分数阶二进制拉普拉斯算子所诱导的扩散距离的结构

MARÍA ´FLORENCIA ACOSTA、HUGO AIMAR、IVANA GOMEZ 和 FEDERICO MORANA

arXiv:2303.06694v1 [math.AP] 12 Mar 2023

ABSTRACT. 本文探讨 Coifman-Lafon 扩散度量在分数阶二进制拉普拉斯算子作用下的结构。主要结果是，对于每个$t > 0$，扩散度量都是二进制距离的函数，在 $\mathbb{R}^+$ 中由 $\delta(x, y) = \inf\{|I| : I$ 是一个包含 x 和 $y\}$的二进制区间。尽管这些关于 δ 的函数与 δ 并不等价，但球的族是相同的，也就是说，它们就是二进制区间。

1. INTRODUCTION

设 $W_t(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$中的魏尔斯特拉斯核。对于固定的 $t > 0$， $W_t(x)$ 关于 x 的高斯衰减保证了积分

$$d_t^2(x, y) = \int_{z\in\mathbb{R}^n} \left|W_t(x - z) - W_t(y - z)\right|^2 dz.$$

此外，对于每个 $t > 0$， d_t 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个度量。显然， t 取不同值会产生多种度量。然而，无论选择哪种 t_1 和 t_2，所有 d_{t_1}-球构成的族都与 d_{t_2}-球构成的族相同。此外，这一唯一的球类与所有欧几里得球构成的类相同。下面的命题将这些观察表述得更精确。

命题 1.1。设 d_t 如前所定义。那么

(a) d_t 是平移不变的；(b) $d_t(x, y)$ 仅取决于 $|x - y|$，即 $d_t(x, y) = \rho_t(|x - y|)$；(c) ρ_t 严格递增且连续，并且 $\rho_t(0) = 0$；(d) $\lim_{r\to 0^+} \frac{\rho_{t_1}(r)}{\rho_{t_2}(r)} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}$, $t_1, t_2 > 0$；(e) d_t-球构成的族就是欧几里得球。

证明。要证明 (a)，只需在定义 $d_t^2(x, y)$ 的积分中作变量替换 $y - z = u$。因此 $d_t(x, y) = d_t(x - y, 0)$。要证明 (b)，我们需要证明关于 x 的函数 $d_t(x, 0)$ 是旋转不变的。取 $\mathbb{R}^n$ 的一个旋转 R。然后，由于 W_t 是径向函数，

$$\begin{aligned} d_t^2(Rx, 0) &= \int_{z\in\mathbb{R}^n} \left|W_t(Rx - z) - W_t(z)\right|^2 dz \\ &= \int_{z\in\mathbb{R}^n} \left|W_t(R(x - R^{-1}z)) - W_t(R^{-1}z)\right|^2 dz \end{aligned}$$

2010年数学主题分类。主要分类 54E35，35K08。关键词和短语：
扩散度量；二进制扩散。

$$
\begin{aligned}
&= \int_{u\in\mathbb{R}^n} \left|W_t(R(x-u)) - W_t(u)\right|^2 du \\
&= d_t^2(x,0).
\end{aligned}
$$

为了证明 (c)，注意到由于 d_t^2 是 $x-y$ 的径向函数，对于 $r>0$，剖面函数 $\rho_t^2(r)$ 的公式为 $\rho_t^2(r) = \int_{z\in\mathbb{R}^n} \left|W_t(r\vec{e_1}-z) - W_t(z)\right|^2 dz$，其中 $\vec{e_1}$ 是标准基的第一个向量，或 $\mathbb{R}^n$，且 $W_t(y) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|y|^2/4t}$。固定 t 后，ρ_t^2 关于 $r>0$ 的函数的导数为

