arXiv:2303.06715v1 [math.AT] 12 Mar 2023

横向运动规划

CESAR A. IPANAQUE ZAPATA 和 FERNANDO R. CHU RIVERA

摘要。在本文中，我们引入了光滑流形 X 相对于余维 1 子流形的横截拓扑复杂度（TTC）概念，并给出关于这一数值不变量的基本结果。此外，我们还展示了几个显式横截算法的例子。

1. 引言

设 X 为给定自主系统的所有无障碍构型或状态组成的空间。在 X 上的运动规划算法是一个函数，它为任意一对构型（C_1，C_2）$\in X \times X$指定系统的一段连续运动 μ，使得 μ从给定的初始状态 C_1 开始，并在最终期望状态 C_2结束。机器人学中的基本问题，即运动规划问题，涉及如何为任意给定的自主系统提供运动规划算法。

在实际应用中，运动规划算法应当随点对（C_1，C_2）连续变化。事实上，如果自主系统在噪声环境中运行，缺乏连续性可能会导致运动规划算法行为不稳定。遗憾的是，空间 X 上存在（全局）连续运动规划算法，当且仅当 X 是可缩的。然而，如果 X 不可缩，我们可以考虑寻找局部连续运动规划算法，即仅在 $X \times X$的某个开子集上定义的运动规划算法 s，我们将该子集称为 s的定义域。在这些术语下，X 上的运动规划器是一组局部连续运动规划算法，其定义域覆盖 $X \times X$。于是，X [2]的拓扑复杂性TC(X)就是 X上运动规划器的最小基数，而 X 上的运动规划器若其基数为 TC(X)，则称为最优运动规划器。设计出与最优解相当接近的显式运动规划器，是现代机器人学面临的挑战之一（例如参见 Latombe [4] 和 LaValle [5]）。

更具体地说，基于拓扑复杂性的运动规划问题包含以下几个部分（见 [7]）：

表述 1.1. 基于拓扑复杂性的运动规划问题要素：

2010 数学主题分类。 主要分类号 55M30，57Q65；次要分类号 14F35。关键词和短语。 横截性、拓扑复杂性、运动规划、机器人学。第一作者谨此感谢圣保罗研究基金会（FAPESP）提供的资助（资助编号：2022/03270-8）。

(1) 无障碍构型空间 X。假定该空间的拓扑已预先得到充分了解。(2) 查询点对 $C = (C_1, C_2) \in X \times X$。点 $C_1 \in X$ 被指定为该查询的初始构型。点 $C_2 \in X$ 被指定为目标构型。

在上述设定中, 目标是描述一个运动规划器，即描述

(3) 一个关于 $X \times X$ 的开覆盖 $U = \{U_1, \ldots, U_k\}$；(4) 对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，一个局部连续运动规划算法，即一个满足以下条件的连续映射 $s_i\colon U_i \to X^{[0,1]}$

$$s_i(C)(j) = C_{j+1}, \quad j = 0, 1$$

对于任意 $C = (C_1, C_2) \in U_i$ （这里 $X^{[0,1]}$ 表示 X 上配备紧开拓扑的自由路径空间），

或者报告不存在这样的运动规划器。

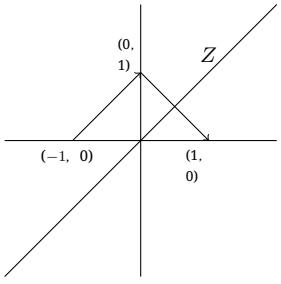
设 X 为一个光滑流形， $Z \subset X$ 为一个余维 1 的子流形。

定义 1.2。 若路径 $\Gamma : [0, 1] \to X$ 满足：对于 Z，记作 $\Gamma \pitchfork_s Z$，当 $\Gamma(t) \in Z$ 且 $t \in (0,1)$ 时， Γ 在 t 中光滑，并且 $\langle \Gamma'(t) \rangle + T_{\Gamma(t)} Z = T_{\Gamma(t)} X$（等价地， $\Gamma'(t) \notin T_{\Gamma(t)} Z$），其中 $\langle \Gamma'(t) \rangle$ 是由 $\Gamma'(t)$生成的子空间。注意，如果 Γ 与 Z 横截（记作 $\Gamma \pitchfork Z$），那么 $\Gamma \pitchfork_s Z$。

例 1.3。 由下式给出的路径 $\Gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\Gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)(-1,0) + 2t(0,1), & \text{for } 0 \le t \le 1/2; \\ (2-2t)(0,1) + (1-2t)(1,0), & \text{for } 1/2 \le t \le 1; \end{cases}$$

与 $Z = \{(x, x) \text{ 半横截}: \ x \in \mathbb{R}\}$ 但不与 Z 横截。事实上， Γ 在 $t = 1/2$ 上并不光滑。



