基于 Pendry-MacKinnon 离散麦克斯韦方程的传递矩阵闭式解析解

Ovidiu-Zeno Lipan*Department of Physics、
Gottwald Center for the Sciences 138 UR Drive、University of Richmond、 Richmond、
VA 23173、 USA

Aldo DeSabataDepartment of Measurements and Optical Electronics,
Politehnica University of Timisoara, 300006 Timisoara, Romania（日期:
2023年3月14日）

Pendry 和 MacKinnon 提出的麦克斯韦方程组有意义的离散化方法，最初专门作为有限元数值算法的一部分提出。不同于数值方法，本着差分方程与微分方程之间关系所体现的相同思想，我们为由这种麦克斯韦方程组离散化方法生成的传递矩阵元提供了解析解。该方法适用于所有模式以及具有频率相关介电常数的任意非磁性图案，并以双层结构为例进行说明。数百个路径算子的结果被简化为少数几个传播通道，这些通道在输入端和输出之间传递电磁场。我们对一种特定的双层器件进行了设计优化，并据此生成了从介电常数到模式数量及超高Q因子的共振的拓扑图。

PACS编号： 78.67.Pt, 42.25.Fx

arXiv:2303.06765v1 [physics.optics] 12 Mar 2023

I. 引言

以下内容源于当前技术需求与一项长期科学探索的交汇。当前的需求体现在基于薄层的光子器件上，例如用于增强现实的波导 [1], [2] 、用于5G和6G网络的频率选择表面 [3], 、可穿戴应用[4] 以及表面波介导传感应用 [5],[6]。这项长期探索旨在理解离散模型与连续模型之间的相互作用 [7], [8]。自19世纪以来，人们对这种联系的关注各有侧重[9], , 例如，孤子 [10], 、混沌中的普适性 [11], [12], 和分形 [13]等主题都引起了许多人的兴趣。我们关注的表现形式是差分方程与微分方程之间的关系。例如，用于描述孤子波运动的科特韦赫和德弗里斯方程的离散版本[14],呈现出独特而丰富的不对称性，因为它包含一系列在连续体中不易显现的普适性质。尤其是，广田 [15],[16]提出的孤子方程离散形式与量子可积系统 [17], [18]相关。必须强调的是，要以保留原连续方程主要性质的方式对方程进行离散化，绝非易事。

Pendry 和 MacKinnon 对麦克斯韦方程组进行了有意义的离散化 [19] ，采用精心选取的简单立方晶格 [20], ，保留了连续介质中纵模的基本性质。这种离散化专门作为有限元数值算法 [21]的一部分提出。

与数值方法相比，秉持差分方程与微分方程之间关系所启发的相同理念，我们提出了这样一个问题：是否能够为 Pendry 和 MacKinnon 的离散麦克斯韦方程组的传递矩阵找到完整的解析解。

传递矩阵 [22], 的应用远不止于电磁场传播的研究 [23], [24]。它通常以2×2 矩阵的形式出现，并约化为一个传播模式 [25],[26],[27]。然而，我们在这里要寻找的是一种适用于任意非磁性结构的传递矩阵解析解，并且该解析解必须涵盖所有布洛赫-弗洛凯模式，包括传播模式和倏逝的模式。因此，我们所采用的步骤不同于那些参数数量较少且对称性较多的理论中所使用的方法 [28],[29]。

在接下来的章节中，我们推导这一解析解，并介绍所采用的技术，其中值得注意的包括路径算子的定义（图3），以及用于在输入端与输出端之间传输电磁场的传播通道的出现（图 5）。这一解析解适用于以任意种类的频率相关的非磁性各向同性材料填充晶格节点的情况。我们给出了两个薄层的通解，尽管该方法可以扩展到更多薄层。

具体而言，在第二节和第三节中，我们将 Pendry 和 MacKinnon 的离散形式麦克斯韦方程组改写为两个二维线性空间的张量积形式，见式 (14) 至 (16) 以及式 (20) 至 (22)。因此，电磁态和传播算子被分解为张量积形式，见式 (27)。这一做法对于

* olipan@richmond.edu

简化大量解析计算至关重要。第四节和第五节分别讨论真空中的离散色散关系和壳上散射方法，[30], 由此提取出一个沿 z 坐标的函数，见式 (39)。第六节介绍沿 x 轴和 y 轴、但不沿 z轴的 Bloch-Floquet 周期边界条件。第七节介绍如何由各个元素构建传递矩阵。

求解过程中的一个关键步骤是定义路径算子，并在第八节中对其进行讨论。对整个路径算子集合求和，大大简化了传递矩阵，并揭示出传播仅沿少数通道进行，详见第九节。

为具体说明这一依赖路径算子和通道的所提方法，我们完整求解了双层结构的传递矩阵元。解的介绍从第十节的概述开始，并在第十一节和第十二节深入讨论细节。根据输入端-OUT偏振和传播方向对通道进行的分类，汇总于表I、图 5、图 6和附录 B。

在第十三节中，我们转而讨论连续介质极限，并将其应用于图 7所示的特定双层图案。该极限取于 x 和 y 方向，并表明通道可由一组普适函数分类。它还要求计算这些函数乘积的二维傅里叶积分；每个函数的自变量由某一薄层的介电常数定义，详见第十三节和第十四节。对于多边形镶嵌薄层，这些积分可以用闭式求得，详见第十五节、第十六节和第十七节。公式包含规范自由度，并被整理为关于镶嵌多边形顶点的求和项。这些项包含了关于非磁性材料及结构几何取向的全部信息，如式 (80) 所示。

最后，根据传递矩阵的公式，第十八节提出了一种优化程序，用于构造介电双层结构（图 7）。布洛赫-弗洛凯模沿薄层传播，具有较大的振幅，并沿 z 方向呈倏逝态 [31]。这些共振呈现出一系列重要性质。其中之一是对介电常数变化的稳健性，详见第十九节。共振频率位于传递矩阵对角元素的零点附近。当介电常数取不同值时，零点会出现或消失，从而使我们能够定义一张拓扑图，用于统计共振模的数量（图 10）。

另外，在第 XX 节和第 XXI 节中，我们发现，相同的双层结构在选定特定介电常数后，会以非常大的 Q 因子发生共振，如图 19 所示。最后，在第 XXII 节中，完整的解析公式使我们能够通过复频率平面中的零极点近似（96）获得共振模的 Fano-Lorentz谱线形状，如图 21 所示。

II. 晶格上的离散麦克斯韦方程

空间是一个正交晶格，其晶格常数分别为 a、b和 c，对应于 x、y 和 z 方向。z 轴被指定为传递矩阵的传播轴。因此，离散空间可视为一系列由 z轴坐标标记的、与 x—y平行的平面。离散位置向量为 $\vec{n} = (an_x、bn_y、cn_z) = (n_\perp、cn_z)$，其中记号 $n_\perp = (an_x、bn_y)$ 强调了将空间分解为一组垂直于 z轴的平面，如 [34]所示。如果更倾向于将平面集合视为中心对象，则应在全文中将 $\perp$ 改为 $\parallel$。在晶格的每个点处，电磁$\vec{\ }$ $\vec{\ }$场由六个分量 E 和 H描述。附着于每个晶格点的材料由两个离散标量场$\vec{\ }$ $\vec{\ }$ $\vec{\ }$表征，它们分别将 D 与 E 以及 B 与$\vec{\ }H$连接起来：

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(n_\perp, cn_z)\vec{E}, \tag{1}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \mu(n_\perp, cn_z)\vec{H}. \tag{2}$$

在我们所采用的离散电动力学中，∇算子变为一对格点算子（$\vec{T}^E$，$\vec{T}^H$），其中 $\vec{T}^E = \left(T_x^E(a)\ T_y^E(b)\ T_z^E(c)\right)$ 和 $\vec{T}^H = \left(T_x^H(a)\ T_y^H(b)\ T_z^H(c)\right)$。这些离散算子通过其作用于格点标量函数$f(\vec{n})$的方式来定义。对于 x 轴

$$T_x^E(a)f(\vec{n}) = (ia)^{-1}(f(\vec{n} + a\hat{x}) - f(\vec{n})), \tag{3}$$
$$T_x^H(a)f(\vec{n}) = -(ia)^{-1}(f(\vec{n} - a\hat{x}) - f(\vec{n})). \tag{4}$$

其中，以（y，b）和（z，c）代替（x，a），分别对应其他轴。晶格上的麦克斯韦方程组为

$$\vec{T}^E \times \vec{E} = {\Gamma_H}^{-1}\vec{H}', \tag{5}$$
$$\vec{T}^H \times \vec{H}' = {\Gamma_E}^{-1}\vec{E}, \tag{6}$$

其中

$${\Gamma_H}^{-1} = -i\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mu(n_\perp, cn_z)c, \tag{7}$$
$${\Gamma_E}^{-1} = -i\epsilon(n_\perp, cn_z)c^{-1}, \tag{8}$$
$$\vec{H}' = i(\omega\epsilon_0 c)^{-1}\vec{H}. \tag{9}$$

从麦克斯韦方程组中消去 E_z 和 H'_z 后，四维向量场的传播

$$|F(n_\perp, n_z)\rangle = \begin{bmatrix} E_x(n_\perp, cn_z) \\ E_y(n_\perp, cn_z) \\ H'_x(n_\perp, cn_z) \\ H'_y(n_\perp, cn_z) \end{bmatrix} \tag{10}$$

和通常一样，通过两个算子来实现。第一个算子 O_E（11）仅推进 E 分量，见图（1）

$$\begin{bmatrix} E_x(n_\perp, cn_z) \\ E_y(n_\perp, cn_z) \\ H'_x(n_\perp, cn_z) \\ H'_y(n_\perp, cn_z) \end{bmatrix} \overset{O_E(n_z)}{\longmapsto} \begin{bmatrix} E_x(n_\perp, cn_z + c) \\ E_y(n_\perp, cn_z + c) \\ H'_x(n_\perp, cn_z) \\ H'_y(n_\perp, cn_z) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

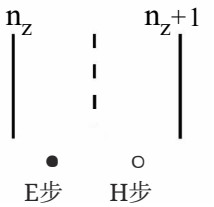

图 1. 两个平面之间的传播。虚线平面是假想的，用于放置经 $O_E(n_z)$ 变换后的场构型。参数 n_z 强调了 O_E 完全取决于位于 n_z 处的 (x, y) 平面上的材料性质 $\Gamma_{E/H}(n_\perp, n_z)$。

嵌入 O_E 矩阵元中的材料性质 Γ_H 和 Γ_E 仅取决于位于平面 n_z 上的空间位置 $\vec{n}$。算子 O_E 作用于矢量场 F_α 的内部指标 α （10），表现为 4×4 矩阵乘法；而 O_E 的矩阵元则是作用于场的外部空间变量 $n_\perp$ 的算子，但不作用于 n_z 位置。由 O_E 执行的 E 步之后，紧接着是由 O_H 执行的 H 步

$$\begin{bmatrix} E_x(n_\perp, cn_z+c) \\ E_y(n_\perp, cn_z+c) \\ H'_x(n_\perp, cn_z) \\ H'_y(n_\perp, cn_z) \end{bmatrix} O_H(n_z) \longmapsto \begin{bmatrix} E_x(n_\perp, cn_z+c) \\ E_y(n_\perp, cn_z+c) \\ H'_x(n_\perp, cn_z+c) \\ H'_y(n_\perp, cn_z+c) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

与 O_E 相比，传递矩阵元的材料性质 Γ_H 和 Γ_E 取决于平面 n_z+1 上的空间位置。从位于 n_z 处的平面到位于 n_z+1 处的平面的完整传播由 $O_H(n_\perp, cn_z+c)O_E(n_\perp, cn_z)$ 实现。

从算子 O_E 和 O_H 的结构可以看出，内部四维空间可视为两个二维空间的张量积。这种分解有助于对电磁波在材料中传播所经过的不同路径进行分类；这将是我们获得传递矩阵元闭式解析公式的主要工具之一。因此，从 [21], 出发，路径观点可通过将算子写成以下形式来表示

$$O_E(n_z) = O_E^{(1)} + O_E^{(2)} + O_E^{(3)}, \tag{13}$$
$$O_E^{(3)} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}, \tag{14}$$
$$O_E^{(2)} = I_E \otimes \sigma_2 \Gamma_H^{-1}(-c), \tag{15}$$
$$O_E^{(1)} = I_E \otimes |T_E\rangle \Gamma_E \langle T_E| \sigma_2(-c), \tag{16}$$

其中， σ_2 是泡利矩阵，且

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

式（16）中的右矢和左矢算符作用于内部空间时是二维向量，而作用于外部空间变量 $n_\perp$ 时则是作用于函数的算子

$$|T_E\rangle = \begin{bmatrix} T_x^E \\ \\ T_y^E \end{bmatrix}, \langle T_E| = \begin{bmatrix} T_x^H & T_y^H \end{bmatrix}. \tag{18}$$

右矢到左矢共轭定义为将E 变为 H。虚数单位 i不进行额外的共轭。与通常情况一样，标签在共轭下不发生变化。

类似地，但不同于 E步，H步的算子为

$$O_H(n_z+1) = O_H^{(1)} + O_H^{(2)} + O_H^{(3)}, \tag{19}$$
$$O_H^{(3)} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}, \tag{20}$$
$$O_H^{(2)} = I_H \otimes \sigma_2 \Gamma_E^{-1}(-c), \tag{21}$$
$$O_H^{(1)} = I_H \otimes |T_H\rangle \Gamma_H \langle T_H| \sigma_2(-c), \tag{22}$$

$$|T_H\rangle = \begin{bmatrix} T_x^H \\ \\ T_y^H \end{bmatrix}, \langle T_H| = \begin{bmatrix} T_x^E & T_y^E \end{bmatrix}. \tag{23}$$

与算子的张量积分解相一致，场也将表示为张量积，

$$|F(n_\perp, n_z)\rangle = |e\rangle \otimes \begin{bmatrix} E_x(n_\perp, cn_z) \\ E_y(n_\perp, cn_z) \end{bmatrix} + |h\rangle \otimes \begin{bmatrix} H'_x(n_\perp, cn_z) \\ H'_y(n_\perp, cn_z) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

其中，二维向量 $|e\rangle$ 和 $|h\rangle$,

$$|e\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, |h\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

分别选取四维向量 (E_x, E_y, H'_x, H'_y) 的电场部分（E_x, E_y）和磁场部分（H'_x, H'_y）。

III. FIELDSONA 晶格的基向量

均匀介质填充的晶格上麦克斯韦方程组的解，即常数$\Gamma_H(n_\perp, cn_z) = \Gamma_H$和 $\Gamma_E(n_\perp, cn_z) = \Gamma_E$，是平面波。这些解 $\left|\Psi^{\pm}_{S/P,\ p_\perp}\right\rangle e^{\pm ip_z n_z c} e^{-i\omega t}$根据偏振类型 S 或 P 以及沿正或负z方向的传播方向 $\pm$ 进行区分。这里

$$\left|\Psi^{\pm}_{S/P,p_\perp}\right\rangle = |p_\perp, S/P, \pm\rangle\, e^{ip_\perp n_\perp}, \tag{26}$$

其在（x, y）平面内的传播由$p_\perp =$ （p_x, p_y）描述。

平面波的内部四维向量为

$$\begin{aligned}|p_\perp, S, +\rangle &= |e\rangle \otimes i\sigma_2 \left|p_\perp^H\right\rangle + |h\rangle \otimes \left|p_\perp^H\right\rangle \Gamma_H k_z^E, \\ |p_\perp, P, +\rangle &= |e\rangle \otimes \left|p_\perp^E\right\rangle \Gamma_E k_z^H + |h\rangle \otimes i\sigma_2 \left|p_\perp^E\right\rangle,\end{aligned} \tag{27}$$

其中，与（18）和（23）一致，列向量$\left|p_\perp^E\right\rangle$ 和 $\left|p_\perp^H\right\rangle$ 分别是行向量 $\left\langle p_\perp^E\right| = [k_x^H, k_y^H]$ 和 $\left\langle p_\perp^H\right| = [k_x^E, k_y^E]$的转置与共轭。由于空间是离散的，平面波通过向量$\vec{k}^E = (k_x^E,\ k_y^E,\ k_z^E)$和 $\vec{k}^H = (k_x^H,\ k_y^H,\ k_z^H)$依赖于晶格常数（$a,\ b,\ c$），

$$k_x^E = (ia)^{-1}(e^{iap_x} - 1), \tag{28}$$

$$k_x^H = -(ia)^{-1}(e^{-iap_x} - 1), \tag{29}$$

对于其他坐标轴，使用数对（$b,\ p_y$）和（$c,\ p_z$）代替（$a,\ p_x$）。要得到另外两个基向量，$|p_\perp,\ S/P,\ ,$ 将从，$S/P,\ +\rangle$ 变为 $-k_z^H$。

为推导传递矩阵元，在给定的 n_z 处，将场 (24) 展开在基 $\left|\Psi^\pm_{S/P,\ p_\perp}\right\rangle$ 上。通过投影到一组正交的左矢向量 (30) 上来进行展开

$$\left\langle \Phi^\pm_{S/P,p_\perp}\right| = \langle p_\perp, S/P, \pm|\, e^{-ip_\perp n_\perp}, \tag{30}$$

其中

$$\begin{aligned}\langle p_\perp, S, +| &= -\langle e| \otimes \left\langle p_\perp^H\right| i\sigma_2 k_z^H + \langle h| \otimes \left\langle p_\perp^H\right| \Gamma_H^{-1}, \\ \langle p_\perp, P, +| &= \langle e| \otimes \left\langle p_\perp^E\right| \Gamma_E^{-1} - \langle h| \otimes \left\langle p_\perp^E\right| i\sigma_2 k_z^E.\end{aligned} \tag{31}$$

将 $\langle p_\perp, S/P, +|$ 乘以 -1，并将 k_z^H 替换为 $-k_z^E$，得到 $\langle p_\perp, S/P, -|$。该正交基未归一化。范数 $\left\langle p_\perp^H | p_\perp^H\right\rangle (k_z^H + k_z^E) = \left\langle p_\perp^E | p_\perp^E\right\rangle (k_z^E + k_z^H)$ 在 $E \leftrightarrows H$ 共轭下保持不变。

IV. 均匀介质的色散关系

要求平面波基底在充满均匀介质的晶格上满足麦克斯韦方程组，这意味着

$$-(\Gamma_H \Gamma_E)^{-1} = \left\langle p_\perp^H | p_\perp^H\right\rangle + k_z^E k_z^H. \tag{32}$$

这就是均匀介质的色散关系

$$\frac{\omega^2}{v_0^2} = k_x^E k_x^H + k_y^E k_y^H + k_z^E k_z^H, \tag{33}$$

其中该介质中的光速为 v_0。通过以下 c 缩放

$$\frac{\omega}{v_0} = \frac{\Omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{34}$$

色散关系可用无量纲频率 Ω 表示

$$\frac{\Omega^2}{c^2} = k_x^E k_x^H + k_y^E k_y^H + k_z^E k_z^H, \tag{35}$$

这将有助于用无量纲参数表示传递矩阵的各个元素。注意，项 $k_x^E k_x^H + k_y^E k_y^H$ 等于 $\left\langle p_\perp^{\mathrm{E}} | p_\perp^{\mathrm{E}}\right\rangle = \left\langle p_\perp^{\mathrm{H}} | p_\perp^{\mathrm{H}}\right\rangle$，在连续介质极限 $a \to 0,\ b \to 0$下趋于 $p_x^2 + p_y^2$。下文中，我们将真空用作基的均匀介质。该介质也可称为基的参考介质。

V. SOLVING FOR $\varphi_z = e^{icp_z}$ FOR GIVEN Ω, p_x AND p_y

[19]中的方法是在壳上进行计算，也就是说，给定频率 Ω 和 $p_\perp$，求解关于 p_z 的色散关系。为此，我们引入函数 φ_z

$$\varphi_z = e^{icp_z}, \tag{36}$$

它是方程的解

$$\varphi_z + \varphi_z^{-1} = 2\zeta, \tag{37}$$

其中

$$\zeta = 1 - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{c^2}{2}\left\langle p_\perp^{\mathrm{H}} | p_\perp^{\mathrm{H}}\right\rangle. \tag{38}$$

我们对式（36）中的 p_z 施加两个彼此不同且不重叠的约束。一个条件是 $\mathrm{Im}(p_z) \geqslant 0$，这样，在 $z = -\infty$ 或 $z = \infty$ 处放置的源所产生的倏逝波，分别由衰减的 φ_z 或 φ_z^{-1}表示。另一个条件是 $p_z \geqslant 0$，它要求来自 $z = -\infty$ 或 $z = \infty$ 的传播波的速度分别沿着$\hat{}z$ 或 $-\hat{}z$的方向。方程（37）的形式解 $\varphi_z = \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$ 将实轴划分为三个区间：$(-\infty, -1)$、$(-1, 1)$ 和 $(1, \infty)$。对于区间$(-\infty, -1)$，条件 $\mathrm{Im}(p_z) \geqslant 0$ 选出了 $\varphi_z = \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}$，但并未对$(-\infty, -1)$上的 φ_z 施加具体取值限制。在 ζ复平面中，无论沿$(-\infty, -1)$上方还是下方绕行，都满足 $\mathrm{Im}(p_z) \geqslant 0$。第二个约束 $p_z \geqslant 0$要求，$(-1, 1)$上的 φ_z 取值必须与沿线段$(-1, 1)$下方绕行所得到的值相同。对于最后一个区间，条件 $\mathrm{Im}(p_z) \geqslant 0$ 得到满足；与$(-\infty, -1)$的情况类似，我们可以自由地通过沿区间上方或下方绕行来定义$(1, \infty)$上的 φ_z。我们选择构造一个从下方连续的函数 φ_z，使 $\mathrm{Im}(\zeta) \leqslant 0$，因此在 ζ复平面中沿实轴下方绕行，以此选取 φ_z 在实轴上的取值。