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho_t^2}{dr}(r) &= \frac{1}{(4\pi t)^n} \int\limits_{z\in\mathbb{R}^n} 2\left(e^{-\frac{|r\vec{e}_1-z|^2}{4t}} - e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\right) \frac{(-2)(r-z_1)}{4t} e^{-\frac{|r\vec{e}_1-z|^2}{4t}}\, dz \\
&= \frac{-4}{(4\pi t)^n}\left[\int\limits_{z\in\mathbb{R}^n} e^{-\frac{2|r\vec{e}_1-z|^2}{4t}} \frac{(r-z_1)}{4t}\, dz - \int\limits_{z\in\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} e^{-\frac{|r\vec{e}_1-z|^2}{4t}} \frac{(r-z_1)}{4t}\, dz\right] \\
&= -2\int\limits_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|z|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{-n/2}} \frac{e^{-\frac{|r\vec{e}_1-z|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{-n/2}} (-2)\frac{(r-z_1)}{4t}\, dz \\
&= -2\left(W_t * \frac{\partial W_t}{\partial x_1}\right)(r\vec{e}_1) \\
&= -2\frac{\partial}{\partial x_1}\big(W_t * W_t\big)(r\vec{e}_1) \\
&= -2\frac{\partial}{\partial x_1} W_{2t}(r\vec{e}_1) \\
&= -2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{(8\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{8t}}\right)(r\vec{e}_1) \\
&= \left(\frac{4}{(8\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} \frac{x_1}{8t}\right)(r\vec{e}_1) \\
&= \frac{4}{(8\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{8t}} \frac{r}{8t} \\
&> 0\,,
\end{aligned}
$$

这里我们使用了 W_t 的半群性质，并证明了 (c)。性质 (e) 现在是 (c) 的推论。最后来验证 (d)。根据上述对 $\frac{d\rho_t^2}{dr}$ 的计算以及洛必达法则，可得

$$
\lim_{r\to 0^+} \frac{\rho_{t_1}^2(r)}{\rho_{t_2}^2(r)} = \lim_{r\to 0^+} \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}+1} e^{\frac{r^2(t_1-t_2)}{8t_1t_2}} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}+1}
$$

由此证明了 (d)。 □

对于不具备几何不变性的一般结构，扩散度量的结构问题会变得更复杂，也更有趣。具体而言，在不同时间 t 对应的度量不再等价之后，探讨球族的稳定性可能很重要。

换言之，对于$t_1 \neq t_2$，是否对每个 x 和每个 $r_1 > 0$，都存在一个正的 r_2，使得$B_{d_{t_1}}(x, r_1) = B_{d_{t_2}}(x, r_2)$?

我们针对由二进分数阶扩散确定的非卷积情形求解这一问题，其谱分析由 Haar 小波提供。为求简便，我们将在 $\mathbb{R}^+$ 中进行讨论，尽管整个分析也可以推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的象限，甚至推广到具有二进分析的更一般结构。

第 2 节介绍基本定义和记号。第 3 节陈述并证明主要结果。

2. Definitions and notation

设 $\mathscr{D}$ 为 $\mathbb{R}^+ = \{x \geq 0\}$ 中所有二进区间构成的族。具体而言，$\mathscr{D} = \left\{I_k^j = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}) : \ j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\right\}$。令 $\mathscr{D}^j = \left\{I_k^j : \ k \in \mathbb{N}_0\right\}$，则有 $\mathscr{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}^j$。

设 $\mathscr{H} = \left\{h_k^j = 2^{j/2} h_0^0(2^j x - k) : \ j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\right\}$ 为 $\mathbb{R}^+$ 中的 Haar 小波系统，其中 $h_0^0 = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(x)$，这里 χ_E 按照惯例表示集合 E 的示性函数。族 $\mathscr{H}$ 构成 $L^2(\mathbb{R}^+)$ 的标准正交基。令 h_I 表示支撑在二进制区间 I 上的 Haar 小波，则对于 $I = I_k^j$，有 $h_I = h_k^j$。令$I(h)$ 表示支撑小波 $h \in \mathscr{H}$ 的二进制区间。

定义 2.1. 二进制距离定义为

$$\delta(x, y) = \inf \{|I| : I \text{ is a dyadic interval containing } x \text{ and } y\}.$$

注意，若 $x \neq y$ 存在一个包含 x 和 y的最小二进制区间，我们将其记作 $I(x, y)$。取 $I(x, x) = \{x\}$，则对于任意$x, y \in \mathbb{R}^+$，有 $\delta(x, y) = |I(x, y)|$。

