arXiv:2303.06738v1 [math.CA] 12 Mar 2023

关于超立方体上的尖锐等周不等式

DAVID BELTRAN、PAATA IVANISVILI 和 JOS´E MADRID

Abstract. 我们证明了尖锐等周不等式

$$\mathbb{E}\, h_A^{\log_2(3/2)} \geq \mu(A)^*(\log_2(1/\mu(A)^*))^{\log_2(3/2)}$$

对于所有集合 $A \subseteq \{0,1\}^n$，其中 μ 表示均匀概率测度，$\mu(A)^* = \min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}$，$h_A$ 的支集包含于 A，并且为每个顶点x 赋予其在 A的补集中的邻接顶点数。对于任意子立方体，不等式均取等号。此外，对于所有 $\beta \in [1/2,1]$，我们以 $\mu(A)$ 给出了 $\mathbb{E}h_A^\beta$ 的下界，从而改进了此前已知的结果，并在某些情况下使其更为精确。特别地，对于满足 $\mu(A) \geq 1/2$ 的所有集合，我们得到尖锐不等式 $\mathbb{E}h_A^{0.53} \geq 2\mu(A)(1-\mu(A))$，这使我们能够改进 Kahn 和 Park 关于划分超立方体的等周不等式的近期结果。进一步地，我们推导出具有有限余型的 Banach 空间值函数的 Talagrand 的等周不等式：对于所有 $f\colon \{-1,1\}^n \to X$、$\|f\|_\infty \leq 1$，以及任意 $p \in [1,2]$，我们有

$$\|Df\|_p \gtrsim \frac{1}{q^{3/2}C_q(X)}\|f\|_2^{2/p}\left(\log\frac{e\|f\|_2}{\|f\|_1}\right)^{1/q},$$

其中 $\|Df\|_p^p = \mathbb{E}\|\sum_{1\leq j\leq n} x_j' D_j f(x)\|^p$，$x'$是 x的独立副本，而 $C_q(X)$ 是 X 的余型 q 常数。我们将介绍最近得到解决的 Talagrand 猜想的不同证明。

1. Introduction

设 $n \geq 1$ 为整数，$\{0,1\}^n$ 为 n 维超立方体。可以将 $\{0,1\}^n$ 视为一个图：若向量 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ 恰好在一个坐标上不同，则两个顶点 x、$y \in \{0,1\}^n$ 之间由一条边相连。我们用 (x,y) 表示这条边。本文旨在证明 $\{0,1\}^n$ 的子集的若干 Sharp等周不等式。

1.1. 单侧边界。设 $A \subset \{0,1\}^n$ 和 $A^c := \{0,1\}^n \backslash A$。将 A 的边界边集定义为 $\nabla A := \{(x,y)\colon\ x \in A,\ y \in A^c\}$。对于 ∇A，我们定义函数 $h_A : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$，当 $x \in A^c$ 时，$h_A(x) = 0$；若 $x \in A$，则令 $h_A(x)$ 表示连接 x 与 A^c 中某个顶点的边数。设 μ 为 $\{0,1\}^n$ 上的均匀概率测度，并令 $\mathbb{E}$ 表示期望算子。本文的目标之一是研究以下量

$$B(t,\beta,n) = \min_{A\subset\{0,1\}^n, \mu(A)=t} \mathbb{E}\, h_A^\beta, \tag{1.1}$$

对于任意 $\beta > 0$、$t \in [0,1]$、$n \geq 1$；注意，对于固定的 $n \geq 1$，$t \in [0,1]$ 的可取值形式为 $t = m/2^n$，其中 $0 \leq m \leq 2^n$ 为任意整数。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46B09; 46B07; 60E15。

Key words and phrases. 等周不等式，超立方体。

当 $\beta = 1$时，量 $\mathbb{E}h_A$ 具有额外的结构，即 $\mathbb{E}h_A = \mathbb{E}h_{A^c}$，并且有 $\mathbb{E}h_A = \frac{|\nabla A|}{2^n}$，其中 $|\cdot|$ 表示某个集合的基数。在这种情况下，已知 [5] 为

$$B(t,1,n) = nt - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^{2^n t-1} s(j), \tag{1.2}$$

其中 $s(j)$ 表示整数的二进制表示中 1 的个数j。（1.1）中的最小值在集合 A上取得，其中 $\mu(A) = t$由满足以下条件的顶点 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ 组成：对于每个 $\sum_{j=1}^n 2^{j-1}x_j = \ell$，$\ell = 1\,2, \ldots\ldots, t2^n$。由（1.2）得到的相应边等周不等式在博弈论、 [5], 分布式算法、通信复杂度和网络科学中有应用（参见 [13] 及其中的参考文献）。

尽管函数 $B(t,1,n)$ 达到了最优，但使用下界通常更为方便：

$$\mathbb{E}h_A \geq \mu(A)^* \log_2\Big(\frac{1}{\mu(A)^*}\Big), \tag{1.3}$$

其中，对于所有 $t \in [0,1]$，$t^* = \min\{t, 1-t\}$。这通常被称为超立方体上的经典等周不等式。该不等式$B(t,1,n) \geq t^* \log_2(1/t^*)$ 的优点在于：a) 右端与 n 无关；b) 当 $t = 2^{-k}$ 满足 $0 \leq k \leq n$ 时，在点 [1] 处成为等式。在此情况下（$\beta = 1$, $t = 2^{-k}$），对于任意 $0 \leq k \leq n$，最小值（1.1）在余维为 k 的子立方体上取得。下文中，我们将关注 $\inf_{n\geq 1} B(t,\beta,n)$。

通过考虑汉明球 $\{x_1 + \ldots + x_n \leq [n/2]\}$ 在（1.1）中可以看出

$$\text{if} \quad \beta < 1/2 \quad \text{then} \quad \inf_{n\geq 1} B(t,\beta,n) = 0; \tag{1.4}$$

见第3节。另一方面，通过考虑（1.1）中的子立方体可知

$$t(\log_2(1/t))^\beta \geq \inf_{n\geq 1} B(t,\beta,n) \quad \text{at the points} \quad t = 2^{-k}, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{1.5}$$

在（¨1.3）中直接应用霍尔德不等式即可推出

$$\mathbb{E}h_A^\beta \geq \mu(A)\Big(\log_2\Big(\frac{1}{\mu(A)}\Big)\Big)^\beta \qquad \text{for all } \beta \geq 1,$$

将其与（1.5）结合即可得到 $\inf_{n\geq 1} B(t, \beta, n) = t(\log_2(1/t))^\beta$ 在 $t = 2^{-k}$ 对所有 $k \geq 0$ 以及所有 $\beta \geq 1$成立。从现在起，我们将关注 $1/2 \leq \beta < 1$。

情形 $\beta = 1/2$ 最早由 Talagrand 于 [14]研究。通过归纳论证，他证明了与（1.5）相反方向的不等式，差一个普适常数$K > 1$，即

$$\mathbb{E}\sqrt{h_A} \geq K\mu(A)^*\sqrt{\log_2(1/\mu(A)^*)} \tag{1.6}$$

对所有 $A \subseteq \{0,1\}^n$ 均成立。此外，他还证明了

$$\mathbb{E}\sqrt{h_A} \geq \sqrt{2}\mu(A)(1-\mu(A)) \tag{1.7}$$

[1]当1.3）中的不等式在 $\mu(A) = 1 - 2^{-k}$ 时也成为等式，这是由于恒等式$\mathbb{E}h_A = \mathbb{E}h_{A^c}$

对所有 $A \subset \{0,1\}^n$成立。Bobkov 和 G¨otze [1] 提出了一种改进且优雅的归纳论证；特别是，他们的其中一项结果表明， $\sqrt{2}$在（1.7）中可以替换为 $\sqrt{3}$ 。近期，Kahn 和 Park [10] 证明了

$$\mathbb{E}h_A^{\log_2(3/2)} \geq 2\mu(A)(1-\mu(A)), \tag{1.8}$$

而且，右端（1.8）中的常数 2 是锐利的：对于余维 1 和 2 的子立方体，该不等式取等。事实上，对于任意给定的 $\beta \geq 1/2$，形如 C_β 的不等式中可能的最大常数 $\mathbb{E}h_A^\beta \geq C_\beta \mu$（$A$）（$1-\mu$（$A$）对所有 $A \subseteq \{0,1\}^n$ 都是 $C_\beta \leq 2$；在半立方体上检验该不等式即可得到这一点。此外，考虑余维 2 的子立方体可知，常数 $C_\beta = 2$ 只有在 $\beta \geq$log2（3/2）时才有可能。