对状态空间为X的机器人横截运动规划器问题进行研究，引导我们考察对（X， Z），其中 Z 是 X 的一个余维 1 子流形。子流形 Z 可以刻画运动规划算法所需的某种期望几何。 X 中关于 Z 的一个（局部）横截运动规划算法，为 $X \times X$ （的一个开集）中的任意一对构型（C_1， C_2）分配一条构型路径

$$\Gamma(t) \in X, \ t \in [0, 1],$$

使得 $\Gamma\ (i)\ = C_{i+1}$ 对于 $i = 0,$ 1和 $\Gamma \pitchfork_s Z$。

本文引入横截拓扑复杂度的概念，并给出关于这一数值不变量的基本结果。命题2.3与例2.4为引入横截拓扑复杂度（定义2.5）提供了动机。例2.7和2.8介绍了欧氏空间中的横向算法。我们定义横截LS范畴的概念（定义2.10），并根据横截LS范畴给出横截复杂度的一个下界（命题 2.12）。命题2.15通过微分同胚展示了横截算法的显式构造。例2.13和2.16表明，子流形 Z 可能为运动规划算法带来某种期望几何。

2. 横截拓扑复杂度

本节介绍横截拓扑复杂度的概念（定义2.5），并给出关于这一数值不变量的基本结果（引理2.9以及命题 2.12和命题2.15）。我们列举了若干例子，以说明这一领域中产生的结果（例2.7、2.8、例2.13和2.16）。例2.13和2.16表明，子流形 Z 可能为运动规划算法带来某种期望几何。

令 $X^{[0,1]}$ 表示拓扑空间 X的自由路径空间。回顾一下，Farber拓扑复杂度 TC(X) 是端点求值纤维化 e_2^X: $X^{[0,1]} \to X \times X$, $e_2^X(\gamma) = (\gamma(0)\ \gamma(1))$ 的截面范畴。我们采用非约化意义下的纤维化p: $E \to B$ 的截面范畴，即覆盖B 的开集的最小数目，并且在每个开集上， p 都存在局部连续截面。

由 Whitney逼近定理 [6, 定理 6.26] ，我们得到以下结论。

引理 2.1. 设 X 和 Y 为光滑流形（无边界）， f, g : $X \to Y$ 为光滑映射，且存在连续同伦 H : $X \times [0,1] \to Y$，满足 $H_0 = f$和 $H_1 = g$，则存在光滑同伦 G : $X \times [0,1] \to Y$，满足 $G_0 = f$ 和$G_1 = g$。

根据 [3,第 73] 页，我们有如下结论。

引理 2.2. 设 f : $X \to Y$ 是一个光滑映射， $Z \subset Y$ 是一个子流形，且边界映射 ∂f : $\partial X \to Y$ 与 Z横截，则存在一个与 f 同伦的光滑映射g : $X \to Y$，使得 $\partial g = \partial f$ 且 $g \pitchfork Z$。

那么，我们有如下结论

命题 2.3. 设 X 为光滑流形， $Z \subset X$ 为余维 1 的子流形，则 TC(X) 等于使得积空间$X \times X$ 可被 k个开子集 $X \times X = U_1 \cup \cdots \cup U_k$覆盖的最小正整数 k ；对于任意 $i = 1,$ 2, ..., k，存在连续截面 s_i : $U_i \to X^{[0,1]}$ ，使其在 U_i 上属于 e_2^X（即 $e_2^X \circ s_i = incl_{U_i}$） ，且$\widetilde{s_i} \pitchfork Z$，其中 $\widetilde{s_i}$: $U_i \times [0,1] \to X$ 由 $\widetilde{s_i}(u)\ = s_i(u)(t)$ 给出，对任意 $u \in U_i$和 $t \in [0,1]$均成立。

证明。对于 $U \subset X \times X$ 和 $s\colon\ U \to X^{[0,1]}$，考虑连续局部算法 $\widetilde{s}: U \times [0,1] \to X$，$\widetilde{s}((x,y)\ t) = s(x,y)(t)$。注意，$\widetilde{s}$是一个连续同伦，满足$\widetilde{s}_0 = \pi_1$ 和 $\widetilde{s}_1 = \pi_2$，其中 π_j 是到第 j 个因子的投影。由引理 2.1，存在光滑同伦 $G\colon\ U \times [0,1] \to X$，满足 $G_0 = \pi_1$ 和 $G_1 = \pi_2$。注意，边界映射 $\partial G = \pi_1 \sqcup \pi_2$ 与 Z横截，因此由引理 2.2，存在一个与 G 同伦的光滑映射 $F\colon\ U \times [0,1] \to X$，使得 $\partial F = \partial G$（从而 $F_0 = \pi_1$和 $F_1 = \pi_2$），并且 $F \pitchfork Z$。于是，由 $\sigma(x,y)(t) = F((x,y)\ t)$ 给出的映射 $\sigma\colon\ U \to X^{[0,1]}$ 满足命题的条件。因此，命题得证。□

注意，如果 $F\colon\ U \times [0,1] \to X$ 横截于 Z，且 $U \subset X \times X$，这并不意味着 $F_u\colon\ [0,1] \to X$，$t \mapsto F_u(t) = F(u,\ t)$ 对任意 $u \in U$ 都横截于 Z。为说明这一点，我们给出以下例子。