该分析得出如下解

$$\varphi_z(\zeta) = \zeta - \sqrt{|\zeta^2 - 1|}\, e^{\frac{i}{2}\left(\arg(\zeta-1) + \arg(\zeta+1)\right)}. \tag{39}$$

辐角(ζ)在 $[-\pi,\pi)$上取值，使得辐角(ζ) $=-\pi$ 若 Im(ζ) $=0$ 且 $\zeta<0$。在图2中，点$\varphi_z=1$定义了瑞利频率；对于给定的 $p_\perp$，在该频率处，波由倏逝波转变为传播波。

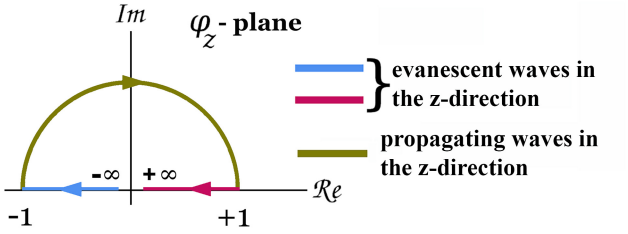

图 2。 φ_z的复平面。当 ζ 变量从$-\infty$ 变化到 -1时， φ_z 从 0 变化到 -1。随后，当 ζ 在实 ζ轴下方从 -1变化到 1 时， φ_z 沿上半圆从-1 变化到 1。最后，当 ζ 的取值范围从 1 变化到 ∞ 时，变量 φ_z 从 1 返回并趋近于 0。

VI. 周期性边界条件

设电磁场满足布洛赫-弗洛凯边界条件

$$|F(n_\perp+(a,0)L_x,cn_z)\rangle=e^{2\pi i\xi_x}\,|F(n_\perp,cn_z)\rangle\,, \quad (40)$$
$$|F(n_\perp+(0,b)L_y,cn_z)\rangle=e^{2\pi i\xi_y}\,|F(n_\perp,cn_z)\rangle\,, \quad (41)$$

其中， $L_x\geqslant 2$ 和 $L_y\geqslant 2$ 是两个整数，用于描述 (x,y) 平面中晶胞的尺寸。材料性质从一个晶胞到另一个晶胞呈周期性变化

$$\Gamma_H(n_\perp+(a,0)L_x,n_z)=\Gamma_H(n_\perp,n_z) \quad (42)$$
$$\Gamma_H(n_\perp+(0,b)L_y,n_z)=\Gamma_H(n_\perp,n_z) \quad (43)$$

对 Γ_E. 具有类似的周期性。布洛赫-弗洛凯边界条件将 (p_x,p_y) 的可能取值限制为

$$p_x=2\pi\frac{M_x}{aL_x}+2\pi\frac{\xi_x}{aL_x}, \quad (44)$$
$$p_y=2\pi\frac{M_y}{bL_y}+2\pi\frac{\xi_y}{bL_y}, \quad (45)$$

其中 $M_x=0$、1、.....、L_x-1 以及 $M_y=0$、1、.....、L_y-1，且 $0\leqslant\xi_x<1$、$0\leqslant\xi_y<1$。

因此，基的指标（$|\psi^{\rm DIR}_{\rm POL、\,BF}\rangle$）分为四类。第一类是 POL，即偏振指标，取 S 和 P 两个值。第二类是 DIR，即平面波沿 z轴的传播方向，同样取两个值： $+$ 和 $-$。第三类是 BF，即由整数对（M_x、 M_y）组成的布洛赫-弗洛凯指标，取有限个值。最后一个指标（ξ_x、 ξ_y）只取一个值，可视为整个布洛赫-弗洛凯线性基的标签。

参数（ξ_x、 ξ_y）规定了波在（x、 y）平面内的方向。例如，如果入射模（$M_x=0$、 $M_y=0$）的方向由球坐标中的角度（θ、 φ）表示，那么 ξ_x 和 ξ_y 的参数化形式为

$$\sin\left(\pi\frac{\xi_x}{L_x}\right)=\frac{a\Omega}{2c}\sin(\theta)\cos(\varphi), \quad (46)$$
$$\sin\left(\pi\frac{\xi_y}{L_y}\right)=\frac{b\Omega}{2c}\sin(\theta)\sin(\varphi), \quad (47)$$
$$\sin\left(\frac{1}{2}cp_z\right)=\frac{c\Omega}{2c}\cos(\theta). \quad (48)$$

前两个方程给出 ξ_x、 ξ_y 在选定 θ、 φ 和 Ω 后的解，而第三个方程则求解 p_z。

VII. 传递矩阵和散射矩阵

为了继续将位于 n_z 的 IN平面传播到 n_z+L_z 处的 OUT，可将 IN 和 OUT 场分解到平面波基底（26）中，分别记为 $\left|\psi^{\rm dir}_{\rm pol、\,bf}\right\rangle$和$\left|\psi^{\rm DIR}_{\rm POL、\,BF}\right\rangle$。未包含在基底中的 z 相位 $e^{\pm ip_z^{\rm IN}n_z}$ 和 $e^{\pm ip_z^{\rm OUT}\ (n_z+L_z)}$ 由算子产生，因此会出现在传递矩阵元中。传递矩阵元在（49）中定义为连接在参考介质平面波基底中分解的 $\left|F^{\rm IN}\ (n_\perp、\ n_z)\right\rangle$场与 $\left|F^{\rm OUT}\ (n_\perp、\ n_z+L_z)\right\rangle$场的系数的因子

$$C^{\rm DIR}_{\rm POL,BF}=\sum\left(T^{\rm DIR;dir}_{\rm POL,BF;pol,bf}\right)C^{\rm dir}_{\rm pol,bf}\,, \quad (49)$$

求和遍历的是与输入端参数相关的指标 (dir,pol,bf)。(49) 中的传递矩阵元 T in 从基中借用了全部四类指标。要根据 (49) 中的 T 系数构造矩阵，需要将二维布洛赫-弗洛凯指标 (M_x,M_y) 映射为一维整数指标 $m=1,2,\cdots,L_xL_y$。我们利用 (M_x,M_y) 的瑞利频率对布洛赫-弗洛凯指标进行映射和排序。如果 (M_x,M_y) 的瑞利频率小于 $(M_x^{'},M_y^{'})$ 的瑞利频率，则将布洛赫-弗洛凯指标按 $(M_x,M_y)<(M_x^{'},M_y^{'})$ 的顺序排列。若两个不同的布洛赫-弗洛凯模具有相同的瑞利频率，则按字典序排列。注意，此排序取决于 (ξ_x,ξ_y)。模式 $(M_x,M_y)=(0,0)$ 具有 $f_{\rm Rayleigh}=0$，并映射为 $m=1$。下一个$f_{\rm Rayleigh}>0$ 映射为 $m=2$，依此类推，见附录I中的表XII。

构建传递矩阵的过程从为每一组 2×2 矩阵开始

$$T^{-;-}_{m,n}=\begin{pmatrix}T^{-,-}_{Sm,Sn} & T^{-,-}_{Sm,Pn}\\ T^{-,-}_{Pm,Sn} & T^{-,-}_{Pm,Pn}\end{pmatrix} \quad (50)$$

为每一组（m, n）构建。这些矩阵包含有关模式 n 如何通过器件传输的信息：该模式在输入端 IN 处具有负方向，传输后成为模式 m，同样具有负方向，但位于 OUT。

由这些 2×2-矩阵构造传递矩阵 $T^{-,-}$，令布洛赫-弗洛凯指标 m 和 n从 1 取到 L_xL_y

$$T^{-,-}=\begin{pmatrix} T^{-,-}_{1,1} & T^{-,-}_{1,2} & T^{-,-}_{1,3} & \cdots \\ T^{-,-}_{2,1} & T^{-,-}_{2,2} & T^{-,-}_{2,3} & \cdots \\ T^{-,-}_{3,1} & T^{-,-}_{3,2} & T^{-,-}_{3,3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{51}$$

以类似方式构造出全部四个矩阵 $T^{-,-}$，$T^{-,+}$，$T^{+,-}$，$T^{+,+}$后，完整的传递矩阵表示为

$$T(\xi_x,\xi_y)=\begin{pmatrix} T^{+,+} & T^{+,-} \\ T^{-,+} & T^{-,-} \end{pmatrix}, \tag{52}$$

这里明确写出 (ξ_x,ξ_y)，以提醒我们它们所起的作用。

现在可以从完整的传递矩阵中获得散射矩阵的矩阵元。对于散射矩阵，输入端和输出的含义与传递矩阵中的 OUT 和 IN 不同。对于散射矩阵，我们不用“DIR/dir”，而是使用位置指标，其取值为 min 或 max，具体取决于场 $|F\rangle$ 在 z轴上的位置，即分别位于 $z=n_z$ 或 $z=n_z+L_z$。偏振和布洛赫-弗洛凯指标保持不变。

求得散射矩阵的经典方法，[20],

$$t(\xi_x,\xi_y)=\begin{pmatrix} t^{max,min} & t^{max,max} \\ t^{min,min} & t^{min,max} \end{pmatrix}, \tag{53}$$

需要对传递矩阵 $T^{-,-}$ 求逆

$$t^{min,max}=(T^{-,-})^{-1}, \tag{54}$$
$$t^{min,min}=-t^{min,max}T^{-,+}, \tag{55}$$
$$t^{max,max}=T^{+,-}t^{min,max}, \tag{56}$$
$$t^{max,min}=T^{+,+}+t^{max,max}T^{-,-}t^{min,min}. \tag{57}$$

VIII. 通过路径算子进行传播

传递矩阵元 (49) 可以用传播算子表示

$$\mathrm{T}^{\mathrm{DIR;\ dir}}_{\mathrm{POL,BF;\ pol,bf}}=\|_{\mathrm{OUT}}\|^{-1}(L_xL_y)^{-1}\sum\nolimits_{n_\perp} \left\langle\phi^{\mathrm{DIR}}_{\mathrm{POL,BF}}\right|\mathrm{Operator}\left|\psi^{\mathrm{dir}}_{\mathrm{pol,bf}}\right\rangle, \tag{58}$$

其中，内部空间和算子的归一化为

$$\|_{\mathrm{OUT}}\|=\left\langle p^{H,\mathrm{OUT}}_\perp\middle|p^{H,\mathrm{OUT}}_\perp\right\rangle\left(k_z^{H,\mathrm{OUT}}+k_z^{E,\mathrm{OUT}}\right), \tag{59}$$

$$\mathrm{Operator}=O_H(n_z+L_z)O_E(n_z+L_z-1)\ldots O_H(n_z+1)O_E(n_z). \tag{60}$$

通常的方法（[20], 也采用这种方法）是在乘积（60）中每一对 O_HO_E算子之间插入单位分解。按照这一过程，对于由薄层组成的堆栈，我们需要将一组高维传输矩阵相乘，每个薄层对应一个矩阵。这意味着，为了获得堆栈中所需的某个传递矩阵元，我们实际上需要计算所有矩阵元；无论在理论层面还是数值层面，这都可能带来很大的计算负担。此外，采用一系列矩阵乘积所具有的优势会因数值不稳定性而减弱，并且还可能由于用较小维度的传输矩阵近似高维传输矩阵而进一步降低。

为避免使用矩阵乘积，我们采用了另一种方法；据我们所知，在非均匀介电常数和磁导率材料的传输矩阵研究中，这种方法尚属首次。

举例来说，考虑式（58）中输入端 IN 处的 $\left|\psi^{\mathrm{dir}}_{\mathrm{pol,\ bf}}\right\rangle=\left|p^{\mathrm{IN}}_\perp,S,+\right\rangle e^{ip^{\mathrm{IN}}_\perp n_\perp}$以及输出端 OUT 处的$\left\langle\phi^{\mathrm{DIR}}_{\mathrm{POL,\ BF}}\right|=\left\langle p^{\mathrm{OUT}}_\perp,S,+\right|e^{-ip^{\mathrm{OUT}}_\perp n_\perp}$。这篇稿件中有几个关键时刻。其中之一就在这里：我们决定将乘积算子展开为路径算子的和。也就是说，由于每个 O_E 和 O_H 都是三个算子的和，即式（13）和（19），因此式（60）变成 3^{L_z+1}项 $O^{(j)}_HO^{(k)}_E\ldots O^{(m)}_HO^{(n)}_E$ 的和，并由一条路径（输入端 IN$n,m,\ldots,k,j$输出端 OUT）参数化，其中每个索引取三个值。每条路径都可以像图3那样用图形表示：分别为 $O^{(j)}_E$ 和 $O^{(j)}_H$ 关联一个 $j\bullet$ 和一个 $j\circ$。例如，路径 IN121232OUT 的路径算符 $O^{(2)}_HO^{(3)}_EO^{(2)}_HO^{(1)}_EO^{(2)}_HO^{(1)}_E$ 在图3中表示。

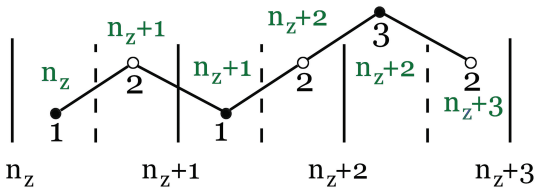

图 3. $L_z=3$ 传播的一种可能路径。该路径为 IN121232OUT，按正z轴方向标记。

IX. 通道

因此，传递矩阵元是对路径算子的求和

$$\|_{\mathrm{OUT}}\|^{-1}(L_xL_y)^{-1}\sum_{paths}\sum_{n_\perp}e^{-ip^{\mathrm{OUT}}_\perp n_\perp} \left\langle p^{\mathrm{OUT}}_\perp,S,+\right|\mathrm{path\text{-}operator}\left|p^{\mathrm{IN}}_\perp,S,+\right\rangle e^{ip^{\mathrm{IN}}_\perp n_\perp}. \tag{61}$$

我们继续讨论所选示例，其中 S+ 被置于输入端和 OUT。尽管如此，在输入端任意选择一对偏振和方向的自由度

以及独立地在 OUT 处进行同样选择的自由度，在（61）中清晰可见。进一步而言，对基和算子进行张量积分解非常有用。基中的每个元素（27）都是两个部分之和，即 e部分和 h部分，分别包含 $|e\rangle$ 和 $|h\rangle$。路径算符同样可以进行这种分解，其中（13）和（19）中分别存在 I_E-部分和 I_H-部分。由于这些分解，$\langle p_\perp^{\mathrm{OUT}}, S, +|$ 路径算符 $|p_\perp^{\mathrm{IN}}, S, +\rangle$中的张量积可拆分为两个因子的乘积。第一个因子具有 $\langle e| I_H I_E I_2 I_H I_1 \cdots I_E |h\rangle$等形式，并可取两个值：0 或 1。对于在第一因子筛选后保留下来的每条非零路径，我们必须计算第二个因子，其中包含材料属性。本文仅研究非磁性材料。

第二个因子的结构形式为 $\left\langle p^{H,}{}_\perp{}^{\mathrm{OUT}} \middle| T_E \right\rangle \Gamma_P \sigma_2 \cdots \left| p^{E,}{}_\perp{}^{\mathrm{IN}} \right\rangle$，借助 $\langle T_E| \sigma_2 |T_H\rangle e^{ip_\perp \cdot n_\perp} = 0$，可以进行第二种零点筛选。此外，对于整体非零的路径，第二个因子还可以优雅且有利地分解为两项。一项称为 $\mathcal{Z}$项，是 $(p_z^{\mathrm{IN}}, p_z^{\mathrm{OUT}}, \Omega)$ 的函数，但不依赖材料参数；另一项称为 XY项，取决于 $p_\perp^{\mathrm{IN}}$ 和沉积材料。这种因式分解对于简化传递矩阵的最终结果至关重要，因为幸运的是，XY项为一组路径所共有。

我们将具有相同 XY项的一组路径称为一个通道。其主要意义在于，通道数远少于非零路径数，从而大幅简化传递矩阵元的最终解析表达式。此外，一个通道的 $\mathcal{Z}$ 项（即属于该通道的各路径的 $\mathcal{Z}$项之和）可简化为若干依赖于 φ_z 的因子的乘积。

将 a $\mathcal{Z}$项与 XY项分离的技巧是：沿路径算符乘积链正向传播输入相位 $e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}} \cdot n_\perp}$，并反向传播输出相位 $e^{ip_\perp^{\mathrm{OUT}} \cdot n_\perp}$。利用一般关系式，可通过路径算符完成这两种传播：

$$\sum_{n_\perp} e^{-ip_\perp^{\mathrm{OUT}} \cdot n_\perp} f_{\mathrm{OUT}}(n_\perp) \left(|T_{E/H}\rangle \left(f_{\mathrm{IN}}(n_\perp) e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}} \cdot n_\perp} \right) \right) = \sum_{n_\perp} \left(-|T_{H/E}\rangle \left(e^{-ip_\perp^{\mathrm{OUT}} \cdot n_\perp} f_{\mathrm{OUT}}(n_\perp) \right) \right) f_{\mathrm{IN}}(n_\perp) e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}} \cdot n_\perp}. \tag{62}$$

为了将 $\mathcal{Z}$ 与 XY 因子分离，正向传播会持续进行，直到 $f_{\mathrm{IN}}(n_\perp)$ 成为与 $n_\perp$ 无关的常数。无论是否使用 (62)，显而易见的是，相位 $e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}}$ 可以穿过 $|T_E\rangle$，留下 $|p_E^{\mathrm{IN}}\rangle$。然而，(62) 使反向传播的处理更加清晰。在这种情况下，即 $f_{\mathrm{OUT}}(n_\perp)$ 为常数时，相位 $e^{-ip_\perp^{\mathrm{OUT}}}$ 受到 $-|T_H\rangle$ 的作用，形成 $|p_E^{\mathrm{OUT}}\rangle$，但位于输出端。分离过程会持续进行，直到每个相位都遇到各自依赖于 $n_\perp$ 的非磁性材料。路径算符中位于 $e^{-ip_\perp^{\mathrm{OUT}} \cdot n_\perp}$ 和 $e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}} \cdot n_\perp}$ 最终传播位置之间的子链就是 XY 算符，它定义了一个通道。通道分类完成后，只需继续对相位 $e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}}$ 进行正向传播，使其通过依赖于非磁性材料的 XY 算符，即可得到传递矩阵元的完整解。下面我们将求解由两个非均匀非磁性薄层构成的结构，以此进行说明。

X. 双层非磁性结构的解析解

完成单个薄层的路径算符计算并不困难，该薄层包含依赖于 $(n_x,\ n_y)$ 的非磁性材料。接下来是双层结构，它会产生更丰富的散射现象。尽管完整求解看似艰巨，但最终结果阐明了各个传播通道所发挥的作用。此外，将解析解与优化过程相结合，可为实际器件的设计提供一种方法，见第十八节。

接下来，我们给出由两层具有非均匀且不同的非磁性材料 $\epsilon_1(n_x,\ n_y) \neq \epsilon_2(n_x,\ n_y)$ 构成的器件的路径算子传播解，见图 4。

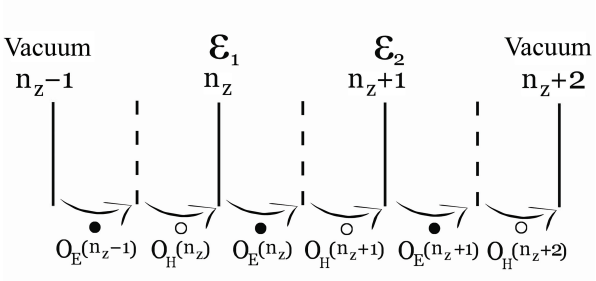

图 4. 从真空传播，穿过两个薄层，再返回真空。平面 1 和 2 分别印有非均匀材料 $\epsilon_1(n_\perp)$ 和 $\epsilon_2(n_\perp)$，构成薄层 1 和薄层 2。

首先，我们概述结果，随后深入研究通过路径算子的传播。

在总计 $3^6 = 729$ 条路径中，针对所有可能的偏振对进行统计后，只有 188 条路径非零。这些路径被分组成通道。平面波从$n_z - 1$ 处的输入端 IN 传播至 $n_z + 2$ 处的 OUT 所经过的通道，取决于偏振指标，见表 I。例如，从S^{IN} 进入 S^{OUT} 的特定传播经过 104 条路径，其余路径的贡献均为零，直至总数达到 188 条

对于该偏振对而言。这 104 条路径被分组成 5 个通道，见表 I。 $S^{OUT}S^{IN}$ 的通道 1 包含 46 条路径，通道2 包含 22 条，依此类推，直到由 20 条路径构成的通道5。表 I 列出了每一对输入端-输出偏振对应的通道数量及每个通道包含的路径数量。

