环中的 WD 和 WDMP 广义逆

Amit Kumar[a] 和 Debasisha Mishra*[a]

[a]印度恰蒂斯加尔邦赖布尔国家技术学院数学系，电子邮件：amitdhull513@gmail.com 电子邮件*：kapamath@gmail.com。

arXiv:2303.06651v1 [math.RA] 12 Mar 2023

摘要

受 Gao, Y.、Chen, J.、Wang, J. 和 Zou, H. 的最新研究成果启发， [Comm. Algebra, 49(8) (2021) 3241-3254；MR4283143], 我们为环中的元素引入了两种新的广义逆，分别称为弱 Drazin（WD）逆和弱 Drazin-Moore-Penrose（WDMP）逆。随后给出了它们的一些性质，并证明了在一定假设下，所提出的广义逆会与不同的众所周知的广义逆相重合。此外，我们还讨论了 WD 和 WDMP 广义逆的加法性质、逆序律和正序律。最后还给出了一些例子，以支持理论结果。

关键词：广义逆；WD逆元；WDMP逆；DMP 逆。
数学主题分类：15A09，16W10。

预印本提交至.....

2023年3月14日

1. 引言与预备知识

设 R 是一个带有对合且单位元为 1 的真酉环。若对于所有 $a \in R$ 都有 $a^*a = 0 \implies a = 0$，则称环 R 为真环。对合 $*$ 是满足以下条件的反同构：

$$(a+b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*, \text{ and } (a^*)^* = a \text{ for all } a, b \in R.$$

Let $a \in R$. 于是， a 的交换子和双交换子分别定义为

$$comm(a) = \{x \in R : ax = xa\},$$

and

$$comm^2(a) = \{x \in R : xy = yx \text{ for all } y \in comm(a)\},$$

分别。用 $N(R)$ 表示 R. 的所有幂零元素组成的集合。若元素 a 满足 $a^* = a$，则称其为厄米特元；若 $a^2 = a.$，则称其为幂等元。若对所有 $x \in comm(a)$，都有 $1 + xa \in R^{-1}$，则称元素 a 为拟幂零元，其中 R^{-1} 表示 R 的所有标准可逆元组成的集合。若存在唯一的元素 $x \in R$ 满足以下方程，则称元素 $a \in R$ 为 Moore-Penrose可逆：

$$(1.)axa = a, \ (2.)xax = x, \ (3.)(ax)^* = ax, \text{ and } (4.)(xa)^* = xa.$$

于是， x 称为 a 的 Moore-Penrose [13] 逆元，记为 $x = a^\dagger$。用 $R^\dagger$ 表示 R 的所有 Moore-Penrose可逆元素组成的集合。若存在唯一的元素 $x \in R$，使得 $xa^{k+1} = a^k$、 $ax = xa$ 且 $ax^2 = x$，其中 k 为某个正整数，则称元素 a 为 Drazin可逆 [5] 。若 a 的 Drazin 逆存在，则记为 a^d。最小的正整数 k 称为 Drazin 指标，记为 $i(a)$。 R 的所有 Drazin可逆元素组成的集合记为 R^d. 。若 $i(a) = 1$，则称 a 的 Drazin逆为 a 的群逆，记为 $a^\#$。 R 的所有群可逆元素组成的集合记为 $R^\#$。当且仅当元素 a 与其 Moore-Penrose逆交换，即 $aa^\dagger = a^\dagger a.$ 时，称其为 EP [12] 。 R 的所有 EP可逆元组成的集合记为 R^{EP}.

2017年，Xu等人 [21] 证明，如果存在唯一的元素 $x \in R$ 满足以下条件，则元素 a 是核可逆的：

$$(ax)^* = ax, \quad ax^2 = x, \quad \text{and} \quad xa^2 = a,$$

记为 $a^{\textcircled{\#}}$。 R 的所有核可逆元素组成的集合记为 $R^{\textcircled{\#}}$. 。如果存在唯一的元素 $x \in R$ 使得，则称元素 a 为伪核可逆 [6]

$$(ax)^* = ax, \quad ax^2 = x, \quad \text{and} \quad xa^{k+1} = a^k,$$

对于某个正整数 k。使上述方程成立的最小正整数 k 称为伪核指标，记为 $I(a)$。a 的伪核逆记为 a^{d}，而 R^{d}表示R的所有伪核可逆元组成的集合。如果存在 $b \in R$ 使得 $b = bab$、 $b \in comm^2(a)$ 以及 $(a^2 - ab) \in R^{qnil}$，则称元素 $a \in R$ 具有广义 Hirano 逆，其中 R^{qnil} 是 R的所有拟幂零元组成的集合。Chen 和 Sheibani [3] 证明了关于 Hirano 可逆元素的以下结果。

