抽象类 Voronoi 图：扩展 Delaunay 定理及其应用

EvanthiaPapadopoulou ！ 信息学学院，意大利语瑞士大学，卢加诺，瑞士

摘要

任何平分线系统（按照抽象 Voronoi 图的定义）都会在平面上定义一个简单曲线的排列。我们在这种排列上定义*Voronoi*类图，其顶点均为局部*Voronoi*顶点。若 v 及其关联边出现在三个站点的 Voronoi 图中，则称该顶点为局部 Voronoi 顶点。在所谓的可容许平分线系统中，Voronoi 区域彼此连通并覆盖整个平面，我们证明任何 Voronoi类图实际上都是一个抽象 Voronoi 图。该结果可视为 Delaunay 关于（局部）空圆定理的抽象对偶形式。

此外，我们在可容许平分线系统中定义类 Voronoi 环，并证明由此类环 C 诱导的 Voronoi类图是唯一的一棵树（如果 C 无界，则为森林）。在 C 为抽象 Voronoi 区域边界这一特殊情况下，可以按照 [Junginger 和 Papadopoulou SOCG'18]中的技术，在期望线性时间内计算所诱导的 Voronoi类图。否则，算法也能在相同时间内，构造同一组（或其子集）站点上的环 C' 的 Voronoi类图；该环可能等于 C，也可能被 C包围。总体而言，给定叶节点沿类 Voronoi 环的顺序，该技术可以在线性期望时间内计算抽象 Voronoi（或 Voronoi类）树和森林。我们展示了一个直接应用：在线性期望时间内，在插入新的线段约束后更新约束 Delaunay 三角剖分，从而简化 [Shewchuk 和 Brown CGTA 2015]的结果。

2012年 ACM 学科分类计算理论 → 计算几何

关键词与短语类Voronoi图、抽象 Voronoi 图、Delaunay 定理、Voronoi 树线性时间随机化算法、约束 Delaunay 三角剖分

F资助本研究部分由瑞士国家科学基金会项目 200021E-201356 资助。

致谢我谨感谢 Kolja Junginger 在前期讨论中提出的诸多意见，以及为本研究早期版本绘制的大量图示并提供的评注。我还要感谢 Franz Aurenhammer 提供宝贵建议，并感谢 Elena Arseneva 提出建设性意见并绘制图示。

arXiv:2303.06669v1 [cs.CG] 12 Mar 2023

1 引言

Delaunay 定理 [6] 是计算几何中一个广为人知的基石：给定一个点集，当且仅当一个三角剖分全局 *Delaunay*时，它才是局部 *Delaunay*。若一条三角剖分边仅与一个三角形相邻，或者与两个三角形相邻且出现在相关四个顶点的 Delaunay 三角剖分中，则称该边局部 *Delaunay*。点集的 Voronoi 图与 Delaunay 三角剖分互为对偶。这两种影响深远且用途广泛的结构常被交替使用和计算；有关详细信息，请参见 Aurenhammer 等人 [2]的著作。

我们提出如下问题：Delaunay 定理如何推广到广义站点（不一定是点站点）的 Voronoi 图？我们关注线段、多边形、圆盘或点簇等简单几何对象，因为它们经常出现在应用领域中，而回答这一问题与针对这些对象高效构造 Voronoi 图（或其对偶图）的算法密切相关。本文在抽象 Voronoi 图的框架下考察这一问题 [11]，从而能够在这一框架下同时回答各种具体且基础的情形。

2 抽象类 Voronoi 图：扩展 Delaunay 定理及其应用

尽管点站点的 Voronoi 图和 Delaunay 三角剖分已广泛应用于科学的诸多领域，并且大多数常用编程语言的软件库都提供了相关功能，但对于简单几何对象的对应形式，实际情况却并非如此。事实上，某些相关问题至今仍未解决，或尚未得到最优解决，这一点令人惊讶。Edelsbrunner 和 Seidel [7] 将 Voronoi 图定义为高一维空间中距离函数的下包络，从而建立了与排列之间的有力联系，使得他们丰富的组合与算法结果得以应用，例如 [14]。然而，平面排列与更一般曲面排列在难度上存在不同层次的差异，这一点尤其在实践中发挥着作用。

本文基于局部信息定义类Voronoi图，其灵感源于 Delaunay 定理。遵循抽象 Voronoi 图（AVD）的框架， [11], 令S 为一组 n 抽象站点（一组索引），$\mathcal{J}$ 为其底层平分线系统，该系统满足一些简单的组合性质（见第 2、3 节）。考虑平分线系统的排列上的一个图G ，该排列可能在单连通域 D内被截断。 G 的顶点是平分线排列的顶点，其叶节点位于边界 ∂D上，而其边是连接成对顶点的极大二等分线弧。若v 中的一个顶点 G 满足： v 及其在 v 附近小邻域内的关联边出现在定义 v 的三个站点的 Voronoi 图中，则称其为局部 *Voronoi*顶点（定义 3），见图 4。若图 G 的顶点（位于 ∂D上的叶节点除外）均为局部 Voronoi 顶点（定义 4），则称图 G 为类*Voronoi*图，见图 5。若图 G 是与一个站点 p 相关的平分线排列上的简单环，且其顶点均为度为 2 的局部 Voronoi 顶点，则称其为类 *Voronoi*环，简写为站点环（定义 10）。

欧几里得平面中的点与线段、圆盘或 AVD 等非点之间存在一个显著差异，这一点可以立即指出：前一种情况下，平分线系统是直线排列；而在后一种情况下，二等分曲线甚至不是伪直线。对于直线排列，不难看出，类Voronoi图与相关站点的 Voronoi 图相重合：任何类 Voronoi 环都是一个凸多边形，实际上是某个站点子集的 Voronoi 图中的一个Voronoi区域。然而，在抽象二等分线系统的排列中，同一站点集合可能存在许多不同的类 Voronoi 环（例如见图 10 ）。类 Voronoi 图是否对应于 Voronoi 图，并不是显而易见的。

在本文中，我们证明了，在抽象二等分线系统的排列上，类Voronoi图在某种意义下已经尽可能接近抽象 Voronoi 图，但可能缺少某些面（见定义 5）；如果该图没有缺少任何面，那么它就是一个 Voronoi 图。因此，在经典 AVD模型中，抽象Voronoi区域是连通的并覆盖整个平面，任何类Voronoi图确实都是一个抽象 Voronoi 图。该结果可以看作 Delaunay 定理的抽象对偶版本。

类Voronoi图（及其对偶图）可以作为存储部分Voronoi信息的非常有用的结构，无论是在处理不连通Voronoi区域时，还是在考虑与某个区域相关的部分信息时，都是如此。构建部分信息的类Voronoi图，可能比构建完整图容易、快速得多。在某些情况下，完整图甚至并不可取，例如第6节中更新受约束 Delaunay 三角剖分的例子。

“*Voronoi*类图”一词最初由 Junginger 和 Papadopoulou [8], 在有限定的意义下使用，他们将其定义为一棵树（偶尔也可以是森林），用于细分由所谓的边界曲线所包围的平面区域，该曲线定义在 Voronoi 边的一个子集上。随后，他们将这种 Voronoi类图用作中间结构，以在线性期望时间内执行抽象 Voronoi 图中的删除。本文对

类Voronoi图的表述则完全不同；尽管如此，我们证明， [8] 的 Voronoi类图仍是本文所述图的一种特殊情况。因此，我们在适用时采用 [8] 的结果，并将其扩展到可容许平分线系统中的类 Voronoi 环。

在本节的其余部分，我们考虑遵循经典 AVD 模型的可容许平分线系统$\mathcal{J}$ [11], ，其中平分线是无界的简单曲线，且Voronoi区域是连通的。为避免无穷远带来的问题，我们假设存在一条足够大的 Jordan 曲线 Γ （例如一个圆）界定计算域，并且该曲线足以包围任意平分线交点。下文将在此模型下列出本文所得的进一步结果。

我们考虑平分线排列上的一个类Voronoi环 C $\mathcal{J}_p \subseteq \mathcal{J} \cup \Gamma$，这些平分线与一个站点 $p \in S$相关。令 $S_C \subseteq S \setminus \{p\}$ 表示与 p一起对 C中的平分线弧作出贡献的站点集合。环 C 编码了来自 S_C的站点出现项序列。我们定义类Voronoi图$\mathcal{V}_l(C)$，可以将其视为站点出现项的Voronoi 图，而不是站点的Voronoi 图；站点的顺序由 C表示。我们证明，$\mathcal{V}_l(C)$是一棵树；如果 C 无界，则它是一片森林，并且对于任意类Voronoi环 C都存在。根据 [8]中的结果，可以推断$\mathcal{V}_l(C)$的唯一性。与一个包含 P 个 k 站点的集合相关的环所对应的类Voronoi图也具有相同的性质。

接下来，我们考虑 [8], 的随机增量构造，并以线性期望时间将其应用于类Voronoi环。若 C 是某个 Voronoi区域的边界，则可以在期望线性时间内计算$\mathcal{V}_l(C)$，即抽象 Voronoi 图$\mathcal{V}(S_C)$被 C截断后所得的部分（此前已有相关证明 [8, 10]）。否则，可以在相同时间内，基本采用同一算法，计算由 C包围的某个（可能不同的）类Voronoi环 C'的类Voronoi图。我们给出了可强制随机化算法计算$\mathcal{V}_l(C)$的条件；若有此需要，这样做不会损害其期望线性时间复杂度，并将删除 [8] 作为子程序。整体技术遵循 Chew [5], 提出的随机化线性时间范式，该范式最初用于计算处于凸位置的点的 Voronoi 图。Chew 技术的推广有望用于将基于点站点的算法转换为对应的非点站点算法，只要后者属于抽象 Voronoi 图的范畴。

最后，我们直接应用该方法，在插入新的线段并更新受约束 Delaunay 三角剖分时，以线性期望时间计算站点环的类Voronoi图，从而简化 Shewchuk 和 Brown[15]的相应结果。所得算法极其简单。通过将问题建模为计算给定类Voronoi环的类Voronoi图的对偶（该类Voronoi环并非 Voronoi区域的边界），算法描述几乎变得不言自明，同时也解释了 Shewchuk 和 Brown 所列出的技术细节，例如自相交子多边形。

总体而言，在已知叶节点沿类Voronoi环的排列顺序时，该技术能够在线性期望时间内计算抽象 Voronoi（或类Voronoi）树和森林。在扩展版论文中，我们还给出了简单的条件，在这些条件下，环 C 可以是任意具有常数复杂度的 Jordan 曲线，并且沿该曲线 Voronoi 区域的排列顺序是已知的。

2 预备知识与定义

我们遵循抽象 Voronoi 图（AVD）的框架，该框架由 Klein [11]定义。设 S 为一组 n 抽象站点（一组索引），$\mathcal{J}$ 为一个底层平分线系统，并且这些平分线满足一些简单的组合性质（即一些公理）。两个站点 $p, q \in S$ 的平分线 $J(p, q)$ 是一条简单曲线，将平面细分为两个开域： p, $D(p, q)$ 的支配区域，其标签为 p；以及 q,$D(q, p)$ 的支配区域，其标签为 q。