表I。通道

$Pol^{OUT}Pol^{IN}$	每个通道的路径数
$S^{OUT}S^{IN}$	104=46+22+8+8+20
$S^{OUT}P^{IN}$	77=33+16+4+12+12
$P^{OUT}S^{IN}$	63=4+4+4+4+10+10+6+6+15
$P^{OUT}P^{IN}$	96=10+2+6+2+6+8+2+6+6+15+12+3+9+9

a 第二列中的通道数分别为：5、5、9 和 14。

例如，为了证明这些结果以及更多结论，我们将分析三条路径。

表II。通道3 SS偏振

路径	路径
IN221221OUT	IN321221OUT
输入端221222OUT	IN321222OUT
IN221223OUT	IN321223OUT
IN221233OUT	IN321233OUT

a 通用序列 212 定义了该通道的 XY 算符

从 729-188 集合的零点路径中选取两条路径，以解释其对传播的零贡献。

路径 IN321321OUT 对任何偏振传播都完全没有贡献，因为该路径的算子乘积 $O_H^{(1)}O_E^{(2)}O_H^{(3)}O_E^{(1)}O_H^{(2)}O_E^{(3)}$ 具有 ($I_HI_E\mathbb{1}I_EI_H\mathbb{1}$) ⊗(算子) 的形式。部分 $I_E\mathbb{1}I_E = |e\rangle\langle h|\,\mathbb{1}\,|e\rangle\langle h|$ 为零，因为 $\langle h|e\rangle = 0$，使得这些路径对任何传播均处于非活动状态。

另一条路径 IN321121OUT 也为零，但原因不同。其路径算符$O_H^{(1)}O_E^{(2)}O_H^{(1)}O_E^{(1)}O_H^{(2)}O_E^{(3)}$ 的形式为（$I_HI_EI_HI_EI_H\mathbb{1}$）⊗（算符）。张量积的第一项（$I_HI_EI_HI_EI_H\mathbb{1}$）$= |h\rangle\langle e|$,不为零。然而，其张量积的第二项包含$O_H^{(1)}O_E^{(1)} = |T_H\rangle\Gamma_S\langle T_H|\sigma_2(-c)|T_E\rangle$（$-c\Gamma_P$）$\langle T_E|\sigma_2$。这使 $\langle T_H|$ 与受 σ_2作用的 $|T_E\rangle$ 发生接触，而后者为零

$$\begin{bmatrix} T_x^E \\ T_y^E \end{bmatrix} \sigma_2 \begin{bmatrix} T_x^E & T_y^E \end{bmatrix} = i(T_y^E T_x^E - T_x^E T_y^E) = 0, \quad (63)$$

鉴于 T_y^E与 T_x^E对易。剩下的是沿 188 条非零路径的传播，下面对此举例说明。

XI. 通道 3SS

计算路径 IN321221OUT 对 S^{IN}、+ 传播至 S^{OUT}、+的贡献。该路径属于通道 3 $S^{\mathrm{OUT}}S^{\mathrm{IN}}$，其中包含 8 条路径，见表 II。其路径算符的形式为 $|h\rangle\langle e|$ ⊗(算子)。为评估其对传递矩阵元的贡献，该算子需要同时作用于输入端 $\left|p_\perp^{\mathrm{IN}}、S、+\right\rangle e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}n_\perp}$和输出 $e^{-ip_\perp^{\mathrm{OUT}}n_\perp}\left\langle p_\perp^{\mathrm{OUT}}、S、+\right|$（61）。第一项 $|h\rangle\langle e|$ 告诉我们，只有输入端 $\left|p_\perp^{\mathrm{IN}}、S、+\right\rangle$的 e部分会沿此路径传递至输出$\left\langle p_\perp^{\mathrm{OUT}}、S、+\right|$的 h部分。

对于非磁性器件，使用 $\Gamma_H^{-1} = \Omega^2(ic)^{-1}$ 和$\Gamma_E^{-1} = i\epsilon(n_\perp)c^{-1}$，得到

$$\|\mathrm{OUT}\|^{-1}(L_xL_y)^{-1}\sum_{n_\perp} e^{-ip_\perp^{\mathrm{OUT}}n_\perp} \quad (64)$$
$$ic^3\Omega^2\left\langle p_\perp^{\mathrm{OUT,H}}\middle|T_H\right\rangle\langle T_H|\sigma_2\epsilon_2|T_E\rangle\epsilon_1^{-1}\langle T_E|\epsilon_1\sigma_2\left|p_\perp^{\mathrm{IN,H}}\right\rangle$$
$$e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}n_\perp}.$$

将被加数分解为 $\mathcal{Z}$ 因子和 XY 因子：在 OUT 端通过反向传播 $e^{-ip_\perp^{\mathrm{OUT}}n_\perp}|T_H\rangle$，见式 (62)；在输入端则使用 $|T_H\rangle e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}n_\perp} = \left|p^{\mathrm{IN}},{}_\perp{}^{\mathrm{H}}\right\rangle e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}n_\perp}$,

$$\|\mathrm{OUT}\|^{-1}(L_xL_y)^{-1}\sum_{n_\perp} e^{-ip_\perp^{\mathrm{OUT}}n_\perp}ic^3\Omega^2\left\langle p_\perp^{\mathrm{OUT,H}}\middle|p_\perp^{\mathrm{OUT,H}}\right\rangle$$
$$\langle T_H|\sigma_2\epsilon_2|T_E\rangle\epsilon_1^{-1}\langle T_E|\epsilon_1\sigma_2|T_H\rangle e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}n_\perp}. \quad (65)$$

对于这条路径，$\mathcal{Z}$ 因子为 $ic^3\Omega^2\left\langle p^{\mathrm{OUT},}{}_\perp{}^{\mathrm{H}}\middle|p^{\mathrm{OUT},}{}_\perp{}^{\mathrm{H}}\right\rangle$。对于其他路径，结果中同时包含变量 φ_z^{OUT}和 φ_z^{IN}。

对所有来自通道$_3$-SS偏振的8条路径都通用、因而定义了该通道的 XY 算符为

$$\mathrm{Operator\text{-}XY}_3^{SS} = \langle T_H|\sigma_2\epsilon_2|T_E\rangle\epsilon_1^{-1}\langle T_E|\epsilon_1\sigma_2|T_H\rangle. \quad (66)$$

一般情况下，XY 算符作用于输入相位 $e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}n_\perp}$ 后，会给出一个关于 $n_\perp$、$\chi(n_\perp)$的函数，该函数取决于 $\epsilon_1(n_\perp)$、$\epsilon_2(n_\perp)$和 $p_\perp^{\mathrm{IN}}$。这个函数$\chi(n_\perp)$包含了输入端相位通过整个非磁性介质传播直至 OUT 的信息。对于通道3 SS偏振，有

$$\mathrm{Operator\text{-}XY}_3^{SS}(e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}n_\perp}) = e^{ip_\perp^{\mathrm{IN}}n_\perp}\chi_3^{S^{OUT},S^{IN}}(n_\perp). \quad (67)$$

今后，为了使 $\chi(n_\perp)$的公式更加简洁，我们将交替使用 $p_x = p_x^{\mathrm{IN}}$和 $p_y = p_y^{\mathrm{IN}}$。不过，为避免混淆并能够区分输入端和 OUT 的相位，我们将在$p_\perp^{\mathrm{OUT}}$中保留 OUT 下标。

由（67）我们推导出 $p_\perp^{\mathrm{IN}}$对 χ函数的依赖关系。即，$\chi^{S^{OUT}}{}_{,3}{}^{S^{IN}}(n_\perp) = g_0 + g_1\cos(ap_x) +$

$g_2\cos(bp_y)+g_3\sin(ap_x)+g_4\sin(bp_y)+g_5\cos(ap_x-bp_y)+g_6\sin(ap_x-bp_y)$，其中 g_j与 $j=0\cdots6$是仅基于沉积在薄层上的非磁性材料构建的 $n_\perp$ 函数。例如

$$\begin{aligned} g_6 = &\frac{i\epsilon_1(n_x-1,n_y+1)\,\epsilon_2(n_x,n_y)}{a^2b^2\epsilon_1(n_x,n_y+1)} \\ &-\frac{i\epsilon_1(n_x+1,n_y-1)\,\epsilon_2(n_x,n_y)}{a^2b^2\epsilon_1(n_x+1,n_y)} \\ &+\frac{i\epsilon_1(n_x+1,n_y-1)\,\epsilon_2(n_x+1,n_y)}{a^2b^2\epsilon_1(n_x+1,n_y)} \\ &-\frac{i\epsilon_1(n_x-1,n_y+1)\,\epsilon_2(n_x,n_y+1)}{a^2b^2\epsilon_1(n_x,n_y+1)} \\ &+\frac{i\epsilon_2(n_x,n_y+1)}{a^2b^2}-\frac{i\epsilon_2(n_x+1,n_y)}{a^2b^2}, \end{aligned} \tag{68}$$

为明确起见，我们使用了简写记号 $n_x-1=an_x-a$、$n_y+1=bn_y+b$ 等。周期性边界条件和式（65）中的求和引入了 χ $n_\perp$ $q_\perp=p_\perp^{\mathrm{IN}}-p_\perp^{\mathrm{OUT}}\equiv p_\perp-p_\perp^{\mathrm{OUT}}$ ( ) 关于变量 的傅里叶变换，

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi}_3^{S^{OUT},S^{IN}}(q_\perp):= \\ &(L_xL_y)^{-1}\sum_{n_\perp}e^{iq_\perp\cdot n_\perp}\chi_3^{S^{OUT},S^{IN}}(n_\perp). \end{aligned} \tag{69}$$

由于 $\tilde{\chi}^{S^{OUT}}{}_{,3}$ $^{S^{IN}}(q_\perp)$ 对于来自通道3的所有路径都是相同的，接下来关注所有 $\mathcal{Z}_{\mathrm{paths}}$ 的总和。事实证明，对于所有通道，该总和可分解为简单项的乘积，每一项都是 either$\varphi_{z,\ \mathrm{IN}}$ 或 $\varphi_{z,\ \mathrm{OUT}}$ 的函数，但不会同时依赖二者。对于正在研究的示例

$$\sum_{\substack{\text{paths from}\\ \text{Channel 3}}}\mathcal{Z}_{\mathrm{path}}=ic\Omega^2\varphi_{z,\mathrm{IN}}\varphi_{z,\mathrm{OUT}}. \tag{70}$$

最后，我们得到通道3$_{S^{OUT,\ +},\ S^{IN,\ +}}$的贡献。方便的是，它是式（69）中的 $\tilde{\chi}_3$ 与通道 $\mathcal{Z}$-因子（71）的乘积

$$\mathcal{Z}_3^{\mathrm{OUT\ S+,IN\ S+}}=\|_{\mathrm{OUT}}\|^{-1}ic\Omega^2\varphi_{z,\mathrm{IN}}\varphi_{z,\mathrm{OUT}}. \tag{71}$$

对于从输入端 S偏振到 OUT S偏振的传播，主要结果是：传递矩阵元从对 729 条路径求和简化为对 5 个通道求和

$$T^{+,+}_{Sm,Sn}=\sum_{\mathrm{channel}=1}^{5}\mathcal{Z}^{\mathrm{OUT\ S+,IN\ S+}}_{\mathrm{channel}}\,\tilde{\chi}^{S^{OUT},S^{IN}}_{\mathrm{channel}}(q_\perp). \tag{72}$$

对布洛赫-弗洛凯指标 m和n 的依赖同时通过 $p_\perp$ 和 $q_\perp$ 体现。

XII. $\mathcal{Z}$ 与所有通道的 XY 因子

四种偏振组合（OUT/输入端，S/P）的 XY 通道算符如图 5 所示。这些算符与传播方向指标 $\pm$无关。输入端 S 到输出 S 的通道已在上文讨论。连接输入端 S 偏振与输出 P 的通道有 9 个。它们均以 $|T_E\rangle$ 开始，以$\langle T_H|$结束。在图 5 中，这些通道以绿色标示。将输入改为 P 偏振后，输入端 P 到输出 S 的传输有 5 个不同的通道。在图 5 中，这些通道以紫色标示。最后一种情况是输入端 P 到输出 P 的传输，共有 14 个通道，其中 13 个是这一偏振对独有的。在图 5 中，这些通道以黑色标示。与输入端 S 到输出 S 共用的那个非独有通道不依赖于 $(x,\ y)$，因此其 χ-函数为 1。

相比之下， $\mathcal{Z}$ 因子取决于传播方向。表 III 和附录 B 包含所有其他 $\mathcal{Z}$ 因子的相关信息。

表 III. OUT S−、输入端 S偏振− 的未归一化 $\mathcal{Z}$ 因子

(XY 算符)$_{\mathrm{No.}}$	$\mathcal{Z}(\mathrm{OUT}\ S-,\ \text{输入端}\ S-)\ \|_{\mathrm{OUT}}\|$
$(1)_1$	$\frac{i\langle p_\perp^{\mathrm{OUT}}\|p_\perp^{\mathrm{OUT}}\rangle\left(\left(\Omega^2\varphi_{z,\mathrm{OUT}+1}\right)^2-\varphi_{z,\mathrm{OUT}}^2\right)}{c\varphi_{z,\ \mathrm{OUT}}^4}\delta_{\mathrm{IN,OUT}}$
$(\langle T_H\|\,\epsilon_1\,\|T_H\rangle)_2$	$-\frac{i\Omega^2\ \left(\Omega^2\varphi_{z,\ \mathrm{OUT}+1}\right)}{c\varphi_{z,\text{输入端}}{}^2_{\varphi_z,\mathrm{OUT}}}$
$(\langle T_H\|\,\sigma_2\epsilon_2\,\|T_{\mathrm{E}}\rangle\,\epsilon_1^{-1}\,\langle T_{\mathrm{E}}\|\,\epsilon_1\sigma_2\,\|T_H\rangle)_3$	$-\frac{ic\Omega^2}{\varphi_{z,\ \text{输入端}}\varphi_{z,\ \mathrm{OUT}}}$
$(\langle T_H\|\,\epsilon_2\epsilon_1\,\|T_H\rangle)_4$	$\frac{i\Omega^4}{c\varphi_{z,\mathrm{IN}}\varphi_{z,\mathrm{OUT}}}$
$(\langle T_H\|\,\epsilon_2\,\|T_H\rangle)_5$	$-\frac{i\Omega^2\ \left(\Omega^2\varphi_{z,\ \text{输入端}+1}\right)}{c\varphi_{z,\ \text{输入端}}{}^2_{\varphi_z,\ \mathrm{OUT}}}$

a 通道编号是 XY 算符的序号。此处$1-2\varphi_z+\Omega^2\varphi_z+\varphi_z^2=c^2\varphi_z\,\langle p_\perp|p_\perp\rangle$ 和 $\delta_{\mathrm{IN,OUT}}$ 是克罗内克 δ。

获得其他方向的 $\mathcal{Z}$-因子的规则是将输入端− 改为输入端+ ，同时将$\varphi_{\mathrm{z,IN}}\ \to\ \varphi^{-1}{}_{\mathrm{z,IN}}$ 和 $c\ \to\ -c$进行更改。同样的规则也适用于将 OUT−改为 OUT+。

然而，对于通道 1，该规则不适用，无论是 SS 还是 PP，见附录 B 、表 VII 、 IX。原因是，在真空中，存在无法相互传播的偏振和方向组合。例如，在真空中，输入端 S+ 无法传播到 OUT S−。相比之下，通道 1 在真空中是开放的，因此该规则不适用于它。

至此，已针对任意非磁性双层晶格结构计算出传递矩阵元的闭式解析公式。该解完全具有普适性，适用于可在两层薄层上绘制的复杂非磁性材料图案。

按通道分解传播同样可以应用于三个或更多具有图案的薄层。通道数量会随着薄层数量的增加而增加，但该过程仍然

相同。

回到双层结构，一个值得探索的方向是取 x 和 y 尺寸的连续介质极限。在此极限下，布洛赫-弗洛凯模式的数量变为无限多，从而凸显了我们通过规避无限维传递矩阵、直接获取传递矩阵元的方法的价值。

表IV。介电函数（f_1，f_2）

通道	f_1，f_2
$\chi_3^{S^{OUT},S^{IN}}$	$f_1=\ln(\epsilon)$ $f_2=\epsilon$
$\chi_2^{P^{OUT},\ S^{IN}}$	$f_1=\epsilon, f_2=\epsilon^{-1}$
$\chi_7^{P^{OUT}\ P^{IN}}$	$f_1=\epsilon^{-1}$，$f_2=1$ 和 $f_1=\epsilon^{-1}$，$f_2=\ln(\epsilon)$

a 某些通道（例如此表中的 χ_7 ）会使用多组介电函数。

XIII. a，$b\to 0$的连续介质极限

注意，离散晶格常数 a 和 b 远小于 c（即z轴上的离散晶格常数）。在这种情况下，$n_\perp$ 会转换为连续的 $r_\perp$坐标，使得对于 $a\to 0$ 和 $L_x\to\infty$，晶胞长度为 $l_x=\lim(aL_x)$。l_y也同样如此。然而，z轴仍保持离散。在连续的 x、y 极限下，离散的 $\chi^{S^{OUT}\ ,\ 3\ \ \ S^{IN}}(n_\perp)$（67）是 $(x,\ y)$ 的函数。

$$\begin{aligned}&\chi_3^{\mathrm{InS,OutS}}(x,y,p_x,p_y)=\\&p_x\left(i(\partial_{yy}\ln\epsilon_1)(\partial_x\epsilon_2)-i(\partial_{xy}\ln\epsilon_1)(\partial_y\epsilon_2)\right)+\\&p_y\left(i(\partial_{xx}\ln\epsilon_1)(\partial_y\epsilon_2)-i(\partial_{xy}\ln\epsilon_1)(\partial_x\epsilon_2)\right)+\\&p_x^2(\partial_y\ln\epsilon_1)(\partial_y\epsilon_2)+\\&p_xp_y\left(-(\partial_x\ln\epsilon_1)(\partial_y\epsilon_2)-(\partial_y\ln\epsilon_1)(\partial_x\epsilon_2)\right)+\\&p_y^2\left((\partial_x\ln\epsilon_1)(\partial_x\epsilon_2)\right).\end{aligned}\tag{73}$$

式（73）对 p_x、p_y 的依赖是二次的。回想 $p_\perp=p_\perp^{\mathrm{IN}}$。这个二次多项式的每个系数都是介电常数偏导数的组合，见图6。我们特意将这些系数写成若干项之和，其中每一项都是某个关于 ϵ_1 的函数的偏导数与另一个仅取决于 ϵ_2 的函数的乘积。这种特定的排列方式对于获得多边形镶嵌图案的傅里叶积分的闭式公式至关重要，后文将对此展开讨论。除了在技术上具有实用价值外，这种排列方式还具有另一层意义。它揭示出，介电常数对一个通道的贡献是通过函数对（f_1、f_2）实现的，其中 f_1 和 f_2 分别仅作用于 ϵ_1 和 ϵ_2。由（73）可得 $f_1(\epsilon_1)=\ln(\epsilon_1)$ 和 $f_2(\epsilon_2)=\epsilon_2$。对于 33 个通道中的每一个通道，都可以从图6和附录 B 中直接得到这些函数。它们要么是 $f(\epsilon)=\epsilon$、ϵ^{-1}、$\ln(\epsilon)$，要么是常数 1。除以下 7 个通道 $\chi_4^{P^{OUT}\ S^{IN}}$、$\chi_3^{S^{OUT}\ P^{IN}}$、$\chi_4^{P^{OUT}\ P^{IN}}$、$\chi_7^{P^{OUT}\ P^{IN}}$、$\chi_{13}^{P^{OUT}\ P^{IN}}$、$\chi_8^{P^{OUT}\ P^{IN}}$、$\chi_9^{P^{OUT}\ P^{IN}}$ 外，全部 33 个通道均使用一个函数对（f_1、f_2）。通道 $\chi_8^{P^{OUT}\ P^{IN}}$ 涉及 3 个函数对，而例外通道中的另外 6 个通道使用 2 个函数对。表 IV 给出了一些示例。这些依赖通道的介电函数对于双层结构是通用的；具有相同几何结构的器件之间的差异，则由其自变量 ϵ_1 和 ϵ_2 的具体取值体现。值得注意的是，对于给定的输入-输出偏振对，函数集合对于某个通道而言是唯一确定的。因此，可以利用这一性质来命名通道。例如，图6中的通道3可以命名为 $\mathrm{SS}(\ln(x)\ \ x)$。

XIV. C 缩放

一旦将 z轴方向离散性的影响 c 体现到晶胞的缩放中，传递矩阵元就会变得更加简单

$$x=cx',y=cy'.\tag{74}$$

频率已在（34）中进行了 c 缩放。所有参数都变为 c 缩放形式 $l_{x/y}=cl'_{x/y}$ $p_{x/y}=c^{-1}p'_{x/y}$。对一个 χ 通道函数进行 c 缩放，相当于将其乘以缩放参数 c的某次幂。例如，对（73）进行 c 缩放的效果为

$$\chi_3^{\mathrm{InS,OutS}}(x,y,p_x,p_y)=c^{-4}\chi_3^{\mathrm{InS,OutS}}(x',y',p'_x,p'_y).\tag{75}$$

在连续体的（x，y）平面中，离散傅里叶变换变为积分，如（ab）/（（aL_x）（bL_y））$\to$（$dx\,dy$）/（l_xl_y）。在缩放后的变量中，χ 通道函数的傅里叶变换

$$(l'_xl'_y)^{-1}\int_0^{l'_x}dx'\int_0^{l'_y}dy'\ e^{iq'_xx'}e^{iq'_yy'}\chi(x',y',p'_x,p'_y)\tag{76}$$