定理 1.1。（定理 3.*1, [3]*）
元素 $a \in R$ 具有 Hirano逆，当且仅当 $a - a^3 \in N（R）$。

定理 1.2。（定理 2.*1, [3]*）如果 $a \in R$ 具有
Hirano逆，则 a 具有 Drazin逆。

推论 1.3。（推论 2.*8, [2]*）
设 $a \in A$-Banach 代数。则，以下各条件等价:

（i） a 具有广义 Hirano 逆；（ii）存在唯一的幂等元 $p \in A$，使得 $pa = ap$ 且 $a^2 - p \in A^{qnil}$。

若存在唯一元素 $x \in R$，使得 $axa^k = a^k$、 $ax^2 = x$，且对于某个正整数 k，有 $（ax）^* = ax$，则称元素 a 为右伪核可逆 [20]，记为 a^{d}_{r}。使上述等式成立的最小正整数 k 称为右伪核指标，记为 $I(a)$。 R 的所有右伪核可逆元组成的集合记为 R^{d}_{r}。2019年，Zhu [23] 引入了元素的 DMP 逆，下面对此进行回顾。设 $a \in R^d \cap R^\dagger$。若元素 x满足 $xax = x$、 $xa = a^d a$，并且对于某个正整数 k满足 $a^k x = a^k a^\dagger$，则称 x为 a的 DMP 逆 [23]。它是唯一的，记为 $a^{d,\dagger}$.最小正整数 k 称为 a的 DMP 指标。 R 的所有 DMP 可逆元组成的集合记为$R^{d,\dagger}$.

2016年，Wang 和 Liu [19] 提出了一种新的矩阵广义逆，称为广义 Drazin（或 G-Drazin）逆，定义如下。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$。若矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足，则称其为 A 的 G-Drazin 逆

$$AXA = A,\ XA^{k+1} = A^k,\ \text{and}\ A^{k+1}X = A^k,$$

其中 $k = ind(A)$。记作 $X = A^{GD}$。一般而言，该逆元并不唯一。

最近，在2020年，Hern´andez等人 [9] 引入了另一种称为GDMP 逆的广义逆。下面给出矩阵的GDMP逆的定义。设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $k = ind（A）$。对于每个 $A^{GD} \in A\{GD\}$， A的一个GDMP 逆记为

$A^{GD\dagger}$，是 $n \times n$ 矩阵 $A^{GD\dagger} = A^{GD}AA^{\dagger}$。这个逆元也不唯一。同样地，在2021年，Hern´andez等人 [10] 引入了复矩形矩阵的两种新的广义逆，即1MP逆和MP1逆，并证明了由这些新的广义逆诱导的二元关系是偏序。

如果 a 和 b 是一对可逆元，那么 ab 也可逆，且乘积 ab 的逆元满足

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1},$$

称为逆序律。另一方面，

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

称为正序律。虽然逆序律对于不同的广义逆并不成立，但正序律即使对于可逆元也不成立。可逆元 a和 b 的加法性质为

$$(a+b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}.$$

类似地，可逆元 a 和 b 的吸收律为

$$a^{-1}(a+b)b^{-1} = a^{-1} + b^{-1}.$$

1966年，Greville [8] 首先获得了矩阵形式下 Moore-Penrose逆满足逆序律的充分条件，即（AB）$^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$。Mosi´c 和 Djordjevi´c [17] 将涉及矩阵中 Moore-Penrose逆的逆序律推广到了环中的元素。其他广义逆的类似问题也已由多位作者进行了研究。例如，Deng [4] 研究了 Hilbert空间上群逆的逆序律。2012年，Mosi´c 和 Djordjevi´c [16] 将 Hilbert空间上群逆的逆序律推广到了环。2017年，Zhu等人 [25]讨论了沿元素的逆的逆序律。2019年，Xu等人 [22] 研究了环中（b, c）-逆的逆序律和吸收律。Jin 和 Benitez [11] 分别证明了 Moore-Penrose逆、Drazin逆、群逆、核逆和对偶核逆的吸收律。2021年，Gao等人 [7] 给出了广义核逆的逆序律、正序律和吸收律。2017年，Zhu 和 Chen [27] 给出了环中 Drazin逆的正序律和加法性质。2021年，Li等人 [15] 研究了矩阵情形下核逆的正序律。2022年，Kumar等人 [14] 讨论了矩阵的 GD 逆和 GDMP 逆关于加法性质、逆序律和正序律的若干结果。Zhu等人（[24], [25], [26]）和 Zou 等人

