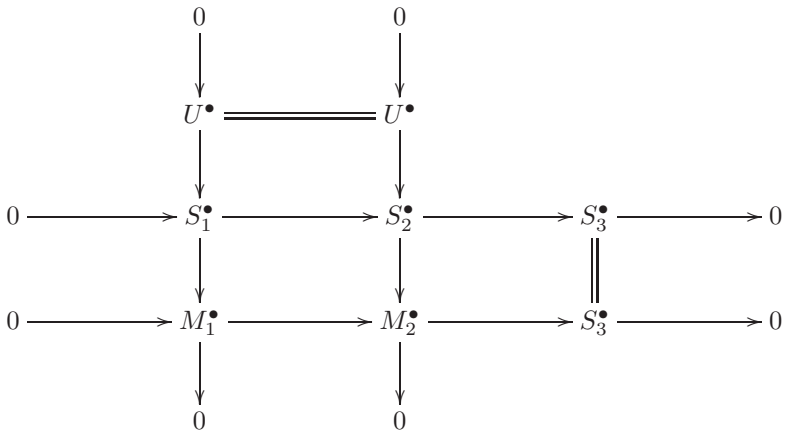
□

引理 4.3。 设 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 如截面 3中所述。则有

(1) $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$ 是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 中包含 $\mathcal{S}$ 的最小正合子结构；

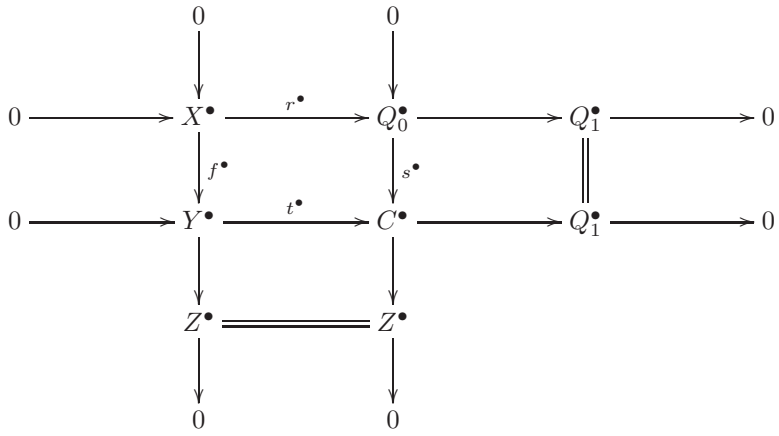
(2) $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$ 是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 中包含 $\mathcal{T}$ 的最小正合子结构。

证明。我们只证明 (1)，而 (2) 是其对偶。容易验证 $\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$。事实上，对于给定的融合 $0 \to S_1^\bullet \to S_2^\bullet \to S_3^\bullet \to 0 \in \mathcal{S}$，有如下交换图，其中第二列是 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{E}(\mathcal{M})}(\mathcal{S}(\mathcal{M})\ -)$-正合的，第三行是 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{E}(\mathcal{M})}(-, \mathcal{S}(\mathcal{M}))$-正合的。



这意味着第二列属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\,\mathcal{E}_0^{-1})$，第三行属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^1)$，根据引理4.2。于是显然 $0 \to S_1^\bullet \to S_2^\bullet \to S_3^\bullet \to 0 \in \mathcal{S}$ 属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$。

现在假设 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}') \preceq (\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 是一个包含 $\mathcal{S}$ 的正合子结构。令 $0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ 是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$ 中的一个融合。那么根据命题 4.1，$(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^1) \preceq (\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}')$ 中存在一个融合 $0 \to X^\bullet \to Q_0^\bullet \to Q_1^\bullet \to 0$。考虑如下交换图

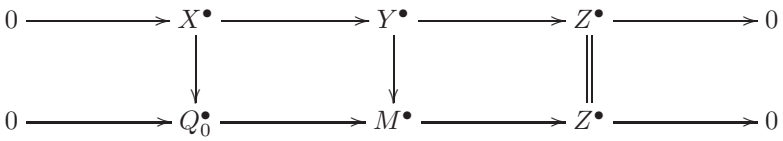


我们有 $0 \to Y^\bullet \to C^\bullet \to Q_1^\bullet \to 0$ 属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^1)$。因此 $0 \to Q_0^\bullet \to C^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ 属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$。由于 $Q_0^\bullet$ 属于 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$，我们有 $0 \to Q_0^\bullet \to C^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ 属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^{-1}) \preceq (\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}')$。现在 $s^\bullet r^\bullet = t^\bullet f^\bullet$ 是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}')$中的一个膨胀，因此根据 [4,命题 2.16]，$f^\bullet$ 是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}')$中的一个膨胀。这意味着 $0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ 属于 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}')$。□