在本文中，我们证明了一个定理，该定理特别地将不等式（1.5）对所有 $\beta \geq$ log2（3/2） $= 0.5849...$ 反向成立，从而给出 $\inf_{n\geq 1} B$（t， β， n）的值对于 β 的该范围，只要 $t = 2^{-k}$、 $k \geq 0$。

定理 1.1. 设 β_0 :=log2(3/2)。则不等式

$$\mathbb{E}h_A^{\beta_0} \geq \mu(A)^*(\log_2(1/\mu(A)^*))^{\beta_0} \tag{1.9}$$

对所有 $A \subset \{0,1\}^n$ 都成立。特别地，如果 $\mu(A) \leq 1/2$ ，则有

$$\mathbb{E}h_A^\beta \geq \mu(A)(\log_2(1/\mu(A)))^\beta \qquad \textit{for all} \quad \beta \geq \log_2(3/2). \tag{1.10}$$

等号在*1.9*）和（*1.10*）中对任意子立方体 $A \subset \{0,1\}^n$均成立。

注意，上述定理是在所有子立方体上对（1.8）的一个紧确版本。不等式（1.8）和（1.9）的比较如下：函数 $2t(1-t)$ 在 $[1/4, 3/4]$ 上大于或等于 t^*(log2(1/t^*))$^{\beta_0}$ ，而在互补范围内，第二个函数大于或等于第一个函数。一般而言，当比较其他 $1/2 \leq \beta \leq 1$ 值下的 $2t(1-t)$ 和 t^*(log2(1/t^*))$^\beta$ 时，也会出现类似现象：第二个函数在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 的邻域内显著更大，而且还满足（1.5）。理解不等式（1.9）是否对所有 $\beta_0 \geq 1/2$ 都成立，是一个有趣的问题。

令 ∂A =supp(h_A) $\subset A$ 为 A的顶点边界。对所有 ¨应用霍尔德不等式 $\mathbb{E}h_A^\beta \leq (\mathbb{E}h_A^{\beta/\alpha})^\alpha \mu(\partial A)^{1-\alpha}$ 可得以下推论，该推论改进了经典等周不等式（1.3）。

推论 1.2. 对于 $\gamma = \frac{1}{\log_2(3/2)} - 1 = 0.709...$，以及任意满足 $\mu(A) \leq 1/2$的 $A \subset \{0,1\}^n$，我们有

$$\mathbb{E}h_A \geq \left(\frac{\mu(A)}{\mu(\partial A)}\right)^\gamma \mu(A)\log_2\left(\frac{1}{\mu(A)}\right). \tag{1.11}$$

此外，对于任意子立方体，等号成立。

Bobkov 不等式 $\mathbb{E}\sqrt{h_A} \geq \sqrt{3}\mu(A)(1-\mu(A))$ 中的常数 $\sqrt{3}$ 并非最佳。我们得到以下改进结果。

定理 1.3. 对于任意 $\beta \in [1/2, \log_2(3/2)]$ ，我们有

$$\mathbb{E}h_A^\beta \geq C_\beta\, \mu(A)(1-\mu(A)) \tag{1.12}$$

对所有 $A \subset \{0,1\}^n$，其中 $C_\beta = 2\sqrt{2^{\beta+1}-2}$。

定理应用于情形 $\beta = 1/2$ 得到改进常数 $C_{1/2} = 1.82... > \sqrt{3} = 1.73....$ 在余维 2 的子立方体上检验不等式 $\mathbb{E}h_A^\beta \geq C_\beta \mu(A)(1-\mu(A))$，可得上界 $C_\beta \leq 2^{\beta+2}/3$ 对于 $1/2 \leq \beta \leq \log_2(3/2)$。对于 $\beta = \log_2(3/2)$，不等式 (1.12) 与 (1.8) 相同。

1.2. 分离立方体。考虑测度为 $\mu(A) \geq 1/2$ 的集合 $A \subset \{0,1\}^n$，可以设想，对于更广范围的指数 $\beta \geq 1/2$，$\mathbb{E}h_A^\beta \geq 2\mu(A)(1-\mu(A))$ 也可能成立。沿着这一思路，我们得到以下结果。

定理 1.4. 对所有 $A \subset \{0,1\}^n$,

$$\mathbb{E}h_A^{0.53} \geq 8\mu(A)(1-\mu(A))\Big[\Big(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big)\mu(A) + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{4}\Big]. \tag{1.13}$$

通过将 (1.13) 的右端与 $2\mu(A)(1-\mu(A))$ 直接比较，我们得到对 (1.8) 的推广。

推论 1.5. 若 $\mu(A) \geq 1/2$，则

$$\mathbb{E}h_A^{0.53} \geq 2\mu(A)(1-\mu(A)).$$

上述推论在涉及 $\{0,1\}^n$ 划分的等周不等式中有直接应用。设 (A,B,W) 是 $\{0,1\}^n$ 的一个划分，其中 W 通常被认为很小。在此设定下，定义 $\nabla(A,B) = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$. 对于 $\beta \geq 1/2$，Kahn 和 Park [10] 考虑了如下形式的不等式:

$$|\nabla(A,B)| + Kn^\beta |W| \geq 2^{n-1} \tag{1.14}$$

对于测度为 $\mu(A) = 1/2$ 的集合 A 以及某个绝对常数 $K > 0$。注意，如果 $W = \emptyset$（即 $B = A^c$），那么 (1.14) 变为 $|\nabla A| \geq |A|$，这就是测度为 $\mu(A) = 1/2$的集合所满足的经典等周不等式 (1.3)。他们猜想[10, 猜想 1.3] (1.14) 对 $\beta = 1/2$应当成立；这里 $\beta \geq 1/2$通过在汉明球上检验该不等式可知仍是必要的（见第 3 节）。通过一个初等论证（为完整起见，见 §2.4 末尾），他们证明了不等式 (1.8) 蕴含 $\beta = \log_2(3/2)$ 和 $K = 1$时的不等式 (1.14)。我们的推论 1.5 进一步改进了指数 β。

推论 1.6. 设 (A,B,W) 是 $\{0,1\}^n$ 的一个划分，使得 $\mu(A) = 1/2$。则

$$|\nabla(A,B)| + n^{0.53}|W| \geq 2^{n-1}.$$

1.3. 双侧边界。给定 $A \subseteq \{0,1\}^n$，定义双侧边界函数 $w_A : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$，其中当 $x \in A$ 时，$w_A(x) = h_A(x)$；当 $x \in A^c$ 时，$w_A(x) = h_{A^c}(x)$。我们注意到，利用 $w_A^\beta = h_A^\beta + h_{A^c}^\beta$，可以从 $\mathbb{E}h_A^\beta$ 的界得到 $\mathbb{E}w_A^\beta$ 的界。事实上，如果存在函数 $B : [0,1] \to \mathbb{R}$，使得对所有 $A \subseteq \{0,1\}^n$ 都有 $\mathbb{E}h_A^\beta \geq B(\mu(A))$，那么 $\mathbb{E}w_A^\beta \geq B(\mu(A)) + B(1-\mu(A))$。特别地，利用定理 1.1 可得到

$$\inf_{n\geq 1, \mu(A)=t} \mathbb{E}w_A^{\beta_0} \geq 2t^*(\log_2(1/t^*))^{\beta_0}, \qquad \beta_0 = \log_2(3/2),$$

并结合定理1.1 与定理1.4 可得

$$\inf_{n\geq 1, \mu(A)=t} \mathbb{E}w_A^{\beta} \geq t^*(\log_2(1/t^*))^{\beta} + P(t_*) \qquad \text{for } \beta > \log_2(3/2),$$

其中 $t_* := \max(t, 1-t)$，并且 P 是（1.13）右端的三次多项式。在特殊情形 $\mu(A) = 1/2$ 下，利用推论1.5可得到所有$\beta \geq 0.53$ 的精确下界。

推论 1.7。对于所有 $\beta \geq 0.53$,

$$\inf_{n\geq 1, \mu(A)=1/2} \mathbb{E} w_A^\beta = 1.$$

此外，对于所有 $0.5 \leq \beta < 0.53$,

$$1 \geq \inf_{n\geq 1, \mu(A)=1/2} \mathbb{E} w_A^\beta \geq \sqrt{2^{\beta+1} - 2}. \tag{1.15}$$