等人 [28] 给出了关于加法性质、逆序律和正序律的若干结果。Zhu等人 [24] 获得了Moore-Penrose逆的以下加法性质。

定理1.4。（引理2.*3, [24]*）设 a、 $b \in R^{\dagger}$ 满足 $a^{*}b = ab^{*} = 0$。
则 $(a+b)^{\dagger} = a^{\dagger} + b^{\dagger}$。

最近，Baksalary等人 [1] 建立了两个正交投影算子成为 Moore–Penrose 加法逆的充要条件。

本文旨在研究环中元素的两种新广义逆——称为弱 Drazin（WD）逆和弱 Drazin Moore–Penrose（WDMP）逆——的逆序律、正序律、加法性质和吸收律。

在此背景下，本文的组织结构如下。首先，我们定义了 WD 逆和 WDMP 逆，它们分别是 GD 逆和 GDMP 逆的扩展。在第2节中，我们阐述 WD 逆和 WDMP 逆的一些性质。此外，我们证明了如果 WD 逆和 WDMP 逆存在，则右伪核逆、Drazin逆、DMP 逆和 Hirano逆均存在。在第3节中，我们建立了 WD 逆和 WDMP 逆的逆序律、正序律及加法性质。我们还在 WD 逆和 WDMP 逆满足加法性质、逆序律和正序律的假设下，提出了一些结果。

2. WD逆和WDMP逆

本节提出两种新的广义逆，分别称为元素的WD逆和WDMP逆，并讨论它们的一些性质。随后，我们定义WDMP逆与右伪核逆之间的一种关系。在此基础上，我们首先引入弱 Drazin 逆的定义。

定义2.1. 设 $a \in R$。如果存在元素 $x \in R$ 使其满足以下方程:

$$axa = a, \quad a^{k+1}x = a^{k}, \text{ and } xa^{k+1} = a^{k},$$

则称 x 为 a的弱 Drazin 逆（WD逆）。记作 $x = a^{WD}$，且$k = ind(a)$ 是 a的弱 Drazin指标。所有弱Drazin可逆元组成的集合记作 R^{WD}.

WDMP 逆的定义源于矩阵的 GDMP逆的定义。

定义 2.2。设 $a \in R^{WD} \cap R^{\dagger}$。如果存在满足以下方程的元素 $y \in R$：

$$yay = y, \quad ay = aa^{\dagger}, \text{ and } ya^k = a^{WD}a^k,$$

则， y 称为 a的弱 Drazin-Moore-Penrose 逆（WDMP逆）。记作 $y = a^{WD\dagger}$，且 $k = ind(a)$是 a的弱Drazin指标。所有弱Drazin-Moore-Penrose可逆元的集合记作 $R^{WD\dagger}$.

备注 2.1. 对于元素 $a \in R^{WD} \cap R^{\dagger}$ 要成为 WDMP 可逆的，我们需要 $a.$ 具有 WD可逆性。但是，环中的所有元素都不一定存在 WD逆。因此，环中的所有元素都不一定存在 WDMP逆。例如，设 $R = \mathbb{Z}$ 为具有共轭对合的环，且 0、 $1 \neq a \in R$。则 a 的 WDMP逆不存在。

下面给出上述 WD逆定义的一个推论。

推论 2.1. 设 $a \in R^{WD}.$ 则 $a \in R^{d}.$

证明。我们有 $a \in R^{WD}$。因此， $aa^{WD}a = a$、 $a^{WD}a^{k+1} = a^k$和 $a^{k+1}a^{WD} = a^k$意味着 $a \in a^{k+1}R \cap Ra^{k+1}$。众所周知，如果 $a \in a^{k+1}R \cap Ra^{k+1}$，那么 $a \in R^{d}.$ 因此， a 是 Drazin可逆的。 □