度量 δ 在 $\mathbb{R}^+$ 上不是平移不变的，且是欧几里得度量的上界。事实上，$|x - y| \leq \delta(x, y)$。当然，它们并不等价。这意味着，通常而言，$\delta(x, y)$远大于 $|x - y|$。因此，我们可以预期，$\delta(x, y)$的幂在局部和/或整体上具有更好的可积性。然而，$\delta(x, y)$的局部和整体积分性质，与 $|x - y|$的幂完全相同。从一般角度来看，这些性质源于这样一个事实：$\left(\mathbb{R}^+, \delta, m\right)$ 是一个无原子的正规齐次型空间（或 1-Ahlfors正则空间），（见[4]），且其总勒贝格测度 m为无穷大。于是，对于 $r > 0$，$\delta^\alpha(x, y)$、 $\alpha \in \mathbb{R}$在 $B_\delta(x, r)$内及 $B_\delta(x, r)$外的积分，与 $|x-y|^\alpha$在相应欧几里得球（$x-r, x+r$）内及外的积分完全相同。特别是，局部和整体奇异性由 $\delta(x, y)^{-1} = {}_\delta x^1(\ , y)$给出。因此，该背景下自然的分数阶积分或 Riesz型算子由以下形式的核给出：$\delta(x, y)^{-1+s} = {}_\delta x^1(\ , y)^{1-s}$，其中 $s > 0$。因此，自然的分数阶微分算子由以下形式的核定义：$\delta(x, y)^{-1-s} = {}_\delta x^1(\ , y)^{1+s}$，其中 $0 < s < 1$。

当然，与欧几里得情形一样，这个核的强局部奇异性要求算子定义域中的函数具有一定的正则性。正如[2] 所证明的，二进制区间的示性函数属于相对于δ而言的 Lipschitz-1 函数类。特别是，$\mathscr{H}$ 中的 Haar 小波在此意义下都是光滑的。实际上，对于 f有界且 Lipschitz-σ 的 $0 < s < \sigma \leq 1$，我们有

$$D_{dy}^{s} f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(y) - f(x)}{\delta(x,y)^{1+s}}\, dy$$

定义良好。我们称 $D_{dy}^{s} f$ f 中的 $\mathbb{R}^+$为二进分数阶拉普拉斯算子。

初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D_{dy}^{s} u(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

已在 [1] 中研究；与欧几里得情形类似，它可以写成一个积分算子，当然，该算子不具有卷积结构。事实上

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^+} K_s(x,y;t) f(y)\, dy,$$

其中

$$K_s(x,y;t) = \sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-t|I(h)|^{-s}} h(x) h(y).$$

沿用 [3] 的思路，我们可以尝试定义一种二进分数阶扩散型距离 .

定义 2.2. 对于 $t > 0$ 和 $s > 0$，阶数为 s、时间为 t 时的分数阶二进扩散距离定义为

$$d_t(x,y) = \sqrt{\int_{z \in \mathbb{R}^+} |K_s(x,z;t) - K_s(y,z;t)|^2 \, dy}.$$

接下来，我们将探讨 d_t 与命题1.1中所述欧几里得情形的类似性质。首先，我们将证明 d_t定义良好且具有度量特性，并通过 Haar 小波系统确定其谱表示。

命题 2.3. 设 $s > 0$ 和 $t > 0$ 已给定，则 d_t 定义良好，是$\mathbb{R}^+$ 上的一个度量，并且可计算为

$$d_t(x,y) = \sqrt{\sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-2t|I(h)|^{-s}} |h(x) - h(y)|^2}.$$

证明。首先，注意扩散核 $K_s(x, y; t)$ 对每个$x, y \in \mathbb{R}^+$ 都定义良好且有限。事实上，由于 $|h_I(w)| = |I|^{-\frac{1}{2}} \chi_I(w)$，因此 $K_s(x, y; t) = \sum_{I \supseteq I(x,y)} e^{-t|I|^{-s}} h_I(x) h_I(y)$，其绝对收敛级数的上界为 $\sum_{I \supseteq I(x,y)} |I|^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{-j} |I(x,y)|^{-1} = 4$

$2\,|I(x,y)|^{-1} = 2\delta(x,y)^{-1}$。根据定义， d_t 是两个考察点处、时间为 t 的扩散核之差的范数，因此度量性质显然成立。此外，根据帕塞瓦尔恒等式

$$\begin{aligned} d_t(x,y)^2 &= \|K_s(x,\cdot;t) - K_s(y,\cdot;t)\|^2 \\ &= \left\| \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-t|I(h)|^{-s}} \left[h(x)-h(y)\right] h \right\|^2 \\ &= \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-2t|I(h)|^{-s}} \left|h(x)-h(y)\right|^2 . \end{aligned}$$