上界 $1 \geq \inf_{n\geq 1,\ \mu(A)=1/2} \mathbb{E} w_A^\beta$ 来自于在半立方体上进行检验，而范围 $0.5 \leq \beta < 0.53$ 中的非锐利下界（1.3）由定理 [6, 第 3 节。6] 给出，该结果改进了近期的一项结果，其中指出

$$1 \geq \inf_{n\geq 1,\ \mu(A)=1/2} \mathbb{E} w_A^\beta \geq \max\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}, s_{(2\beta)'}^{2\beta}\right\} \qquad \text{for } 1/2 \leq \beta \leq 1.$$

这里，对于任意 $1 \leq q < \infty$，$q' = \frac{q}{q-1}$，以及 s_q 表示合流超几何函数 $x \mapsto {}_1F_1\left(-\frac{q}{2}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2}\right)$的最小正零点。我们注意到$s_{p'} \geq \sqrt{\frac{2(p-1)}{p}}$对于所有 $p \in [1, 2]$ 以及 $s_{p'} \to 0$，当 $p \to 1$时。推论 1.7 对于 $\beta = 1/2$给出

$$\inf_{n\geq 1, \mu(A)=1/2} \mathbb{E}\sqrt{w_A} \geq \sqrt{2^{3/2} - 2} = 0.91... > \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.79....$$

注记 1. 令 C_1 为 L^1 Poincar´é 不等式中的最大常数

$$C\mathbb{E}|f - \mathbb{E}f| \leq \mathbb{E}|\nabla f| \tag{1.16}$$

对所有 $f : \{-1, 1\}^n \mapsto \mathbb{R}$ 以及所有 $n \geq 1$（参见第 1.4 节以了解 $|\nabla f|$的含义）。令$C_{1,\ B}$ 为对所有 $f : \{-1, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$时（1.16）中的最大常数。显然 $C_1 \leq C_{1,\ B}$。[7] 中证明了 $\frac{2}{\pi} < C_1 \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}$，并且人们相信$C_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$。可能会猜想 $C_1 = C_{1,\ B}$。然而，注意到对于示性函数 $f = 1_A$，$A \subset \{-1, 1\}^n$，我们有

$$\frac{\mathbb{E}|\nabla f|}{\mathbb{E}|f - \mathbb{E}f|} = \frac{\mathbb{E}\sqrt{w_A}}{4\mu(A)(1-\mu(A))};$$

参见第 1.4 节以了解 $|\nabla f|$ 与 w_A之间的关系。另一方面，The-理1.3 结合这一事实 $\sqrt{w_A} = \sqrt{h_A} + \sqrt{h_{A^c}}$ 可得$\sqrt{2^{3/2} - 2} \leq C_{1,\ B}$ 这意味着 $C_{1,\ B} - C_1 \geq \sqrt{2^{3/2} - 2} - \sqrt{2/\pi} = 0.112... > 0$。

1.4. Talagrand 的离散梯度等周不等式。使用 $\{-1, 1\}^n$ 而不是 $\{0, 1\}^n$ 会更方便。[2] 对于任意 $f : \{-1, 1\}^n \mapsto \mathbb{R}$ 以及任意 $x = (x_1, ..., x_n) \in \{-1, 1\}^n$，我们定义

$$D_j f(x) = \frac{f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_n)}{2}.$$

[2]注意，h_A 和 w_A 也可以类似地定义于集合 $A \subset \{-1, 1\}^n$。

我们称 f 为布尔函数，如果 f 取值为 0 或 1。定义

$$|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |D_j f|^2}, \quad \text{and} \quad |Mf(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (D_j f)_+^2},$$

其中 $(a)_+ = \max\{0, a\}$ 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 均成立。对于任意 $A \subset \{-1,1\}^n$，令 1_A 表示集合 A 的示性函数。注意，如果 $x \notin A$，那么 $|M1_A(x)|^2 = 0$；如果 $x \in A$，那么 $|M1_A(x)|^2$ 等于 x 在 A^c 中的邻点数的 1/4。因此 $|M1_A(x)|^2 = h_A(x)/4$。另一方面，“双侧”梯度 $|\nabla 1_A|^2$ 可写为 $|\nabla 1_A(x)|^2 = h_A(x)/4 + h_{A^c}(x)/4 = w_A(x)/4$。

本节将讨论函数等周不等式。这些不等式在常数方面并不尖锐，但能够刻画相关量的正确行为。为此，我们引入记号 $A \gtrsim B$，表示 $A \geq CB$，其中 $C > 0$ 为某个普适常数。

任意函数 $f\colon \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ 都有一个傅里叶–沃尔什表示

$$f(x) = \sum_{S \subset \{1,\dots,n\}} \hat{f}(S) x^S, \quad x^S = \prod_{j \in S} x_j.$$

令 $p \geq 1$，并定义 $\|f\|_p = (\mathbb{E}|f|^p)^{1/p}$。最近，Eldan–Kindler–Lifshitz–Minzer 以一种巧妙的方式运用随机限制论证，得到了如下结果。

定理 A ([4])。对于任意 $f\colon \{-1,1\}^n \mapsto \{-1,1\}$，以及任意 $p \in [1,2]$，有

$$\|\nabla f\|_p \gtrsim \sup_{d \geq 0} \left(\sum_{|S| \geq d} |\hat{f}(S)|^2 \right)^{1/p} \sqrt{d}. \tag{1.17}$$

文献 [4] 还指出，只需基本上取 $d \approx \log^{e} \mathrm{Var}(f)$，不等式 1.17 便可推出 Talagrand 锐等周不等式，

$$\|\nabla f\|_p \gtrsim (\mathrm{Var}(f))^{1/p} \sqrt{\log \frac{e}{\mathrm{Var}(f)}} \tag{1.18}$$

对所有 $f\colon \{-1,1\}^n \mapsto \{-1,1\}$，并取 $d \approx \log^{e} W(f)$，其中 $W(f) = \sum_{j=1}^n (\mathbb{E}|D_j f|)^2$，不等式 1.17 便可推出 Talagrand 猜想[3]

$$\|\nabla f\|_p \gtrsim (\mathrm{Var}(f))^{1/p} \sqrt{\log \frac{e}{W(f)}} \tag{1.19}$$

对所有 $f\colon \{-1,1\}^n \mapsto \{-1,1\}$，这一问题最近已在 [3] 中得到解决。注意，对于单调布尔函数 f，即当 $x_i \geq y_i$ for all $i = 1, \dots, n$ 时，$f(x) \geq f(y)$，我们有

$$W(f) = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}(\{j\})^2 \leq \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}(S)^2 = \mathrm{Var}(f).$$

备注 2. 我们应当指出，对于 $p = 1$，不等式 (1.19) 可由 [12], 中的定理 31 得到。该定理指出，对于所有 $\delta \in [0,1]$ 和所有 $f\colon \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$，都有 $\mathbb{NS}_\delta(f) \lesssim \sqrt{\delta}\, \mathbb{E}|\nabla f|$ 成立，其中 $\mathbb{NS}_\delta(f)$ 是 f 的噪声敏感性。利用来自 [11], 的界 $\mathbb{NS}_\delta(f) \gtrsim \mathrm{Var}(f)(1 - (W(f)/\mathrm{Var}(f))^{\frac{\delta}{2-\delta}})$

[3] 情形 $p \in (1,2]$ 为 Talagrand 所知，而他曾提出端点情形 $p = 1$ 的问题。

并取 $\delta = \frac{1}{2}\log(\mathrm{Var}(f)/W(f))$，其中根据 (1.18)，我们可以假设 $\mathrm{Var}(f)/W(f) > 100$，从而得到 $\mathbb{E}|\nabla f| \gtrsim \mathrm{Var}(f)\sqrt{\log \mathrm{Var}(f)}\, w(f)$。再次利用 (1.18)，我们可以假设 $\mathrm{Var}(f) \geq \sqrt{W(f)}$，这使我们得到了 (1.19) 的又一种证明。

本文提出了获得（1.17）的新论证。与随机限制方法 [4] 或归纳证明 [12] 不同，这些论证可将结果推广到取值于具有有限余型的任意 Banach 空间的函数。回顾一下，Banach 空间（X，$\|\cdot\|$）具有拉ademacher余型 $q \in [2,\infty]$，如果存在有限的 C 使得

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q \leq C^q \mathbb{E}\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\|^q$$

对所有 $n \geq 1$ 以及所有 x_1、……、$x_n \in X$ 都成立，其中 ε_1、……、ε_n 是相互独立且同分布的对称 ± 1 伯努利随机变量。最佳常数$C = C_q(X)$称为 X 的余型 q 常数。令 $\Delta = \sum_{j=1}^{n} D_j$，并令 $e^{-t\Delta}$为热半群。