例2.4。考虑二元组 $(\mathbb{R}^2,\ S^1)$ 以及由 $F((C_1,\ C_2)\ t) = (1-t)C_1 + tC_2$ 给出的光滑映射 $F\colon\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$。注意，$F \pitchfork S^1$，但 $F_{((1,1),(-1,1))}\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$，$F_{((1,1),(-1,1))}(t) = (1-2t,\ 1)$ 不横截于 S^1。

命题 2.3 表明，X 的 Farber拓扑复杂度等于设计光滑同伦 F 的复杂度，其中 $U \times [0,1] \to X$ 满足 $F_0 = \pi_1$ 和 $F_1 = \pi_2$，使得 $F \pitchfork Z$。然而，例2.4促使我们给出以下定义。

定义2.5. 对于路径连通的光滑流形（无边界）X，相对于余维 1 的子流形（无边界）Z，其横截拓扑复杂度 TTC(X,Z)是使积空间 $X \times X$ 可由 k 个开子集 $X \times X = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ 覆盖的最小正整数TTC$(X,Z) = k$，并且对任意 $i = 1, 2, \ldots,$ k，都存在一个连续截面 $s_i\colon\ U_i \to X^{[0,1]}$，它是 e_2^X在 U_i 上的截面（即$e_2^X \circ s_i = incl_{U_i}$），且对任意$(x,y) \in U_i$，$s_i(x,y) \pitchfork_s Z$。我们称这样一组局部截面为具有 k 个连续性定义域的横截运动规划器 。如果不存在这样的 k，则令TTC$(X,Z) = \infty$。

注记 2.6。注意，对于任意光滑流形 X 和任意余维 1 的子流形 $Z \subset X$，都有 TC$(X) \leq$ TTC$(X,\ Z)$。

例2.7。考虑这一对 $(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^{n-1})$，其中后者理解为子流形 $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$。我们声称，这一对的横截拓扑复杂度为 1。事实上，考虑由下式定义的（全局）算法 $s\colon\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^{[0,1]}$

$$s(C_1,C_2)(t) = \begin{cases} (1-2t)C_1 + 2te_n, & \text{for } 0 \leq t \leq 1/2; \\ (2-2t)e_n + (2t-1)C_2, & \text{for } 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

其中 $e_n = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1) \in \mathbb{R}^n$。该映射（见图 1）是连续的，并满足横截条件：若 $s(C_1,\ C_2)(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$ 且 $t \in (0,\ 1)$，则

$$s'(C_1,C_2)(t) = \begin{cases} 2(e_n - C_1), & \text{for } 0 < t < 1/2; \\ 2(C_2 - e_n), & \text{for } 1/2 < t < 1; \end{cases}$$

因此，$s'(C_1,\ C_2)(t) \notin \mathbb{R}^{n-1}$。

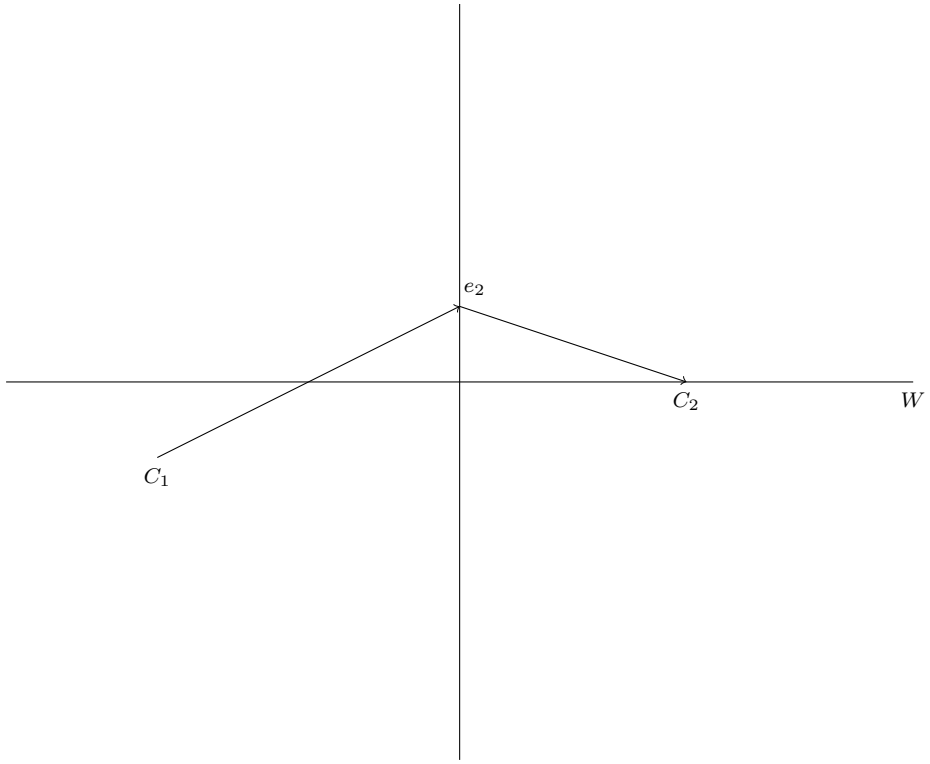


图 1。相对于余维一子流形 $W = \{(a,\ 0)$ 的 $\mathbb{R}^2$ 中的横向算法 $s(C_1,\ C_2)(t)$: $a \in \mathbb{R}\}$。