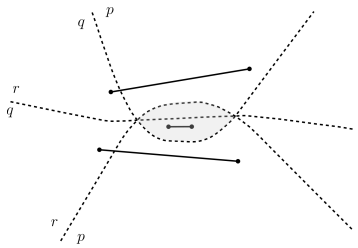


图 1 相关线段平分线相交两次。VR(p，$\{p$，q，$r\}$)以阴影表示。

该*Voronoi*区域的站点 p 为

$$\mathrm{VR}(p,S)=\bigcap_{q\in S\setminus\{p\}} D(p,q).$$

S的 *Voronoi* 图是 $\mathcal{V}(S)=\mathbb{R}^2\setminus\bigcup_{p\in S}\mathrm{VR}(p,S)$。$\mathcal{V}(S)$的顶点和边分别称为 *Voronoi* 顶点和*Voronoi* 边。

已有文献提出了不同推广程度的抽象 Voronoi 图变体，参见例如 [12, 3]。遵循 Klein [11]，的最初表述，对于每个子集 $S'\subseteq S$，如果平分线系统$\mathcal{J}$满足以下公理，则称其为可容许的：

（A1）每个 Voronoi区域 VR(p，S')均非空且道路连通。（A2）平面中的每个点都属于某个 Voronoi区域 VR(p，S')的闭包。（A3）每条平分线都是一条与直线同胚的无界简单曲线。（A4）任意两条平分线均横截地相交，且交点数有限。

在这些公理下，抽象 Voronoi 图 $\mathcal{V}(S)$ 是一个复杂度为$O(n)$的平面图，可以在 $O(n\log n)$ 时间内计算得到，采用随机化方法时为 [13]，采用确定性方法时为 [11]。

为避免处理无穷远，我们假设 $\mathcal{V}(S)$ 被截断在区域 D_Γ 内，该区域由一条大的 Jordan 曲线 Γ （例如圆或矩形）包围，并且所有平分线交点都包含在 D_Γ 中。每条平分线横截地穿过 Γ 恰好两次。假设所有 Voronoi 区域都被 Γ 截断，因此位于区域 D_Γ内。

我们作出一般位置假设：不存在三个涉及同一公共站点的平分线在同一点相交；也就是说，平分线系统$\mathcal{J}$ 的排列中的所有顶点的度均为 6，而 Voronoi 顶点的度为 3。

具有一个公共站点 p 的平分线称为相关平分线，特别地称为 p-相关平分线。令 $\mathsf{J}_p\subseteq\mathsf{J}$ 表示 J 中所有 p-相关平分线的集合。根据公理 A2，如果相关平分线$J(p,q)$和 $J(p,s)$在顶点 v 处相交，则 $J(q,s)$ 也必须在同一顶点处与它们相交；该顶点是 $V(\{p,q,s\})$ 中的 Voronoi 顶点（否则，公理 A2 将在 $V(\{p,q,s\})$ 中被违反）。在可容许平分线系统中，相关平分线至多相交两次 [11]；因此，三个站点的 Voronoi 图至多有两个 Voronoi 顶点，例如图 1 中三个线段的平分线。曲线 Γ 可以解释为一个p-相关平分线 $J(p,s_\infty)$，其中有一个表示无穷远的站点 s_∞，对于任意 $p\in S$。

▶**观察 1**。 在可容许平分线系统中，不相交于 o 的相关平分线 r 相交两次的相关平分线必须分别遵循图 *2* 和图 *3* 所示的模式。

证明。 在图 3(c)中，该模式因公理 A1 而不合法；在图 3(d)中，则因结合公理 A2 和 A1 而不合法： $J(s,t)$必须经过 $J(p,s)$的交点

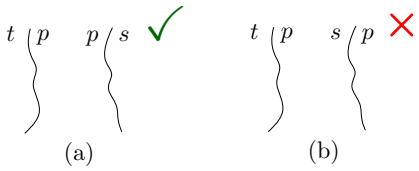


图 2 不相交的平分线；(a) 合法（✓）；(b) 非法（×）。

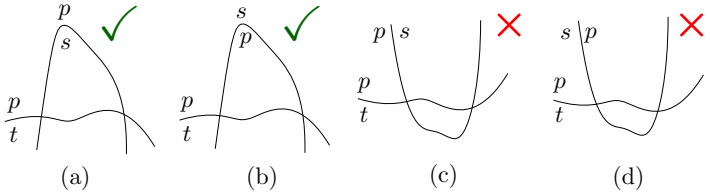


图 3 相交两次的平分线；合法（✓）和非法（×）。

以及 $J(t,\ p)$，根据公理 A2。因此， $J(s,\ t)$ 的任何可能构型都会导致违反公理 A1 或 A2。在存在 $J(s,\ t)$ 的情况下，通过结合公理 A1 和 A2，可以证明图 2(b) 中的模式不合法；该模式既不与 $J(s,\ p)$ 相交，也不与 $J(t,\ p)$ 相交。◀

▶**观察 2** ([8])。 在可容许平分线系统中，对于与 p 相关的平分线排列，其中任何一个环的所有弧的外侧都不能带有标签 p 。

平分线曲线 $J(p,\ q)$ 的任意连通分量 α 称为一条弧。我们用 $s_\alpha \in S$ 表示满足以下条件的站点：弧 $\alpha \subseteq J(p,\ s_\alpha)$。 Γ 的任意连通分量称为一条 Γ-弧。二等分线集合 $\mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}$ 的排列记作 $\mathcal{A}(\mathcal{J}_x)$。

3 定义抽象Voronoi-like图和环

为了以更广泛的方式定义类Voronoi图，本节放宽公理 A1-A4。具体而言，我们舍弃公理 A1，以允许存在不连通Voronoi区域，并放宽公理 A3，以允许不连通（甚至闭合的）二等分曲线。两个站点 $p,\ q \in S$ 的平分线 $J(p,\ q)$ 仍将平面细分为两个开域：p, $D(p,\ q)$ 的支配区域，以及 q, $D(q,\ p)$ 的支配区域，然而， $D(p,\ q)$ 可能是不连通的或有界的。公理 A2 和 A4 保持不变。除非另有说明，在后续定义和定理 6 中，我们使用一般术语抽象二等分线系统 来指代这种放宽后的变体。术语可容许平分线系统 始终意味着满足公理 A1-A4。

设 $G = (V,\ E)$ 是抽象二等分线系统$\mathcal{J}$的排列上的一个图，并在单连通域 $D \subseteq D_\Gamma$ 内截断（ G 的叶节点位于 ∂D 上）。 G 的顶点是排列顶点，边是连接成对顶点的极大二等分线弧。图 5 展示了二等分线排列（以灰色显示）上此类图的示例。在一般位置假设下， G 的顶点（位于 ∂D 上的叶节点除外）的度为 3。

▶**定义 3**。 图 G 中的顶点 v 称为局部Voronoi，如果在 v 附近的小邻域内， v 及其关联的图边 $N(v)$呈现在定义 v 的三个站点所形成的 *Voronoi* 图中，记作 S_v，见图 *4(a)*。

相反，如果我们考虑 S_v 的最远 *Voronoi* 图，那么 v 被称为 最远型局部*Voronoi*，见图 *4(b)*。普通的局部 *Voronoi* 顶点属于 最近型。

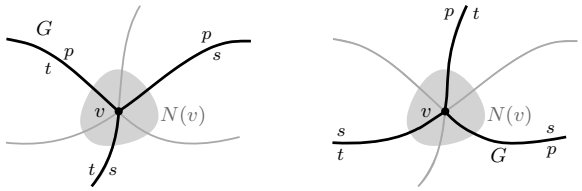
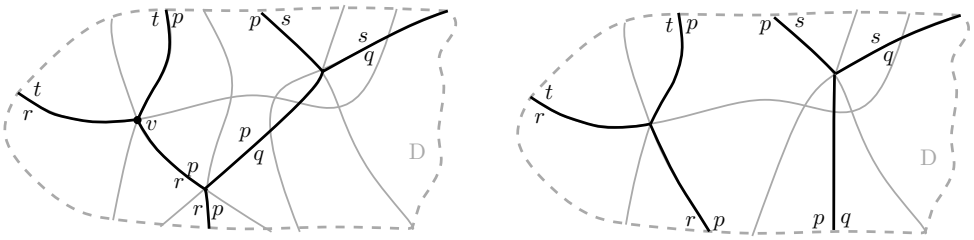


图 4 (a) 顶点 v 是局部Voronoi： $G \cap N(v) = \mathcal{V}(\{p,s,t\}) \cap N(v)$； $N(v)$以阴影表示， G 以粗体表示，平分线以灰色表示。(b) 顶点 v 是局部最远Voronoi。



(a) (b)

图 5 以粗体显示的Voronoi类图叠加在以灰色显示的平分线排列上。

▶**定义 4**。 在抽象二等分线系统的排列上、被包含于单连通域 D 内的图 G ，如果其顶点（位于 ∂D 上的叶节点除外）都是局部 *Voronoi* 顶点，则称为 Voronoi-like。如果 G 不连通，我们进一步要求 ∂D 上相邻的叶节点具有 一致标签，即根据 G 中关联的平分线边，它们与同一站点的支配区域相邻，见图 *5*。

图 G 实际上称为抽象类*Voronoi*图，但为简洁起见，我们通常省略“抽象”一词。下面我们考察 Voronoi类图 G与 Voronoi 图 $\mathcal{V}(S) \cap D$之间的关系，其中 S 是参与 G的边的站点集合。由于 G 的顶点均为局部Voronoi，因此 G 中的每个面 f 都必须在其内部恰好包含一个站点s_f 的标签，该站点称为 f的站点。

▶ **定义 5**。 设我们将 G 与 $V(S) \cap D$叠加在一起。如果 $V(S) \cap D$ 的一个面 f 被 G 中属于不同于 f所在站点的站点的面所覆盖，则称该面从 G中缺失，见图*7*；该图由图*6*推导而来。

▶**定理 6**。 设 r 是抽象类*Voronoi*图 G 的一个面，并令 s_r 表示其站 e（围绕 r 的平分线在 r内带有标签 s_r ）。则以下情况之一成立：