定理 1.8。令 $f\colon \{-1,1\}^n \to X$、$\|f\|_\infty \leq 1$。那么对于任意 $p \in [1,2]$，我们有

$$\|Df\|_p \gtrsim \frac{1}{q^{3/2} C_q(X)} \|f\|_2^{2/p} \left(\log \frac{e\|f\|_2}{\|f\|_1}\right)^{1/q},$$

其中 $\|Df\|_p^p = \mathbb{E}\|\sum_{1\leq j\leq n} x_j' D_j f(x)\|^p$，且 x' 是 x 的独立副本。

注3. 若 f 是布尔函数，则可将定理应用于 $f - \mathbb{E}f$，并利用 Khintchine不等式推出 Talagrand等周不等式（1.18）。

定理1.8 将作为向量值函数的以下“噪声敏感性”不等式的推论得到。

定理 1.9。对所有 $p \in [1,2]$，不等式

$$\|f - e^{-t\Delta} f\|_p \lesssim C_q(X) q^{3/2} (1 - e^{-2t})^{\frac{1}{q}} \|Df\|_p, \quad t \geq 0, \tag{1.20}$$

对所有 $f\colon \{-1,1\}^n \to X$ 均成立。

注4. 若 f 是布尔函数，则定理1.9 结合简单估计$\|f - e^{-\Delta/d} f\|_p \gtrsim \left(\sum_{|S|\geq d} \hat{f}(S)^2\right)^{1/p}$，$p \in [1,2]$，即可推出（1.17）。

致谢。D.B. 由美国国家科学基金会 DMS-1954479 资助项目和 AEI 资助项目 RYC2020-029151-I 部分支持。P.I 部分获得了美国国家科学基金会 CAREER-DMS-2152401 资助项目的支持。

2. The proofs

2.1. 归纳引理。下面的引理是一个标准的归纳论证，其步骤与 [14, 1] 中的相同，最新的改进见于 [10]。

引理 2.1（[10, 第 4217-4219 页]）。设 $\beta \in [1/2, 1]$。如果 $B\colon [0,1] \to [0,\infty)$ 满足$B(0) = B(1) = 0$，$B(1/2) \leq 1/2$，且不等式

$$\max\{((y-x)^{1/\beta} + B(y)^{1/\beta})^\beta, y - x + (2^\beta - 1)B(y)\} + B(x) \geq 2B\left(\frac{y+x}{2}\right) \tag{2.1}$$

对所有 $0 \leq x \leq y \leq 1$ 均成立，则对所有 $A \subset \{0,1\}^n$ 和所有 $n \geq 1$，都有 $\mathbb{E}h_A^\beta \geq B(\mu(A))$。

该引理将用于定理1.1、1.3 和1.4的证明中。

注记 5. 注意，$\max\{((y-x)^{1/\beta}+B(y)^{1/\beta})^{\beta}, y-x+(2^{\beta}-1)B(y)\} = ((y-x)^{1/\beta}+B(y)^{1/\beta})^{\beta}$ 当且仅当 $B(y) \geq y-x$。

2.2. 定理 **1.1**的证明：对数函数。 下面的“两点不等式”将在我们的证明中发挥关键作用。

引理 2.2. 对任意 $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$ 以及所有 $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$，我们有

$$((y-x)^{1/\beta}+B(y)^{1/\beta})^{\beta}+B(x) \geq 2B\Big(\frac{y+x}{2}\Big), \tag{2.2}$$

其中 $B(x) = x\big(\log_2(1/x)\big)^{\beta}$。

证明。 首先将不等式（2.2）改写为

$$\Big(y^{1/\beta}\log_2(1/y)+(y-x)^{1/\beta}\Big)^{\beta}+x(\log_2(1/x))^{\beta} \geq (x+y)\Big(\log_2\Big(\frac{2}{x+y}\Big)\Big)^{\beta}. \tag{2.3}$$

我们将证明分为三个步骤。

步骤 1. 若不等式对 $\beta = 1/2$成立，则它对所有 $\beta \geq 1/2$都成立。事实上，将不等式（2.3）改写为

$$\Big[\frac{y}{x+y}\Big(\log_2(1/y)+\Big(\frac{y-x}{y}\Big)^{1/\beta}\Big)^{\beta}+\frac{x}{x+y}(\log_2(1/x))^{\beta}\Big]^{1/\beta} \geq \log_2\Big(\frac{2}{x+y}\Big). \tag{2.4}$$

接下来，应用 $\Big(\frac{y-x}{y}\Big)^{1/\beta} \geq \Big(\frac{y-x}{y}\Big)^{2}$ 以及以下事实： $\beta \mapsto (\mathbb{E}|X|^{\beta})^{1/\beta}$对于随机变量 X在 $[0,\infty)$上是非递减的。

在下文中，我们假设 $\beta = \frac{1}{2}$ 在（2.3）中成立。

步骤 2. 对于 $y = \frac{1}{2}$ 成立的不等式意味着它对所有 $y \in [x, \frac{1}{2}]$都成立。事实上，令 $x = yt$ 其中 $0 \leq t \leq 1$，并令 $a = \log_2(1/y) \in [1,\infty)$。那么（2.4）可改写为

$$\Big[\frac{1}{t+1}\Big(a+(1-t)^{1/\beta}\Big)^{\beta}+\frac{t}{t+1}(a+\log_2(1/t))^{\beta}\Big]^{1/\beta}-a \geq \log_2\Big(\frac{2}{t+1}\Big).$$

注意， $\varphi(a) = (\mathbb{E}(a+|X|)^{\beta})^{1/\beta}-a$ 在 $(0,\infty)$ 上是非递减的，对于一个随机 m 变量 X，

$$\varphi'(a) = (\mathbb{E}(a+|X|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}-1}\mathbb{E}(a+|X|)^{\beta-1}-1 \geq 0$$

由 H¨older 不等式可得。

因此，只需验证当 $y = 1/2$ 时的不等式。

步骤 3。我们验证不等式

$$\sqrt{1+(1-t)^2}+t\sqrt{1+\log_2(1/t)} \geq (t+1)\sqrt{1+\log_2\Big(\frac{2}{t+1}\Big)}, \quad t \in [0,1]. \tag{2.5}$$

若记作 $1-t=s$，则不等式（2.5）可写成

$$\sqrt{1+s^2}+(1-s)\sqrt{1-\log_2(1-s)} \geq (2-s)\sqrt{1+\log_2\Big(\frac{2}{2-s}\Big)}. \tag{2.6}$$

接下来我们使用两个简单的不等式

$$-\log_2(1-s) \geq \frac{s}{\ln(2)} + \frac{s^2}{2\ln(2)}; \tag{2.7}$$

$$\log_2\left(\frac{2}{2-s}\right) \leq \frac{s}{2\ln(2)} + \left(1 - \frac{1}{2\ln(2)}\right)s^2. \tag{2.8}$$

第一个不等式由泰勒定理得出。第二个不等式通过考察函数 $g(s) = \frac{s}{2\ln(2)} + \left(1 - \frac{1}{2\ln(2)}\right)s^2 - \log_2\left(\frac{2}{2-s}\right)$ 得出。注意，$g(0) = g(1) = 0$。此外，

$$\frac{g'(s)}{s} = -\frac{(4\ln(2)-2)s + 5 - 8\ln(2)}{2(2-s)\ln(2)}$$

仅在 (0,1) 上从 $+$ 变号一次到 $-$（注意 $5 - 8\ln(2) < 0$ 和 $3 - 4\ln(2) > 0$）。因此，在 $[0,1]$ 上有 $g(s) \geq 0$。

接下来，我们分别用（2.7）和（2.8）中得到的下界和上界替换（2.6）中的对数。将所得不等式两边平方后，只需证明

$$1 + s^2 + 2(1-s)\sqrt{(1+s^2)\left(1 + \frac{s}{\ln(2)} + \frac{s^2}{2\ln(2)}\right)} + (1-s)^2\left(1 + \frac{s}{\ln(2)} + \frac{s^2}{2\ln(2)}\right)$$
$$\geq (2-s)^2\left(1 + \frac{s}{2\ln(2)} + \left(1 - \frac{1}{2\ln(2)}\right)s^2\right).$$

将不等式左端的平方根项移到左边，并再次对两边平方，只需证明

$$4(1-s)^2(1+s^2)\left(1 + \frac{s}{\ln(2)} + \frac{s^2}{2\ln(2)}\right) \geq \left[-(1-s)^2\left(1 + \frac{s}{\ln(2)} + \frac{s^2}{2\ln(2)}\right)\right.$$
$$\left. + (2-s)^2\left(1 + \frac{s}{2\ln(2)} + \left(1 - \frac{1}{2\ln(2)}\right)s^2\right) - 1 - s^2\right]^2.$$