定理 4.4。设 $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ 是一个正合范畴。那么 $\mathcal{E}(\mathcal{M})/\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 是一个阿贝尔范畴。此外，$(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$ 是使其成为簇商的唯一正合结构。

证明。我们首先证明，任意 $0 \to P^\bullet \to Y^\bullet \to Q^\bullet \to 0$ in $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$ 中满足 $P^\bullet$，$Q^\bullet$ in$\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 的融合都是分裂的。这是显然的，因此 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 是 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$ 的簇倾斜子范畴。

假设 $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ 关于某个正合子结构 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}') \preceq (\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E})$ 是自正交的。如果 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}') \neq (\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0)$，那么存在某个 $0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$in $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}')$ 中的融合，它在次数 0 上不是分裂的。根据命题 4.1，我们可以取 $(\mathcal{E}(\mathcal{M})\ \mathcal{E}_0^1)$ 中的一个融合 $0 \to X \to Q_0^\bullet \to Q_1^\bullet \to 0$in。考虑如下推出图。



于是，$0 \to Q_0^\bullet \to M^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ 属于（$\mathcal{E}$（$\mathcal{M}$） $\mathcal{E}'$），而该序列在次数 0 上不是分裂的。通过类似的论证，我们得到（$\mathcal{E}$（$\mathcal{M}$） $\mathcal{E}'$）中的一个融合 $0 \to Q_0^\bullet \to N^\bullet \to P_0^\bullet \to 0$，其在次数 0 上不是分裂的。现在，$P_0^\bullet$和$Q_0^\bullet$ 属于 $\mathcal{S}$（$\mathcal{M}$），并且相对于（$\mathcal{E}$（$\mathcal{M}$） $\mathcal{E}'$），$\mathcal{S}$（$\mathcal{M}$）是自正交的，矛盾。因此，根据定理 3.6、命题 4.1 和引理 4.3，结论成立。□

致谢

本研究部分得到了国家自然科学基金委员会（项目编号11701455）和中央高校基本科研业务费（项目编号2452020182）的资助。

参考文献

[1] A. Beligiannis，刚性对象、三角子因子与阿贝尔局部化，《数学杂志》274 (3) (2013)，841–883。[2] A.B. Buan，R. Marsh，M. Reineke，I. Reiten，G. Todorov，倾斜理论与簇组合学，《数学进展》204 (2) (2006)，572–618。[3] A.B. Buan，R. Marsh，I. Reiten，簇倾斜代数，《美国数学会汇刊》359 (1) (2007)，323–332。[4] T. B¨uhler，正合范畴，《数学展示》28 (1) (2010)，1–69。[5] L. Demonet，Y. Liu，正合范畴关于簇倾斜子范畴的商作为模范畴，《纯粹与应用代数杂志》217 (2013)，2282-2297。[6] A. Heller，同调代数中的环空间函子，《美国数学会汇刊》96 (1960)，382–394。[7] S. Koenig，B. Zhu，从三角范畴到阿贝尔范畴：一般框架中的簇倾斜，《数学杂志》258 (1) (2008)，143–160。[8] Z. Lin，短正合序列范畴的阿贝尔商，《代数杂志》551 (2020)，61–92。[9] Y. Liu，P. Zhou，由簇倾斜子范畴产生的阿贝尔范畴，《应用范畴结构》28 (2020)，575–594。[10] S. Mac Lane，工作数学家的范畴论，数学研究生教材5，施普林格出版社，1998。[11] A. Neeman，三角范畴，数学年刊研究148，普林斯顿大学出版社（2001），viii+449。[12] A. Neeman，负K理论中关于消失猜想的一个反例，《数学发明》225 (2021)，427–452。[13] W. Rump，几乎阿贝尔范畴，《拓扑学、几何学与微分几何笔记》42 (3) (2001)，163–225。不存在需要报告的相关财务或非财务利益冲突。