例2.8。 对于 $\left(\mathbb{R}^{d+1},\ \bigsqcup_{i=1}^{n} S_i^d(0)\right)$，其中 $S_i^d(0)$是以 0 为中心、 i为半径的 d维球面, $i = 1$、.....、 n，则横截拓扑复杂度 $\mathrm{TTC}(\mathbb{R}^{d+1},\ \bigsqcup_{i=1}^{n} S_i^d(0)) = 1$。为验证这一点，我们有映射 $s\colon\ \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \to \left(\mathbb{R}^{d+1}\right)^{[0,1]}$，其定义为

$$s(C_1, C_2)(t) = \begin{cases} (1-2t)C_1, & \text{for } 0 \le t \le 1/2; \\ (2t-1)C_2, & \text{for } 1/2 \le t \le 1; \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中相对于$\bigsqcup_{i=1}^{n} S_i^d(0)$ 定义了一个全局连续横向算法（见图 2）。

设 X 为光滑流形， $Z \subset X$ 为余维一子流形，且 $x_0 \in X \setminus Z$。我们有如下陈述。

引理2.9。 存在一个关于 Z 的连续横截算法 $s\colon\ X \times X \to X^{[0,1]}$，当且仅当存在一个连续零伦同伦 $H\colon\ X \times [0,1] \to X$，满足 $H_0 = 1_X$、 $H_1 = x_0$ 以及 $H(x,\ -) \pitchfork_s Z$ 对任意 $x \in X$。

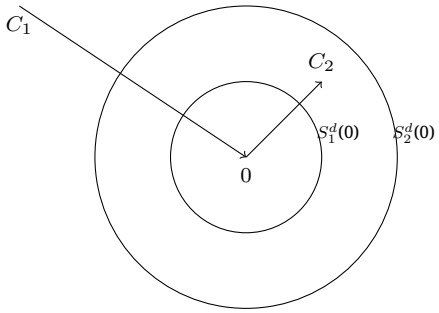


图 2. 关于 $S_1^d(0) \sqcup S_2^d(0)$ 的全局横截算法（ $\mathbb{R}^{d+1}$）

证明。假设 $s\colon\ X\times X\to X^{[0,1]}$ 是关于 Z 的连续横截算法。由 $H(x,\ t)=s\,(x,\ x_0)(t)$ 给出的映射 $H\colon\ X\times[0,1]\to X$ 定义了一个连续零伦同伦，满足 $H_0=1_X$、 $H_1=x_0$ 以及 $H(x,\ -)\pitchfork_s Z$ 对任意 $x\in X$。

现在，假设 $H\colon\ X\times[0,1]\to X$是一个连续零伦同伦，满足 $H_0=1_X$,$H_1=x_0$和 $H(x,\ -)\pitchfork_s Z$ 对任意 $x\in X$均成立。映射 $s\colon\ X\times X\to X^{[0,1]}$ 定义为

$$s(x,y)(t)=\begin{cases}H(x,2t), & \text{for } 0\le t\le 1/2;\\ H(y,2-2t), & \text{for } 1/2\le t\le 1;\end{cases}$$

定义了一个横向算法，它相对于 Z（这里我们用到 $x_0\notin Z$）是连续的 . □

引理2.9引出了横截LS范畴的概念。

定义2.10。设 X 是一个光滑流形， $Z\subset X$ 是一个余维为1的子流形。 X 关于 Z的横截*LS*范畴记为 Tcat(X， Z)，它是满足以下条件的最小正整数 k ：空间 X 可由 k 个开子集$X=U_1\cup\cdots\cup U_k$覆盖，并且对每个 $i=1$，2，.....， k，都存在一个连续映射$H\colon\ U_i\times[0,1]\to X$，满足 $H_0=incl_{U_i}$, $H_1=constant$和 $H(x,\ -)\pitchfork_s Z$对任意 $x\in U_i$均成立。如果不存在这样的 k，则令 Tcat(X， Z) $=\infty$。

注意，Tcat(X， Z) $\geq$ cat(X)，其中 cat(X) 是 X 的 LS范畴。根据 [1], {style id='10'>LS范畴 X，它是满足以下条件的最小整数： X 可以被 k 个开集覆盖，且这些开集都可在 X 内可缩。

例2.11。考虑这一对 ($\mathbb{R}^2$， $S_1^1\sqcup S_2^1$)，其中 S_1^1 是以$O_1=(-2,\ 0)$为中心的1-球面，而 S_2^1 是以 $O_2=(2,\ 0)$为中心的1-球面（见图3）。我们有 Tcat($\mathbb{R}^2$， $S_1^1\sqcup S_2^1$) $=2$。我们将证明 Tcat($\mathbb{R}^2$， $S_1^1\sqcup S_2^1$) ≤ 2，下界的证明是一个技术性练习，留给读者完成。考虑以下开集：

$$U_1=\pi^{-1}\left(-\infty,1/2\right),$$
$$U_2=\pi^{-1}\left(-1/2,+\infty\right),$$