展开括号后可见，差值（左端减去右端）化简为 $-\frac{s^2(1-s^2)\ln()}{4\ 2\ 2} \times v(s)$，其中

$$v(s) = 4(\ln(2)-1)^2 s^4 + 12(1-\ln(2))(2\ln(2)-1)s^3 - (17 - 18\ln(2))(2\ln(2)-1)s^2$$
$$- (12 - 24\ln(2) + 16\ln^2(2))s + 32\ln^2(2) - 32\ln(2) + 4.$$

因子 $s^2(1-s)^2$ 的出现并不令人意外，因为 $s = 0$ 和 $s = 1$ 是（2.6）中的等号情形；由于我们所作的多次化简，在此过程中 $s = 0$ 和 $s = 1$ 处的值保持不变。$v(s)$ 中的系数符号从最高次幂到最低次幂依次为 $+$、$+$、$-$、$-$、$-$。因此，根据笛卡尔符号法则，多项式 v 的正根数至多为一个。由于 $v(s)$在无穷远处为正，且 $v(1) = 32\ln^2(2) - 32\ln(2) + 1 < 0$，可知 $v(s) < 0$ 在 $[0,1]$,上成立，从而 $g(s) > 0$ 在 $[0,1]$, 上成立，进而证明不等式（2.5），也就证明了引理 2.2。□

以下引理将用于测度大于 $1/2$ 的集合。

引理 2.3。对于任意 $\beta \in [\frac{1}{2}, \ln(2)]$ 以及所有 $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$，我们有

$$\left((y-x)^{1/\beta} + B(x)^{1/\beta}\right)^\beta + B(y) \geq 2B\left(\frac{y+x}{2}\right), \tag{2.9}$$

其中 $B(x) = x(\log_2(1/x))^\beta$。

证明。注意到 B 在 $[0,1/2]$ 上是非递减的，因为

$$B'(x) = (\log_2(1/x))^{\beta-1}\Big(\log_2(1/x) - \frac{\beta}{\ln(2)}\Big) \geq 0$$

对于 $\beta \in [1/2,\ln(2)]$。对所有 $0 \leq x \leq y \leq 1/2$，我们都有

$$((y-x)^{1/\beta} + B(x)^{1/\beta})^\beta - ((y-x)^{1/\beta} + B(y)^{1/\beta})^\beta + B(y) - B(x) \geq 0. \quad (2.10)$$

事实上，对于每个 $\beta \in (0,1]$，映射 $\psi(t) = ((y-x)^{1/\beta} + t^{1/\beta})^\beta - t$ 在 $[0,\infty)$ 上是非递增的。因此，利用这一事实 $B(x) \leq B(y)$，可推出 $\psi(B(x)) \geq \psi(B(y))$，这与 (2.10) 相同。最后，(2.9) 的左端减去 (2.10) 的左端，恰好等于 (2.2) 的左端，于是引理得证。□

下一个引理是 [10]的主要技术部分。我们注意到，这一结果也包含在引理 2.5 和 2.6 中，其中 $\beta = \log_2(3/2)$。

引理 2.4（[10, 第 4219 页至第 4220] 页）。函数 $B(x) = 2x(1-x)$ 对于 $\beta = \log_2(3/2)$ 满足。 (2.1)

现在我们准备证明定理 1.1。令 $\beta = \beta_0 = \log_2(3/2)$ 为引理 2.1中的函数，并考虑

$$B(t) := \begin{cases} t(\log_2(1/t))^{\beta_0} & t \in [0,1/4), \\ 2t(1-t) & t \in [1/4,3/4], \\ (1-t)(\log_2(1/(1-t)))^{\beta_0} & t \in (3/4,1]. \end{cases} \quad (2.11)$$

注意到

$$B(t) = \max\{t^*(\log_2(1/t^*))^{\beta_0}, 2t(1-t)\} =: \max\{B_1(t), B_2(t)\}, \quad t \in [0,1],$$

其中 $t^* = \min\{t, 1-t\}$。不等式（2.1）的左端可改写为 $\Phi(B(x)\ B(y),\ (y-x)$ 其中

$$\Phi(u,v,w) := \max\{(w^{1/\beta_0} + v^{1/\beta_0})^{\beta_0}, w + (2^{\beta_0} - 1)v\} + u.$$

映射 $(u,v,w) \in [0,\infty)^3 \mapsto \Phi(u,v,w)$ 关于 u 和 v 是非递减的。目标是证明

$$\Phi(B(x), B(y), (y-x)) \geq 2B\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \quad (2.12)$$

对于所有 $0 \leq x \leq y \leq 1$ 以及在（2.11）中对 B 的选择均成立。总共需要考虑六种情形。

(i) 若 $x,\ y \in [0,1/4]$。则 $(x+y)/2 \in [0,1/4]$，因此（2.12）中的 B 与 B_1一致，于是（2.12）由引理 2.2得到。(ii) 若 $x,\ y \in [3/4,1]$。则 $(x+y)/2 \in [3/4,1]$，因此（2.12）中的 B 与 B_1一致。记 $x = 1-b,\ y = 1-a$。则 $0 \leq a \leq b \leq 1/4$，我们有

$$\Phi(B(x), B(y), (y-x)) = \Phi(B_1(x), B_1(y), (y-x)) = \Phi(B_1(b), B_1(a), (b-a))$$
$$\geq 2B_1((a+b)/2) = 2B((x+y)/2),$$

其中不等式由引理 2.3得到。

(iii) 若 $x,\ y \in [1/4,3/4]$。则 $(x+y)/2 \in [1/4,3/4]$，因此（ B在（2.12）中与B_2 重合，于是（2.12）由引理 2.4得出。

（iv）若 $x \in [0,1/4]$、$y \in [3/4,1]$。则（$x+y$）$/2 \in [1/4,3/4]$。因此

$$\begin{aligned}\Phi(B(x),B(y),(y-x)) &\geq \Phi(B_2(x),B_2(y),(y-x))\\ &\geq 2B_2((x+y)/2) = 2B((x+y)/2),\end{aligned}$$

其中第二个不等式由引理 2.4 得出。

(v) 若 $x \in [0,1/4]$，$y \in [1/4,3/4]$。则 $(x+y)/2 \in [1/8,1/2]$。我们区分两种情况：

- 若 $(x+y)/2 \in [0,1/4]$，则 $y \leq 1/2$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi(B(x),B(y),(y-x)) &\geq \Phi(B_1(x),B_1(y),(y-x))\\ &\geq 2B_1((x+y)/2) = 2B((x+y)/2),\end{aligned}$$

其中第二个不等式使用了引理 2.2。

- If $(x+y)/2 \in [1/4,3/4]$ then

$$\begin{aligned}\Phi(B(x),B(y),(y-x)) &\geq \Phi(B_2(x),B_2(y),(y-x))\\ &\geq 2B_2((x+y)/2) = 2B((x+y)/2),\end{aligned}$$

其中第二个不等式使用了引理2.4。

(vi) 若有 $x \in [1/4,3/4]$、$y \in [3/4,1]$，则有 $(x+y)/2 \in [1/2,7/8]$。我们区分两种情况：

- 如果（$x+y$）$/2 \in [1/4,3/4]$，则我们使用界 B（y）$\geq B_2$（y），并应用引理 2.4，类似于 (iv) 或 (v) 中的第二项。
- 如果（$x+y$）$/2 \in [3/4,1]$，则 $x \geq 1/2$。如同 (ii) 中一样，记 $x = 1-b$、$y = 1-a$。注意到 $0 \leq a \leq 1/4 \leq b \leq 1/2$，并且我们有

$$\begin{aligned}\Phi(B(x),B(y),(y-x)) &\geq \Phi(B_1(x),B_1(y),(y-x)) = \Phi(B_1(b),B_1(a),(b-a))\\ &\geq 2B_1((a+b)/2) = 2B((x+y)/2),\end{aligned}$$

其中第二个不等式使用了引理2.3。

因此，我们已经验证了（2.12）在（ B 取值为2.11）时成立。因而，将其与引理 2.1结合可得

$$\mathbb{E}h_A^{\beta_0} \geq B(\mu(A)) \geq \mu(A)^*(\log_2(1/\mu(A)^*))^{\beta_0}.$$