$d_t(x,y)$的有限性将由以下结果推出。 □

3. Main results

引理 3.1. 设 $s>0$。对于 $t>0$，定义 $\psi_t(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\eta_t(\lambda^{-s})}$，其中 $\eta_t(\sigma) = 2e^{-2t\sigma} + \sum_{\ell\geq 1} 2^\ell e^{-2t2^{s\ell}\sigma}$。那么，当限制在 2 的整数次幂序列 $\{2^j:\ j\in\mathbb{Z}\}$ 时，我们有

（a） ψ_t 严格递增；（b） $\psi_t(0^+)=0$；（c） $\psi_t(+\infty) \simeq t^{-\frac{1}{2s}}$。

证明。对于 $i\in\mathbb{Z}$，定义

$$\begin{aligned} f(i) &:= \frac{1}{2}\,\psi_t^2(2^i) \\ &= 2^{1-i}e^{-2t2^{-is}} + \sum_{\ell\geq 1} 2^{\ell-i} e^{-2t2^{-is}2^{\ell s}} \\ &= 2^{1-i}e^{-2t2^{-is}} + \sum_{k=\ell-i\geq 1-i} 2^k e^{-2t2^{ks}}. \end{aligned}$$

Then

$$f(i+1) = 2^{-i}e^{-2t2^{-(i+1)s}} + \sum_{k\geq -i} 2^k e^{-2t2^{ks}}$$

因此

$$\begin{aligned} f(i+1)-f(i) &= 2^{-i}e^{-2t2^{-(i+1)s}} - 2.2^{-i}e^{-2t2^{-is}} + 2^{-i}e^{-2t2^{-is}} \\ &= 2^{-i}e^{-2t2^{-is}2^{-s}} - 2^{-i}e^{-2t2^{-is}} \\ &= 2^{-i}\left[\xi^{2^{-s}} - \xi\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

因为函数 ξ^x 关于变量 x 单调递减（因为 $\xi := e^{-2t2^{-is}}$ 为正且小于 1），并且 $2^{-s}<1$。这表明 ψ_t^2 是一个递增函数，因此由于其为正， ψ_t 也递增。由此证明了 (a)。

为验证 (b)，注意到

$$\lim_{i\to-\infty} f(i) = \lim_{i\to-\infty} 2^{1-i}e^{-2t2^{-is}} = 2\lim_{x\to+\infty} xe^{-2tx^s} = 0$$

因此

$$\lim_{i\to-\infty} \psi_t(2^i) = 0.$$

为了证明（c），首先注意到

$$\begin{aligned}\lim_{i\to+\infty} f(i) &= \lim_{i\to+\infty} 2^{1-i}e^{-2t2^{-is}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k e^{-2t2^{ks}} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k e^{-2t2^{ks}} \\ &< \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\int_{2^{k-1}}^{2^k} e^{-2tx^s}\,dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-2tx^s}\,dx \\ &< +\infty\end{aligned}$$

这意味着 $\lim_{i\to+\infty}\psi_t(2^i) = \psi_t(+\infty) < +\infty$。另一方面，我们由下式得到一个下界：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k e^{-2t2^{ks}} > \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^{k-1}}^{2^k} e^{-2tx^s}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-2tx^s}\,dx.$$

因此，由于 $\psi_t(+\infty) = \overline{\sqrt{2}\lim_{i\to+\infty} f(i)}$，我们有

$$\sqrt{2}\,c_t(s) < \psi_t(+\infty) < 2\,c_t(s)$$

for $c_t(s) = \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-2tx^s}\,dx} = t^{-\frac{1}{2s}}\sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-2x^s}\,dx}$. □

此处需要特别指出，与命题 1.1 中的性质 (d) 不同，现在对于 $0 < t_1 < t_2$，对任意 x、$y \in \mathbb{R}^+$，都有 $d_{t_2}(x,y) \le d_{t_1}(x,y)$。另一方面，不存在常数 $C > 0$，使得对任意 x、$y \in \mathbb{R}^+$，不等式 $d_{t_1}(x,y) \le C d_{t_2}(x,y)$ 成立。事实上，上述两点都源于以下事实：

$$\frac{d_{t_2}^2(x,y)}{d_{t_1}^2(x,y)} \le e^{-2(t_2-t_1)\delta^{-s}(x,y)}$$

对任意 x 和 y，它们都属于 $\mathbb{R}^+$。

由引理 3.1 可推知，ψ_t 的图像会随着 t 增大而变得更平坦；反之，当 t 趋近于零时，它在无穷远处会达到更高的值。

定理 3.2。设 d_t 为阶数为 $s > 0$、位于 $t > 0$处的分数阶二进扩散度量。设 ψ_t 如引理 *3.1*中所述，且 $\psi_t(0) := 0$。则