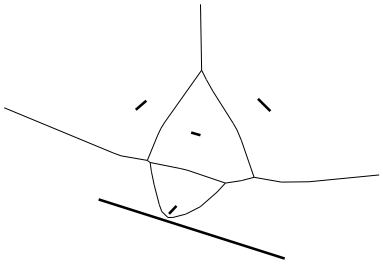


图6 4条线段的 Voronoi 图。

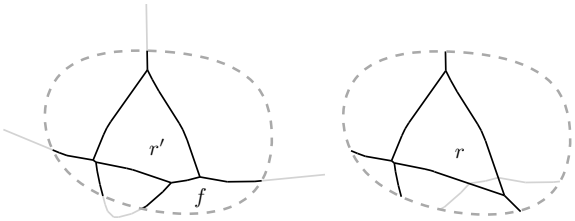


图7 (a) Voronoi 图 $V(S) \cap D$；(b) 类Voronoi图 G； $r' \subseteq r$； f 在(b)中缺失。

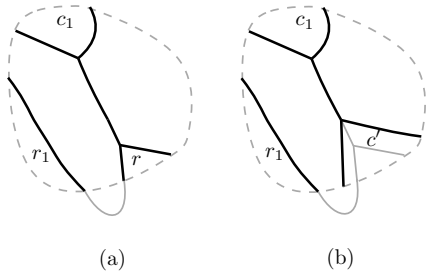


图8 (a) 类Voronoi图 G；(b) $V(S) \cap D$；覆盖 r的面 c'在 G中缺失。

1. 在$V(S) \cap D$中存在一个*Voronoi*面 r'，其对应的站点与 s_r相同， $r' \subseteq VR(s_r, S)$，使得 $r' \subseteq r$，见图7。*2.* 面 r 与*Voronoi*区域$VR(s_r, S)$不相交。此外，它完全被$V(S) \cap D$中的 *Voronoi*面覆盖，而这些面在 G中缺失，见图8。

证明。 设我们将 G 与 $\mathcal{V}(S) \cap D$叠加。面 r 在 G 中不可能与Voronoi区域VR的任何面发生部分重叠(s_r, S)，因为如果发生这种情况，某条 s_r相关的平分线（它构成了 r 的边界）将与VR(s_r, S)的内部相交，这根据Voronoi区域的定义是不可能的。出于同样的原因， r 不可能包含在VR(s_r, S)中。由于Voronoi区域覆盖整个平面，因此，除条目2中的最后一句外，该断言均可得出。

考虑情形 2 中与 r 的面重叠的 $\mathcal{V}(S)$ 的 Voronoi 面 c'，其中 c'、 s_c 的站点不同于 s_r。由于 c' 与 r 重叠，因此 c' 不可能完全包含于站点 s_c 在 G 中的任何面内。此外，根据上一段中的证明， c' 不可能与 G 中 s_c 的任何面部分重叠。因此， c' 与站点为 s_c 的 G 的任何面均不相交，即它必然从 G 中缺失。在图8中，面 c' 包含 r。◀

▶ **推论7**。 如果 $V(S) \cap D$ 的所有 *Voronoi* 面都没有从 G 中缺失，则 $G = V(S) \cap D$。

现在考虑一个满足公理 A1-A4 的可容许平分线系统。

▶ **推论8**。 在一个可容许平分线系统 J 中，如果 D 对应于整个平面，则 J 上的任何类 *Voronoi*图都等于相关站点集合的 *Voronoi* 图。

在可容许平分线系统中，Voronoi 区域是连通的，因此只有与 to ∂D 可能不会出现在 $\mathcal{V}(S) \cap D$ 中。

▶**推论 9.** 在可容许平分线系统中，任何不接触 ∂D的 G 之 f 要么与*Voronoi*区域 $VR(s_f, S)$ 重合，要么包含该区域。

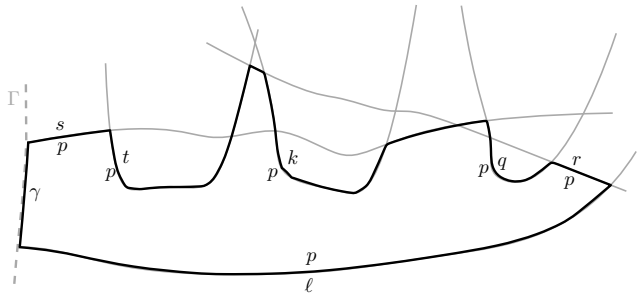


图 9 站点 p 的一个类Voronoi环。 $S_c = \{s,\ t,\ k,\ q,\ r,\ l\}$。

根据推论 9，在可容许平分线系统中，我们需要刻画与区域 D边界相交的类Voronoi图的面。也就是说，我们关注类 Voronoi 树和 Voronoi 类树及森林。

设 p 是 S 中的一个站点，并令 $\mathcal{J}_p$ 表示 $\mathcal{J}$ 中与 p 相关的平分线集合。

▶ 定义 *10*。设 C 是由 p 相关平分线组成的排列 $\mathcal{A}(\mathcal{J}_p \cup \Gamma)$ 中的一个环，且标签 p 出现在 C 的内部。若顶点 v 位于 C 中，且其两条关联平分线弧对应于由定义 $v(p \in S_v)$ 的三个站点所构成的 *Voronoi* 图 $V(S_v)$ 中的边，则称 v 为 *2* 度局部 *Voronoi*。特别地， $C \cap N(v) \subseteq V(S_v) \cap N(v)$，其中 $N(v)$ 是 v 周围的一个小邻域。若环 C 的顶点要么是 *2* 度局部 *Voronoi* 点，要么位于 Γ 上，则称该环为类*Voronoi*环。为简洁起见，如果未指定站点 p，也将 C 称为 p-环或站点环。若 C 围成一个 *Voronoi*区域，则称其为 *Voronoi* 环。

C 若不包含任何 Γ-弧，则称其为有界的；否则称其为无界的。

C 所包围的平面部分称为 C的区域，记作 D_C。 C 的任何Γ-弧都表示该区域向无穷远处的一个开口。图 9 展示了站点 p的一个类Voronoi环，该环是无界的（见 Γ-弧 γ）。从图中可以很容易看出，在同一站点集合上还存在其他 p-环，它们可能包围 C，也可能被 C 包围。最内侧的此类环是Voronoi区域的边界，见图 10。

令$p\backslash\{p\}$ 表示这样一个站点集合：这些站点与 p一起，为 C, $S_C = \{s_\alpha \in S \setminus \{p\} \mid \alpha \in C \setminus \Gamma\}$ 的平分线弧作出贡献。我们将 S_C 称为与 C相关的站点集合。令$\hat{}C$ 表示Voronoi环$\hat{}C = \partial(\mathrm{VR}(p, S_C \cup \{p\}) \cap D_\Gamma)$。

▶**观察 11**。 在一个可容许平分线系统中，可能存在许多涉及同一组站点的不同类*Voronoi*$\hat{}$环。任何此类环 C 都必须包围 *Voronoi* 环 $C_\circ$。此外， $S_{\hat{C}} \subseteq S_C$。在线排列这一特殊情况下，例如欧几里得$\hat{}$平面中点站点的平分线，站点环 C 对于 S_C是唯一的；特别是， $C = C_\circ$。

$\hat{}$ 类Voronoi环 C 必须与其 Voronoi 环 C共享若干平分线弧，至少为 S中的每个站点各共享一条$\hat{}$ 平分线弧$\grave{}_C$。令 $C \cap C$表示 C 与$\hat{}C$之间的公共弧序列。其他若干个 p-环 C'（其中 $S_{\hat{C}} \subseteq S_{C'} \subseteq S_C$）可能位于 C与$\hat{}C$之间，且$\hat{}$ 都共享 $C \cap C_\circ$。其他 p-环可能包围 $C_\circ$。图 10 展示了这样的环，其中最内层的环是$\hat{}C$；其区域（一个 Voronoi区域）以实心灰色显示。

4 环的类Voronoi图

设$\mathcal{J}$ 为一个可容许平分线系统，并设 C 为站点 p的一个类Voronoi环，其中涉及站点集合 S_C $(p \notin S_C)$。设$\mathcal{J}_C \subseteq \mathcal{J}$为与这些站点相关的所有平分线的子集

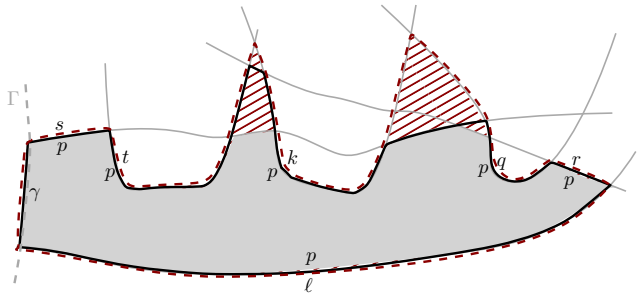


图 10 站点 p、 $S_c =$ 的类 Voronoi 环$\{s$、 t、 k、 q、 r、 $l\}$。

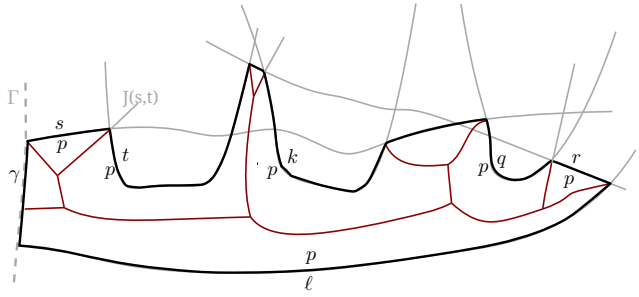


图 11 图 9 中站点环 C 的类Voronoi图$\mathcal{V}_l(C)$（红色树）

这些站点为 S_c。环 C 对应于来自 S_C的一系列站点出现序列，它们在 C的区域内导出一个类Voronoi图$\mathcal{V}_l(C)$，定义如下：

▶**定义 12**。 由类*Voronoi*环 C 所隐含的类*Voronoi*图 $V_l(C)$ 是定义在平分线底层排列 $A(J_C) \cap D_C$ 上的一张图，其叶节点是 C 的顶点，其余（非叶节点）顶点是局部 *Voronoi* 顶点，见图 *11*。（在 $A(J_C) \cap D_C$ 上存在这样一张图仍有待证明）。

本节将证明以下关于任意位于$\mathcal{A}(\mathcal{J}_p \cup \Gamma)$ 上的类Voronoi环 C 的定理。

▶**定理 13**。 p-环 C 的类*Voronoi*图 V_l（C）具有以下性质：
1. 它存在且唯一；**2.** 当 C 有界时，它是一棵树；当 C 无界时，它是一片森林；**3.** 如果它是某个*Voronoi*区域的边界，则可以在期望线性时间内计算得到。否则，我们可以在期望线性时间内计算$\mathcal{V}_l$（C'），其中某个 p-环 C' 被 C 包围（可能是 $C' = C$ 或 $C' = \hat{}C$）。

回顾一下，$\hat{}C$表示被 C包围的Voronoi 圈，其中$\hat{}\, C = \partial[\mathrm{VR}(p,\ S_C \cup \{p\}) \cap D_\Gamma]$。那么，$\mathcal{V}_l(\hat{}C)$就是Voronoi 图$\mathcal{V}(S_C) \cap D_{\hat{C}}$。为了推导定理 13，我们将在后续引理中分别证明每一项。