其中 $\pi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是自然投影 $\pi(x,\ y) = (x,\ 0)$。注意，$U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^2$。此外，对于每个 $i = 1,\ 2$，我们可以考虑映射 $H_i\colon\ U_i \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$，其定义为

$$H_i(x,t) = (1-t)x + tO_i.$$

注意，对于任意 $x \in U_i$，$H_i(x,0) = x$、$H(x,1) = O_i$ 以及 $H_i(x,-) \pitchfork_s S_1^1 \sqcup S_2^1$。因此，$\mathrm{Tcat}(\mathbb{R}^2, S_1^1 \sqcup S_2^1) \leq 2$，从而 $\mathrm{Tcat}(\mathbb{R}^2, S_1^1 \sqcup S_2^1) = 2$。

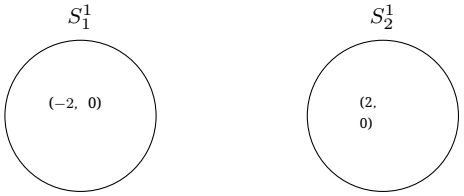


图3. 平面 $\mathbb{R}^2$ 含有两个不相交的一维球面副本 $S_1^1 \sqcup S_2^1$。

以下陈述给出了以横截LS范畴表示的横向复杂度下界。

命题 2.12。设 X 为光滑流形，$Z \subset X$ 为一个余维为 1 的子流形。我们有

$$\mathrm{Tcat}(X,Z) \leq \mathrm{TTC}(X,Z).$$

证明。设 $x_0 \in X$，并考虑映射 $i_0\colon\ X \to X \times X,\ x \mapsto i_0(x) = (x,\ x_0)$。对于 $U \subset X \times X$ 和 $s\colon$ 满足 $e_2^X \circ s = incl_U$ 的 $U \to X^{[0,1]}$ 以及 $s(x,\ y) \pitchfork_s Z$，对任意 $(x,\ y) \in U$，考虑 $V = i_0^{-1}(U)$ 以及映射 $H\colon\ V \times [0,1] \to X$，由 $H(x,\ t) = s(x,\ x_0)(t)$ 给出。该映射是连续映射，且满足 $H_0 = incl_V$，$H_1 = x_0$ 以及 $H(x,\ -) \pitchfork_s Z$，对任意 $x \in U$ 成立。因此，我们得出 $\mathrm{TTC}(X,\ Z) \geq \mathrm{Tcat}(X,\ Z)$。□

例 2.13。考虑这一对 $(\mathbb{R}^2,\ S_1^1 \sqcup S_2^1)$，其中 S_1^1 是中心为 $(-2,\ 0)$ 的 1-球面，而 S_2^1 是中心为 $(2,\ 0)$ 的 1-球面。我们有横截拓扑复杂度 $2 \leq \mathrm{TTC}(\mathbb{R}^2,\ S_1^1 \sqcup S_2^1) \leq 4$。事实上，第一个不等式由例 2.11 以及命题 2.12 得出。为验证第二个不等式，我们可以考虑以下开集：

$$A = \bigcap_{i=1}^{4} \pi^{-1}\left(\mathbb{R} \setminus \{a_i\}\right),$$

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{4} \pi^{-1}\left(a_i - 1/4, a_i + 1/4\right),$$

其中 $\pi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是自然投影 $\pi(x,\ y) = (x,\ 0)$，以及 $a_1 = (-3,\ 0)$、$a_2 = (-1,\ 0)$、$a_3 = (1,\ 0)$ 和 $a_4 = (2,\ 0)$。

注意， $A \cup B = \mathbb{R}^2$，因此 $(A \times A) \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$。此外，

$$A \times B = \bigsqcup_{j=1}^{4} A \times \pi^{-1}(a_j - 1/4, a_j + 1/4),$$
$$B \times A = \bigsqcup_{i=1}^{4} \pi^{-1}(a_i - 1/4, a_i + 1/4) \times A,$$
$$B \times B = \bigsqcup_{i,j=1}^{4} \pi^{-1}(a_i - 1/4, a_i + 1/4) \times \pi^{-1}(a_j - 1/4, a_j + 1/4),$$

以下映射

$$s\colon A \times A \to \left(\mathbb{R}^2\right)^{[0,1]},$$
$$s_{A,j}\colon A \times \pi^{-1}(a_j - 1/4, a_j + 1/4) \to \left(\mathbb{R}^2\right)^{[0,1]},$$
$$s_{i,A}\colon \pi^{-1}(a_i - 1/4, a_i + 1/4) \times A \to \left(\mathbb{R}^2\right)^{[0,1]},$$
$$s_{i,j}\colon \pi^{-1}(a_i - 1/4, a_i + 1/4) \times \pi^{-1}(a_j - 1/4, a_j + 1/4) \to \left(\mathbb{R}^2\right)^{[0,1]},$$