是 $q'_\perp=p'_{\text{输入端}}-p'_{\mathrm{OUT}\perp}$ 的函数，其中 $p'_{\text{输入端/OUT}}=2\pi\left(M^{\mathrm{IN/OUT}}_{x/y}+\xi_{x/y}\right)(l'_{x/y})^{-1}$，且 $2\pi\xi_x/l'_x$ 和 $2\pi\xi_y/l'_y$ 分别等于 Ω sin（θ）cos（ϕ）和 Ω sin（θ）sin（ϕ）。

对于 $\mathcal{Z}$因子，c 缩放出现在 φ_z的辐角中

$$\varphi_{z,\mathrm{IN}}=\varphi_z\left(1-2^{-1}\Omega^2+2^{-1}\left(p'^2_x+p'^2_y\right)\right).\tag{77}$$

对于$\varphi_{z,\ \mathrm{OUT}}$ 该辐角包含 $p'_{\mathrm{OUT}\perp}$。下面，我们省略经 c 缩放的参数的撇号记号，并约定所有变量均已进行 c 缩放。缩放的优势在于，来自 χ 的 c-单项式及其对应的 $\mathcal{Z}$-因子相互抵消，从而得到一个与 c 无关的通道公式。

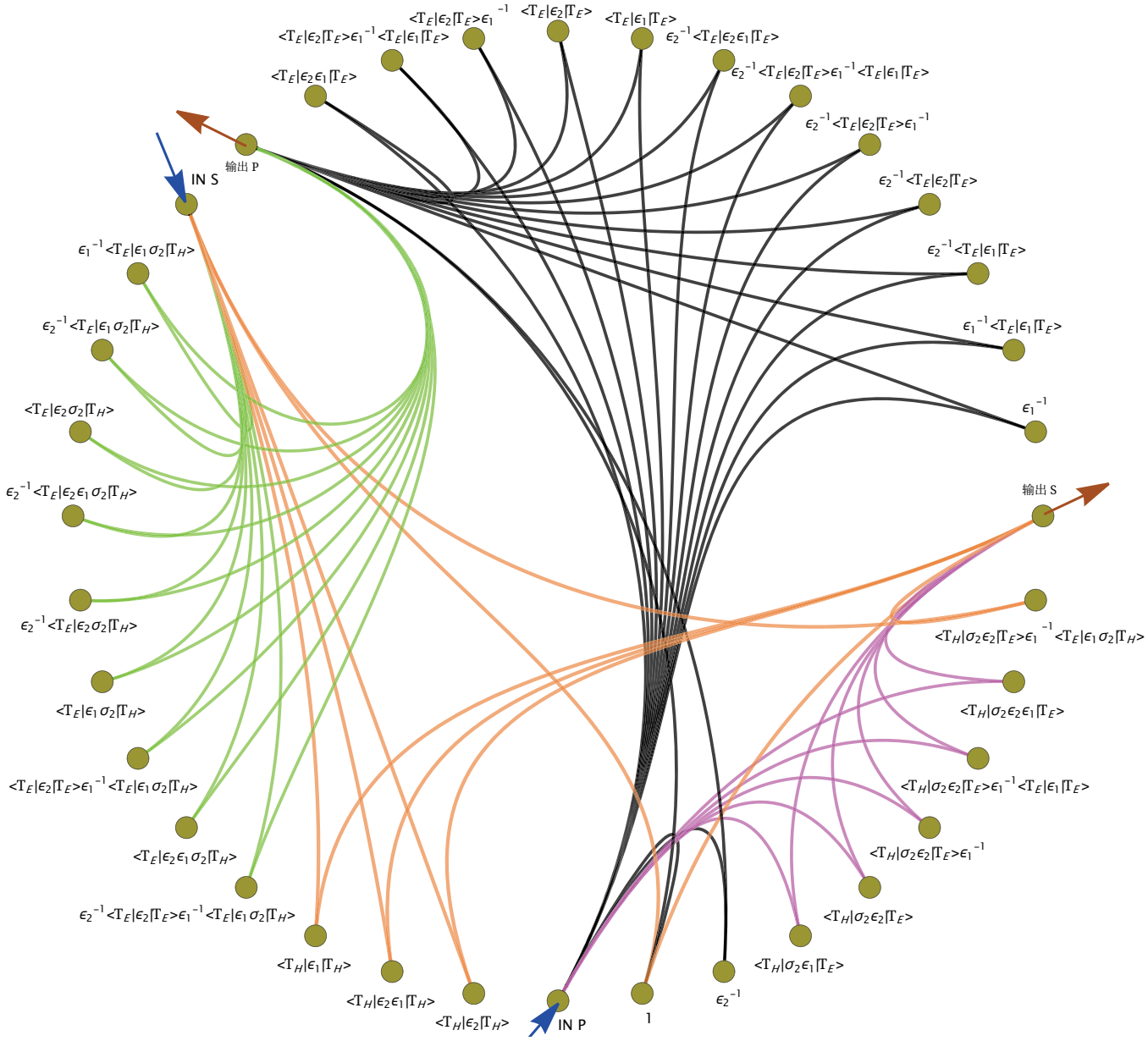

图 5. 从 729 条路径中筛选出 32 个通道，用于将输入场传输到输出。并非所有 32 个通道都对每一对偏振开放。要使用此图，请选择一个输入端，即 InS 或 InP。然后沿着一条连接该输入端与圆盘的线前进，圆盘代表一个通道。从圆盘出发，沿着其中一条延伸至所选输出端的线前进。圆盘以定义该通道的 (x, y)-因子标记。

XV. 多边形镶嵌图案

在 xy 连续极限下，传递矩阵元此时归结为计算定义在晶胞上的函数的二维傅里叶变换。为了推进寻找解析闭式公式的工作，我们证明，在一般情况下，所有通道的傅里叶变换都可以针对多边形子域完全求解。一般公式所采用的方法和记号将通过图 7 所示的一个图案加以说明，我们将其称为 π-π-rig。

晶胞是一个正方形，其角点位于（$\pm\pi$，$\pm\pi$），长度单位经过选择，以适用于所需频带。晶胞内有一个内正方形。图 7 展示了两个内正方形，一个位于平面 1 上，另一个位于平面 2 上，两者均在图 4 中定义。为给内正方形的相关信息留出空间，图 7 中未显示晶胞的角点。前景中的平面 2 上的正方形，其顶点标记为$B_{i,\ j}$, $i = \pm 1$，$j = \pm 1$，位于（$\pm\pi/2$，$\pm\pi/2$）。背景中的平面 1 上的正方形，顶点为 $A_{i,\ j}$，逆时针旋转了角度 α。对于 $\alpha = 0$,

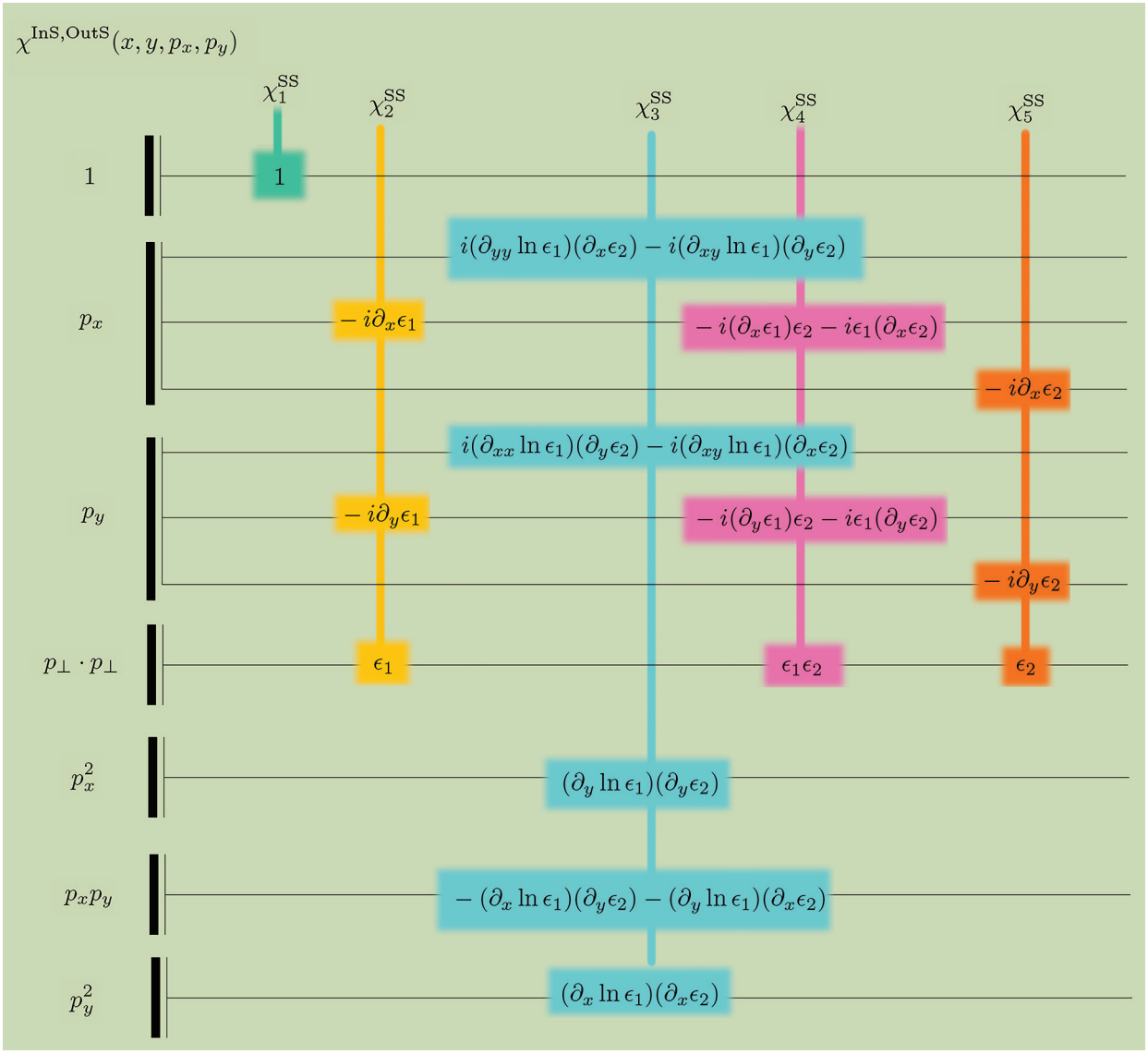

图 6。IN S OUT S 通道。InS 到 OutS 有 5 个通道。水平支架承载 p_x 和 p_y中的多项式项。图中的垂直结构展示了每个通道的组成，即将 p_x 和 p_y 中的多项式项与其对应的介电函数相乘。请注意， p_x 和 p_y 表示输入值，不过为简便起见，它们没有带有 IN 索引。第三列对应公式（73）。附录 B 包含其他所有偏振对的 χ-函数。

两个正方形的顶点重合。图 7 中有两类点。来自平面 1 和平面 2 的点，例如 $A_{i,\,j}$ 和 $B_{i,\,j}$ ，分别称为实点。相反，那些作为交点出现的点，例如D_1、原点 O 和 Δ_1，称为虚点。所有实点和虚点都与一组单位向量相关联。以原点 O 为例，有四条线段从 O 出发。其中一条是线段 $\mathrm{OA}^{1,1}$ ，其上有一个单位向量，在图 7 中记作 $\hat{}\mu_1$ 。然后，$\hat{}\mu_2$、$\hat{}\mu_3$ 和$\hat{}\mu_4$ 分别沿着 $\mathrm{OB}^{1,1,}$ 、$\mathrm{OA}_{-1,\ -1}$ 和 $\mathrm{OB}_{-1,\ -1}$。这些单位向量的所有尾端都位于点 O。从同一点 O 出发，还有另一组四个单位向量，$\hat{}\,\lambda_i$、 $i=1$、.....、4 $\hat{}$，使得每一对（λ_i，$\hat{}\mu_i$）都相互正交，并且

$\hat{}$ 每个三元组（λ_i，$\hat{}\mu_i$，$\hat{}z$）均朝向右侧。最后一个几何参数与频带的选择有关，例如以吉赫或 THz 表示的频带；该选择分别将器件的单位缩放为毫米或 μm。相对于该长度单位，我们定义无量纲厚度参数 t

$$t = [1\ \mathrm{unit}](c\ [\mathrm{unit}])^{-1}. \tag{78}$$

尽管频率 ω 和尺寸 l_x，l_y 在所选单位中是固定的，但经 c 缩放的参数会随 t 变化。随着薄层变得更薄，缩放后的晶胞（l_x'，l_y'）和探测波长 λ' 变得更大，$\lambda' = t\frac{\lambda\ [\text{单位1}]}{[\quad\text{单位}]}$，而探测频率 Ω 则移向更低的区域，$\Omega = 2\pi\lambda'^{-1}$。

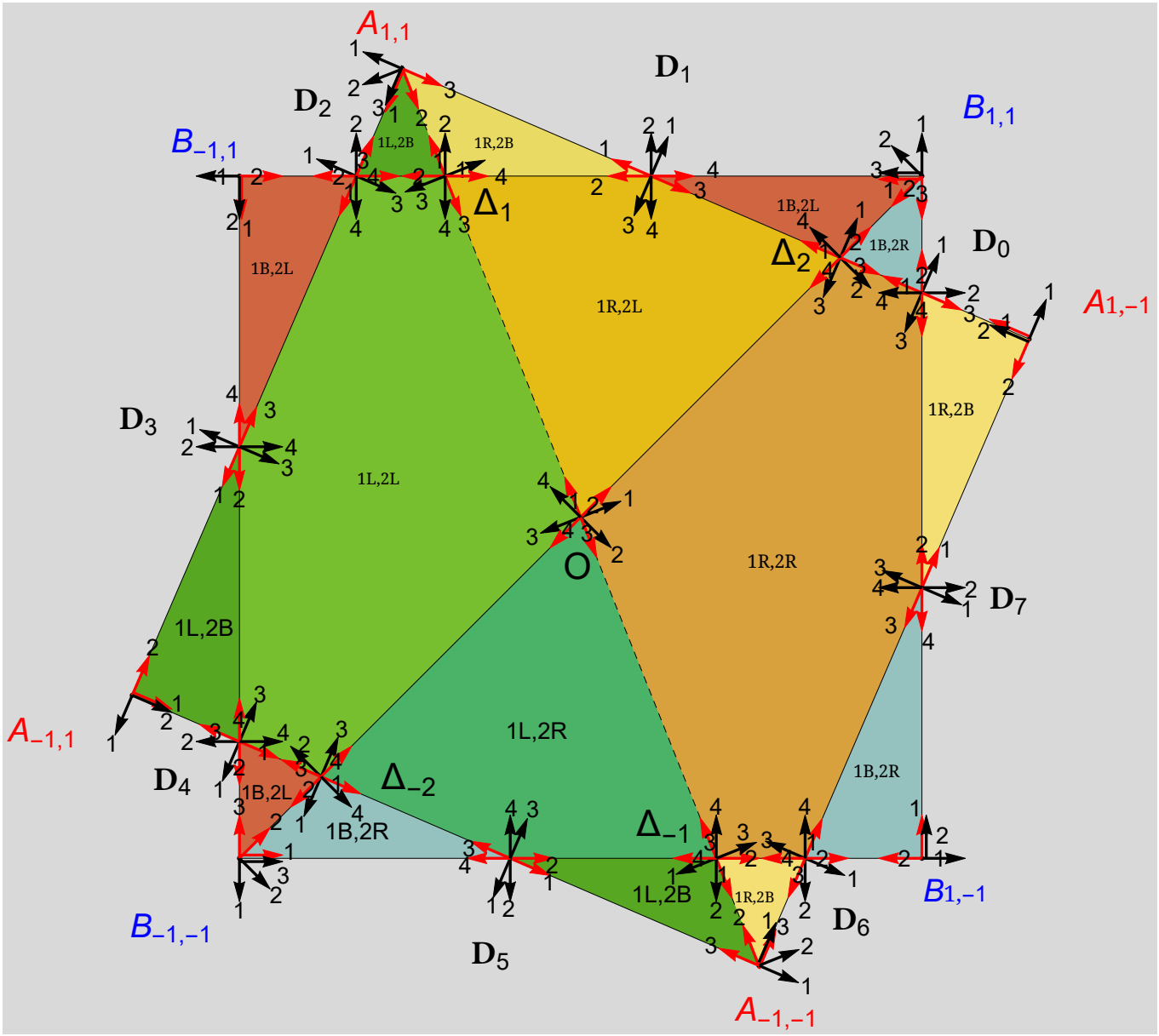

图 7。 π-π构型。为与图4对应，标记为 A 和 B 的点分别属于平面 1 和平面 2。$\hat{z}$轴垂直纸面向外，$\hat{x}$ 的方向为从 $B_{-1,-1}$ 指向 $B_{1,-1}$。V_1 型和 V_2型的实点分别为 $A_{i,j}$ 以及 $B_{i,j}$, $i = \pm 1, j = \pm 1$。位于来自薄层 1 的一条线段与来自薄层 2 的另一条线段交点处的虚点 V_{12} 为 $D_m, m = 0, \cdots$、7、 $\Delta_n, n = \pm 1, \pm 2$ 以及原点 O。这里 $\alpha > 0$，因此$A_{1,1}$相对于其在$B_{1,1}$顶部的位置逆时针旋转了 $\alpha = 0$。黑色箭头表示$\hat{\lambda}$向量，红色箭头表示$\hat{\mu}$向量。介电常数 $\epsilon_{1\mathrm{L}}$ 标注在左侧三角形（$A_{1,1}$,$A_{-1,1}$,$A_{-1,-1}$）上，而 $\epsilon_{1\mathrm{R}}$ 标注在右侧三角形（$A_{1,-1}$,$A_{1,1}$, $A_{-1,-1}$）上，二者均位于薄层 1。薄层 2 同理，其中 $\epsilon_{2\mathrm{L}}$ 和 $\epsilon_{2\mathrm{R}}$ 分别标记相对于对角线$B_{-1,-1}B_{1,1}$而言的左侧和右侧三角形。在内部正方形之外、晶胞边界以内的区域，背景介电常数 $\epsilon_{1\mathrm{B}}$ 标注在薄层 1 上， $\epsilon_{2\mathrm{B}}$ 标注在薄层 2 上。每个多边形的颜色和标签表示将晶胞分解为若干多边形，而这些多边形携带乘积 $\epsilon_1\epsilon_2$的恒定值。晶胞的角点未在图中表示，它们各自具有独立的（$\hat{\lambda}, \hat{\mu}$）对。

缩放后晶胞的增大会重新定位顶点的坐标，但不会改变单位向量 $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$。

所有点（真实点和虚拟点）的坐标、所有单位向量的定向以及厚度参数的选取共同构成几何数据用于计算任意多边形镶嵌的傅里叶变换。其他数据来自多边形线段上的介电常数跃变。例如，对于图 7 中的点 O，相对介电常数组$\hat{}$ ($\epsilon_{1\mathrm{R}}$, $\epsilon_{2\mathrm{L}}$) 位于 λ_1 的尖端一侧，即沿 $\hat{\mu}_1$ 观察时的右侧。相对介电常数组 ($\epsilon_{1\mathrm{L}}$, $\epsilon_{2\mathrm{L}}$) 位于

ˆ λ_1 的尾端一侧，即 ˆμ_1 的左侧。当我们沿 λ_1 的方向行进，在点 O 稍上方穿过 ˆμ_1ˆ 时，相对介电常数的变化会引入一个跃变

$$(\Delta f_1 f_2)_{\mathrm{O},\hat{\mu}_1} = f_1(\epsilon_{1\mathrm{R}}) f_2(\epsilon_{2\mathrm{L}}) - f_1(\epsilon_{1\mathrm{L}}) f_2(\epsilon_{2\mathrm{L}}), \quad (79)$$

其中，(f_1， f_2) 是表 IV 中的通道特定介电函数对。

χ 通道函数的傅里叶变换包含几何构型和介电常数跃变。在式 (80) 中，我们以 OutS、InS 的第三个通道，以及特定情形 $q_\perp \cdot \hat{}\mu \neq 0$ （对所有 ˆμ）为例，展示傅里叶变换 $\mathcal{F}(\chi)$ 的结果，

$$\sum_{(V_{12},\hat{\mu})} e^{i(q_\perp \cdot V_{12})_2} (p_\perp \cdot \hat{\mu}_1)(p_\perp \cdot \hat{\mu}_2) \left(\frac{q_\perp \cdot \hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1 \cdot \hat{\lambda}_2}\right) \left(\frac{q_\perp \cdot \hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2 \cdot \hat{\lambda}_1}\right)$$
$$\Delta(\epsilon_2 \ln \epsilon_1)_{\hat{\mu}} \frac{W \cdot \hat{\lambda}}{W \cdot q_\perp} \frac{1}{q_\perp \cdot \hat{\mu}} -$$
$$\sum_{(V_{12},\hat{\mu})} e^{i(q_\perp \cdot V_{12})_3} (p_\perp \cdot \hat{\mu}_1)(\hat{\mu}_1 \cdot \hat{\lambda}_2) \left(\frac{q_\perp \cdot \hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1 \cdot \hat{\lambda}_2}\right)^2 \left(\frac{q_\perp \cdot \hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2 \cdot \hat{\lambda}_1}\right)$$
$$\Delta(\epsilon_2 \ln \epsilon_1)_{\hat{\mu}} \frac{W \cdot \hat{\lambda}}{W \cdot q_\perp} \frac{1}{q_\perp \cdot \hat{\mu}}. \quad (80)$$