▶**引理 14**。 假设 V_l（C）存在，则它是一片森林；如果 C 有界，那么 V_l（C）是一棵树。V_l（C）的每个面都恰好与 C的一条平分线弧 α 关联，该面（或区域）称为 α的面，记作 R（α, C）。

证明。我们首先证明 $V_l(C)$ 不包含任何环。根据观察 11，站点 $s \in S_C$ 的任何类Voronoi环都必须完全包围 $\mathrm{VR}(s, S_C)$，因此也必须包围 $\mathrm{VR}(s, S_C \cup \{p\}) \subseteq \mathrm{VR}(s, S_C)$。由于 $J(p, s)$ 对 C 贡献了弧，因此 $\mathrm{VR}(s, S_C \cup \{p\})$ 必须延伸到 C 之外；于是，$\mathrm{VR}(s, S_C)$ 也必须延伸到 C 之外。由于 $\mathrm{VR}(s, S_C)$ 不能被

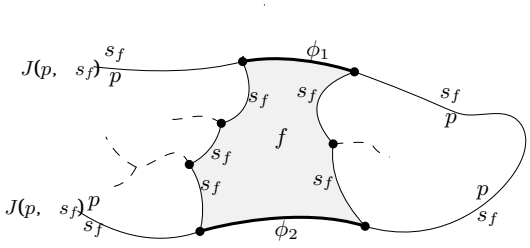


图 12 引理 14 的证明；面 f 以阴影显示。

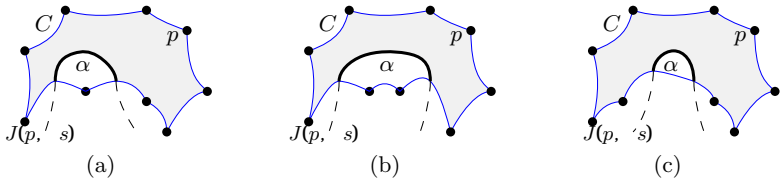


图 13 弧插入操作的三种情形。

被 C 包围，因此 s 在 S_C 上的任何环也必然如此。因此，$\mathcal{V}_l(C)$ 不能包含环。同样的论证意味着，$\mathcal{V}_l(C)$ 不能存在一个与 Γ 关联、但不与 C 的平分线弧关联的面。

现在假设$\mathcal{V}_l(C)$有一个属于站点 $s_f \in S_c$ 的面 f，该面与两条平分线弧 $\phi_1, \phi_2 \in C$ 相邻，使得 $\phi_1, \phi_2 \subseteq J(p, s_f)$，见图 12。接着，$\partial f \setminus \{\phi_1, \phi_2\}$ 的一条分支与 $J(p, s_f)$ 中位于 ϕ_1 和 ϕ_2 之间的连通分量将构成一个环，其标签 s_f 位于外侧，见图 12。根据观察 2，在可容许平分线系统中不可能存在这样的环，因此产生矛盾。因此，$\mathcal{V}_l(C)$ 的每个面都必须恰好与一条平分线弧相邻。◀

如果 C 是一个 Voronoi区域的边界，那么 Voronoi 图$\mathcal{V}(S) \cap D_C$ 的树性质此前已在 [8, 4] 中得到证明。引理 14 将这一结论推广到任意类Voronoi环 C 对应的类Voronoi图。

在 [8], 中，类*Voronoi*图被定义为一种树结构，它细分了所谓边界曲线的区域，而该边界曲线由一组Voronoi 边所隐含。边界曲线是类Voronoi环，但反之不一定成立。也就是说， [8] 的树结构是将引理 14中的某些性质作为定义而定义的，而这种树是否始终存在这一问题一直悬而未决。在本文中，类Voronoi图的定义完全不同，但引理 14表明，在边界曲线的区域内，这两种结构是等价的。因此，我们可以使用并扩展 [8]的结果。

给定一个 p-环 C，以及与其相交的平分线 $J(p, s)$，可以如下定义弧插入操作 [8] 。设 $\alpha \subseteq J(p, s)$ 是 $J(p, s)$ 在 C区域内的极大连通分支，见图 13。令 $C_\alpha = C \oplus \alpha$ 表示通过用 α 替换 α的两个端点之间 C 的多余部分而得到的 p-环。（注意， C 中只有一个部分会与 α形成 p-环，因此不存在歧义）。由此可能产生三种主要情形，见图 13：1） α 可能位于 C的两个相邻弧之间，此时$|C_\alpha| = |C| + 1$；2） α 可能导致删除 C中的一条或多条弧，因此， $|C_\alpha| \leq |C|$；3） α 的端点可能位于 C的同一条弧 ω 上，此时 ω 被分成两条不同的弧，因此， $|C_\alpha| = |C| + 2$。在所有情形下， C_α 都被 C 包围（$|\cdot|$ 表示基数）。

弧插入操作可以自然地扩展到类Voronoi图 $\mathcal{V}_l(C)$，以插入弧 α 并获得 $\mathcal{V}_l(C_\alpha)$。我们使用以下引理，该引理可以提取自

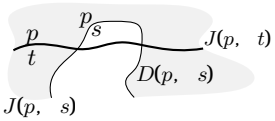


图 14 $J(p,\ s)$ 将 $J(p,\ t)$ 分割。在偏序中，$s <_p t$。

[8]（使用 [8]中的定理18、定理20和引理21）。

▶ 引理 *15*（[8]）。给定 $V_l(C)$、弧 $\alpha \in J(p,s) \cap D_C$，以及 α 在 C上的端点，我们可以使用普通*Voronoi*图中的标准技术，计算合并曲线 $J(\alpha) = \partial R(\alpha, C_\alpha)$。如果 α 的端点位于 C的不同弧上，或 Γ，则时间复杂度为 $O(|J(\alpha)| + |C \setminus C_\alpha|)$。否则，$\alpha$ 将平分线弧 ω 及其区域 $R(\omega, C)$ 分割为 $R(\omega_1, C_\alpha)$ 和 $R(\omega_2, C_\alpha)$；时间复杂度增加至 $O(|J(\alpha)| + min\{|R(\omega_1, C_\alpha)|, |R(\omega_2, C_\alpha)|\})$。

与 [8, 10], 引理 15相关的正确性证明，在类Voronoi环上进行时仍然成立，只要弧 α 包含于环的域中；另见 [10, 引理 9]。因此，可以证明引理 15。

接下来我们通过构造证明$\mathcal{V}_l(C)$的存在性。为此，我们使用分裂关系来描述$\mathcal{J}_P$ 中的平分线或 S_C中的站点之间的关系，这一关系在 [9], 中也曾被考虑过，见图14。

▶ **定义16**。对于任意两个站点 s、$t \in S_C$，如果 $J(p、\ s)$ 分裂 $J(p、\ t)$（关于 p，我们也称 s 分裂 t），则称 $J(p、\ t) \cap D(p、\ s)$ 包含两个连通分支。

根据可容许平分线系统中的相关平分线至多相交两次这一事实（如图 2和图 3所示），我们可以推断分裂关系具有非对称性和传递性，因此也是无环的。分裂关系在 S_C上诱导出一个严格偏序，其中 $s <_p t$，若 $J(p,s)$ 分裂 $J(p,t)$，见图14。令 o_p 为所得有向无环图的一个拓扑序，该图基于由 p在 S_c 上诱导的分裂关系。

以下引理表明，$\mathcal{V}_l(C)$ 根据构造确实存在。它建立在 [9] 中所考虑的、关于边界曲线的一个限制性更强的版本之上。

▶**引理17**。给定分裂关系 o_p 的拓扑序，$V_l(C)$ 可以在 $O(|C|^2)$ 时间内构造；因此，$V_l(C)$ 存在。此外，我们还可以同时为任意其他被 C、$S_{C'} \subseteq S_C$ 包围的类*Voronoi*环 C' 构造 $V_l(C')$。

证明。给定序列 o_p，我们采用 Chew 的随机化方法 [5], ，并应用引理 15 的弧插入操作，该操作取自 [8]。令 S_C中的站点按照 $o_p = (s_1, s_2 \ldots s_m)$，$m = |S_C|$进行编号。我们首先证明，按照 o_p，可以通过弧插入逐步构造 C。

令 C_i 表示由 o_p 中前 i 个站点构造的 p-环。C_1 由 $J(s_1,p)$ 和一条 Γ-弧组成，即 $C_1 = \partial(D(p,s_i) \cap D_\Gamma)$。显然，$C_1$ 包围着 C。假设 C_i 包围着C。那么，给定 C_i，令 C_{i+1} 为通过向 C_i 中插入 $J(s_{i+1},p) \cap D_{C_i}$ 的连通分量而得到的 p-环；这些连通分量对应于 C 中的弧。对于每个这样的连通分量 α ($\alpha \in J(s_{i+1},p) \cap D_{C_i}$)，如果 α 的某个部分出现在 C 中，则计算 $C_i \oplus \alpha$；如果 α 没有出现在 C 中，则忽略它。令 C_{i+1} 为将 $J(s_{i+1},p)$ 的所有此类连通分量逐一插入 C_i 后得到的 p-环。由于任何其 p-平分线分裂$J(p,s_{i+1})$ 的站点都已被处理，因此对于 C 中的每条弧，$J(s_{i+1},p) \cap D_{C_i}$ 中必然存在一个不同的连通分量。于是，C_{i+1} 可以由 C_i 推导得到，并且必须包围 C。

我们已经证明，如果遵循 o_p，则可以在 $O(|C|^2)$ 时间内增量构造 C。接下来需要在每一步 i 构造类Voronoi图 $\mathcal{V}_l(C_i)$。为此，我们使用

引理 15，从 $\mathcal{V}_l(C_1) = \emptyset$ 开始。给定 $\mathcal{V}_l(C_i)$ 和 C_{i+1}，我们可以对 $C_{i+1} \setminus C_i$ 中的每条弧 $\alpha \subseteq J(s_{i+1}, p)$ 应用引理 15。[8] 的正确性证明确保了每次弧插入的可行性和正确性，因此也确保了 $\mathcal{V}_l(C_{i+1})$ 的存在。

上述增量构造还可以通过在每一步 i计算 C_i 和 C'_i，来计算 $\mathrm{V}_l(C')$。设 $C_i = C'_i$，其中 $C'_1 = C_1$。在考虑站点 s_{i+1}时，我们将 $J(s_{i+1}, p)$ 的所有连通分量插入到C'_i 中，这些连通分量对应于 s_{i+1} 的弧，而这些弧出现在C 或 C'中。因此， C'_{i+1} 可通过从 C_{i+1} 中插入 s_{i+1} 的任意附加弧 α' 得到，其中 $\alpha' \in C' \setminus C$。注意， s_{i+1} 中出现在 C 里的所有弧都会被插入到 C'_{i+1}中，即使它们并未出现在 C'中。这是由于处理顺序 o_p所致：其 p-平分线将$J(p, s_{i+1})$分割开的任何站点都已经处理完毕，因此，对于 s_{i+1} 中出现在 C 或 C'中的每条弧，都必然存在 $J(s_{i+1}, p)$ 的一个不同连通分量 $\cap D_{C_i}$，并且可以将其识别出来。