给出

$$s(C_1, C_2)(t) = \begin{cases} (1-3t)C_1 + 3t\pi(C_1), & \text{for } 0 \le t \le 1/3; \\ (2-3t)\pi(C_1) + (3t-1)\pi(C_2), & \text{for } 1/3 \le t \le 2/3; \\ (3-3t)\pi(C_2) + (3t-2)C_2, & \text{for } 2/3 \le t \le 1; \end{cases}$$
$$s_{A,j}(C_1, C_2)(t) = \begin{cases} (1-3t)C_1 + 3t\pi(C_1), & \text{for } 0 \le t \le 1/3; \\ (2-3t)\pi(C_1) + (3t-1)d_j, & \text{for } 1/3 \le t \le 2/3; \\ (3-3t)d_j + (3t-2)C_2, & \text{for } 2/3 \le t \le 1; \end{cases}$$
$$s_{i,A}(C_1, C_2)(t) = \begin{cases} (1-3t)C_1 + 3td_i, & \text{for } 0 \le t \le 1/3; \\ (2-3t)d_i + (3t-1)\pi(C_2), & \text{for } 1/3 \le t \le 2/3; \\ (3-3t)\pi(C_2) + (3t-2)C_2, & \text{for } 2/3 \le t \le 1; \end{cases}$$
$$s_{i,j}(C_1, C_2)(t) = \begin{cases} (1-3t)C_1 + 3td_i, & \text{for } 0 \le t \le 1/3; \\ (2-3t)d_i + (3t-1)d_j, & \text{for } 1/3 \le t \le 2/3; \\ (3-3t)d_j + (3t-2)C_2, & \text{for } 2/3 \le t \le 1; \end{cases}$$

其中， $d_1 = d_2 = (-2、0)$ 和 $d_3 = d_4 = (2、0)$ 关于 $S_1^1 \sqcup S_2^1$ 定义了局部连续横截算法。因此，我们在 $\mathbb{R}^2$ 中关于 $S_1^1 \sqcup S_2^1$ 构造了一个横截运动规划器，它具有 4 个连续区域 $A \times A$、$A \times B$、$B \times A$、$B \times B$。

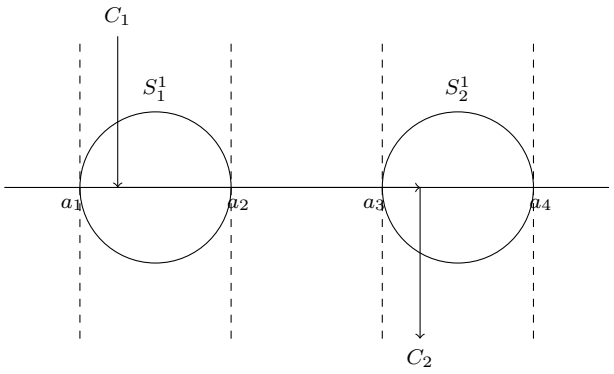


图4。局部横截算法 s: $A \times A \to (\mathbb{R}^2)^{[0,1]}$。

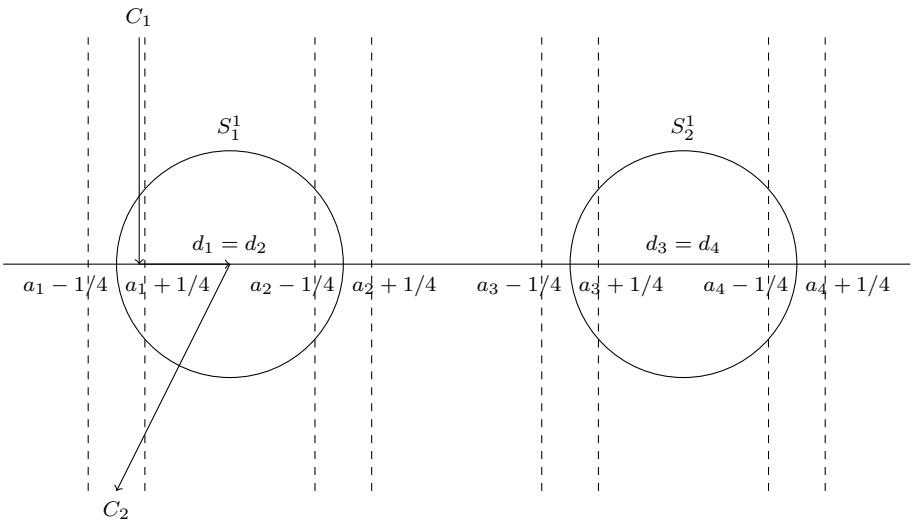


图5。局部横截算法 $s_{A,\ 1}$。

下面的结果较为技术性。

引理 2.14。设 h: $M \to N$ 是一个微分同胚。如果 $W \subset N$ 是一个余维 1 的子流形，那么 $Z = h^{-1}(W) \subset M$ 也是一个余维 1 的子流形。

接下来，以下命题展示了通过微分同胚构造横截算法的显式方法。

命题2.15。设 h: $M \to N$ 是一个微分同胚。如果 $W \subset N$ 是一个余维 1 的子流形，那么 TTC(N; W) =TTC(M; $h^{-1}(W)$)。