每个幂等元都是弱 Drazin可逆的，这将在下一个结果中证明。

定理 2.2. 设 $p \in R$ 是一个幂等元。那么， p 是 WD逆。此外， $p^{WD} = p.$

证明。我们知道 $p^2 = p$。现在， $ppp = p^2p = p^2 = p$。类似地，对于每个正整数 $k.$， $pp^{k+1} = p^k$ 和$p^{k+1}p = p$ 因此， p 是 WD逆，并且每个幂等元都是自身 WD逆。 □

注记 2.2. 由于 $aa^{\dagger}$ 是一个幂等元，因此 $(aa^{\dagger})^{WD} = aa^{\dagger}.$

定理 2.3. 如果 $a \in R^{WD}$，那么存在两个幂等元，记为 p 和 q，使得

$$axa = a, \ a^kp = 0, \ and \ qa^k = 0.$$

证明。根据定义2.1，我们有

$$axa = a, \tag{2.1}$$

$$a^{k+1}x = a^k, \tag{2.2}$$

$$xa^{k+1} = a^k. \tag{2.3}$$

现在，由（2.1），我们有（ax）$^2 = ax$，因此它是一个幂等元。同样地，（xa）$^2 = xa$ 是幂等元。因此，$p = 1-ax$ 和 $q = 1-xa$ 也都是幂等元。由（2.2），我们有 $a^{k+1}x = a^k$，这意味着 a^k（$1 - ax$）$= 0$。所以，$a^k p = 0$。同样地，$qa^k = 0$.

□

我们证明，$a^{WD}aa^{\dagger}$ 是以下方程组的一个解。

定理 2.4. 设 $a \in R$带有对合 $*$.。如果 $a \in R^{WD\dagger}$，则 $y = a^{WD}aa^{\dagger}$是以下方程组的一个解:

$$yay = y, \quad ay = aa^{\dagger}, \ and \ ya^k = a^{WD}a^k.$$

证明。将 $y = a^{WD}aa^{\dagger}$代入方程 $yay = y$、$ay = aa^{\dagger}$ 和 $ya^k = a^{WD}a^k$，我们得到 t

$$\begin{aligned} a^{WD}aa^{\dagger}aa^{WD}aa^{\dagger} &= a^{WD}aa^{\dagger}(aa^{WD}a)a^{\dagger} \\ &= a^{WD}aa^{\dagger}aa^{\dagger} \\ &= a^{WD}aa^{\dagger}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$aa^{WD}aa^{\dagger} = (aa^{WD}a)a^{\dagger} = aa^{\dagger}, \tag{2.5}$$

and

$$a^{WD}aa^{\dagger}a^k = a^{WD}(aa^{\dagger}a)a^{k-1} = a^{WD}aa^{k-1} = a^{WD}a^k, \tag{2.6}$$

分别由（2.4）、（2.5）和（2.6），可知 $y = a^{WD}aa^{\dagger}$ 是该方程组的一个解。

□

根据推论 2.1 和定义 2.2，可知如果 a 是 WDMP可逆的，那么它就是 DMP 可逆的。

推论 2.5. 设 $a \in R^{WD\dagger}$. 则，$a \in R^{d\dagger}$.

证明. 若 $a \in R^{WD\dagger}$，则根据定义 2.2，$a \in R^{WD}$和 $a \in R^{\dagger}$。由推论 2.1，$a \in R^d$。因此，$a \in R^d \cap R^{\dagger}$，即存在元素 $x \in R$ 使得 $x = a^d aa^{\dagger}$。所以，$a \in R^{d\dagger}$.

□

现在，我们借助定义 2.2 和定理 2.4 证明 WDMP 逆元的一些性质。

引理 2.6. 设 $a \in R^{WD\dagger}$ 和 y 是 a的 WDMP 逆元。则，以下条件成立:

(i) $aya^k = a^k$，对于每个正整数 k.

(ii) ay 和 ya 都是幂等元。(iii) 存在一个幂等元 p，使得 $pa^k = 0$。(iv) $y(ay)^k = y$，对于每个正整数 k.(v) $a^{k+1}ya = a^{k+1}$，其中 $k = ind(a)$。(vi) $ya^{k+1}y = a^k a^\dagger$，其中 $k = ind(a)$。(vii) $a^\dagger ay = a^\dagger$.