对于图 7 中的每个虚拟顶点 V_{12}，求和涵盖与之关联的全部四个 ˆμ'。下标 1 和 2 分别指来自平面 1 和平面 2 的直线。在此公式中，我们可以从离开 V_{12} 的所有四种可能配对中，任选一对沿直线 1 和直线 2 的单位向量 (ˆμ_1，ˆμ_2)。结果与所选配对无关，因为各项在变换 ˆ$\mu_1 \to -\hat{}\mu_1$ 或 ˆ$\mu_2 \to -\hat{}\mu_2$ 下保持不变。

式（80）中的傅里叶变换取决于 $p_\perp$，即 $p_\perp^{\mathrm{IN}}$，因为通道的 χ 函数（73）取决于它。此外，该变换自然也是 $q_\perp$ 的函数，见（76）。（80）中的第一项求和以点积形式呈现了对 $p_\perp$ 的二次依赖，这种形式在（x， y）坐标系旋转下保持不变。第二项求和也呈现出不变形式，其中包含对 $p_\perp$ 的线性依赖。在此公式中，变量 $q_\perp$，$p_\perp$和 V_{12} 经过 c 缩放，并取决于厚度参数 t。正如我们此前所述，我们不再使用带撇号的符号（74）。下一节将给出傅里叶变换的结果，证明留在附录 D 至 H 中。

XVI. χ− 通道函数的傅里叶变换

根据导数 $m^1 = (m_x^1,\ m_y^1)$ 和$m^2 = (m_x^2,\ m_y^2)$ 是否为零点，我们在晶胞上会遇到四类积分

(00). $\iint dxdy(f_1)(f_2)e^{q_\perp \cdot r_\perp}, m^1 = 0, m^2 = 0,$

(10). $\iint dxdy(\partial_{m^1} f_1)(f_2)e^{q_\perp \cdot r_\perp},\ m^1 \neq 0, m^2 = 0,$

(01). $\iint dxdy(f_1)(\partial_{m^2} f_2)e^{q_\perp \cdot r_\perp},\ m^1 = 0, m^2 \neq 0,$

(11). $\iint dxdy(\partial_{m^1} f_1)(\partial_{m^2} f_2)e^{q_\perp \cdot r_\perp},\ m^1 \neq 0, m^2 \neq 0.$

(00) 有三种情况，这取决于由向量集合 ˆμ 表示的器件几何结构与模散射向量$q_\perp$之间的关系。对于情况（1），$q_\perp \cdot \hat{}\mu \neq 0$。情况（2）包括 $q_\perp \cdot \hat{}\mu =\hat{} 0$ 和 $q_\perp \neq 0$，这意味着 $q_\perp = \pm\lambda|q_\perp|$。最后，对于（3），$q_\perp = 0$。

（81）和（82）中关于（00）的公式，特意写成由每一对（V，ˆμ）分别贡献的项之和。这类似于势理论，只有曲线的端点会产生贡献。此外，同样令人联想到势理论的是，解中出现了规范向量。所有配对（V，ˆμ）所对应的规范向量都相同，其任意性有助于消除分母中可能出现的所有奇异性。这些规范向量记为 W 和 $\mathcal{D}$，可任意选取，但须满足 $W \cdot q_\perp \neq 0$ 和 $\mathcal{D} \cdot \hat{}\mu \neq 0$。当向量 ˆ$\mu$ 沿着 λ移动时，ϵ中的跳变由（$\Delta f_1 f_2$）$\hat{\mu}$表示，如（79）所示。

在晶胞外部，我们放置带有$\epsilon = 0$ 的虚拟材料，以便对于 (00) 积分，获得由晶胞边界产生的正确项。

对于情形 (1) 和 (2)，晶胞多边形镶嵌的 (00) 积分公式为

$$\iint dxdy(f_1 f_2)e^{iq_\perp \cdot r_\perp} = \quad (81)$$
$$\sum_{V,\hat{\mu}} e^{iq_\perp \cdot V} \frac{1}{q_\perp \cdot \hat{\mu}} \frac{W \cdot \hat{\lambda}}{W \cdot q_\perp} (-\Delta(f_1 f_2))_{\hat{\mu}} +$$
$$\sum_{V,\hat{\mu}} e^{iq_\perp \cdot V} (i\hat{\mu} \cdot V) \frac{W \cdot \hat{\lambda}}{W \cdot q_\perp} (-\Delta(f_1 f_2))_{\hat{\mu}}.$$

第一项和第二项分别适用于情形 (1) 和 (2)。对于情形 (3) 中的 (00)，我们需要使用两个规范向量。W 与之前相同，而 $\mathcal{D}$是该情形特有的，它来自对 $q_\perp = s\mathcal{D}$取$s \to 0$ 的极限。正如附录 E 中所证明的，该公式与 $\mathcal{D}$的选择无关

$$\iint dxdy(f_1 f_2) = \quad (82)$$
$$\sum_{V,\hat{\mu}} \frac{1}{2} (i\mathcal{D} \cdot V)^2 \frac{1}{\mathcal{D} \cdot \hat{\mu}} \frac{W \cdot \hat{\lambda}}{W \cdot \mathcal{D}} (-\Delta(f_1 f_2))_{\hat{\mu}}.$$

我们特意将 (00) 傅里叶变换写成顶点贡献之和。这种形式可以一致地延续到后续的积分 (01)、(1,0) 和 (1,1) 中。(00) 积分也出现在其他文献 [35],[36], 中，但在那里是对多边形各边求和。

对于下文的公式，我们只列出一对 (V，ˆμ) 的贡献，求和约定不再赘述。

XVII. (01)、(10) 和 (11) 型导数乘积的傅里叶变换

现在利用 (00) 情形的结果，生成至少有一个函数受到导数作用的积分。该过程分为两步。第一步是计算

$$\iint dxdy f_1(r_\perp+\delta r_1)f_2(r_\perp+\delta r_2)e^{iq_\perp\cdot r_\perp} = \mathrm{Int}(\delta x_1,\delta y_1,\delta x_2,\delta y_2) \tag{83}$$

作为平面 1 和平面 2 上两个独立平移 δr_1 和δr_2的函数，分别表示。这些平移会改变顶点 V 的位置

$$V_{\text{translated}} = V - \vec{\tau}^1_x\delta x_1 - \vec{\tau}^1_y\delta y_1 - \vec{\tau}^2_x\delta x_2 - \vec{\tau}^2_y\delta y_2. \tag{84}$$

四个向量 $\vec{\tau}$取决于顶点 V 所经历的是自由平移还是约束平移，后文将对此进行定义。如果顶点与自由平移相关，则有 $\vec{\tau}^1_x = \vec{\tau}^2_x = \hat{}x$ 和 $\vec{\tau}^1_y = \vec{\tau}^2_y = \hat{}y$。位于来自不同平面的两条直线交点处、并经历约束平移的顶点，将移动到

$$(V_{12})_{\text{translated}} = V_{12} - \frac{\delta r_1\cdot\hat{\lambda}_1}{\hat{\mu}_2\cdot\hat{\lambda}_1}\hat{\mu}_2 - \frac{\delta r_2\cdot\hat{\lambda}_2}{\hat{\mu}_1\cdot\hat{\lambda}_2}\hat{\mu}_1, \tag{85}$$

其中，$\hat{}\mu_1$ 和$\hat{}\mu_2$ 分别表示位于平面 1 和平面 2 上的两条相交直线的方向。对于约束平移，可从（85）中提取向量 $\vec{\tau}^1$ 和 $\vec{\tau}^2$ 。下文中，我们将完全位于平面 1 或平面 2 中的顶点 V_1 和 V_2 分别与自由平移相关联。对于 aV_1 型顶点，有 $\vec{\tau}^2 = 0$；反之，对于 V_2 型顶点，则为 $\vec{\tau}^1 = 0$。虚拟顶点 V_{12} 与约束平移相关联。集合 V_1、V_2 和 V_{12} 示例见图 7。

第二步，得到函数 Int(δx_1，δy_1，δx_2，δy_2) 后，通过求其导数来计算其余积分

$$\iint dxdy\left(\partial_x^{m^1_x}\partial_y^{m^1_y}f_1(r_\perp)\right)\left(\partial_x^{m^2_x}\partial_y^{m^2_y}f_2(r_\perp)\right)e^{iq_\perp\cdot r_\perp} = \partial^{m^1_x}_{\delta x_1}\partial^{m^1_y}_{\delta y_1}\partial^{m^2_x}_{\delta x_2}\partial^{m^2_y}_{\delta y_2}\mathrm{Int} \tag{86}$$

在 δx_j，$\delta y_j = 0, j = 1$，2 处。结果列于下文，详细内容见附录 D 至 H。

与（00）积分不同，这里的晶胞边界不会产生任何项，因为介电函数的导数在晶胞边界处为零。

For $m^1 + m^2 \neq 0$ and case (1), $q_\perp\cdot\hat{\mu} \neq 0$, the contri-（$V$,$\hat{}\mu$）的贡献为

$$e^{i(q_\perp\cdot V)}\ (-iq_\perp\cdot\vec{\tau}^1_x)^{m^1_x}(-iq_\perp\cdot\vec{\tau}^1_y)^{m^1_y} (-iq_\perp\cdot\vec{\tau}^2_x)^{m^2_x}(-iq_\perp\cdot\vec{\tau}^2_y)^{m^2_y} \frac{1}{q_\perp\cdot\hat{\mu}}\ \frac{W\cdot\hat{\lambda}}{W\cdot q_\perp}(-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}}). \tag{87}$$

对于情形 (2)，$q_\perp\cdot\hat{}\mu = 0$，($V$，$\hat{}\mu$) 的贡献为

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} e^{i(q_\perp+s\hat{\mu})\cdot V)}\ (-i(q_\perp+s\hat{\mu})\cdot\vec{\tau}^1_x)^{m^1_x} (-i(q_\perp+s\hat{\mu})\cdot\vec{\tau}^1_y)^{m^1_y}(-i(q_\perp+s\hat{\mu})\cdot\vec{\tau}^2_x)^{m^2_x} (-i(q_\perp+s\hat{\mu})\cdot\vec{\tau}^2_y)^{m^2_y}\frac{W\cdot\hat{\lambda}}{W\cdot q_\perp}(-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}}). \tag{88}$$

对于情形 (3)，$q_\perp = 0$，(V，$\hat{}\mu$) 的贡献为

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} e^{i(s\mathcal{D}\cdot V)}s^{m^1_x+m^1_y+m^2_x+m^2_2} (-i\mathcal{D}\cdot\vec{\tau}^1_x)^{m^1_x}(-i\mathcal{D}\cdot\vec{\tau}^1_y)^{m^1_y}(-i\mathcal{D}\cdot\vec{\tau}^2_x)^{m^2_x} (-i\mathcal{D}\cdot\vec{\tau}^2_y)^{m^2_y}\frac{W\cdot\hat{\lambda}}{W\cdot\mathcal{D}}(-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}}). \tag{89}$$

至此，已完全求解沿 x 和 y 方向连续的多边形镶嵌双层非磁性结构的传递矩阵。我们将通过比较 π-π-rig 结构的闭式解析公式与高性能分析软件包 [37] 得出的数值结果，来检验理论结果。复杂符号计算由 [38] 完成。

XVIII. 通过优化设计实现的倏逝共振模式

目标是对图 7 中的介电结构进行设计优化，使得在指定频率下，一部分倏逝的 Bloch-Floquet 模式（M_x, M_y）$\neq 0$ 获得较大的散射矩阵元。这样的受激共振模会沿平面（x, y）传播，其频率低于瑞利频率。具体而言，在所研究的 37 GHz 至 50 GHz 频率范围内，优化函数基于四种模式。其中两种模式 (0,0) 和 (−1,0) 可以传播，另外两种模式 (0, ±1) 为倏逝模式。目标是找到一组介电常数，使模式 (0, ±1) 发生共振。为激发共振模，来自 z-min 的平面波 (0,0) 以 $\theta = 17.5°$ 和 $\varphi = 0°$ 的角度入射到定向为 $\alpha = 45°$ 的 π-π 结构的 A 面上。两个薄层的厚度均为 $c = 0.25$ 毫米。设计目标函数由传递矩阵元的解析公式构建，用于在六维介电空间 $\epsilon_{1\mathrm{B}} = 4.99$、$\epsilon_{2\mathrm{B}} = 2.96$、$\epsilon_{1\mathrm{L}} = 7.60$、$\epsilon_{2\mathrm{L}} = 5.66$、$\epsilon_{1\mathrm{R}} = 5.93$ 和 $\epsilon_{2\mathrm{R}} = 1.63$ 中选取一个点。

从技术上讲，这个点可能不容易实现，尽管我们将介电常数限制在小于 12。不过，我们将重点研究解析解所给出的预测，并将其与高性能软件包得出的数值结果进行比较。

这些预测分为三类。第一类受拓扑光子学启发，关注共振模相对于介电常数变化的稳健性，并将其量化为从实数到整数的映射。第二类基于共振频率识别，而第三类则聚焦于高Q因子，并利用复频率平面估计共振模的Fano-Lorentz光谱线形。下文中，我们将范围限定为由(0，0) S偏振入射波激发的倏逝的S偏振共振波。下面仅介绍主要结果，关于设计优化的具体细节总结于附录I中。

XIX. 从实数到整数的映射

散射矩阵元中的共振表现为 T^{-}，$-$ 矩阵行列式的零点，即式(51)。最小的 T^{-}，$-$ 矩阵可简化为矩阵元 T^{-}，Sm^{-}，Sm，其零点给出共振频率的第一近似。为说明这一点，取一个仅由集合 $T^{\pm}$，$Sm^{\pm}$，Sm 构成的 2×2 传递矩阵，并将模式 Sm 的共振视为一个奇异点：当除(DIR,POL,BF)=(+,S,m)和(dir,pol,bf)=(–,S,m)之外的所有系数均为零时，式(49)存在非零解。事实证明，这一简单近似具有预测能力。随着介电常数取值的变化，T^{-}，Sm^{-}，Sm 的零点会出现或消失，从而产生或消除共振。我们研究变量 $\epsilon_{1\mathrm{B}} = \epsilon_{2\mathrm{B}}$从1变化到 ∞时的这一现象，同时将其余介电常数保持在优化值。

因此，将 $\epsilon_{1\mathrm{B}} = \epsilon_{1\mathrm{B}}$ 映射到模式数 $m = (M_x, M_y)$，其中对角传递矩阵元T^{-}，Sm^{-}，Sm（附录 C）在 $[0, 60]$ 吉赫区间内的频率轴上至少有一个零点，

$$\epsilon \in \mathbb{R} \mapsto \text{number of modes with zeroes.} \tag{90}$$

解析公式将零点定位如图（8）和图（9）所示

随着 $\epsilon_{1\mathrm{B}} = \epsilon_{2\mathrm{B}}$ 从 1 增加到 ∞（图 10），T^{-}，Sm^{-}，Sm 穿过实频率轴的模式数以不连续的阶跃增加；随后，当介电常数超过 30 时，该数目开始减少。它达到一个包含36个模式的平台区，如 $\epsilon \to \infty$所示。图11展示了 $\epsilon_{1\mathrm{B}} = \epsilon_{2\mathrm{B}} = 35$ 和 ∞分别对应的53个和36个模式在（M_x，M_y）平面中的位置。图10中的两个相邻阶梯具有两个不同的拓扑不变量，

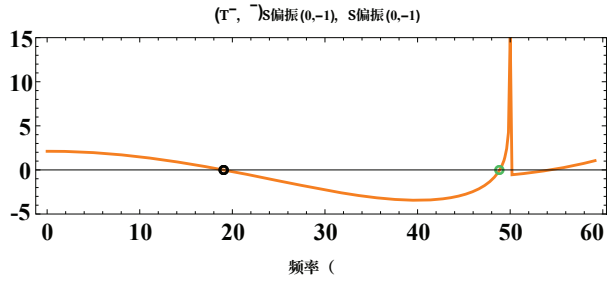

图8。理论矩阵元 T^{-}，$S\ 0^{-}$（，-1），（S（0，-1）是频率的函数。在 19.9 吉赫和 48.86 吉赫处的零点，其斜率分别为负值和正值。模式（0，-1）的瑞利频率为 50.03 吉赫，此处存在极点奇异性。介电常数为 $\epsilon_{1\mathrm{B}} = \epsilon_{2\mathrm{B}} = 35$.

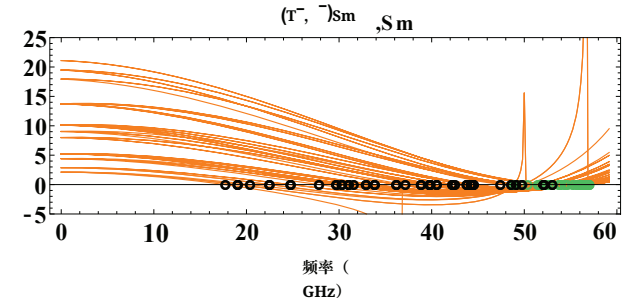

图9。在实频率轴上至少有一个零点的所有矩阵元 T^{-}，Sm^{-}，Sm 。斜率为负的零点标记为空心黑圆，而斜率为正的零点为绿色。在频率最高达 60 吉赫的范围内，有三个极点奇异性，分别对应于（-1，0）、（0，± 1）和（-1，± 1），其频率分别为 36.69 、 50.03 和 56.71 吉赫。

即不同数量的共振模。这些阶梯的边界并非均匀分布在水平介电轴上。了解这些边界值的分布，可能对组装复合器件发挥重要作用；复合器件由两个具有不同拓扑不变量的结构组合而成。数值模拟证实，$\epsilon_{1\mathrm{B}} = \epsilon_{2\mathrm{B}} = 1$ 时有5个模式发生共振，而 $\epsilon_{1\mathrm{B}} = \epsilon_{2\mathrm{B}} = 35$时有53个模式发生共振。

通过沿通道进行传播，可以进一步深入分析零点。通道1 SS与介电常数无关，并且对于任意频率和方向 $p_\perp$均为正，如图12所示。其他一些通道必须为负，才能穿过频率轴：T^{-}，Sm^{-}，Sm 。有趣的是，每个通道作为频率的函数都保持恒定的符号，即 (1，+)、(2，–)、(3，–)、(4，+) 和 (5，–)，如图13至图16所示。

从图14可以看出，通道3比其他通道小两个数量级，因此它不会导致零点的产生或消失，但会影响零点在频率轴上的位置。当 $\epsilon_{1\mathrm{B}} = \epsilon_{2\mathrm{B}}$ 增大时，

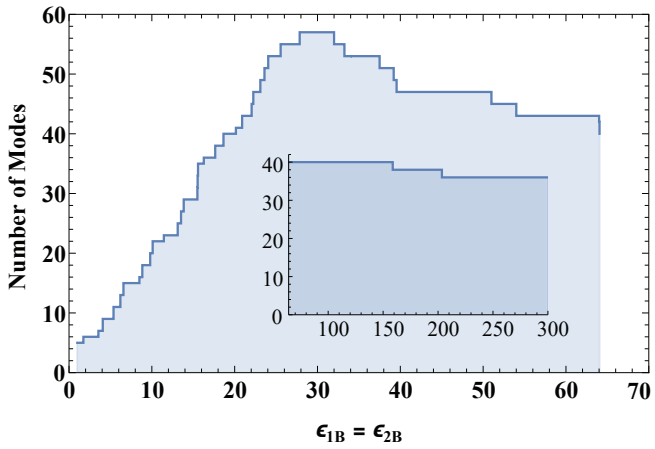

图 10. 在区间 $[0, 60]$ 吉赫内，对应的对角传输矩阵元 $T^{-}_{Sm}{}^{-}, Sm$ 在实频率轴上存在零点的模式数$m = (M_x,\ M_y)$的拓扑图。连续变量 $\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B}$ 从 1 变化到 ∞。

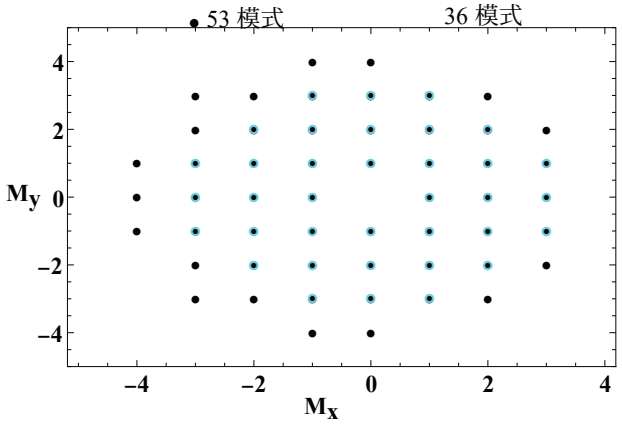

图 11. 模式 $m = (M_x,\ M_y)$。$\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B} = 35$ 和 ∞ 分别有 53 个和 36 个模式。

负贡献开始占据主导，并出现两种现象：零点被推向较低频率，同时数量不定的模式开始穿过频率轴。这解释了为什么共振模的数量会随着 $\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B}$ 增大而增加。

A. $T^{-}, -$的对角矩阵元的零点

解析公式相较于数值方法的一个显著优势在于研究无穷极限。

$$\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B} \to \infty. \tag{91}$$