关于$\mathcal{V}_l(C_{i+1})$，插入一条额外的弧 α' 可能只会导致现有区域缩小。因此，我们得到两个不变量：1. 对任意弧$\beta \in C_{i+1} \cap C'_{i+1}$， $R(\beta, C'_{i+1}) \subseteq R(\beta, C_{i+1})$；以及 2. C'_{i+1} 被 C_i 包围。这些不变量在后续步骤中均得以保持。步骤 $i+1$ 从 C'_{i+1}开始，而 C'_{i+1}被 C_{i+1}包围，这一事实并不会影响上述论证。因此，对于 C_n 和 C'_n，这些不变量成立，进而有 $C'_n = C'$。◀

以下引理也可以从 [8, 10]中提取出来。它可用于确立$\mathcal{V}_l(C)$的唯一性。与引理 15 类似，其原始表述并未提及 p-环；然而，证明中的任何内容都不妨碍将其调整为 p-环，参见 [10, 引理 29]。

▶ **引理 18**。 *[10]* 设 C 是一个 p-环，且 α、β 是 C中的两条平分线弧，其中 $s_\alpha \neq s_\beta$。假设 $J(s_\alpha, s_\beta)$ 的一个连通分量 e 与 $R(\alpha, C)$相交。那么， $J(p, s_\beta)$ 必定与 $\beta' \subseteq J(p, s_\beta)$ 的某个连通分量相交，其中 e 是 $\partial R(\beta', C \oplus \beta')$的一部分$D_c \cap D_c$。

根据引理 18，如果 $J(s_\alpha, s_\beta)$ 与 $R(\alpha, C)$ 相交，那么 s_β 的一个面必定从$V_l(C)$ 中缺失（相较于 $\mathcal{V}_l(\hat{C})$），这意味着 $J(p, s_\beta)$ 的一条弧从 C 中缺失。于是，$\mathcal{V}_l(C)$ 必定是唯一的。

现在，我们使用 [8] 的随机增量构造来构造 $\mathcal{V}_l(C)$，而该构造又遵循 Chew [5],，以建立定理 13 的最后一个结论。设 $o = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ 是 C 的平分线弧的一个随机排列，其中每条弧表示 S_C 中站点的一次不同出现。增量算法分为两个阶段。在阶段1中，按照逆序 o^{-1} 从 C 中删除弧，同时记录删除时它们的邻居。在阶段2中，按照 o 逐条插入这些弧，并使用它们在阶段1中的邻居信息。

令 C_i 表示按此顺序考察 o 中前 i 条 p弧所构造的 p环。 C_1 是由 $J(s_{\alpha_1}, p)$ 和相关的 Γ- p弧组成的 p环。给定 C_i，令 α'_{i+1} 表示 $J(p, s_{\alpha_{i+1}})$ 的平分线连通分量 $\cap D_{C_i}$，其中包含 α_{i+1}（如果存在）；参见图 13，其中 α 表示 α'_{i+1}。如果 α_{i+1} 位于 C_i 外部，则 $\alpha'_{i+1} = \emptyset$（当 C_i 不是 Voronoi 环时，这是可能的）。令环 $C_{i+1} = C_i \oplus \alpha'_{i+1}$（如果 $\alpha'_{i+1} = \emptyset$，则 $C_{i+1} = C_i$）。给定 α'_{i+1} 和 $\mathcal{V}_l(C_i)$，图 $\mathcal{V}_l(C_{i+1})$ 可通过应用引理 15 得到。

我们指出一个关键情况，它与 [5] 不同： α'_{i+1} 的两个端点位于 C_i 的同一条弧 ω 上，见图 13(c)，其中 α 表示 α'_{i+1}。也就是说，插入 α_{i+1} 会将弧 ω 分裂成两条弧，即 ω_1 和 ω_2。（注意， $s_{\alpha_{i+1}} <_p s_\omega$，但 ω 已在 α_{i+1} 之前插入到 C_i 中。）由于这种分裂， C_i，从而 $\mathcal{V}_l(C_i)$，依赖于顺序：如果在某种替代顺序中先考虑 α_{i+1} 而不是 ω，那么在所得的环中将不存在 ω_1 或 ω_2，其在 $\mathcal{V}_l(C_{i+1})$ 中对应的面也同样不存在。分裂 $R(\omega, C_i)$ 所需的时间与 $R(\omega_1, C_{i+1})$ 和 $R(\omega_2, C_{i+1})$ 的复杂度中的较小者成正比，该时间将计入步骤

i 的时间复杂度。分裂关系的另一个副作用是，如果 C_i 不是 Voronoi 圈，则 α_{i+1} 可能落在 C_i 之外，此时 $C_{i+1} = C_i$。于是 $C_n \neq C$，特别是 C_n 被 C 包围。

由于计算得到的环依赖于顺序，标准的逆向分析不能直接应用于步骤 i。在 [10] 中提出了一种替代技术，可应用于上述构造。与 [10] 的主要区别在于情况 $C_{i+1} = C_i$，然而，这种情况不会影响时间复杂度，因此可以应用 [10] 的分析。

▶**命题19**。 根据 *[10],* 中的逆向分析变体，步骤i的时间复杂度预计为 $O(1)$。

4.1 类Voronoi图 $\mathcal{V}_l(C)$、$\mathcal{V}_l(C')$和$\mathcal{V}_l(\hat{C})$之间的关系

在下面的命题中，第一个断言由定理6得出，第二个断言由引理17的证明得出。

▶ 命题*20*。设 C' 是 C 与 $\hat{C}$ 之间的类*Voronoi*环，使得 $S_{\hat{C}} \subseteq S_{C'} \subseteq S_C$。*1.* 对任意弧 $\alpha \in C' \cap \hat{C}$， $R(\alpha, C') \supseteq R(\alpha, \hat{C})$。*2.* 对任意弧 $\alpha \in C \cap C'$， $R(\alpha, C') \subseteq R(\alpha, C)$。

命题20表明，当我们从外环C 向内环移动时，$\mathcal{V}_l(C')$ 的面会逐渐收缩，直到到达$\mathcal{V}_l(\hat{C})$ 的 Voronoi 面；这些面包含于所有其他面中。它还表明，$\mathcal{V}_l(C)$ 、 $\mathcal{V}_l(C')$ 和 $\mathcal{V}_l(\hat{C})$ 共享公共子图，并且 Voronoi 图$\mathcal{V}_l(\hat{C})$ 的邻接关系得以保留。更形式化地说，

▶ **定义21.** 设 $V_l(C', C \cap C')$ 是 $V_l(C')$的如下子图：若与顶点 v 关联的三个面都属于 $C \cap C'$中的弧，则顶点 $v \in V_l(C')$包含在 $V_l(C', C \cap C')$中；若与边 e 关联的两个面都属于 $C \cap C'$中的弧，则边$e \in V_l(C')$ 包含在 $V_l(C', C \cap C')$ 中。

▶ **命题22.** 对于任意由 C包围且 $S_{C'} \subseteq S_C$的类*Voronoi*环 C'，有：$V_l(C', C \cap C') \subseteq V_l(C)$。

根据具体问题的不同，计算 $\mathcal{V}_l(C')$（而不是计算代价更高的 $\mathcal{V}_l(C)$）可能就足够了。示例请参见第5节。

如果$\mathcal{V}_l(C)$的面是Voronoi 区域，则可以在线性期望时间内计算$\mathcal{V}_l(C)$，而不是$\mathcal{V}_l(C')$。为此，可以删除 $C' \setminus C$中在弧分裂期间产生的多余弧，这些弧称为辅助弧。第6节给出了一个具体示例。在构造的任意步骤中，如果 $R(\alpha', C_i)$是一个Voronoi区域，但$\alpha' \cap C = \emptyset$，我们可以调用 [8] 的站点删除过程，从$\mathcal{V}_l(C_i)$中消除 α' 和 $R(\alpha', C_i)$。特别地，

▶ **命题 23**。 给定 $V_l(C_i)$、 $1 \leq i \leq n$，如果 $R(\alpha, C_i)$ $\subseteq$是$VR(s_\alpha, S_\alpha)$，则可以删除 $R(\alpha, C_i)$，其中 $S_\alpha \subseteq S_C$是定义 $\partial R(\alpha, C_i)$的站点集合，且期望时间在线性于 $|S_\alpha|$的时间内完成。

如适用，使用命题 23 有两种方式：
1. 必要时使用它，以维持以下不变量： C_i 包围 C （通过删除 [8]其中阻碍插入的任何辅助弧 C_{i-1}） α_i，从而消除情况 $C_i = C_{i-1}$）。**2.** 在创建任何辅助弧时将其消除。如果插入 α_i 将一条弧分割$\omega \in C_{i-1}$ 为 ω_1 和 ω_2，但 $\omega_2 \notin C$，则通过调用 R（ω_2， C_i）将其消除 [8]。

后者的优点在于，类 Voronoi 环与顺序无关，因此可以通过逆向分析来确定算法的时间复杂度。我们针对第6节的具体情况给出逆向分析论证；对于这一抽象表述，也可以推导出同类型但更为复杂的论证。

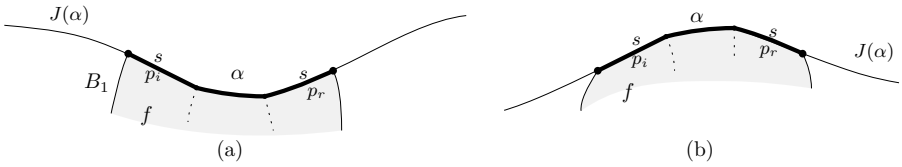


图15 复合弧 α 在 k-站点环（a）和 k 阶环（b）中的平分线 $J(\alpha)$。

5 扩展至 k 个站点的类 Voronoi 环

定理 13 可以扩展到一个类*Voronoi* k-环，为简洁起见，记作 k-环，它涉及一个站点集合 P，其中 k 站点的标签出现在该环的内部。A k-环 C_k 位于排列 $\mathcal{A}(\mathcal{J}_P \cup \Gamma)$ 中，其顶点均为 2 度局部 Voronoi，其中$\mathcal{J}_P$ 表示与 P 中站点相关的平分线集合。它蕴含一个类 Voronoi图 $\mathcal{V}_l(C_k)$，该图涉及站点集合 $S_C \subseteq S \setminus P$；这些站点与 P 中的站点共同定义 C_k 的平分线弧。$\mathcal{V}_l(C_k)$ 的定义类似于定义 12，其中给定 C_k 以及站点集合 S_C。