定理 2.7. 如果 $a \in R^{WD\dagger}$，则 a 是右伪核可逆的。此外，a 的 WDMP逆是 $a.$的右伪核逆

如果 a 是厄米特的，则以下性质成立。

定理 2.8. 如果 $a \in R$ 是厄米特的，且 y 是 a 的一个 WDMP逆，则以下条件成立：

(i) $a^\dagger ay$ 是 $a.$的群逆 (ii) $a^2 y = a.$ (iii) $y^2 = a^{WD}a^\dagger = ya^\dagger.$ (iv) $a^{WD}a$ 是 $a^\dagger a.$的一个 WDMP逆 (v) $aa^{WD}(aa^\dagger)^{k+1} = aa^\dagger.$

2015 年，Karanasios [12] 为 EP元给出了以下结果。

定理 2.9.（定理 4.*21, [12]*）
元素 $a \in R$ 是 EP元，当且仅当 $a \in R^\# \cap R^\dagger$ 且满足以下任一等价条件：

(i) $a^n a^\dagger = a^\dagger a^n$，对于某个 $n \geq 1$; (ii) $(a^\#)^n a^\dagger = a^\dagger (a^\#)^n$，对于某个 $n \geq 1$; (iii) $(a^\dagger)^n = (a^\#)^n$，对于某个 $n \geq 1$。

每个 EP元都是 WDMP可逆的。下面给出证明。

定理 2.10. 如果 $a \in R^{EP}$，则 a 是 WD可逆且 WDMP可逆的。此外，$a^\#$ 是 a的 WD逆和 WDMP逆。

现在，我们回顾环中元素的湮灭子概念。$a \in R$ 的左湮灭子记为 $^\circ a = \{x \in R : xa = 0\}$；$a$ 的右湮灭子记为 $a^\circ = \{x \in R : ax = 0\}$。下面的引理综合了[18]中的引理 2.5和引理 2.6。

引理 2.11. 设 a、$b \in R$。

(i) 若 $aR \subseteq bR$，则 $^\circ b \subseteq {}^\circ a$。(ii) 若 b 是正则的且 $^\circ b \subseteq {}^\circ a$，则 $aR \subset bR$.(iii) 若 $Ra \subseteq Rb$，则 $b^\circ \subseteq a^\circ$。(iv) 若 b 是正则的且 $b^\circ \subseteq a^\circ$，则 $Ra \subseteq Rb$。

下面的结果给出了 WDMP逆与湮灭子之间的关系。

定理2.12. 设 $a \in R^{WD\dagger}$ 和 y 是 a 的 WDMP逆。则,

(i) $Ry = Ra^*$ 和 $aR = y^*R$.
(ii) $y^\circ = (a^*)^\circ$ 和 $^\circ a = {}^\circ(y^*)$。

接下来，我们证明 ay 和 ya 是 Hirano可逆的。

定理2.13. 设 $a \in R^{WD\dagger}$ 和 y 是 a 的 WDMP逆。则， ay 和 ya 都是 Hirano可逆的。

我们给出一个关于幂等元的定理，用于介绍接下来的结果。

定理 2.14. 设 a、$b \in R$ 和 x、$y \in R$ 是两个幂等元。则有如下结论:

(i) $(1-x)a = b$ 当且仅当 $xb = 0$ 且 $^\circ(x) \subseteq {}^\circ(a-b)$,

(ii) $a(1-y) = b$ 当且仅当 $by = 0$ 且 $(y)^\circ \subseteq (a-b)^\circ$.

由于 $a^{WD}a$ 和 aa^{WD} 都是幂等元，根据定理 2.14，我们得到以下推论。

推论2.15. 设 $a \in R^{WD}$。则对于任意 b、$c \in R$,

(i) $(1-a^{WD}a)b = c$ 当且仅当 $a^{WD}ac = 0$ 且 $^\circ(a^{WD}a) \subset {}^\circ(b-c)$。
(ii) $b(1-a^{WD}a) = c$ 当且仅当 $ca^{WD}a = 0$ 且 $(a^{WD}a)^\circ \subset (b-c)^\circ$.

同样地， ay 和 ya（其中 y 是 a的 WDMP逆）都是幂等元，因此有以下结论。

推论2.16。设 $a \in R^{WD\dagger}$。那么，对于任意 b、$c \in R$,

(i) $(1-a^{WD\dagger}a)b = c$当且仅当 $a^{WD\dagger}ac = 0$且 $^\circ(a^{WD\dagger}a) \subseteq {}^\circ(b-c)$。
(ii) $b(1-a^{WD\dagger}a) = c$当且仅当 $ca^{WD\dagger}a = 0$且 $(a^{WD\dagger}a)^\circ \subseteq (b-c)^\circ$.