这就完成了主要不等式（1.9）的证明。

为验证（1.10），我们对任意 $\alpha \in [0,1]$和任意$A \subset \{0,1\}^n$ 满足 μ（A）的情形，将 H¨older 不等式应用于（1.9）。于是得到

$$(\mathbb{E}h_A^{\beta_0/\alpha})^\alpha \mu(A)^{1-\alpha} \geq (\mathbb{E}h_A^{\beta_0/\alpha})^\alpha \mu(\partial A)^{1-\alpha} \geq \mathbb{E}h_A^{\beta_0} \geq \mu(A)(\log_2(1/\mu(A)))^{\beta_0},$$

其中，第一个不等式使用了平凡界 μ（∂A）$\leq \mu$（A）。因此我们得到（$\mathbb{E}h_A^{\beta_0/\alpha}$）$^\alpha \mu$（$A$）$^{1-\alpha} \geq \mu$（$A$）（log$_2$（$1/\mu$（$A$））$)^{\beta_0}$。将不等式两边除以 μ（A）$^{1-\alpha}$ 并将其提升至 $1/\alpha$ 次幂，可得（1.10）。定理1.1的证明至此完成。

2.3. 定理 **1.3**的证明：二次多项式。 定理 1.3的证明将由接下来的引理 2.5 和 2.6结合引理 2.1得出。

引理 2.5. 设 $\beta \in [1/2,\log_2(3/2)]$。如果 $C_\beta = 2\sqrt{2^{\beta+1}-2}$ 且 $B(x) = C_\beta x(1-x)$，则不等式

$$y - x + (2^\beta - 1)B(y) + B(x) \geq 2B\Big(\frac{y+x}{2}\Big) \tag{2.13}$$

对所有 $0 \le y \le 1$ 且 $0 \le x \le y - B(y)$ 均成立。

证明。 设 $f(x,y)$ 为式（2.13）左端减去式（2.13）右端，即

$$f(x,y) := C_\beta(2^\beta - 2)y(1-y) - \frac{1}{2}(x-y)(C_\beta(x-y)+2). \tag{2.14}$$

映射 $x \mapsto f(x,y)$ 是凹函数，因此，为了证明 $f(x,y) \ge 0 \text{for } y \in [0,1] \text{and } x \in [0, y - B(y)]$,，只需验证以下两个不等式：(i) $f(y - B(y)\ y) \ge 0$，以及 (ii) $f(0,y) \ge 0$。为验证 (i)，有

$$f(y - B(y), y) = \frac{C_\beta}{2} y(1-y)(2^{\beta+1} - 2 - C_\beta^2 y(1-y)).$$

注意，对于所有 $y \in [0,1]$，$2^{\beta+1} - 2 - C_\beta^2 y(1-y) \ge 2^{\beta+1} - 2 - \frac{C_\beta^2}{4} = 0$。为验证 (ii)，有

$$2f(0,y)/y = yC_\beta(3 - 2^{\beta+1}) + 2^{\beta+1}C_\beta - 4C_\beta + 2.$$

注意，对于所有 $\beta \in [1/2, \log_2(3/2)]$，都有 $3 - 2^{\beta+1} \ge 0$。此外，$y - B(y) \ge 0$ 意味着 $\frac{C_\beta - 1}{C_\beta} \le y$。$2f(0,y)/y$ 在点 $y = \frac{C_\beta - 1}{C_\beta}$ 处的值等于 $(\sqrt{2^{\beta+1} - 2} - 1)^2 \ge 0$。□

引理 2.6。设 $\beta \in [1/2, \log_2(3/2)]$。如果 $C_\beta = 2\sqrt{2^{\beta+1} - 2}$ 且 $B(x) = C_\beta x(1-x)$，则不等式

$$\big((y-x)^{1/\beta} + B(y)^{1/\beta}\big)^\beta + B(x) \ge 2B\Big(\frac{y+x}{2}\Big) \tag{2.15}$$

对所有满足 $x \in [y - B(y)\ y]$ 的 $0 \le x \le y \le 1$ 都成立。

证明。 令 $g(x,y)$ 为 (2.15) 的左端减去 (2.15) 的右端，即

$$g(x,y) := \Big[(C_\beta y(1-y))^{1/\beta} + (y-x)^{1/\beta}\Big]^\beta - C_\beta y(1-y) - \frac{C_\beta}{2}(y-x)^2.$$

我们注意到 $g(y,y) = 0$，并且根据引理 2.5 的证明，有 $g(y - B(y)\ y) = f(y - B(y)\ y) \ge 0$ 在 $[0,1]$, 上，其中 f 如式 (2.14) 所示。于是，对于固定的 $y \in [0,1]$，为了证明对于所有 $x \in [y - B(y)\ y]$ 都有 $g(x,y) \ge 0$，只需证明以下两个断言：

(i) 映射 $x \mapsto g(x,y)$ 在 $(y - B(y)\ y)$ 上至多有一个临界点；(ii) 存在 $\epsilon > 0$，使得对于所有 $x \in (y - \epsilon, y)$ 都有 $g(x,y) > 0$。

我们先证明 (i)。我们有

$$\partial_x g(x,y) = -(y-x)^{\frac{1}{\beta}-1}\Big[(C_\beta y(1-y))^{\frac{1}{\beta}} + (y-x)^{\frac{1}{\beta}}\Big]^{\beta-1} + C_\beta(y-x). \tag{2.16}$$

令 $A := y - x$，以及 $B := C_\beta y(1-y)$。注意到 $0 \le A \le B$，且 B 与 x 无关。我们有

$$\partial_x g(x,y) = -A^{\frac{1}{\beta}-1}[B^{\frac{1}{\beta}} + A^{\frac{1}{\beta}}]^{\beta-1} + C_\beta A,$$

因此，$\partial_x g(x,y) = 0$ 等价于

$$B^{\frac{1}{\beta}} + A^{\frac{1}{\beta}} = C_\beta^{\frac{1}{\beta-1}} A^{\frac{2\beta-1}{\beta(\beta-1)}}. \tag{2.17}$$

对于 $\beta \ge 1/2$，上述左端随 A 增加，而右端随 A 减少。因此，式（2.17）至多能在一个点成立，从而证明了（i）。

注意到 $\lim_{x\to y} \frac{\partial_x g(x,\ y)}{(y-x)^{\frac{1}{\beta}-1}} < 0$ 以及 $g(y,\ y) = 0$，即可得到条目（ii）。 □

2.4. 定理 **1.4**的证明：三次多项式。本节将讨论多项式

$$B(x) = 8x(1-x)\Big[\Big(1-\frac{2^{\alpha+1}}{3}\Big)x + \Big(\frac{2^\alpha}{3} - \frac{1}{4}\Big)\Big]. \tag{2.18}$$

我们注意到，B 的选取满足 $B(0) = B(1) = 0$、$B(1/2) = 1/2$ 以及$B(1/4) = 2^\alpha/4$。为便于后续使用，将 B 展开为

$$B(x) = 8\Big(\frac{2^\alpha}{3} - \frac{1}{4}\Big)x - 8\Big(2^\alpha - \frac{5}{4}\Big)x^2 - 8\Big(1-\frac{2^{\alpha+1}}{3}\Big)x^3. \tag{2.19}$$

定理 1.4 可由引理 2.1 与接下来的引理 2.7和 2.8结合得到。

引理 2.7。设 $\alpha = 1/2$ 和 $\beta = 0.53$。不等式

$$y - x + (2^\beta - 1)B(y) + B(x) \geq 2B\Big(\frac{y+x}{2}\Big).$$

对所有 $0 \leq x \leq y - B(y)$、$0 \leq y \leq 1$，均成立。

证明。我们首先注意到，如果 $B(y) \leq y$，那么 $y \geq 1/2$。事实上，计算可得

$$y - B(y) = \frac{8(3-2^{\alpha+1})}{3} y\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{2^\alpha - 9/8}{2^\alpha - 3/2}\right). \tag{2.20}$$

现在结论显然成立，因为对于 $\alpha = 1/2 \leq \log_2(3/2)$，有 $\frac{2^\alpha - 9/8}{2^\alpha - 3/2} < 0$。

Let

$$f(x,y) := (2^\beta - 1)B(y) + (y-x) - 2B\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + B(x). \tag{2.21}$$

要验证引理 2.7，只需证明不等式 $f(x,\ y) \geq 0$ 对所有 $1/2 \leq y \leq 1$以及所有 $0 \leq x \leq y - B(y)$均成立。该不等式可由以下 3 个断言推出：