我们区分 $\mathcal{A}(\mathcal{J}_P \cup \Gamma)$ 上两种不同类型的 k-环：1. 一种 k-站点类*Voronoi*环，其顶点全部为最近型，例如 k 相邻Voronoi区域并集的边界；以及 2. 一种 阶-k *Voronoi*类环，其顶点同时包含最近型和最远型，例如一个阶-k Voronoi面的边界。无论哪种情况，我们都将一个 k-环 C_k 划分为极大复合弧，每个复合弧由 S_C中的一个站点诱导。复合弧内部的顶点是 P中站点之间的切换点，而复合弧的端点是 S_c中站点之间的切换点。对于阶-k 环，前一种顶点为最远型，而后一种顶点（复合弧的端点）为最近型。给定一个复合弧 α，令 $J(\alpha)$表示由弧 α组成的平分线曲线，该弧将与其端点关联的平分线弧延伸至 Γ，参见图15。令 $P_\alpha \subseteq P$ 表示这样一组站点：它们与 S_C中的一个站点共同定义 α。

▶**引理 24**。 假设它存在，$V_l(C_k)$ 是一个森林；如果 C_k 有界，则 $V_l(C_k)$是一棵树。$V_l(C_k)$ 的每个面都恰好与 C_k 的一条复合弧 α 关联，该复合弧记为 $R(\alpha, C_k)$。

证明。 $\mathcal{V}_l(C_k)$ 可能不包含环，因为 VR(s, S_C) $s \in S_C$不能被 C_k包围，正如引理 14 的证明中所示。出于同样的原因，$\mathcal{V}_l(C_k)$ 的任一面都必须与一条平分线弧关联。因此，$\mathcal{V}_l(C_k)$ 是一个森林，其叶节点与复合弧的端点关联。还需证明 $\mathcal{V}_l(C_k)$ 的任何面都不能与同一站点 $s \in S_c$的两条复合弧关联。

假设，为了导出矛盾，某个面 f 与同一站点 $s \in S_C (s = s_f)$ 的两条复合弧$\alpha, \alpha' \in C_k$ 关联。我们首先考虑一个阶为 k 的环，见图 16。弧 α 和 α'由 $J(s, p_i)$ 中的平分线片段组成， $p_i \in P$。其中任意两条 s 相关平分线 $J(s, p_i)$ 和 $J(s, p_j)$ 至少必须相交一次，否则 VR$(s,\{s, p_i, p_j\})$ 将是不连通的，从而违反公理 A1。此外，为同一复合弧作出贡献的任意两条 $J(s, p_i)$ 和 $J(s, p_r)$ 必须恰好相交一次，因为如果它们相交两次，就会以图 3(d) 所示的非法模式相交，见图 16(c)。

考虑 $\partial f \setminus \{\alpha, \alpha'\}$ 的两条分支，见图 16。任选其中一条分支，例如 B_1，设 $\alpha_i \subset J(s, p_i)$ 和 $\alpha_j \subset J(s, p_j)$ 分别为与 B_1 的端点相接的 α 和 α' 的平分线弧。若 $J(s, p_i)$ 和 $J(s, p_j)$ 在点 I 相交，且该点位于 B_1 与 α_i、 α_j 相对的一侧，则由 B_1 以及 $J(s, p_i)$ 和 $J(s,$ {v30)} 与 I 相接的部分构成的环，其标签位于外侧。但根据观察 2，这样的环不可能存在。因此， I 不可能存在，而 $J(s, p_i)$ 和 $J(s, p_j)$ 必须在 B_1 的另一侧的点 I' 相交。

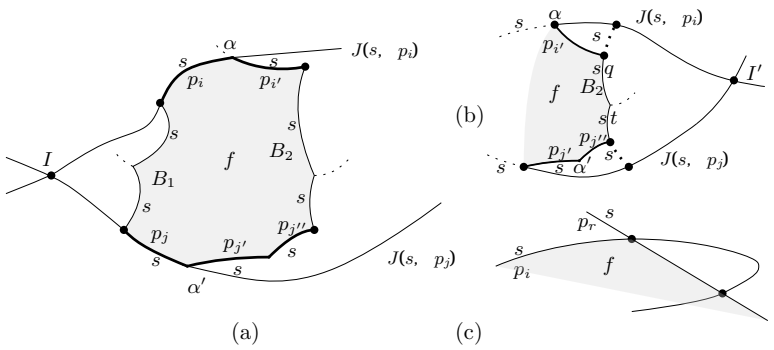


图 16 阶数为k 的类Voronoi环的引理24证明；面 f 以阴影显示。

$J(s,\ p_i)$ 的平分线（分别地，$J(s,\ p_j)$ 的平分线）不能进入面 f，否则 $J(s,\ p_i)$（分别地，$J(s,\ p_j)$）会与另一条与 s 相关的平分线相交两次，从而形成弧 α（分别地，α'），这与上文所述不可能。因此，I' 不能位于 f 内。

考虑另一个枝丫 B_2 of $\partial f \setminus \{\alpha, \alpha'\}$，并扩展与其端点相接的弧，直到其中一条与 $J(s,\ p_i)$ 相交，另一条与 $J(s, p_j)$ 相交，见图 16(b)。构成B_2 的平分线彼此 s-相关，因此它们必须分别与 $J(s, p_i)$ 和 $J(s, p_j)$ 相交，否则就会出现图 2(b) 中的非法模式。现在假设 $J(s,\ p_i)$ 与 $J(s, p_j)$ 在点 I' 处相交，且该点位于 B_2 的另一侧，与 f相对。则由扩展后的枝丫 B_2 以及与I'相接的 $J(s, p_i)$ 和 $J(s, p_j)$ 的部分，构造出一个外部带有标签 s 的非法循环。根据观察 2，这也说明 I' 是不可能的。于是产生矛盾，因为 $J(s, p_i)$ 与 $J(s, p_j)$ 至少必须相交一次。因此，$\mathrm{V}_l(C_k)$ 的每个面都必须恰好与 C_k的一条 k 阶弧相接。

现在，假设 C_k 是一个 k-站点类Voronoi环，且面 f 与复合弧 α 和 α' 相接。考虑曲线 $J(\alpha)$ 和 $J(\alpha')$，它们不能与 B_1 或 B_2 相交，否则会产生一个外部带有标签 s 的非法循环，这与观察 2 矛盾。（在图 15(a)中，如果 $J(\alpha)$ 转而与 B_1 相交，就会产生一个非法循环。）此外，$J(\alpha)$ 和 $J(\alpha')$ 必须相交，否则 $\mathrm{VR}(s, P_\alpha \cup P_{\alpha'} \cup \{s\})$ 将是不连通的。但这样一来，在 $J(\alpha)$ 与 $J(\alpha')$ 的相交部分以及 B_1 或 B_2 之间，会产生一个外部带有标签 s 的非法循环，这与观察 2 矛盾。◀

根据引理24，定理 13 的其余结论可以按照第4节中的方式推导出来。令 $J(s_\alpha, P)$ 表示与复合弧 α、$s_\alpha \in S_C$ 相关联的平分线曲线。对于一个 k-站点环，$J(s_\alpha, P) = \partial\mathrm{VR}(s_\alpha, P \cup \{s_\alpha\})$。对于一个阶为 k 的环，$J(s_\alpha, P) = \partial\mathrm{FVR}(\alpha, P \cup \{s_\alpha\})$，其中 $\mathrm{FVR}(\alpha, P \cup \{s_\alpha\})$ 表示 s_α 的最远Voronoi区域中与弧 α 相接的面。在这两种情况下，$J(\alpha) = J(s_\alpha, P_\alpha)$。

曲线 $J(s_\alpha,\ P)$ 的计算开销很大，但我们从不需要完整地计算 $\tilde{J}(s_\alpha,\ \tilde{P})$它。我们不使用 $\tilde{J}(s_\alpha,\ \tilde{P})$，而是使用 $\tilde{J}(s_\alpha,\ P_\alpha)$，其中 $P_\alpha \subseteq P_\alpha \subseteq P$，且 $|P_\alpha| \leq |P_\alpha| \leq |P_\alpha| + 2$。$\tilde{J}(s_\alpha,\ P_\alpha)$ 可由 $J(\alpha)$ 以及 α 在其插入时刻于当前类Voronoi环中的两个邻居直接获得。用 $\tilde{J}(s_\alpha,\ P_\alpha)$ 替代第 3 节中的 p-平分线后，基本相同的增量算法即可应用于 c_k 的复合弧上。关于阶数为 k 的环中 $\tilde{J}(s_\alpha,\ P_\alpha)$ 的一些性质，见 [10]。

5.1 在阶数为k 的Voronoi面中计算类Voronoi图

现在我们回顾 Junginger 和 Papadopoulou 的一个例子 [9]：当 C_k 是一个k 阶Voronoi区域的面 f 的边界时。已知 $\mathcal{V}_l(C_k)$ 可以在

线性期望时间 [10]，内计算出来，但通过计算适当定义的类Voronoi环 C [9]的类Voronoi图，可以推导出一种更简单的技术。事实上，介于 C 和 $\hat{C}$之间的任意类Voronoi环 C'的类Voronoi图，最终都完全足够。

设 f 是由 H 个 k 站点组成的集合的第 k 阶 Voronoi区域的一个面。设 S_f 表示这样一个站点集合：这些站点与 H 中的站点共同确定边界 ∂f。图 $\mathcal{V}_l(\partial f)$ 给出了 f 内的第（k+1）阶 Voronoi 划分；该划分是 Voronoi 图 $\mathcal{V}(S_f)$ 在 f 内的截断，即 $\mathcal{V}(S_f) \cap f$。

计算 Voronoi 图 $\mathcal{V}(S_f) \cap f = \mathcal{V}_l(\partial f)$ [9]。

- 给定 ∂f 和任意 $h \in H$，根据 f 边界上站点的顺序，计算一个 h-环 C。注意，C 包含 Voronoi区域 VR(h, S_f)，而后者又包含 f。VR(h, S_f) 尚未知；但是，C 可以直接由 ∂f 推导得到。对 C 运行 [8] 的随机增量技术，可在线性期望时间内完成（见第4节）。该过程将为某个介于 C 和 $\hat{C}$ 之间的 h-环计算 $\mathcal{V}_l(C')$。截断 $\mathcal{V}_l$) $C' \cap f$。无论计算出哪个 h-环，$\mathcal{V}_l(C') \cap f = \mathcal{V}(S_f) \cap f$。

该论断由以下事实得出：对于任意 $\alpha' \in \hat{C} \setminus C'$，以及 $C \setminus C' \subseteq \hat{C} \setminus C$，$R(\alpha', \hat{C}) \cap f = \emptyset$。因此，$\mathcal{V}_l(\hat{C}) \cap f = \mathcal{V}_l(\hat{C}, \hat{C} \cap C') \cap f = \mathcal{V}_l(\hat{C}, \hat{C} \cap C) \cap f$。