在此极限下，传递矩阵元$T^{-}, Sm^{-}, Sm(\Omega) = 0$ 的零点 ≅ 0出现在较小的 Ω 处。因此，近似

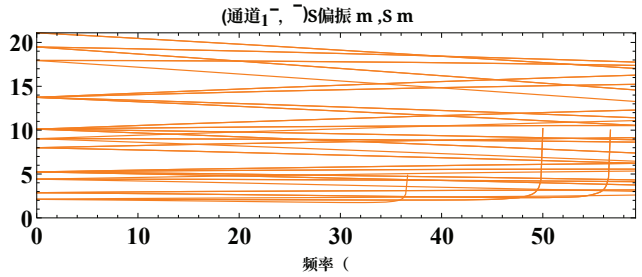

图12。图11中全部 53 个矩阵元的通道 1 T^{-}, Sm^{-}, Sm。通道 1 与 ϵ 无关。

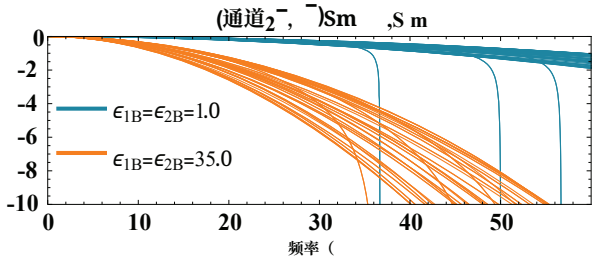

图13。对于 $\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B}$. 的两个取值，图11中全部 53 个矩阵元的通道2 T^{-}, Sm^{-}, Sm

$1 + \Omega^2 \varphi_{z,\ \mathrm{OUT}} \cong 1$ 由附录 C 可得，

$$(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 1}} \cong \frac{1}{\varphi^3_{z,\mathrm{OUT}}}, \tag{92}$$

$$(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 2}} \cong -\frac{\Omega^2}{8\varphi^2_{z,\mathrm{OUT}}\left(1-\varphi^2_{z,\mathrm{OUT}}\right)}(6\epsilon_{1B}),$$

$$(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 3}} \cong 0,$$

$$(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 4}} \cong \frac{\Omega^4}{\varphi_{z,\mathrm{OUT}}\left(1-\varphi^2_{z,\mathrm{OUT}}\right)}\left(\frac{\epsilon_{1B}\epsilon_{2B}}{\sqrt{2}}\right),$$

$$(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 5}} \cong -\frac{\Omega^2}{8\varphi^2_{z,\mathrm{OUT}}\left(1-\varphi^2_{z,\mathrm{OUT}}\right)}(6\epsilon_{2B}).$$

在上述近似下，方程（T^{-}, Sm^{-}, Sm） $= 0$，采用记号 $\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B} = \epsilon$，可化为

$$-\frac{3}{2}\Omega^2\varphi_{z,\mathrm{OUT}}\epsilon+\frac{1}{\sqrt{2}}\Omega^4\varphi^2_{z,\mathrm{OUT}}\epsilon^2+1-\varphi^2_{z,\mathrm{OUT}}=0. \tag{93}$$

当 $\epsilon \to \infty$ 时， $T^{-}, Sm^{-}, Sm(\Omega) = 0$ 趋于零，使得 Ω $^2\epsilon \to$ 为有限值。用这个有限值（记作 X）表示，方程变为

$$-\frac{3}{2}X\varphi_{z,\mathrm{OUT}}+\frac{1}{\sqrt{2}}X^2\varphi^2_{z,\mathrm{OUT}}+1-\varphi^2_{z,\mathrm{OUT}}=0. \tag{94}$$

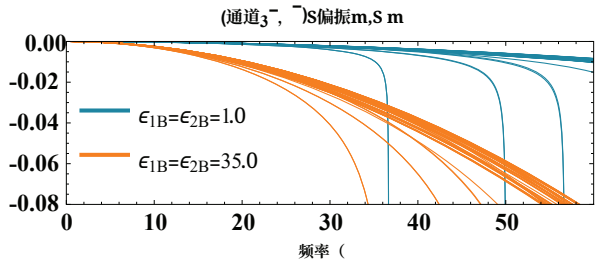

图14。对于图11中的两个 $\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B}$.值，所有53个矩阵元的通道3 T^{-}, Sm^{-}, Sm

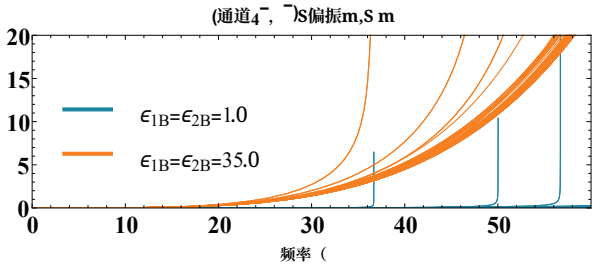

图15。对于图11中的两个 $\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B}$.值，所有53个矩阵元的第4道 T^{-}, Sm^{-}, Sm

要求 X 为正值，这对模式数 M_x 和 M_y 施加了限制；在极限 $\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B} \to \infty$ 下，对角传输矩阵元在实频率轴上有一个零点

$$\varphi_z\left(\frac{1}{2}\left(\frac{M_x^2}{t^2}+\frac{M_y^2}{t^2}\right)+1\right) \geqslant \frac{1}{4}\sqrt{16-9\sqrt{2}}. \qquad (95)$$

该不等式对36种模式成立，这些模式在图11中清晰可见。

XX. 共振频率的解析预测

A. 薄层越薄，精度越高

通过统计多个模式的零点数量，我们将关注点转向表V，以预测 T^{-}、Sm^{-}、Sm 的零点位置 Ω^{theory}，其中包括优化设计模式（0、±1）。两种模式在 $\varphi = 0°$处具有相同的零点。共振频率取决于结构薄片的厚度 c。其他所有参数均保持不变。

请注意，Ω %-误差 $= 100\frac{|\Omega\,\text{num} - \Omega\,\text{theory}|}{\Omega\,\text{num}}$ 表示与数值模拟结果Ω num之间的距离， [37], 随着宽度c的减小而减小。这是意料之中的，因为随着 $c \to 0$ 麦克斯韦方程组的离散近似得到改进。

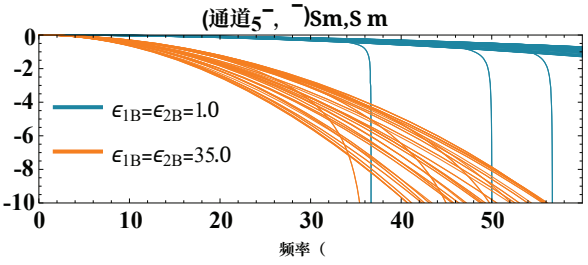

图16. 图11中全部53个矩阵元 T^{-}、Sm^{-}、Sm 的通道5，对应 $\epsilon_{1B} = \epsilon_{2B}$.的两个取值

表V. 可变层宽度。

c [毫米]	t	f[吉赫]	Ω 数值	Ω 理论	Ω % − 误差
0.100	10	47.540	0.0996365	0.0993646	0.27
0.200	5	43.376	0.181819	0.180396	0.78
0.250	4	41.667	0.218319	0.215294	1.39
0.275	4/11	40.693	0.234537	0.231701	1.21
0.300	10/3	39.908	0.250923	0.247551	1.34

B. 旋转角度 α 对共振频率的影响

在用于传输SS偏振的5个通道中，只有通道3和通道4取决于角度 α。随着角度 α 的变化，简并模式(0，−1)和(0，1)的共振频率在 $\alpha = 45°$、图17和图18所确定的频率附近发生变化。尽管相对变化很小，估计其线性斜率分别为 −0.96MHz/度和−2.46MHz/度，但这些斜率与数值模拟数据中的斜率接近。该系统—

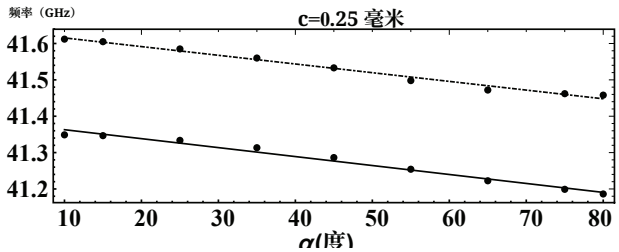

图 17. 模式 $S(0, -1)$ 和 $S(0, 1)$ 的共振频率随 α. 的变化。点划线对应数值数据，连续线对应解析传递矩阵。

表 V 中针对 $\alpha = 45°$ 描述的理论值与数值之间的系统偏移对所有角度 α 都相同。

对楔形效应的研究——该效应出现在 $0° < \alpha < 10°$ 或 $80° < \alpha < 90°$ 的情况下——将在另一篇稿件中展开。

传递矩阵元取决于介电常数的对数，因此我们需要测试以下材料的公式：

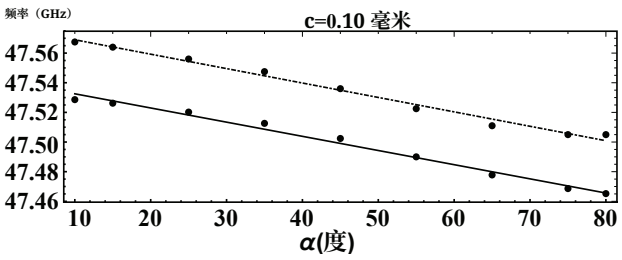

图 18. 模式 $S(0,\ -1)$ 和 $S(0,\ 1)$ 的共振频率随 $\alpha.$ 的变化。点划线对应数值数据，连续线对应解析传递矩阵。

金属，其介电率为复数。我们取$\epsilon_{2B} =$ Johnson-Chrysti 金，并在其他介电常数构成的五维空间中找到目标函数的一个局部最小值。频率范围现在设定在红外波段，即 $f = 286.2$ THz。寻找五个未知介电常数的优化过程与全介质情形类似。不过，这次目标函数基于一个传播模式（0，0）和一个倏逝模式（-1，0），二者均为 P偏振。理论共振的位置和形状已通过数值模拟得到确认，模拟使用了 [37]。

XXI. 高Q因子双层结构

为研究振幅的理论预测，我们选择了一系列 Q因子较大的共振。第一个共振在 $Q = 4.8 \times 10^6$ 处，幅度为 -3 分贝，见图 19。理论值使用 20×20 传递矩阵计算。需要两个系统性偏移量 $\mathrm{f_{shift}}$ 和 $\mathrm{t_{shift}}$，才能使理论公式 $20 \log_{10} \left| t^{max,\ S\ \ \ min}_{S\ (0,\ 1)(0,\ 0)}(f - \mathrm{f_{shift}}) \right| + t_{\mathrm{shift}}$ 与数值模拟结果重合。对于图 19，$\mathrm{f_{shift}} = 3.2\ 10^{-5}$ 吉赫，且 $t_{\mathrm{shift}} = -3.9$ 分贝。由于薄层很薄，$c = 0.01$ 毫米，因此相对于共振时的频率和振幅，这些偏移量很小。

变量 φ 为研究高 Q 因子共振附近的振幅提供了另一种途径。对于 $\varphi = 0°$，模式 (0，-1) 和 (0，1) 是简并的，具有相同的瑞利频率和共振频率。随着角度 φ 偏离 0°，模式 S(0，-1) 的散射振幅减小，而模式 S (0，1) 的散射振幅仍保持激发，并处于较高的分贝水平，见图 20。数值模拟也证实了这一趋势。表 VI 列出了用于比较高 Q 因子情况下理论结果与数值模拟结果的其他数据。

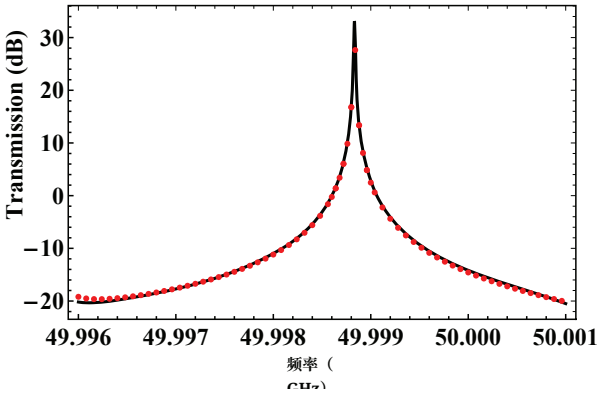

图 19. 高Q因子共振。-3 分贝处的 Q因子为 $Q = 4.8 \times 10^6$。黑色曲线表示从 z-min 处的 S(0,0) 到 z-max 处的 S(0,1) 的理论透射。红色数据点通过 [37] 进行数值模拟。除 $c = 0.01$毫米和 $\epsilon_{2R} = 1.0$ 外，所有参数均取优化值。

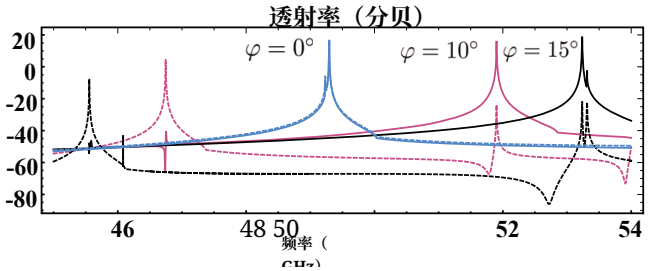

图 20. 入射角 φ 可变时的高Q因子共振。参数为 $c = 0.05$ 毫米和 $\varphi = 0°$，10°，以及15°。其他所有参数均取优化值。实线和虚线分别表示从 z-min 处的 S(0,0) 到 z-max 处的 S(0,1) 和 S(0,-1) 的理论透射。对于 $\varphi = 0°$，10° 和$\varphi = 15°$，共振频率（单位：吉赫）和 Q因子分别为 (49.30，3.6×10^4)，(51.90，5.2 10_3) 和 (53.24，1.3 10_4)。

XXII. 复频率平面与加权的法诺–洛伦兹线型

除了预测共振频率的位置及其振幅之外，传递矩阵的完整解析解还为共振线型提供了一种简单但有意义的近似

$$t^{min,max}_{S(0,1),S(0,0)} = \frac{\mathrm{Cofactor}_{S(0,0),S(0,1)}(T^{-,-})}{\mathrm{Det}(T^{-,-})} \cong \rho e^{i\Phi} \frac{f - f_{zero}}{f - f_{pole}}, \tag{96}$$

其中，零点和极点位于复频率平面中，均在实共振频率 [33] 附近。亚纯近似（96）具有偶极子的自然结构，单极子位于 f_{zero} 和 f_{pole}，见图 21。

表 VI. c 的变量 $\varphi = 15°$。输入端 S(0,0) 在 z-min 处至输出 OUT S(0,1) 在 z-max处的散射矩阵元。频移以吉赫为单位，散射矩阵元的振幅变化以分贝为单位。

c[毫米]	f_{shift}	t_{shift}	Q
0.25	3.2 10^{-1}	9.81	1.1 10^{3}
0.10	5.4 10^{-2}	5.67	2.6 10^{3}
0.05	9.4 10^{-3}	2.85	1.3 10^{4}
0.01	9.0 10^{-5}	-3.78	1.2 10^{6}

为估计极点和零点，我们使用此前已针对 ζ 的复数值定义的 $\varphi_z(\zeta)$。这里，我们利用了从下方趋近的 $\varphi_z(\zeta)$ 在实 ζ 轴处的连续性，即 Im(ζ) $\leqslant 0$。对于我们的 $\varphi = 0°$ 和 $M_x = 0$ 情形，这意味着余因子和行列式在实 Ω 轴处从上方趋近时的连续性，即 Im(Ω) $\geqslant 0$。因此，Ω 的这两个函数可根据它们在实频率轴上方及轴上的取值，延拓到复频率平面的下半部，见附录 J。经过这种解析延拓后，从 20×20 矩阵 $t^{min,max}$ 中提取的零极点模型为

$$t^{min,max}_{S(0,1),S(0,0)} = 0.053\, e^{-2.732i}\, \frac{f - f_{\text{zero}}}{f - f_{\text{pole}}}\,, \qquad (97)$$

频率以吉赫为单位，表示为

$$f_{\text{zero}} = 40.843 + 0.027i$$
$$f_{\text{pole}} = 41.286 - 0.009i$$

接下来 [33]，我们以不同形式表示散射线型 $\left|t^{min,max}_{S(0,1),S(0,0)}\right|^2$。第一种形式是

$$\left|t^{min,max}_{S(0,1),S(0,0)}\right|^2(x) = \rho^2 \frac{(\delta + x)^2 + \gamma^2}{1 + x^2} \qquad (98)$$
$$= 2.81 \times 10^{-3} \frac{(-47.47 + x)^2 + 8.55}{1 + x^2},$$

其中 $x = -\frac{f - \text{Re}(f_{\text{pole}})}{\text{Im}(f_{\text{pole}})}$，$\delta = -\frac{\text{Re}(f_{\text{pole}} - f_{\text{zero}})}{\text{Im}(f_{\text{pole}})}$ 以及 $\gamma = \frac{\text{Im}(f_{\text{zero}})}{\text{Im}(f_{\text{pole}})}$。第二种形式与连续背景的存在有关

$$\left|t^{min,max}_{S(0,1),S(0,0)}\right|^2(x) = A_0 + F_0 \frac{(\nu + x)^2}{1 + x^2}. \qquad (99)$$

我们找到了参数 A_0，F_0 和 ν的两组解。即，$A_0 = 1.06 \times 10^{-5}$、$F_0 = 2.8 \times 10^{-3}$ 和 $\nu = -47.65$，或者 $A_0 = 6.37$、$F_0 = -6.36$ 和 $\nu = 2.09 \times 10^{-2}$。因此，这种形式存在歧义，[33]中也指出了这一点。

第三种也是最后一种形式，将共振线型表示为 Fano 线型和 Lorentz线型的加权和

$$\left|t^{min,max}_{S(0,1),S(0,0)}\right|^2(x) = A\left(\eta \frac{(\delta + x)^2}{1 + x^2} + (1 - \eta)\frac{1}{1 + x^2}\right). \qquad (100)$$

其中，权重参数为 $\eta = 1/(1 + \gamma^2) = 0.105$和 $A = \rho^2(1 + \gamma^2) = 0.027$.

作为公式 (100) 中的第一项，Fano线型对共振线型的贡献为 10.5%。

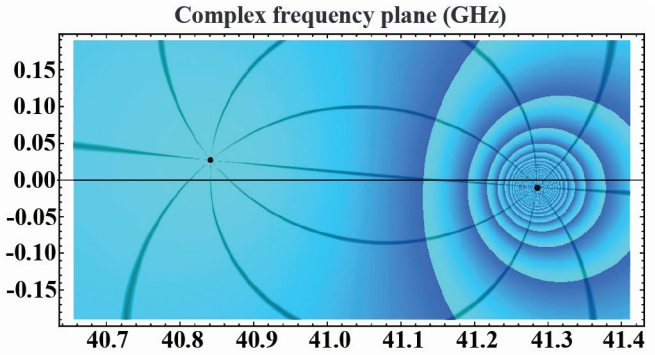

图 21. 在复频率平面中表示散射矩阵元 OUT S(0,1)（位于 z-min）和输入端 S(0,0)（位于 z-max）。围绕极点 41.286−i 0.009 的闭合曲线显示了散射矩阵的绝对值趋于无穷大的情况。散射矩阵元的辐角在连接零点 40.843 +0.027 i 与极点的曲线上保持不变。实共振频率位于极点上方，即 41.286 吉赫处。

第二十三节 结论

总之，我们展示了如何利用 Pendry-MacKinnon离散麦克斯韦方程推导传递矩阵。空间是一个正交晶格，其在 x, y 方向和 z 方向上的晶格常数分别为 a, b和 c。z轴被选定为传输轴。沿z轴垂直放置有限数量的平行离散薄层，每层厚度为 c。每个薄层都可以承载任意非磁性、频率相关的图案，并且彼此独立。我们提出的方法以解析闭式计算所有布洛赫-弗洛凯模的传递矩阵元。计算从大量路径算子开始，这些算子将场从第一个薄层传输到最后一个薄层。幸运的是，其中许多路径算子的贡献为零，而有贡献的路径结果还可以进一步归并为简单的项，我们称之为通道。每个通道都有一个有趣的特性，即它是两个具有鲜明特征的项的乘积。其中一项称为通道的 χ-函数，取决于介电常数；另一项称为通道的 $\mathcal{Z}$-因子，则与介电常数无关。对于一个双层器件的所有输入输出偏振组合，我们计算了 χ 和 $\mathcal{Z}$-因子。

为了说明传递矩阵元的构建过程，在 $a, b \to 0$ 的连续情形中，考虑输入端为 P 偏振、输出为 S 偏振的情况。离散情形的方法与连续情形类似，不同之处在于 χ 函数是离散的，如式 (68) 所示。对于这种

（P，S）偏振对，传递矩阵元是对 5 个通道求和，其 χ-函数如图 22 所示。以通道2为例，对于任意介电常数分布，χ-函数都是关于 (p_x, p_y) 的多项式，表示为 $p_y(-\partial_x\epsilon_2) + p_x\partial_y\epsilon_2$。传递矩阵元取决于 χ-函数的傅里叶变换，这些函数通过变量 $q_\perp = p_\perp - p_\perp^{\mathrm{OUT}}$ 包含了所有布洛赫-弗洛凯模。接下来，选择一对 $\pm$传播方向，便可确定 $\mathcal{Z}$-因子的具体形式。例如，如果要计算矩阵元 $T^{-,-}$，则使用表XI，并将表中各项除以 $\|\mathrm{OUT}\|$，以归一化 $\mathcal{Z}$-因子。