本节最后讨论 WDMP逆的湮灭子性质。

推论2.17. 如果 $a \in R^{WD\dagger}$ 和 y 是 a 的 WDMP逆，那么

$$(a^{WD}a)^\circ \subseteq (ya)^\circ \subseteq (a^{k+1})^\circ.$$

3. 逆序律、正序律和加法性质

在本节中，我们分别介绍 WD逆和 WDMP逆的加法性质、逆序律和前向律。本节首先给出一个例子，说明 WD逆的加法性质并不总是成立。

接下来，我们建立一个涉及 WD逆 的加法性质结果。

定理 3.1. 设 a、$b \in R^{WD}$。若 $ab = ba = 0$、$ab^{WD} = b^{WD}a = 0$ 且 $a^{WD}b = ba^{WD} =$0, 则 $(a + b)^{WD} = a^{WD} + b^{WD}$。

下一个结果讨论 WD逆 的逆序律。

定理3.2. 设 a、$b \in R^{WD}$。若 $ab = ba$和 $bb^{WD}a^{WD} = a^{WD}bb^{WD}$，则 $(ab)^{WD} = b^{WD}a^{WD}$.

下一个结果可按照定理3.2中的步骤类似地证明。

定理3.3。设 a、$b \in R^{WD}$。若 $ab = ba$和 $ba^{WD}a = a^{WD}ab$，则 $(ab)^{WD} = b^{WD}a^{WD}$.

下面给出涉及WD逆的正序律。

定理3.4。设 a、$b \in R^{WD}$和 $k = max\{ind(a)\ \ ind(b)\}$.若 $ab = ba$和 $b^{WD}ba = ab^{WD}b$，则 $(ab)^{WD} = a^{WD}b^{WD}$.

下面的例子说明了定理3.2、定理3.3和定理3.4。下一个例子表明，定理3.2和定理3.3中的给定条件是充分条件，但不是必要条件。下面给出涉及WD逆的三重逆序律。

定理3.5。设 a、b、$c \in R^{WD}$彼此交换，且 $k = max\{ind(a)\ \ ind(b)\ \ ind(c)\}$.若 $cc^{WD}b = bcc^{WD}$和 $c^{WD}b^{WD}a = ac^{WD}b^{WD}$，则 $(abc)^{WD} = c^{WD}b^{WD}a^{WD}$.

同样，可以证明三重正序律，表述如下。

定理 3.6. 设 a、b、$c \in R^{WD}$彼此交换，且 $k = max\{ind(a)\ ind(b)\ ind(c)\}$.若 $aa^{WD}b = baa^{WD}$ 且 $a^{WD}b^{WD}c = ca^{WD}b^{WD}$，则 $(abc)^{WD} = a^{WD}b^{WD}c^{WD}$.

如果 $a^{WD}ab^{WD} = a^{WD}$和 $a^{WD}bb^{WD} = b^{WD}$，则 $a^{WD}(a + b)b^{WD} = a^{WD}ab^{WD} + a^{WD}bb^{WD} = a^{WD} + b^{WD}$，即 $a^{WD}(a + b)b^{WD} = a^{WD} + b^{WD}$。如果 WD逆 满足吸收律，即 $a^{WD}(a + b)b^{WD} = a^{WD} + b^{WD}$，那么 WD逆 满足下一结果中提到的几个条件。

定理 3.7。设 a、$b \in R^{WD}$和 $k = max\{ind(a)\ ind(b)\}$.如果 $a^{WD}(a+b)b^{WD} = a^{WD} + b^{WD}$，则 $aa^{WD}bb^{WD} = aa^{WD}$、$a^{WD}ab^{WD}b = b^{WD}b$、$a^kbb^{WD} = a^k$和 $a^{WD}ab^k = b^k$。

推论 3.8. 设 a、$b \in R$ 和 $k = max\{ind(a)\ ind(b)\}$.。若 $a^{WD}(a+b)b^{WD} = a^{WD} + b^{WD}$，则

(i) $b^kR \subseteq a^{WD}R$ 和 $a^kR = a^kbR$.;
(ii) $^\circ(a^{WD}) \subseteq {}^\circ(b^k)$ 和 $^\circ(a^k) = {}^\circ(a^kb)$;
(iii) $Rab^k = Rb^k$ 和 $Ra^k \subseteq Rb^{WD}$;
(iv) $(b^{WD})^\circ \subseteq (a^k)^\circ$ 和 $(ab^k)^\circ = (b^k)^\circ$。