6 更新约束 Delaunay 三角剖分

我们给出一个类Voronoi环 C 的示例，它并不对应于一个 Voronoi区域，但我们需要计算类Voronoi图 $\mathcal{V}_l(C)$ 的邻接关系。该问题出现在约束 Delaunay 三角剖分（CDT）的增量构造中。约束 Delaunay 三角剖分是 Delaunay 三角剖分 的一个众所周知的变体，其中给定的线段集被约束为出现在点集 Q 的三角剖分中，该点集包含这些线段的端点，参见 [15] 及其中的参考文献。

CDT 的每条边要么是输入线段，要么是局部 *Delaunay*（见第 1 节）。用于计算 CDT 的增量构造首先对 Q 中的点构造普通的 Delaunay 三角剖分，然后逐条插入线段约束，并在每次插入后更新三角剖分。Shewchuk 和 Brown [15] 给出了执行每次更新的期望线性时间算法。尽管该算法以伪代码形式进行了概述，之后可以直接实现，但其算法描述相当技术化，因为必须处理自交多边形、它们的三角剖分以及其他例外情况。我们证明，该问题恰好对应于计算一个 Voronoi环的 Voronoi图（从对偶意义上说）。因此，可以得到一种非常简单的随机增量构造：偶尔调用 Chew 算法 [5] 来删除点的 Voronoi区域。引用 [15] 的话：增量线段插入很可能仍将是最常用的 CDT 构造算法，因此，理解其性能以及如何使其快速运行非常重要。本节正是对此进行处理。

当在CDT中插入一条新的约束线段 s 时，会识别出被该线段破坏的三角形并将其删除 [15]。这会产生两个需要使用空腔重新进行三角剖分的区域，所用三角形为约束德劳内三角形；参见图17(a)、(b)，该图借自[15]，，其中一个空腔以阴影（浅蓝色）表示，另一个空腔未加阴影。每个空腔的边界不一定是简单多边形。然而，每个空腔都对应一个类Voronoi环，其类Voronoi图可对该空腔重新进行三角剖分，参见图17(c)、(d)。

令 $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 表示其中一个空腔，其中 $p_1 \ldots p_n$ 是按逆时针顺序排列的空腔顶点序列，p_1, p_n 是 s 的端点。令 S 表示相应的点集（$|S| \leq n$），并令 $\mathcal{J}_s$ 表示底层平分线系统

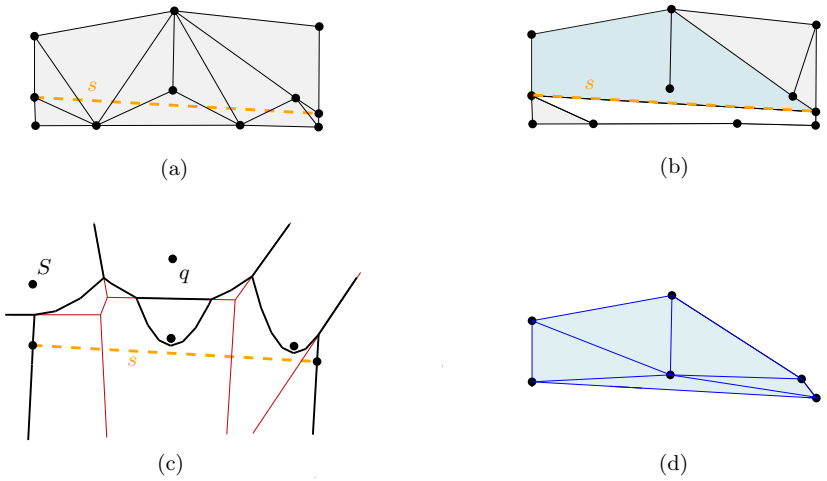


图17 来自 [15, 图 3]的点集。（a）给定的约束德劳内三角剖分与叠加的线段 s；（b）蓝色的空腔 P；（c）红色的$\mathcal{V}_l(C)$、黑色的 $C = \partial\mathrm{VR}(s, S \cup \{s\})$；（d）重新三角剖分后的 P。

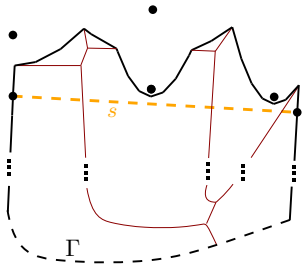


图18 示例图17中的类Voronoi环 C 和$\mathcal{V}_l(C)$（红色）。

涉及线段 s 和 S 中的点。令 C 表示 $\mathcal{A}(\mathcal{J}_S \cup \Gamma)$ 中的 s-环，其中每个 P 中的顶点都对应一条 s-平分线弧，且顺序与 P 相同，见图18。注意， S 中的一个点可能会在 C 中贡献多条弧。

▶**引理25**。 s-环 C 存在，并且可以在线性时间内从 P 导出。

证明。设 $p_i \in P, 1 < i < n$。原始约束德劳内三角剖分中，与 p_ip_{i-1} （分别与 p_ip_{i+1}）相邻的三角形所对应的对角线是一条被 s 相交的局部德劳内边。因此，存在一个经过 p_i 且与 s 相切、既不包含 p_{i-1} 也不包含 p_{i+1}的圆，见图19。因此，必定存在一段 $J(p_i, s)$ 的弧，其中包含该圆的圆心，并从 $J(p_i, s)$ 与 $\cap J(p_{i-1}, s)$ 的一个交点延伸至 $J(p_i, s)$ 与 $\cap J(p_{i+1}, s)$ 的一个交点。 $J(p_i, s)$ 在这两个交点之间的部分对应于 p_i 在 C 上的弧，

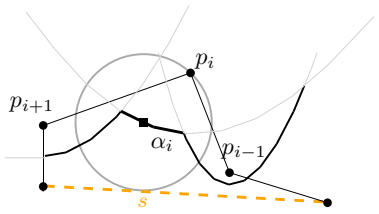


图19 引理25的证明。

记为 α_i。注意， s 的平分线是共用同一条准线（经过 s 的直线）的抛物线，因此它们可能相交两次。 $p_{i-1} = p_{i+1}$ 也有可能。对于每种情况，我们都可以根据 P 的逆时针顺序，确定哪个交点与弧 α_i 相关。这类问题可以归结为涉及线段 s 和三个点的内圆测试。◀

令 CDT(P) 表示 P 的约束 Delaunay 三角剖分。其边要么是局部 Delaunay 的，要么是位于 P 边界上的空腔边。

▶**引理 26**。 *CDT*(P) 是 $V_l(C)$的对偶，其中 C 是由 P 导出的 s-环。

证明。 该结论源于定义、引理25（其证明了 C 的存在性）以及定理 13 的性质。 $\mathcal{V}_l(C)$ 的对偶图为每条 s-平分线弧C设置一个节点，因此， P中的每个顶点对应一个节点。 $\mathcal{V}_l(C)$ 中关联两个局部 Voronoi 顶点的边v， u 涉及 S中的四个不同站点；因此，其对偶边是局部 Delaunay 的。与 C的叶节点关联的边的对偶，是 P边界上的一条边。◀

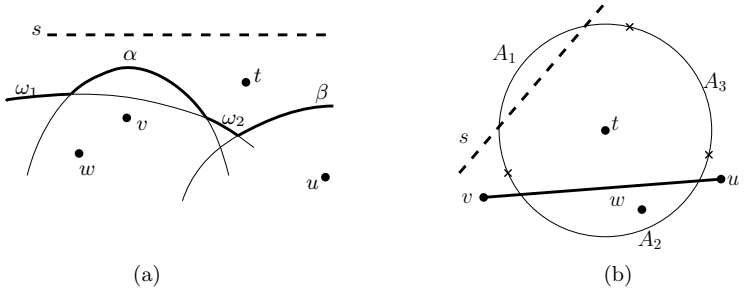
接下来，我们在线性期望时间内计算$\mathcal{V}_l(C)$。由于 C 并不是一个 Voronoi 区域的完整边界，如果我们应用定理 13 的构造，所计算出的环 C_n 可能会被 C包围。这是由于弧插入的随机顺序可能导致偶尔发生分裂操作，从而创建出辅助弧，而这些辅助弧与 P的顶点并无对应关系。不过，我们可以使用命题 23 删除此类辅助弧及其面。 S 中的站点是点，因此，其二等分线排列中的任何类Voronoi环都与一个 Voronoi区域重合。通过调用 Chew 算法 [5]，我们可以在线性期望时间内删除任意辅助弧的任意面，时间复杂度取决于该面的复杂度。

将该技术对偶化，即可直接计算约束 Delaunay 三角形。这实际上意味着，环 C 可以仅作为概念存在，而无需显式计算。对偶节点是图论意义上的节点，每个节点分别对应一个 s-平分线弧，而该平分线弧又对应于一个空腔顶点。这解释了为何在构造的中间步骤中，如果将这些图论节点绘制在空腔顶点上， [15] 会出现多边形自交。

计算$\mathcal{V}_l(C)$（或其对偶 CDT(C) $=$ CDT(P)）的算法非常简单。令$o = (v_1, \ldots v_n)$为 P 中顶点的一个随机排列，但不包括 s的端点；令$v_1 = p_1$ 和 $v_2 = p_n$。令 P_i 表示 P的子序列，该子序列由 o中的前 i 个顶点组成。令 C_i 表示相应的 s-环，其中每个 P_i 中的顶点按照 P_i 的顺序对应一条 s-平分线弧（见引理25）。在初始的阶段1中，从 $P_n = P$开始，按照逆序 o^{-1}删除顶点，并记录每个顶点 v_i 在 P_i 中被删除时的邻居。在阶段2中，按递增顺序考虑 o 中的顶点，从$\mathcal{V}_l(C_3)$开始，并使用弧插入操作（引理 15）逐步构造 C_i 和$\mathcal{V}_l(C_i)$，$3 \le i \le n$。我们也可以等价地构造对偶 CDT(C_i)，而不是$\mathcal{V}_l(C_i)$。

更具体地说，设 C_3 是由经过 s 端点的两条垂线构成的 s-环，这两条垂线一侧由 Γ 截断，另一侧由 J 截断（v_3， s）。C_3 分别由位于以下对象上的四条弧组成： J（s， p_1） J（v_3， s） J（s， p_n）以及 Γ。$\mathcal{V}_l$（C_3）对于（p_1， v_3， p_n）有一个 Voronoi 顶点，见图 21(a)。

给定$\mathcal{V}_l(C_{i-1})$后，我们在其两个邻接顶点 w、 u之间插入 v_i，这两个顶点已在阶段1中记录。假设 w、 v_i、 u 在 P中按逆时针顺序出现，见图 20(a)，其中 $v_i = v$。令 α_i 表示 v_i 在 C_i中的弧；特别地， α_i 是$J(v_i$、 $s)$的连通分量 $\cap D_{C_{i-1}}$，其端点分别位于 u 和 w 在 C_{i-1}中的弧之间，将它们分别记为 β 和ω，见图 20(a)，其中 $\alpha_i = \alpha$。在弧插入操作的三种情形中，我们只考虑分裂情形（如图 13(c)和图 20(a)所示），其中 $J(v_i$、 $s)$