获取其他方向的 $\mathcal{Z}$-因子的规则是将 IN$-$ 改为 IN$+$，同时在切换到 c-缩放变量之前，将$\varphi_{\mathrm{z,IN}} \to \varphi^{-1}{}_{\mathrm{z,IN}}$和 $c \to -c$进行相应更改。对于 OUT$-$ 改为 OUT$+$，同样适用这一规则。然而，该规则不适用于通道 1；对于 SS 偏振和 PP偏振，所有未归一化的 $\mathcal{Z}$-因子均列于附录 B的表格 VII 至 XI 中。最后，矩阵元是对所有属于所选偏振对的通道，将 χ 的傅里叶变换与其 $\mathcal{Z}$-因子的乘积求和。

进一步拓展应用范围是一种很有价值的途径。一种可能性是利用图 10，将共振模数量不同的两个器件结合起来，并研究界面处沿不同通道的传播。其他应用可能涉及超表面 [39], 能量采集 [40],[41],[42], 漏波理论 [42] 以及频率选择表面 [43]。

XXIV. 致谢

我们中的一位 O.L. 谨向富布赖特委员会致谢，感谢其提供富布赖特奖学金，并感谢接待方 Victor Lopez-Richard（巴西圣卡洛斯联邦大学），本研究的部分工作即在此完成。此外，O.L. 感谢同事 Mariama Rebello de Sousa Dias 在研究过程中与他进行了许多讨论。我们二人都要感谢大陆汽车罗马尼亚有限公司的 Andrei Silaghi博士，他为我们提供了使用 CST Microwave Studio [37] 进行数值模拟的机会。

附录A：符号摘要及说明

1.离散位置矢量为 $\vec{n} = (an_x,\ bn_y,\ cn_z)$ 和 $n_\perp = (an_x,\ bn_y)$。在连续体 $a,\ b \to 0$ 中，位置 $n_\perp$ 变为 $r_\perp = (x,\ y)$。

2. 矢量 $p_\perp = (p_x,\ p_y)$ 出现在平面波基底中，$\left|\Psi^{\pm}_{S/P,\ p_\perp}\right\rangle e^{\pm ip_z n_z c}e^{-i\omega t}$ 其中$\left|\Psi^{\pm}_{S/P,\ p_\perp}\right\rangle = |p_\perp,\ S/P,\ \pm\rangle\, e^{ip_\perp n_\perp}$（26）。为区分两个布洛赫-弗洛凯模，一个位于输入端 IN，另一个位于输出端 OUT，我们分别记为 $p_\perp^{\mathrm{IN}}$和 $p_\perp^{\mathrm{OUT}}$。为使传递矩阵元的最终公式保持简洁，我们使用 $p_\perp$ 而不是$p_\perp^{\mathrm{IN}}$，如图6所示。

3. p_x 与 $k_x^E = (ia)^{-1}(e^{iap_x} - 1)$ 之间的关系，(28)。**4.** 无量纲频率 Ω 定义为 $\Omega v_0 = \omega c$，(34)。**5.** p_z 分量出现在 $\varphi_z = e^{icp_z}$ 中。 $\varphi_z(\zeta) = \zeta - \sqrt{|\zeta^2 - 1|}e^{\frac{i}{2}(\text{辐角}(\zeta-1) + \text{辐角}(\zeta+1))}$，(39)。辐角(ζ) 在 $[-\pi, \pi)$ 上取值，使得当 $\mathrm{Im}(\zeta) = 0$ 且$\zeta < 0$ 时，辐角(ζ) $= -\pi$ 。辐角 ζ 在 (38) 中定义。**6.** 周期性边界条件通过 (44) 和 (45) 引入模式 (M_x, M_y) 以及模式 (0, 0) 的方向 (ξ_x, ξ_y)。**7.** 传递矩阵元 $T^{-,m\,\bar{n}}$ 按 (50) 组织。**8.** 所有 XY 算符均列于图 5。**9.** 离散 χ 函数示例，(68)。**10.** χ 函数的离散傅里叶变换，(69)。**11.** 傅里叶变换将空间 $n_\perp$ 映射到模变量 $q_\perp = p_\perp^{\mathrm{IN}} - p_\perp^{\mathrm{OUT}} \equiv p_\perp - p_\perp^{\mathrm{OUT}}$。**12.** $\mathcal{Z}$ 因子示例，(71)。**13.** 传递矩阵元表示为通道之和，(72)。**14.** $\mathcal{Z}$ 因子列于表 III 和表 VII 至表 XI。**15.** 附录 B 给出了求得所有方向上全部 $\mathcal{Z}$ 因子的规则。**16.** 表 IV 列出了连续体 (x, y) 平面的一些介电函数示例。**17.** 对于连续体 (x, y) 情形，χ 函数、介电函数以及对 $p_\perp \equiv p_\perp^{\mathrm{IN}}$ 的多项式依赖关系见 (73)、图6 和图 22 至 25。**18.** 通过 c 缩放，(74) 中的 $x = cx', y = cy'$，晶格常数 c 在传递矩阵元中得以简化。**19.** 根据所研究的频带选择长度单位。使用厚度参数 $t = [1\ \mathrm{unit}](c\ [\mathrm{unit}])^{-1}$，(78)，将传递矩阵元表示为仅含无量纲参数的形式。**20.** 对于任何多边形镶嵌图案，每个顶点 $\hat{}$ 均带有一对正交单位向量 $(\lambda, \hat{}\mu)$。图 7 中的 π-π-rig 是一个示例。**21.** 相对介电常数的跃变沿 λ 方向跨越 $\hat{}\mu$ 测量，(79)。

22. 连续体中镶嵌图案的位置空间矢量 $r_\perp$ 到 $\hat{}$ 模矢量 $q_\perp$ 的傅里叶变换，建立在 $(\lambda, \hat{}\mu)$、介电常数的跳变以及两个恒定规范矢量 W 和 $\mathcal{D}$ 之上。

附录 B： $\mathcal{Z}$因子和 χ函数

对于所有表格， $\langle p_\perp|p_\perp\rangle$ 都可以通过 $\langle p_\perp|p_\perp\rangle\, c^2\varphi_z = 1 - 2\varphi_z + \Omega^2\varphi_z + \varphi_z^2$用 φ_z 表示。XY 算符下标中的 No. 表示通道编号。 $\mathcal{Z}$ 因子对离散和平滑 $(x,\ y)$ 平面均有效，因为它们与介电常数无关。从图 22 到图 25 的 χ 函数适用于连续 $(x,\ y)$ 平面。

表 VII。SS偏振通道的未归一化 $\mathcal{Z}_1$ 因子$_1$

OutS，InS	$\mathcal{Z}$-通道$_1$ $\|\|$OUT$\|\|$
$-,-$	$\frac{i\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(\left(\Omega^2\varphi_{z,\rm OUT}+1\right)^2-\varphi_{z,\rm OUT}^2\right)}{c\varphi_{z,\rm OUT}^4}\delta_{\rm IN,\ OUT}$
$+,-$	$-\frac{i\Omega^2\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(\Omega^2\varphi_{z,\rm OUT}+\varphi_{z,\rm OUT}^2+1\right)}{c\varphi_{z,\rm OUT}}\delta_{\rm IN,OUT}$
$-,+$	$\frac{i\Omega^2\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(\Omega^2\varphi_{z,\rm OUT}+\varphi_{z,\rm OUT}^2+1\right)}{c\varphi_{z,\rm OUT}}\delta_{\rm IN,OUT}$
$+,+$	$-\frac{i\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\varphi_{z,\ \rm OUT}^2\left((\varphi_{z,\ \rm OUT}+\Omega^2)^2-1\right)}{c}\delta_{\rm IN,OUT}$

获取其他方向的 $\mathcal{Z}$ 因子的规则是将 IN$-$ 替换为 IN$+$ 或将 OUT$-$ 替换为 OUT$+$ ，同时将 $\varphi_{\rm z,IN}\to\varphi^{-1}{}_{\rm z,IN}$ 或 $\varphi_{\rm z,\ OUT}\to\varphi^{-1}{}_{\rm z,OUT}$以及 $c\to -c$ 作相应替换。不过，这条规则不适用于通道 1 的 SS 和 PP 偏振；其所有未归一化的 $\mathcal{Z}$ 因子均列于表VII和表IX。请注意，这些表格中包含晶格常数 c ，以便进行变换 $c\to -c$。对变量进行 c 缩放后，该常数会从传递矩阵元中约去。要对 $\mathcal{Z}$ 因子进行归一化，将第二列除以 $\|$OUT$\|$；根据公式（59），它可以用 $\varphi_{\rm z,OUT}$ 表示。

表VIII. OUT P-、IN S- 的未归一化 $\mathcal{Z}$ 因子

（XY 算符）$_{\rm No.}$	$\mathcal{Z}$（OUT,P-）（IN,S-） $\|\|$OUT$\|\|$
$(\epsilon_1^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_1\sigma_2\|T_H\rangle)_1$	$-\frac{c\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle}{\varphi_{z,\ \text{输入端}}\varphi_{z,\ \rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_1\sigma_2\|T_H\rangle)_2$	$-\frac{c\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_2\|T_{\rm E}\rangle\epsilon_1^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_1\sigma_2\|T_H\rangle)_3$	$-\frac{c^3\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_2\epsilon_1\sigma_2\|T_H\rangle)_4$	$\frac{c\Omega^2\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_2\sigma_2\|T_H\rangle)_5$	$-\frac{c\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\ (\Omega^2\varphi_{z,\ \text{输入端}}+1)}{\varphi_{z,\ \text{输入端}}^2\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_E\|\epsilon_1\sigma_2\|T_H\rangle)_6$	$\frac{\varphi_{z,\ \rm OUT}+2\Omega^2-1}{c\varphi_{z,\text{输入端}}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_E\|\epsilon_2\|T_{\rm E}\rangle\epsilon_1^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_1\sigma_2\|T_H\rangle)_7$	$\frac{c\left(\varphi_{z,\rm OUT}+\Omega^2-1\right)}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_E\|\epsilon_2\epsilon_1\sigma_2\|T_H\rangle)_8$	$-\frac{\Omega^2\left(\varphi_{z,\rm OUT}+\Omega^2-1\right)}{c\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_E\|\epsilon_2\sigma_2\|T_H\rangle)_9$	$\frac{\left(\Omega^2\varphi_{z,\text{输入端}}+1\right)\left(\varphi_{z,\rm OUT}+\Omega^2-1\right)}{c\varphi_{z,\ \text{输入端}}^2\varphi_{z,\ \rm OUT}}$

表IX。PP偏振通道的未归一化 $\mathcal{Z}_1$ 因子$_1$

OutP,InP	$\mathcal{Z}$-通道$_1$ $\|\|$OUT$\|\|$
$-,-$	$-\frac{i\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(2\Omega^2\varphi_{z,\rm OUT}+\varphi_{z,\rm OUT}^2-1\right)}{c\varphi_{z,\rm OUT}^2}\delta_{\rm IN,\ OUT}$
$+,-$	$\frac{2i\Omega^2\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\varphi_{z,\ \rm OUT}}{c}\delta_{\rm IN,\ OUT}$
$-,+$	$-\frac{2i\Omega^2\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle}{c\varphi_{z,\rm OUT}}\delta_{\rm IN,\ OUT}$
$+,+$	$-\frac{i\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(-2\Omega^2\varphi_{z,\rm OUT}+\varphi_{z,\rm OUT}^2-1\right)}{c}\delta_{\rm IN,\ OUT}$

表 X。OUT P-、输入端 P- 的未归一化 $\mathcal{Z}$ 因子

(XY 算符)$_{\rm No.}$	$\mathcal{Z}$(OUT，P-)(输入端，P-) $\|\|$OUT$\|\|$
$(1)_1$	$-\frac{i\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(2\Omega^2\varphi_{z,\rm OUT}+\varphi_{z,\rm OUT}^2-1\right)}{c\varphi_{z,\rm OUT}^2}\delta_{\rm IN,OUT}$
$(\epsilon_1^{-1})_2$	$\frac{ic\langle p_\perp^{\rm IN}\|p_\perp^{\rm IN}\rangle\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle}{\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\epsilon_1^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_1\|T_E\rangle)_3$	$-\frac{ic\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(\varphi_{z,\ \rm IN}-1\right)}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1})_4$	$\frac{ic\langle p_\perp^{\rm IN}\|p_\perp^{\rm IN}\rangle\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle}{\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_1\|T_E\rangle)_5$	$-\frac{ic\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(\varphi_{z,\ \rm IN}-1\right)}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_2\|T_E\rangle)_6$	$-\frac{ic\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(\Omega^2\varphi_{z,\ \text{输入端}}+\varphi_{z,\ \text{输入端}}-1\right)}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_2\|T_{\rm E}\rangle\epsilon_1^{-1})_7$	$\frac{ic^3\langle p_\perp^{\rm IN}\|p_\perp^{\rm IN}\rangle\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle}{\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_2\|T_{\rm E}\rangle\epsilon_1^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_1\|T_E\rangle)_8$	$-\frac{ic^3\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(\varphi_{z,\ \rm IN}-1\right)}{\varphi_{z,\ \text{输入端}}\varphi_{z,\ \rm OUT}}$
$(\epsilon_2^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_2\epsilon_1\|T_E\rangle)_9$	$\frac{ic\Omega^2\langle p_\perp^{\rm OUT}\|p_\perp^{\rm OUT}\rangle\left(\varphi_{z,\rm IN}-1\right)}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_E\|\epsilon_1\|T_E\rangle)_{10}$	$\frac{i\left(\varphi_{z,\ \rm IN}-1\right)\left(\varphi_{z,\ \rm OUT}+2\Omega^2-1\right)}{c\varphi_{z,\ \text{输入端}}\varphi_{z,\ \rm OUT}}$
$(\langle T_E\|\epsilon_2\|T_E\rangle)_{11}$	$\frac{i\left(\Omega^2\varphi_{z,\ \text{输入端}}+\varphi_{z,\ \text{输入端}}-1\right)\left(\varphi_{z,\ \rm OUT}+\Omega^2-1\right)}{c\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_E\|\epsilon_2\|T_{\rm E}\rangle\epsilon_1^{-1})_{12}$	$-\frac{ic\langle p_\perp^{\rm IN}\|p_\perp^{\rm IN}\rangle\left(\varphi_{z,\ \rm OUT}+\Omega^2-1\right)}{\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_E\|\epsilon_2\|T_{\rm E}\rangle\epsilon_1^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_1\|T_E\rangle)_{13}$	$\frac{ic\left(\varphi_{z,\ \rm IN}-1\right)\left(\varphi_{z,\ \rm OUT}+\Omega^2-1\right)}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_E\|\epsilon_2\epsilon_1\|T_E\rangle)_{14}$	$-\frac{i\Omega^2\left(\varphi_{z,\ \rm IN}-1\right)\left(\varphi_{z,\ \rm OUT}+\Omega^2-1\right)}{c\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$

表XI. OUT S偏振、输入端 P偏振的未归一化 $\mathcal{Z}$ 因子

(XY 算符)$_{\rm No.}$	$\mathcal{Z}$(OUT，S偏振)(输入端，P偏振) $\|\|$OUT$\|\|$
$(\langle T_H\|\sigma_2\epsilon_1\|T_E\rangle)_1$	$\frac{\Omega^2\ \left(\varphi_{z,\ \rm IN}-1\right)\quad\left(\Omega^2\varphi_{z,\ \rm OUT}+1\right)}{c\varphi_{z,\text{输入端}}\varphi_z{}^2{}_{,\rm OUT}}$
$(\langle T_H\|\sigma_2\epsilon_2\|T_E\rangle)_2$	$\frac{\Omega^2\left(\Omega^2\varphi_{z,\ \text{输入端}}+\varphi_{z,\ \text{输入端}}-1\right)}{c\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_H\|\sigma_2\epsilon_2\|T_{\rm E}\rangle\epsilon_1^{-1})_3$	$-\frac{c\Omega^2\langle p_\perp^{\rm IN}\|p_\perp^{\rm IN}\rangle}{\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_H\|\sigma_2\epsilon_2\|T_{\rm E}\rangle\epsilon_1^{-1}\langle T_{\rm E}\|\epsilon_1\|T_E\rangle)_4$	$\frac{c\Omega^2\left(\varphi_{z,\rm IN}-1\right)}{\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$
$(\langle T_H\|\sigma_2\epsilon_2\epsilon_1\|T_E\rangle)_5$	$-\frac{\Omega^4\left(\varphi_{z,\rm IN}-1\right)}{c\varphi_{z,\rm IN}\varphi_{z,\rm OUT}}$