定理 3.9. 设 a、$b \in R^{WD}$ 和 $k = max\{ind(a)\ ind(b)\}$.。若 $b^{WD}aa^{WD} = a^{WD}$ 和 $b^{WD}ba^{WD} = b^{WD}$，则 $b^{WD}(a+b)a^{WD} = a^{WD} + b^{WD}$。此外，$b^kaa^{WD} = b^k$、$b^{WD}ba^k = a^k$、$bb^{WD}aa^{WD} = bb^{WD}$ 和 $b^{WD}ba^{WD}a = a^{WD}a$。

下一个结果是沿着定理 3.1 的方向给出的。

定理 3.10. 设 a、$b \in R^{WD\dagger}$。若 $ab = ba = 0$、$a^*b = ab^* = 0$、$ab^{WD} = b^{WD}a = 0$ 和 $a^{WD}b = ba^{WD} = 0$，则 $(a+b)^{WD\dagger} = a^{WD\dagger} + b^{WD\dagger}$。

上述结果的一个直接推论如下。

推论 3.11. 设 a、$b \in R^{WD\dagger}$ 为厄米特的。若 $ab = ba = 0$、$ab^{WD} = b^{WD}a = 0$ 和 $a^{WD}b = ba^{WD} = 0$，则 $(a+b)^{WD\dagger} = a^{WD\dagger} + b^{WD\dagger}$。

定理 3.12. 设 a、$b \in R^{WD\dagger}$。若 $ab = ba$、$a^*b = b^*a$、$a^{WD}abb^\dagger = bb^\dagger a^{WD}a$ 和 $bb^{WD}a^{WD} = a^{WD}bb^{WD}$，则 $(ab)^{WD\dagger} = b^{WD\dagger}a^{WD\dagger}$.

当 a 和 b 均为幂等元且厄米特时，在某些条件下，WDMP逆的正序律成立。下面给出证明。

定理 3.13。设 a、$b \in R^{WD\dagger}$ 均为幂等元且厄米特，且$k = max\{ind(a)\ ind(b)\}$.若 $ab = ba$ 和 $b^{WD}ba = ab^{WD}b$，则 $(ab)^{WD\dagger} = a^{WD\dagger}b^{WD\dagger}$.

本节以一个直接的推导作结。

定理 3.14。设 a、$b \in R^{WD\dagger}$。

1. 如果 $(ab)^{WD\dagger} = b^{WD\dagger}a^{WD\dagger}$，则以下条件成立：
   (i) $b(ab)^{WD\dagger}a = bb^\dagger a^{WD}a$,
   (ii) $b(ab)^{WD\dagger}a^{k+1} = bb^\dagger a^k$, (iii)
   $b^{k+1}(ab)^{WD\dagger}a = b^{k+1}b^\dagger a^{WD}a$.
2. 如果 $(ab)^{WD\dagger} = a^{WD\dagger}b^{WD\dagger}$，则以下条件成立：
   (i) $a(ab)^{WD\dagger}b = aa^\dagger b^{WD}b$,
   (ii) $a^{k+1}(ab)^{WD\dagger}b = a^{k+1}a^\dagger b^{WD}b$,
   (iii) $a(ab)^{WD\dagger}b^{k+1} = aa^\dagger b^k$.

4. 结论

重要研究结果总结如下：

- 本文在环中引入了 WD逆和 WDMP逆的概念。
- 本文建立了 WD逆、Drazin逆、DMP 逆、WDMP逆、右伪核逆和 Hiranoinverse 之间的一些关系。
- 最后，本文给出了 WD 和 WDMP广义逆满足逆序律和正序律的一些充分条件。