证明。令 $Z = h^{-1}(W) \subset M$。对于 $U \subset N \times N$和 s：满足 $e_2^N \circ s = incl_U$和 $s(x,\ y) \pitchfork_s W$的 $U \to N^{[0,1]}$，只要 $(x,\ y) \in U$，考虑 $V = (h \times h)^{-1}(U) \subset M \times M$，映射

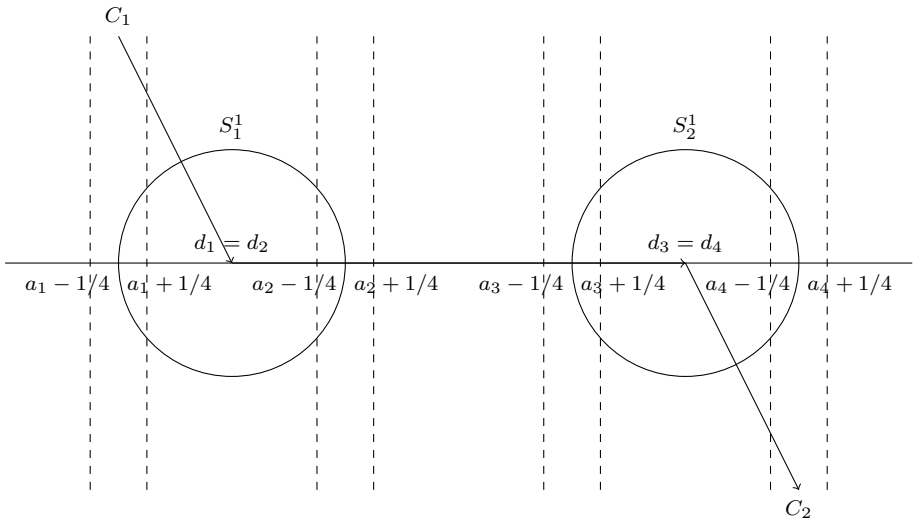


图6. 局部横截算法 $s_{1,\ 4}$。

σ：由 $V \to M^{[0,1]}$给出的 $\sigma = (h^{-1})_{\#} \circ s \circ (h \times h)|_V$定义了 e_2^M的一个局部截面，其中 $(h^{-1})_{\#}$： $N^{[0,1]} \to M^{[0,1]}$是 h^{-1}的诱导映射，即 $(h^{-1})_{\#}(\alpha) = h^{-1} \circ \alpha$。

对于任意 $(x, y) \in V$我们将证明 $\sigma(x, y) \pitchfork_s Z$。首先，注意到 $(h(x)\ h(y)) \in U$，因此 $\Gamma = s(h(x)\ h(y))$ 具有 $\Gamma \pitchfork_s W$ 的性质。此外，注意到 $\sigma(x, y) = h^{-1} \circ \Gamma$ 且$\sigma(x, y)(t) = h^{-1}(\Gamma(t))$ 对任意 $t \in [0, 1]$ 均成立。假设对于某个 $t_0 \in (0, 1)$， $\sigma(x, y)(t_0) \in Z$，则 $\Gamma(t_0) \in W$，因此对于 $t \in (0, 1)$， $\Gamma(t)$ 是光滑的，并且 $\Gamma'(t_0) \notin T_{\Gamma(t_0)}W$。然后， $\sigma(x, y)(t)$ 在 $t_0 \in (0, 1)$ 中是光滑的，且 $\sigma'(x, y)(t_0) = (dh^{-1})_{\Gamma(t_0)}(\Gamma'(t_0)) \notin T_{\sigma(x,y)(t_0)}Z$。因此，$\mathrm{TTC}(N;\ W) \geq \mathrm{TTC}(M;\ h^{-1}(W))$。

不等式 $\mathrm{TTC}(M;\ h^{-1}(W)) \geq \mathrm{TTC}(N;\ W)$ 根据将第一部分应用于 h^{-1} 得出： $N \to M$其中 $Z \subset M$。□

例2.16。考虑微分同胚 h： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$， $h(x,\ y) = (x,\ y - x^2)$，其逆映射 f： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 由 $f(a,\ b) = (a,\ a^2 + b)$ 给出。令 $W = \{(a,\ b) \in \mathbb{R}^2 :\ b = 0\}$，则 $Z = f(W) = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = x^2\}$ 是抛物线。根据例2.7，我们有映射 s： $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^{[0,1]}$ 定义为

$$s(C_1, C_2)(t) = \begin{cases} (1 - 2t)C_1 + 2te_2, & \text{for } 0 \leq t \leq 1/2; \\ (2 - 2t)e_2 + (2t - 1)C_2, & \text{for } 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