(i) 对所有 $y \in [1/2, 1]$，$f(0, y) \geq 0$；(ii) 对每个固定的 $y \in [1/2, 1]$，$x \mapsto f(x, y)$ 在 $[0, y - B(y)]$ 上是凹函数；(iii) 对所有 $y \in [1/2, 1]$，$f(y - B(y)\ y) \geq 0$。

为验证 (i)，注意到 $\varphi(y) := f(0, y)/y$ 是凹抛物线，因为

$$3\varphi''(y) = \left(20 - 2^{\beta+4}\right)\left(3 - 2^{\alpha+1}\right) < 0.$$

另一方面，$\varphi(1/2) = 2^\beta - 2^\alpha > 0$ 且 $\varphi(1) = 0$. 因此，$\varphi(y) \geq 0$ 在 $[1/2, 1]$ 上，(i) 得证。

为验证 (ii)，注意到

$$\partial^2_{xx} f(x,y) = -2(3 - 2^{\alpha+1})(6x - 2y + 2^{\alpha+1} + 1) \leq 0 \quad \text{对所有} \quad x, y \in [0,1].$$

接下来我们验证（iii）。注意到 $f(y - B(y)\ y) = B(y)G(y)$，其中

$$\begin{aligned} G(y) = {} & \Big(11 - \frac{70}{9}\cdot 2^\alpha\Big)2^7 y^6 + (2^{\alpha+7} - 181)\frac{2^6}{3}y^5 + \Big(1453 - \frac{3082}{3}\cdot 2^\alpha\Big)\frac{2^3}{3}y^4 \\ & - \Big(\frac{331}{3} - 78\cdot 2^\alpha\Big)2^4 y^3 + \Big(563 - \frac{1192}{3}\cdot 2^\alpha\Big)\frac{2}{3}y^2 - \Big(47 - 2^{\alpha+5}\Big)\frac{2}{3}y \\ & + 2^\beta - 1 \end{aligned}$$

是一个六次多项式。我们有 $G'''(y) \geq G'''(1/2) = (5\sqrt{2}-7)2^7 \geq 0$ 在$[1/2,1]$ 上成立，因为多项式 $G'''(y)$ 的所有系数的符号均为正，只有常数项除外。此外， $G''(1/2) = (147-100\sqrt{2})\cdot 4/9 > 0$。因此， $G(y)$ 在 $[1/2,1]$ 上是凸的。所以， $G(y) \geq L(y) = G(y_0) + G'(y_0)(y-y_0)$，其中 $y_0 = 0.631$。由于 $G'(y_0) = 0.00036... > 0$ 且 $L(1/2) = 0.000067... > 0$，可推出 $G(y)$ 在 $[1/2,1]$ 上 ≥ 0。□

引理 2.8。设 $\alpha = 0.5$ 和 $\beta = 0.53$。不等式

$$\big((y-x)^{1/\beta} + B(y)^{1/\beta}\big)^{\beta} + B(x) \geq 2B\Big(\frac{y+x}{2}\Big)$$

对所有满足 $x \in [\max\{y - B(y)\ 0\}、\ y]$ 的 $0 \leq x$、 $y \leq 1$ 均成立。

证明。设

$$g(x,y) := \Big(B(y)^{\frac{1}{\beta}} + (y-x)^{\frac{1}{\beta}}\Big)^{\beta} - 2B\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + B(x).$$

目标是证明，对所有 $0 \leq y \leq 1$ 以及所有满足 $\max\{y - B(y)\ 0\} \leq x \leq y$ 的情形， $g(x,y) \geq 0$。显然， $g(y,y) = 0$。我们回顾引理 2.7 的证明：当且仅当 $y \in [1/2,1]$ 时，$\max\{y - B(y)\ 0\} = y - B(y)$。因此，请注意，对于 $y \in [1/2,1]$，由于引理 2.7 中定义于 $[1/2,1]$ 上的多项式 $G(y)$ 为正，我们有 $g(y - B(y)\ y) = f(y - B(y)\ y) \geq 0$；这里的 f 与 (2.21) 中相同。如果 $y \in [0,1/2]$，则

$$g(0,y) = (B(y)^{1/\beta} + y^{1/\beta})^{\beta} - 2B(y/2) \geq (B(y)^2 + y^2)^{1/2} - 2B(y/2).$$

接下来，我们有

$$B(y)^2 + y^2 - (2B(y/2))^2 =$$
$$\frac{17-12\sqrt{2}}{3} \cdot y^2(1-2y)(1-y)(10y^2 + y(29+28\sqrt{2}) + 51 + 36\sqrt{2}) \geq 0$$

对所有 $y \in [0,1/2]$ 均成立。因此我们得到 $g(\max\{y - B(y)\ 0\}, y) \geq 0$ 对所有 $y \in [0,1]$ 均成立。

因此，要证明引理 2.8 ，只需对每个固定的 $y \in [0,1]$，得到以下两个结论：

(i) 映射 $x \mapsto g(x,y)$ 在 $(0,y)$ 上至多有一个临界点；(ii) 存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\partial_x g(x,y) < 0$ 对所有 $x \in (y-\varepsilon, y)$ 均成立。

对于结论 (ii)，直接计算可得

$$\partial_x g(x,y) = -\Big(B(y)^{\frac{1}{\beta}} + (y-x)^{\frac{1}{\beta}}\Big)^{\beta-1}(y-x)^{\frac{1}{\beta}-1} - B'\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + B'(x).$$

因此，由于 $\frac{1}{\beta} - 1 < 1$，可知 $\lim_{x\to y} \frac{\partial_x g_{(x,y)}}{(y-x)^{\frac{1}{\beta}-1}} > 0$。

为验证断言（i），注意到

$$(y-x)^{1-\frac{1}{\beta}}\partial_x g(x,y) = -\Big(B(y)^{\frac{1}{\beta}} + (y-x)^{\frac{1}{\beta}}\Big)^{\beta-1} +$$
$$2(3-2^{3/2})(y-x)^{2-\frac{1}{\beta}}(3x + y + 2^{3/2} + 1).$$

只需证明对于每个 $y \in [0,1]$，映射

$$\psi(x) := -(B(y)^{\frac{1}{\beta}} + (y-x)^{\frac{1}{\beta}}) + [2(3-2^{3/2})(y-x)^{2-\frac{1}{\beta}}(3x + y + 2^{3/2} + 1)]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

在 $(0,y)$ 上满足 $\psi'>0$。我们有

$$\frac{\psi'(x)(y-x)^{-\frac{2\beta-1}{\beta(\beta-1)}+1}}{(2(3-2\sqrt{2})(3x+y+2^{3/2}+1))^{\frac{1}{\beta-1}}}=\frac{((y-x)(3x+y+2^{3/2}+1))^{\frac{1}{1-\beta}}}{\beta(2(3-2\sqrt{2}))^{\frac{1}{\beta-1}}}+\frac{2\beta-1}{\beta(1-\beta)}$$
$$-\frac{3(y-x)}{(1-\beta)(3x+y+2^{3/2}+1)}. \tag{2.22}$$

令 $x=y-t$ 属于 (2.22)，其中 $y\in[t,1]$ 且 $t\in(0,1)$。那么，(2.22) 的右端关于 y 在每个固定的 t 下递增；当 $y=t$ 时，它具有如下形式

$$\frac{(t(t+2^{3/2}+1))^{\frac{1}{1-\beta}}}{\beta(2(3-2\sqrt{2}))^{\frac{1}{\beta-1}}}+\frac{2\beta-1}{\beta(1-\beta)}-\frac{3t}{(1-\beta)(t+2^{3/2}+1)}=:\varphi(t).$$

显然，$\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凸函数，因为它是两个凸函数之和。因此，$\varphi(t)\geq L(t):=\varphi(0.22)+\varphi'(0.22)(t-0.22)$。由于 $\varphi'(0.22)=0.053...>0$ 且 $L(0)=0.033...>0$，引理得证。□

我们在本节最后讨论定理 1.4 （或推论1.5）如何推出推论 1.6。这已包含在 [10, 推论 3.2], 中，但为完整起见，我们在此加以说明。

推论 *1.6* 的证明。设 (A,B,W) 是 $\{0,1\}^n$ 的一个划分，且 $\mu(A)=1/2$。假设对所有此类 $\mathbb{E}h_A^\beta\geq P(\mu(A))$ 均成立 A。于是有

$$P(\mu(A))\leq\mathbb{E}h^\beta_{B\cup W}=\mathbb{E}(h^\beta_{B\cup W}\mathbb{1}_B)+\mathbb{E}(h^\beta_{B\cup W}\mathbb{1}_W)\leq\frac{|\nabla(A,B)|}{2^n}+n^\beta\mu(W),$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了界 $h_{B\cup W}\leq n$。若 $P(1/2)=1/2$，则可得到所需结果；对于 1.13 右端的函数，确实如此。□