5. 致谢

第一作者感谢科学与工业研究委员会—大学拨款委员会（印度）的支持。作者感谢 Vaibhav Shekhar 对本文部分内容提出的宝贵建议。

参考文献

[1] Baksalary, O.M., Sivakumar, K.C.; Trenkler, G.，《矩阵和的 Moore-Penrose逆》，Linear Multilinear Algebra，（2022年）DOI：10.1080/03081087.2021.2021132。[2] Chen, H.; Sheibani, M.，《环中的广义Hirano逆》，《通信代数》，47(7)（2019年）2967-2978。[3] Chen, H.; Sheibani, M.，《论环中的Hirano逆》，Turkish J. Math.，43(4)（2019年）2049-2057。[4] Deng, C.Y.，《群逆的逆序律》，J. Math. Anal. Appl.，382（2011）663-671。[5] Drazin, M.P.，《结合环和半群中的伪逆》，Amer. Math. Monthly.，65（1958）506-514。[6] Gao, Y.; Chen, J.，《带对合环中的伪核逆》，《通信代数》，46(1)（2018）38-50。[7] Gao, Y.; Chen, J.; Wang, L.; Zou, H.，《广义核逆的吸收律和反序律》，《通信代数》，49(8)（2021年）3241-3254。[8] Greville, T.N.E.，《关于矩阵乘积的广义逆的注记》，SIAM Rev.，8（1966年）518-521。[9] Hern´andez, M.V.; Lattanzi, M.B.; Thome, N.，《矩阵的GDMP逆及其对偶》，Linear Multilinear Algebra，（2020年）DOI：10.1080/03081087.2020.1857678。[10] Hern´andez, M.V.; Lattanzi, M.B.; Thome, N.，《从投影算子到1MP和MP1广义逆及其诱导偏序》，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM，115(3)（2021年）1-13。[11] Jin, H.; Benitez, J.，《环中广义逆的吸收律》，Electron. J. Linear Algebra，30（2015）827-842。[12] Karanasios, S.，《带对合的环和半群以及C*代数中的EP元》，Serdica Math. J.，41(1)（2015）83-116。

[13] Koliha, J.J.; Djordjevi´c, D.S.; Cvetkovi´c,D.，《带对合环中的Moore-Penrose逆》，Linear Algebra Appl.，426(2-3)（2007）371-381。[14] Kumar, A.; Shekhar, V.; Mishra, D.，《矩形矩阵的W-加权GDMP逆》，Electron. J. Linear Algebra，38（2022年）632-654。[15] Li, T.; Mosi´c, D.; Chen, J.，《核逆的前向序律》，Aequationes Math.，95（2021年）415–431。[16] Mosi´c, D.; Djordjevi´c, D.S.，《环中群逆的逆序律》，Appl. Math. Comput.，219（2012年）2526-2534。[17] Mosi´c, D.; Djordjevi´c, D.S.，《带对合环中Moore-Penrose逆的逆序律的进一步结果》，Appl. Math. Comput.，218（2011）1478–1483。[18] Raki´c, D.S.; Dinci´c, N.C.; Djordjev´c, D.S.，《带对合环中的群逆、Moore-Penrose逆、核逆和对偶核逆》，Linear Algebra Appl.，463（2014）115–133。[19] Wang, H.; Liu, X.，《基于核-幂零分解的偏序》，Linear Algebra Appl.，488（2016年）235-248。[20] Wang, L.; Mosi´c, D.; Gao, Y.，《右核逆及相关广义逆》，《通信代数》，47(11)（2019年）4749-4762。[21] Xu, S.; Chen, J.; Zhang, X.，《带对合环中核逆的新刻画》，Front. Math. China.，12(1)（2017年）231-246。[22] Xu, S.; Chen, J.; Ben´ıtez, J.; Wang, D.，《中心化子在环中(b,c)-逆上的应用》，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM，113(3)（2019年）1739-1746。[23] Zhu, H.，《环中的DMP逆和m-EP元》，Linear Multilinear Algebra，67（2019）756-766。[24] Zhu, H.; Chen, J.; Patricio, P.，《带对合环中投影算子的差与积的Moore-Penrose逆》，Turk J. Math.，40（2016年）1316–1324。[25] Zhu, H.; Chen, J.; Patricio, P.，《沿元素的逆的反序律》，Linear Multilinear Algebra，65(1)（2017年）166-177。[26] Zhu, H.; Chen, J.; Patrıcio, P.; Mary, X.，《中心化子在沿元素的逆上的应用》，Appl. Math. Comput.，315（2017年）27-33。[27] Zhu, H.; Chen, J.，《环中元素的Drazin逆的加法和乘积性质》，Bull. Malays. Math. Sci. Soc.，40(1)（2017年）259-278。[28] Zou, H.; Chen, J.; Patricio, P.，《环中核逆的反序律》，Mediterr. J. Math.，15(3)（2018）1-17。