(1) $d_t(x,y) = \psi_t(\delta(x,y))$ *for* $x, y \in \mathbb{R}^+$;

(2) 通常定义的 d_t-球族 $B_t(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^+ \colon d_t(x,y) < r\}$ 对$x \in \mathbb{R}^+$ 和 $r > 0$, 与 $\mathscr{D}$（即所有二进制区间组成的族）重合。

证明。为了证明 (1)，我们使用命题 d_t^2 给出的 2.3 中的表示公式。对于 $x \neq y$,

$$
\begin{aligned}
d_t^2(x,y) &= \sum_{h \colon x \in I(h) \vee y \in I(h)} e^{-2t|I(h)|^{-s}} \, |h(x) - h(y)|^2 \\
&= e^{-2t|I(x,y)|^{-s}} \left| h_{I(x,y)}(x) - h_{I(x,y)}(y) \right|^2 \\
&\quad + \sum_{h \colon x \in I(h) \wedge y \notin I(h)} e^{-2t|I(h)|^{-s}} \, |h(x)|^2 \\
&\quad + \sum_{h \colon x \notin I(h) \wedge y \in I(h)} e^{-2t|I(h)|^{-s}} \, |h(y)|^2 \\
&= 4|I(x,y)|^{-1} e^{-2t|I(x,y)|^{-s}} + 2 \sum_{\ell \geq 1} e^{-2t\left(2^{-\ell}|I(x,y)|\right)^{-s}} \left(2^{-\ell}|I(x,y)|\right)^{-1} \\
&= \frac{2}{|I(x,y)|} \left[2e^{-2t|I(x,y)|^{-s}} + \sum_{\ell \geq 1} 2^{\ell} e^{-2t|I(x,y)|^{-s} 2^{\ell s}} \right] \\
&= \frac{2}{|I(x,y)|} \, \eta_t \left(|I(x,y)|^{-s} \right) \\
&= \frac{2}{\delta(x,y)} \, \eta_t \left(\frac{1}{\delta(x,y)^s} \right) \\
&= \psi_t^2 \big(\delta(x,y) \big).
\end{aligned}
$$

（2）可直接由以下事实得出：对于 $0 < r < \psi_t(+\infty)$，我们有

$$
B_t(x,r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^+ \colon \psi_t(\delta(x,y)) < r \right\} = I,
$$

其中， I 是包含 x且满足 $\psi_t(|I|)$小于 r的最大二进制区间。 □

References

[1] Marcelo Actis 和 Hugo Aimar。《非局部二进扩散的初始数据逐点收敛》。《捷克斯洛伐克数学杂志》，66(141)(1):193–204，2016。[2] Hugo Aimar 和 Ivana G´omez。《Petermichl 核的 Calder´on–Zygmund 结构》。《数学报告》，356(5):509–516，2018。[3] Ronald R. Coifman 和 St´ephane Lafon。《扩散映射》。《应用与计算调和分析》，21:5–30，2006。[4] Roberto Mac´ıas 和 Carlos Segovia。《齐次型空间上的 Lipschitz 函数》。《数学进展》，33:257–270，1979年9月。

Acknowledgment

本研究在圣菲的 IMAL 开展，得到 CONICET 和 UNL 的支持，并获得阿根廷 MINCYT 下属 Agencia I+D+i 项目经费资助。

所属机构： Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, UNL, CONICET.地址：CCT CONICET 圣菲，Predio “Alberto Cassano”，Colectora Ruta Nac. 168 km 0，Paraje El Pozo, S3007ABA 圣菲，阿根廷。

电子邮箱：mfacosta@santafe-conicet.gov.ar;haimar@santafe-conicet.gov .ar; ivanagomez@santafe-conicet.gov.ar；fmorana@santafe-conicet.gov.ar