2.5. 定理 **1.8** 和 **1.9** 的证明。我们从 [8] 中的一个恒等式出发，该恒等式表明

$$-\frac{d}{dt}e^{-t\Delta}f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^{2t}-1}}\mathbb{E}_\xi\sum_{j=1}^n\delta_j(t)D_jf(\xi(t)x), \tag{2.23}$$

其中 $x\xi(t)=(x_1\xi_1(t)\dots,x_n\xi_n(t))$，且 $\xi_i(t)$ 是具有如下性质的独立同分布随机变量

$$\mathbb{P}(\xi_j(t)=\pm1)=\frac{1\pm e^{-t}}{2},\quad \delta_j(t)=\frac{\xi_j(t)-\mathbb{E}\xi_j(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}}.$$

对于 Walsh函数 x^S，很容易验证该恒等式；再由线性性可知，它对所有函数 f 均成立。由（2.23）和微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}\|f-e^{-t\Delta}f\|_p&\overset{(2.23)}{\lesssim}\int_0^t\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n\delta_j(s)D_jf(x)\Big\|^p\right)^{1/p}\frac{ds}{\sqrt{e^{2s}-1}}\\&\lesssim C_q(X)\sqrt{q}\|Df\|_p\int_0^t(1-e^{-2s})^{\frac{1}{q}-1}ds\\&\lesssim C_q(X)q^{3/2}(1-e^{-2t})^{\frac{1}{q}}\|Df\|_p,\end{aligned}$$

其中我们还在 [8] 中使用了定理4.1。定理1.9的证明至此完成。

对于定理1.8，注意到由于 $\|e^{-t\Delta}f\|_\infty \le \|f\|_\infty \le 1$ 上述不等式和闵可夫斯基不等式意味着

$$\|f\|_2^{2/p} - \|e^{-t\Delta}f\|_2^{2/p} \lesssim C_q(X) q^{3/2} (1-e^{-2t})^{\frac{1}{q}} \|Df\|_p. \tag{2.24}$$

记 $\varepsilon = 1 - e^{-2t}$。根据超压缩性 [2] 和 H¨older 不等式，我们有 $\|e^{-t\Delta}f\|_2 \le \|f\|_2 \left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}$.因此

$$\frac{1 - \left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_2}\right)^{\frac{2\varepsilon}{p(2-\varepsilon)}}}{\varepsilon^{1/q}} \lesssim C_q(X) q^{3/2} \frac{\|Df\|_p}{\|f\|_2^{2/p}}. \tag{2.25}$$

如果 $\frac{\|f\|_2}{\|f\|_1} < 10$，那么取 $t \to \infty$ 代入（2.24）即可证明该定理。否则，在（$\varepsilon = \frac{1}{2} \log \frac{e\|f\|_2}{\|f\|_1}$中取 2.25）即可证明该定理。

3. Appendix

为求完整起见，我们给出论证，说明条件 $\beta \ge 1/2$ 对等周不等式 (1.1) 和 (1.14) 的必要性。两种情况下，反例均由汉明球给出。令 $a \in \{0,1\}^n$ 和 $r > 0$。令$B(a,r)$ 表示以 a 为中心、半径为 r 的汉明球，该球是在 $\{0,1\}^n$ 中按照 ℓ^1-距离定义的。注意， $B(a,r)$ 中的元素个数为 $\sum_{i=0}^{r^*} \binom{n}{i}$，其中 $r^* := \min\{\lfloor r \rfloor, n\}$。若 $r \in \mathbb{N}, r \le n$，则球面 $S(a,r)$ 有 $\binom{n}{r}$ 个元素。

我们从（1.4）中的断言开始。令 n 为正偶数，令 $a \in \{0,1\}^n$为任意值，并考虑 $A = B(a, n/2)$。显然，$\operatorname{supp}(h_A) = S(a, n/2)$。由于$h_A(x) = n/2$ 对于 $x \in S(0, n/2)$ 成立，而 $h_A(x) = 0$ 在其他情况下成立，因此我们有

$$\mathbb{E} h_A^\beta = (n/2)^\beta \mu(\operatorname{supp} h_A) = (n/2)^\beta \mu(S(0, n/2)) = (n/2)^\beta \frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}.$$

因此，斯特林近似给出 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} h_A^\beta = 0$ 对于 $\beta < 1/2$。

为验证条件 $\beta \ge 1/2$ 在（1.14）中的必要性，令 n 为正奇数，并令 $a \in \{0,1\}^n$ 为任意值。考虑汉明球 $A = B(a, (n-1)/2)$，其测度为 $\mu(A) = 2^{-n} \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{i} = 1/2$，并令 W为 A的边界，再令 $B := \{0,1\}^d \setminus (A \cup W)$。显然，$|\nabla(A, B)| = 0$。于是，不等式（1.14）化为

$$K|W|n^\beta \ge 2^{n-1} \tag{3.1}$$

由于$|W| = \binom{n}{n-1}/2)$，根据斯特林近似可知，条件$\beta \ge 1/2$对于不等式 $\liminf_{n\to\infty} K\frac{|W|n^\beta}{2^{n-1}} \ge 1$ 成立是必要的。

References

[1] S. Bobkov、 F. Götze、 *Discrete isoperimetric and Poincaré-type inequalities*, 《概率论及其相关领域》114（1999），第2期，245–277。[2] A. Bonami、 *Étude des coefficients de Fourier des fonctions de L^p（G）*，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》20（1971），（第2分册）：335–402。[3] R. Eldan、 B. Gross、 *Concentration on the Boolean hypercube via pathwise stochastic analysis* **230** 2022 3, 935 994 ，《数学发明》（），第–期。[4] R. Eldan、 G. Kindler、 N. Lifshitz、 D. Minzer、 *Isoperimetric Inequalities Made Simpler*, arXiv:2204.06686。

[5] S. Hart、 *A note on the edges of n-cube*, 《离散数学》14（1976），第2期，157–163。
[6] P. Ivanisvili、 A. Nazarov、 A. Volberg、 *Square functions and the Hamming cube: Duality*, 《离散分析》1（2018），第1–18页。[7] P. Ivanisvili、 R. van Handel、 A. Volberg、 *Improving constant in end-point Poincaré inequality on Hamming cube* 1811 05584 ，arXiv:。

[8] P. Ivanisvili、 R. van Handel、 A. Volberg、 *Rademacher type and Enflo type coincide*, 《数学年刊》（第2辑）192（2020），第2期，665–678。2020。[9] J. Kahn、 G. Kalai、 and N. Linial、 *The influence of variables on boolean functions*（扩展摘要）。载于第29届年度计算机科学基础研讨会，怀特普莱恩斯，纽约，美国，1988年10月24–26日，第68–80页，1988年。
[10] J. Kahn、 J. Park、 *An isoperimetric inequality for the Hamming cube and some consequences* **148** 2020 4213 4224 ，《美国数学学会会刊》（），-。[11] N. Keller、 G. Kindler、 *Quantitative relation between noise sensitivity and influences*, 《组合数学》33（2013），第1期，45–71。[12] A. Klivans、 R. O'Donnell、 R. Servedio、 *Learning Geometric Concepts via Gaussian Surface Area* ，
https://www.cs.cmu.edu/ odonnell/papers/perimeter.pdf[13] C. Rashtchian、 W. Raynaud、 *Edge Isoperimetric Inequalities for Powers of the Hypercube*, 《电子组合学杂志》29（2022），第1期，论文编号1.47，共26页[14] M. Talagrand、 *Isoperimetry logarithmic Sobolev inequalities on the discrete cube and Margulis graph connectivity theorem* ，，， **3** 1993 3, 295 314 《几何与泛函分析》（），第–期。第295–314页1993年。[15] M. Talagrand、 *On boundaries and influences*, 《组合数学》17（1997）第2期，275–285。

(D.B.) Departament d'Anàlisi Matemàtica、 Universitat de València、 Dr. Moliner 50、 46100 Burjassot、 Spain*Email address*: david.beltran@uv.es(P.I.) Department of Mathematics、 University of California、 Irvine、 CA 92617、 USA*Email address*: pivanisv@uci.edu
(J.M.) Universite de Geneve、 Geneva 4、 Switzerland*Email address*: Jose.Madrid@unige.ch