(a) (b)

图20 引理28的证明。

将 C_{i-1}中的弧 $\omega \subseteq J(w,s)$分裂（相交两次）；其他情形都很直接。在这种情况下，当将 α_i 插入$V_l(C_{i-1})$时，区域 $R(\omega, C_{i-1})$被分裂为两个面，其中一个面，例如 $R(\omega_2, C_i)$，不对应于 w（因为相对于 w、 v_i、 u而言其顺序不正确）。也就是说，我们计算$V_l(C_i')$，其中 $C_i' = C_{i-1} \oplus \alpha_i$ 并包含辅助弧 ω_2。为了得到$V_l(C_i)$，我们可以调用 Chew 算法删除 $R(\omega_2, C_i')$，从而将 C_i 恢复为其原始定义。步骤 i 的时间复杂度增加预计为 $O(|R(\omega_2, C_i)|$。这不在 [10], 的论证范围内；该论证证明了步骤 i具有期望的常数时间复杂度。然而，删除辅助弧后，$V_l(C_i)$变得与顺序无关，因此我们可以通过调用逆向分析，以更简单的方式证明步骤 i 的时间复杂度。

▶**引理27。 </style}步骤 的时间复杂度（该步骤计算 V(C_i) ，并通过调用 *Chew* 算法删除任何生成的辅助弧来增强），期望为 $O(1)$。**

证明。由于 C_{i-1} 不含辅助弧，步骤 i 可在与$|R(\alpha_i, C_i')| + |R(\omega_2, C_i')|$成正比的时间内完成，其中 $C_i' = C_{i-1} \oplus \alpha_i$，且 ω_2 是插入α_i到 $V_l(C_{i-1})$ 时的辅助弧。第一项 $|R(\alpha_i, C_i')| \leq |R(\alpha_i, C_i)|$。第二项可表示为 $|R(\omega_2, C_i \oplus \omega_2|)$，即 ω_2 的面复杂度，前提是我们将弧 ω_2 插入 $V_l(C_i)$。我们将 1 个单位的费用记在 $V_l(C_i)$ 中任一顶点 v_i 的账上：如果插入弧 ω_2，该顶点就会被删除。

设 $V_i = \{v_3 \dots v_i\}$。 V_i 中的任意顶点都是在步骤 i 中最后被考虑的顶点，且可能性相同。因此，我们可以分别假设 V_i 中的每个顶点是最后被考虑的顶点，将步骤 i 的时间复杂度相加，再取平均值。第一项的总和为 $O(|\mathcal{V}_l(C_i)|)$，第二项则为总收费次数。根据下面的引理，总收费次数也是 $O(|\mathcal{V}_l(C_i)|)$。因此，平均时间复杂度为 $O(1)$。◀

▶**引理28。** 在步骤 i 中，$V_l(C_i)$ 中的任意顶点最多可被收费两次。

证明。 考虑一个顶点 t，它属于 $\mathcal{V}_l(C_i)$，以及它的 Delaunay圆 C_t，该圆经过 P_i的三个顶点，如图20(b) 中的叉号所示。这三个顶点将 C_t 分成三段弧：A_1、 A_2、 A_3。线段 s 必定穿过（与之相交两次）其中一段弧，不妨设为 A_1，因为 s 必须对 t 以及 C_t的三个定义点可见。

假设 t 被 $v \in V_i$ 记一单位的账。假设 w， v， u 围绕 P_i 按逆时针方向连续出现。设 ω， β 分别为 w 和 u在 C_{i-1} 中所对应的弧，见图 20(a)。由于 t 被 v 记一单位的账，因此 $\omega \in C_{i-1}$ 会因插入 v 而被分割，从而产生一条辅助弧 ω_2，且 t 位于 R（ω_2, $C_i \oplus \omega_2$）中。也就是说， w 被 C_t 包围，但 v 和 u 没有被包围。因此，对角线 vu 必须与 C_t 相交；由于它不能阻碍 s 与 C_t 的定义点之间的可见性，所以它必须穿过 C_t 的另一条弧，例如 A_2；对角线 uv 将 w 和 t 分隔在相对两侧。但 s 必须对角线可见

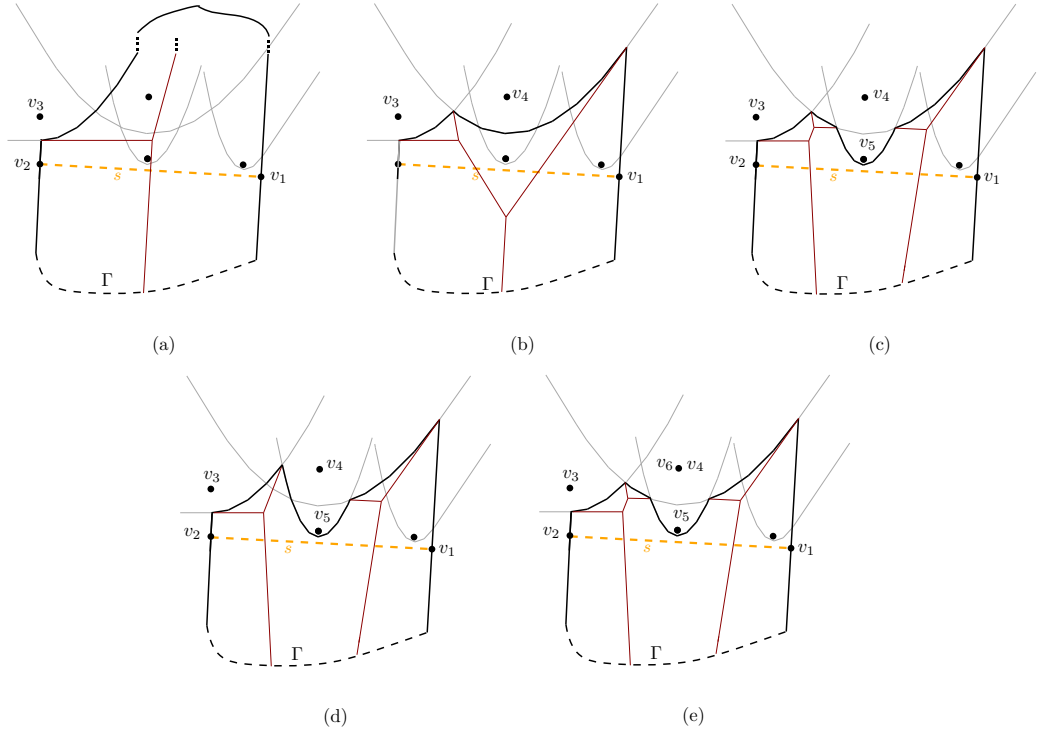


图 21 按照 $o = (v_1, \ldots\ldots, v_6)$ 进行的增量构造。(a) $\mathcal{V}_l(C_3)$；(b) $\mathcal{V}_l(C_4)$；(c) $\mathcal{V}_l(C_5')$；(d) $\mathcal{V}_l(C_5)$；(e) $\mathcal{V}_l(C_6)$。

uv，因此，P_i 的其他对角线不能也穿过 A_2，从而阻碍 uv 和 s 的可见性。因此，v 至多可以因弧 A_2 而获得一次记账。这意味着 v 总共至多还能获得一次记账，这对应于 A_3。◀

图 21 展示了按照指定顺序 $o = (v_1, \ldots\ldots, v_6)$ 进行的增量构造。v_4 和 v_6 重合。插入 v_5 会导致 v_4 的弧分裂，见图 21(c)。删除所生成的辅助弧后的结果如图 21(d) 所示；我们在图 21(e) 中插入 v_6 。在此例中，我们可以避免删除插入 v_5 时由 v_4 生成的辅助弧，因为它与 C 的一条弧重叠，因此可以确定它之后会被重新插入，并且不会妨碍其他弧的插入过程。

7 总结性 टप्पिणी

我们还研究了这样一种变体：已知某些 Voronoi 面沿边界 D 的排列顺序，在具有常数边界复杂度的单连通域 D 内，以线性期望时间计算一棵类 Voronoi 树（或森林）。在扩展版论文中，我们将给出适用相同基本技术的条件。

在未来的研究中，我们还对受 [1] 启发的、用于计算抽象类 Voronoi 树和森林的确定性线性时间算法感兴趣。

参考文献

1 Alok Aggarwal、Leonidas J. Guibas、James B. Saxe 和 PeterW. Shor。计算凸多边形 Voronoi 图的线性时间算法。《离散与计算几何》，4:591–604，1989年。

2 Franz Aurenhammer、Rolf Klein 和 Der-Tsai Lee。Voronoi 图与 Delaunay 三角剖分。World Scientific，2013年。3 Cecilia Bohler、Rolf Klein 和 Chih-Hung Liu。由闭合二等分曲线生成的抽象 Voronoi 图。《计算几何与应用国际期刊》，2017年。4 Cecilia Bohler、Rolf Klein 和 Chih-Hung Liu。高阶抽象 Voronoi 图的高效随机化算法。Algorithmica，81(6):2317–2345，2019年。5 L. Paul Chew。在线性期望时间内构造凸多边形的 Voronoi 图。技术报告，达特茅斯学院，美国汉诺威，1990年。6 B. Delaunay。关于空球面。纪念 Georges Voronoi。《苏联科学院通报》，6:793–800，1934年。7 H. Edelsbrunner 和 R. Seidel。Voronoi 图与排列。《离散与计算几何》，1:25–44，1986年。8 Kolja Junginger 和 Evanthia Papadopoulou。期望线性时间内抽象 Voronoi 图中的删除。载于第34届国际计算几何研讨会（SoCG），LIPIcs第99卷，第50:1–50:14页，德国达格施图尔，2018年。9 Kolja Junginger 和 Evanthia Papadopoulou。关于期望线性时间内的树状抽象Voronoi图。载于 CGWeek青年研究者论坛（CG:YRF），2019年。10 Kolja Junginger 和 Evanthia Papadopoulou。期望线性时间内抽象 Voronoi 图中的删除及相关问题。arXiv:1803.05372v2 [cs.CG], 2020。即将在《离散与计算几何》发表。11 Rolf Klein。具体与抽象Voronoi图，《计算机科学讲义》第400卷。Springer出版社，1989年。12 Rolf Klein、Elmar Langetepe 和 Z. Nilforoushan。重新审视抽象 Voronoi 图。《计算几何：理论与应用》，42(9):885–902，2009年。13 Rolf Klein、Kurt Mehlhorn 和 Stefan Meiser。抽象 Voronoi 图的随机增量构造。《计算几何：理论与应用》，3:157–184，1993年。14 Micha Sharir 和 Pankaj K. Agarwal。Davenport-Schinzel序列及其几何应用。剑桥大学出版社，1995年。15 Jonathan Richard Shewchuk 和 Brielin C. Brown。约束Delaunay三角剖分的快速线段插入与增量构造。《计算几何：理论与应用》，48(8):554–574，2015年。