其中， $e_2 = (0,\ 1)$ 是关于子流形W的横截连续算法。于是，根据命题2.15，映射 σ： $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^{[0,1]}$ 由下式给出：对于 $B_1 = (x_1,\ y_1)$

and $B_2 = (x_2, y_2)$:

$$\begin{aligned}
\sigma(B_1, B_2)(t) &= f\left(s(h(B_1), h(B_2))(t)\right) \\
&= \begin{cases} f\left((1-2t)h(B_1) + 2te_2\right), & \text{for } 0 \le t \le 1/2; \\ f\left((2-2t)e_2 + (2t-1)h(B_2)\right), & \text{for } 1/2 \le t \le 1; \end{cases} \\
&= \begin{cases} f\left((1-2t)(x_1, y_1 - x_1^2) + 2te_2\right), & \text{for } 0 \le t \le 1/2; \\ f\left((2-2t)e_2 + (2t-1)(x_2, y_2 - x_2^2)\right), & \text{for } 1/2 \le t \le 1; \end{cases} \\
&= \begin{cases} f\left((1-2t)x_1, (1-2t)(y_1 - x_1^2) + 2t\right), & \text{for } 0 \le t \le 1/2; \\ f\left((2t-1)x_2, (2-2t) + (2t-1)(y_2 - x_2^2)\right), & \text{for } 1/2 \le t \le 1; \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left((1-2t)x_1, (1-2t)^2 x_1^2 + (1-2t)(y_1 - x_1^2) + 2t\right), & \text{for } 0 \le t \le 1/2; \\ \left((2t-1)x_2, (2t-1)^2 x_2^2 + (2-2t) + (2t-1)(y_2 - x_2^2)\right), & \text{for } 1/2 \le t \le 1; \end{cases},
\end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中定义了关于抛物线 Z的横向算法。

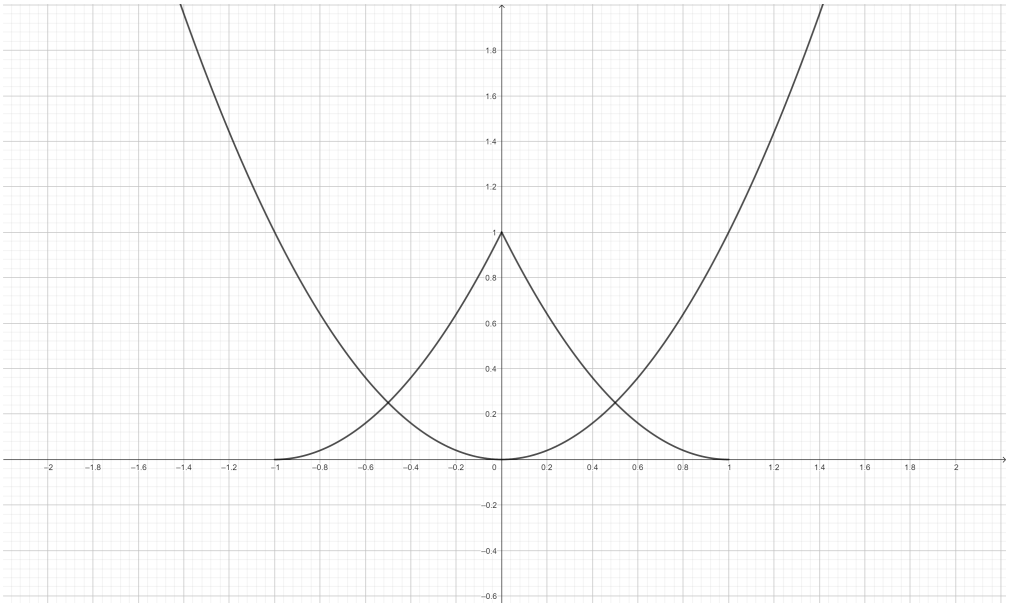


图7. 对于 $B_1 = (-1, 0)$ 和 $B_2 = (1, 0)$，横向算法给出的路径 σ 为 $\sigma(B_1, B_2)(t) = (-(1-2t), (1-2t)^2 + 4t - 1)$，适用于$0 \le t \le 1/2$；对于 $\sigma(B_1, B_2)(t)$，路径为 $= (2t-1, (2t-1)^2 - 4t + 3)$，适用于 $1/2 \le t \le 1$。

参考文献

[1] O. Cornea、G. Lupton、J. Oprea 和 D. Tanré，《*Lusternik-Schnirelmann* 范畴》，数学调查与专著，第 103 卷（美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2003 年）。

[2] M. Farber，《运动规划的拓扑复杂性》。离散与计算几何。**29**（2003），第 2 期，211–221。[3] V. Guillemin 和 Al. Pollack。《微分拓扑》。第 370 卷。美国数学学会，2010 年。[4] J. C. Latombe，《机器人运动规划》。Springer，纽约（1991 年）。[5] S. M. LaValle，《规划算法》。剑桥大学出版社，剑桥。（2006 年）。[6] J. Lee，《光滑流形导论》。Springer，2012 年。[7] C. A. I. Zapata 和 J. Gonzalez，《欧氏空间中的多任务无碰撞最优运动规划算法》。离散数学、算法与应用，12，第 3 期（2020 年），2050040。doi:10.1142/S1793830920500408

数学系，圣保罗大学 数学与统计研究所 -IME/USP，R. do Matão，1010 - Butantã，邮编：05508-090 - 圣保罗，巴西电子邮箱地址：cesarzapata@usp.br

数学科学学院 -FCM-UNMSM，大学城 - UNMSM，Av. República de Venezuela 3400，Cercado de Lima，利马，利马，秘鲁电子邮箱地址：fernando.chu@unmsm.edu.pe