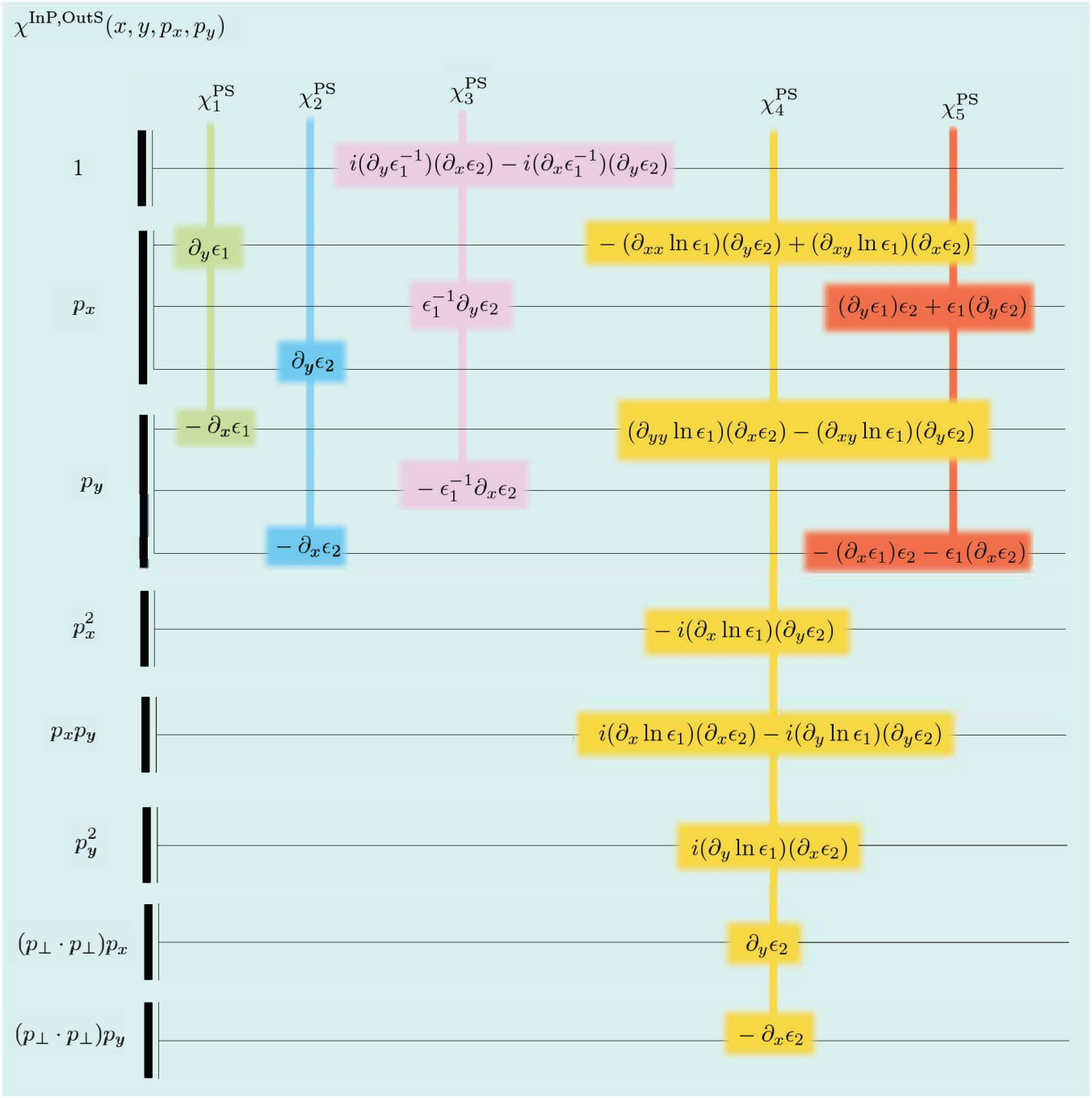

图22。入射P波、出射S波道的 χ 函数。在总共5个通道中，更为复杂的是第4道，它是 $(p_x,\ p_y)$ 的三次函数。

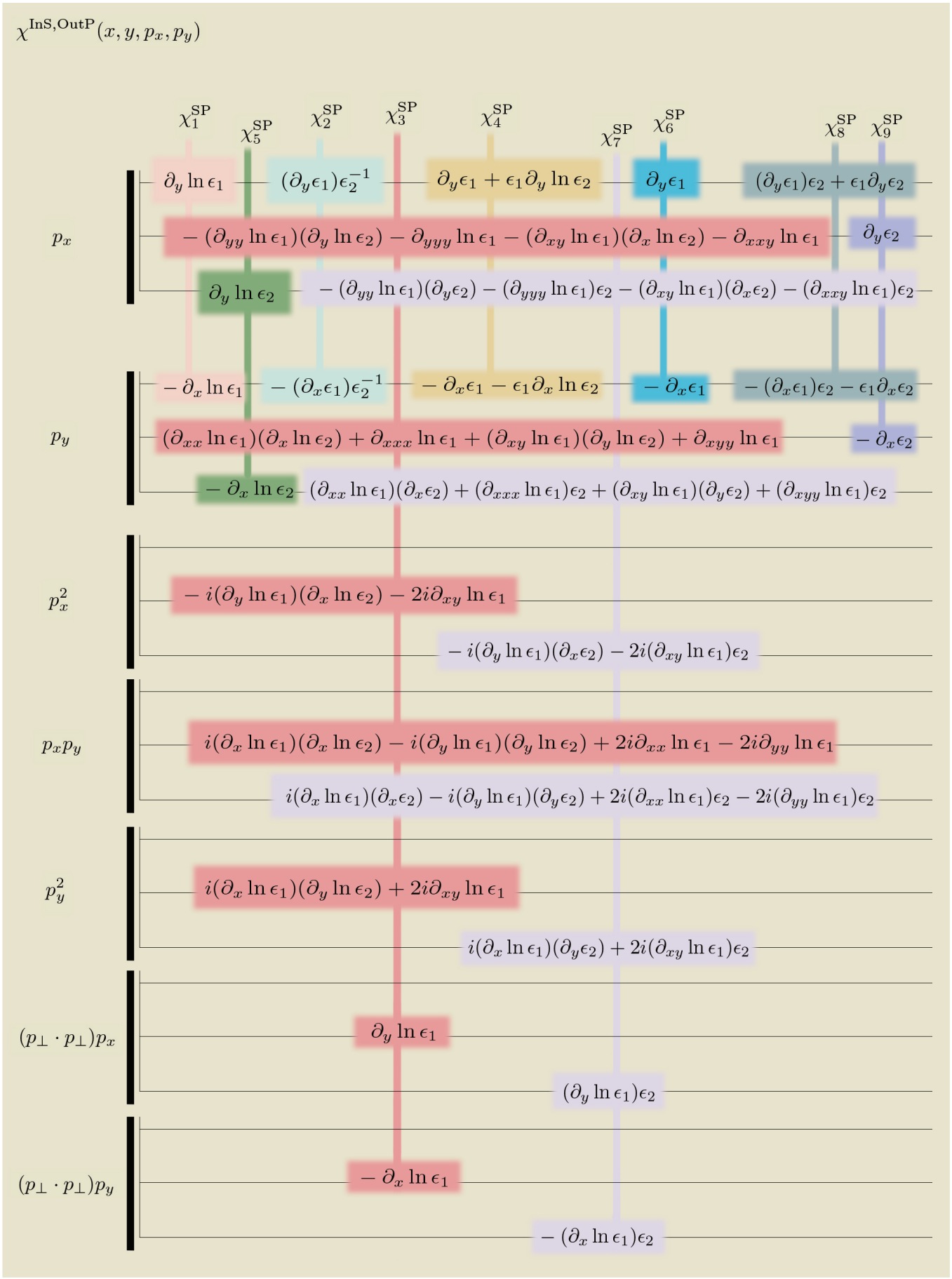

图 23。入射 S 波、出射 P 波道的 χ-函数。在总共 9 个通道中，通道3和通道7较为复杂，它们是关于（p_x，p_y）的三次函数。

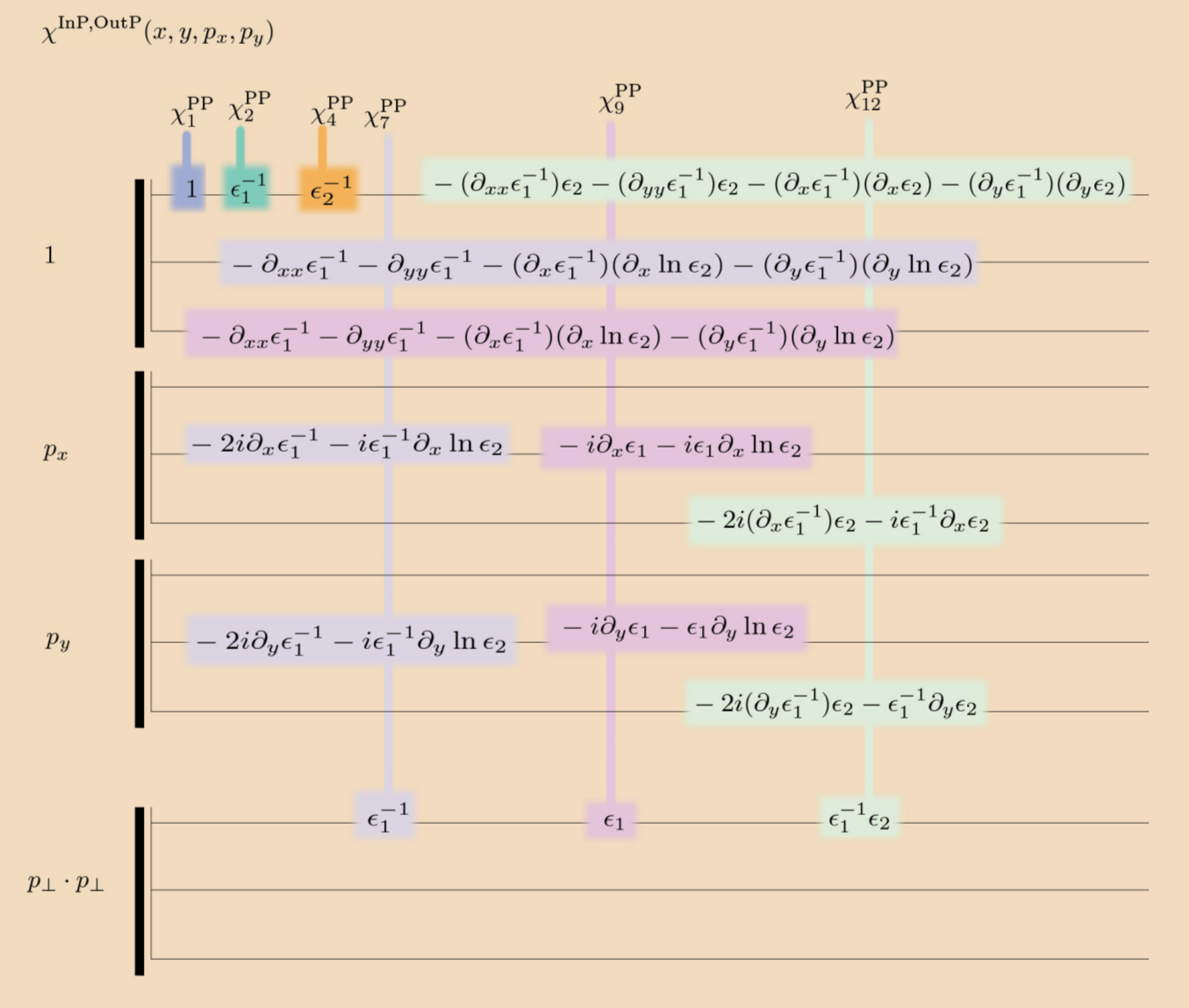

图 24. 入射 P 波、出射 P 波道的 χ 函数。总共 14 个通道中，此图展示了 6 个通道，这些通道的自由项是关于 p_x 和 p_y 的非零多项式。

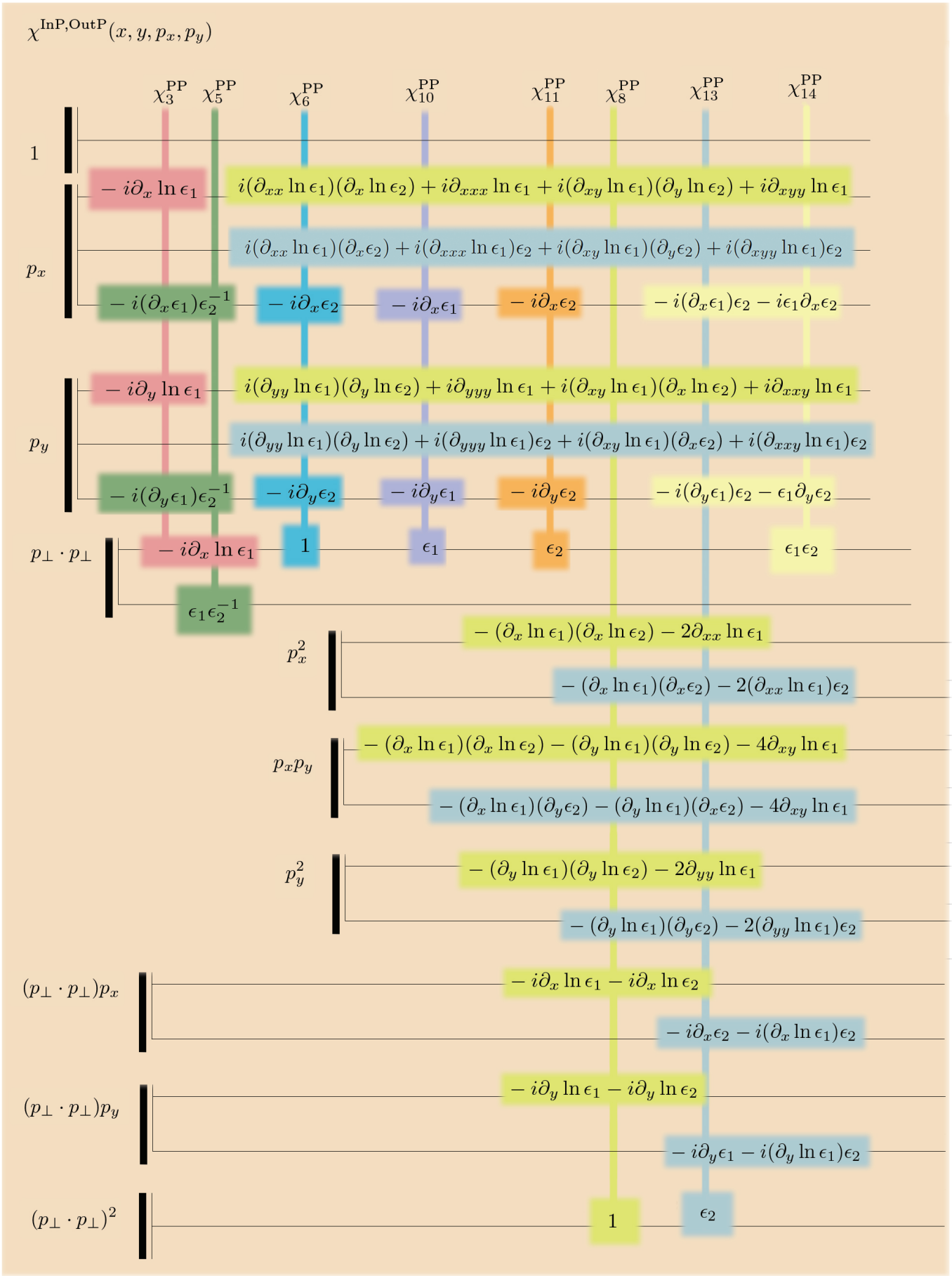

图25. 入射 P 波、出射 P 波道的 χ 函数。总共 14 个通道中，这张图展示了 8 个通道，它们没有关于 p_x 和 p_y 的自由项多项式。

附录 C： $T^{-,-}_{Sm,Sm}$ **对角线矩阵元（**$q_\perp = 0$**），适用于** π**-**π**-rig 和** $a,\ b \to 0$。

$$(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 1}} = -\delta_{\text{IN,OUT}} \frac{\left((\Omega^2\varphi_{z,\text{OUT}}+1)^2 - (\varphi_{z,\text{OUT}})^2\right)}{\left(\varphi^2_{z,\text{OUT}}-1\right)\varphi^3_{z,\text{OUT}}}, \tag{101}$$

$$(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 2}} = (6\epsilon_{1\text{B}} + \epsilon_{1\text{L}} + \epsilon_{1\text{R}}) \frac{\Omega^2\left(\Omega^2\varphi_{z,\text{OUT}}+1\right)}{8\varphi_{z,\text{IN}}\left(\varphi^2_{z,\text{OUT}}-1\right)\varphi_{z,\text{OUT}}}, \tag{102}$$

$$\begin{aligned}(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 3}} = \\ &\frac{\Omega^2}{4\pi^2 t^2\left(p_x^2+p_y^2\right)\varphi_{z,\text{IN}}\left(\varphi^2_{z,\text{OUT}}-1\right)} \\ &\Bigg(p_x^2\Bigg(\csc(\alpha)\sec(\alpha)\epsilon_{2\text{B}}\left(2\ln(\epsilon_{1\text{B}}) - \ln(\epsilon_{1\text{L}}) - \ln(\epsilon_{1\text{R}})\right) \\ &+\epsilon_{2\text{L}}\left(-\csc(\alpha)\sec(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{B}}) + \frac{3\csc(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{L}})}{2(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))} - \frac{(\cot(\alpha)-2)\csc(\alpha)\sec(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{R}})}{2(\cot(\alpha)+1)}\right) \\ &+\epsilon_{2\text{R}}\left(-\csc(\alpha)\sec(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{B}}) - \frac{(\cot(\alpha)-2)\csc(\alpha)\sec(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{L}})}{2(\cot(\alpha)+1)} + \frac{3\csc(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{R}})}{2(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))}\right)\Bigg) \\ &+p_x p_y \frac{\csc(\alpha)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)}\left(\epsilon_{2\text{L}}-\epsilon_{2\text{R}}\right)\left(\log(\epsilon_{1\text{L}}) - \log(\epsilon_{1\text{R}})\right) \\ &+p_y^2\Bigg(\csc(\alpha)\sec(\alpha)\epsilon_{2\text{B}}\left(2\log(\epsilon_{1\text{B}}) - \log(\epsilon_{1\text{L}}) - \log(\epsilon_{1\text{R}})\right) \\ &+\epsilon_{2\text{L}}\left(-\csc(\alpha)\sec(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{B}}) + \frac{(3\cot(\alpha)+2)\csc(\alpha)\sec(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{L}})}{2(\cot(\alpha)+1)} - \frac{\csc(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{R}})}{2(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))}\right) \\ &+\epsilon_{2\text{R}}\left(-\csc(\alpha)\sec(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{B}}) - \frac{\csc(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{L}})}{2(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))} + \frac{(3\cot(\alpha)+2)\csc(\alpha)\sec(\alpha)\log(\epsilon_{1\text{R}})}{2(\cot(\alpha)+1)}\right)\Bigg)\Bigg),\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 4}} = &-\frac{\Omega^4}{128\,\varphi_{z,\text{IN}}\left(\varphi^2_{z,\text{OUT}}-1\right)} \\ &\Big(64\epsilon_{1\text{B}}\epsilon_{2\text{B}} + 16\epsilon_{1\text{B}}\epsilon_{2\text{L}} + 16\epsilon_{1\text{B}}\epsilon_{2\text{R}} + 16\epsilon_{2\text{B}}\epsilon_{1\text{L}} + 16\epsilon_{2\text{B}}\epsilon_{1\text{R}} + \frac{4(\cos(\alpha)-\sin(\alpha))\left(\epsilon_{1\text{L}}-\epsilon_{1\text{R}}\right)\left(\epsilon_{2\text{L}}-\epsilon_{2\text{R}}\right)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)} \\ &\csc^2\left(\frac{1}{4}(2\alpha+\pi)\right)\sec(\alpha)(2\sin(\alpha)+\cos(2\alpha)+3)\left(\epsilon_{1\text{B}}-\epsilon_{1\text{R}}\right)\left(\epsilon_{2\text{B}}-\epsilon_{2\text{L}}\right) \\ &-4\cot(\alpha)\cot^2\left(\frac{1}{4}(2\alpha+\pi)\right)\left(\epsilon_{1\text{B}}-\epsilon_{1\text{L}}\right)\left(\epsilon_{2\text{B}}-\epsilon_{2\text{L}}\right) \\ &+\csc^2\left(\frac{1}{4}(2\alpha+\pi)\right)\sec(\alpha)(2\sin(\alpha)+\cos(2\alpha)+3)\left(\epsilon_{1\text{B}}-\epsilon_{1\text{L}}\right)\left(\epsilon_{2\text{B}}-\epsilon_{2\text{R}}\right) \\ &-4\cot(\alpha)\cot^2\left(\frac{1}{4}(2\alpha+\pi)\right)\left(\epsilon_{1\text{B}}-\epsilon_{1\text{R}}\right)\left(\epsilon_{2\text{B}}-\epsilon_{2\text{R}}\right) \\ &4\left(2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cot(\alpha)\right)\left(\left(\epsilon_{1\text{B}}-\epsilon_{1\text{L}}\right)\left(\epsilon_{2\text{B}}-\epsilon_{2\text{L}}\right)+\left(\epsilon_{1\text{B}}-\epsilon_{1\text{R}}\right)\left(\epsilon_{2\text{B}}-\epsilon_{2\text{R}}\right)\right) \\ &-4\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan(\alpha)\left(\left(\epsilon_{1\text{B}}-\epsilon_{1\text{L}}\right)\left(\epsilon_{2\text{B}}-\epsilon_{2\text{L}}\right)+\left(\epsilon_{1\text{B}}-\epsilon_{1\text{R}}\right)\left(\epsilon_{2\text{B}}-\epsilon_{2\text{R}}\right)\right)\Big),\end{aligned} \tag{104}$$

$$(T^{-,-}_{Sm,Sm})_{\text{Channel 5}} = (6\epsilon_{2\text{B}} + \epsilon_{2\text{L}} + \epsilon_{2\text{R}}) \frac{\Omega^2\left(\Omega^2\varphi_{z,\text{IN}}+1\right)}{8\varphi^2_{z,\text{IN}}\left(\varphi_{z,\text{OUT}}-1\right)\left(\varphi_{z,\text{OUT}}+1\right)}\,. \tag{105}$$

附录 D：多边形上常数函数的傅里叶变换。情况 $q_\perp \neq 0$

首先，对 (x,y) 平面上的多边形应用斯托克斯定理， [36],

$$\iint_{\text{polygon}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \overrightarrow{dA} = \oint_{\text{right-oriented boundary}} \vec{F} \cdot \vec{ds}, \quad (106)$$

其中 $\overrightarrow{dA} = \hat{z}dxdy$。令场 $\vec{F}$取特殊形式 $\vec{F}(x,y) = (\hat{z} \times W)e^{q_\perp \cdot r_\perp}$，其中 $W = (W_x, W_y)$ 是一个常值二维场。使用右向有序对 $(\hat{\mu}_j, \lambda_j)$，沿多边形的每条线段计算式 (106) 中右侧的积分。对每条线段的积分在 $q_\perp \cdot \hat{\mu}_j \neq 0$ 或$q_\perp \cdot \hat{\mu}_j = 0$时会得到不同结果。在计算过程中，我们注意到两个特点：(i) 线段上的求和可以写成顶点上的求和；(ii) 通过对 j^{th}-线段同时使用 $\hat{\mu}_j$ 和 $-\hat{\mu}_j$，可以不再要求多边形采用特定的定向。为此，若将 $\hat{\mu}_j$与顶点 V_j关联，则将 $-\hat{\mu}_j$ 与顶点 V_{j+1}关联。由此得到一个逐顶点公式，求和遍历标记多边形顶点的索引 k

$$\iint_{\text{polygon}} dxdy e^{iq_\perp \cdot r_\perp} = \sum_{k \in \text{vertices}} \pm \frac{W \cdot \hat{\lambda}_k}{W \cdot q_\perp} \frac{1}{q_\perp \cdot \hat{\mu}_k} e^{iq_\perp \cdot V_k}. \quad (107)$$

$\pm$ 是斯托克斯定理中对定向需求的最后遗留。要将这个 $\pm$ 纳入无定向多边形，在多边形内部放置介电常数 ϵ，在外部放置 $\epsilon = 0$，并像（79）中那样定义 ϵ 的变化。

斯托克斯定理中对定向的需求被$\hat{}$使用右向有序对（$\hat{\mu}$, λ）的需求所取代。反过来，这要求当$\hat{\mu}$改变符号时，跳变也改变符号，从而使（107）中的 $\pm$ 成为（$\Delta\epsilon$）$_{\hat{\mu}}$的一部分。由此我们得到公式（81）。

注意，晶胞的四个角对（00）型傅里叶积分有贡献。对于与介电常数无关的通道 1，在晶胞外部采用 $\epsilon = 0$的条件下，这些角的贡献表现为跳变（$\Delta(f_1 f_2)$）$_{\hat{\mu}}$，其值等于 ± 1。

附录 E：多边形上常数函数的傅里叶变换。情形 $q_\perp = 0$

该积分等于多边形的面积。对于多边形的简单的答案是将各个三角形的面积相加，每个三角形产生一项 $\frac{1}{2}\hat{z} \cdot (V_{j+1} \times V_j)$。对我们而言，不利之处在于，顶点 V_{j+1} 和 V_j并未分离，而在 $q_\perp \neq 0$的公式中它们是分离的。从（81）出发，沿选定方向 $\mathcal{D}$取 $q_\perp \to 0$ 的极限

$$q_\perp = s\mathcal{D} \to 0, \text{ as } s \to 0. \quad (108)$$

我们将证明，最终结果与方向 $\mathcal{D}$. 的选择无关。采用这一选择 $q_\perp$，并且 $\mathcal{D} \cdot \hat{\mu} \neq 0$ 对所有 $\hat{\mu}$，公式（81）变为

$$\sum_{\text{vertices}} e^{i\mathcal{D} \cdot Vs} \sum_{\hat{\mu}_{\text{vertex}}} \frac{W \cdot \hat{\lambda}}{W \cdot \mathcal{D}} \frac{1}{s} (-\Delta\epsilon)_{\hat{\mu}} \frac{1}{\mathcal{D} \cdot \hat{\mu}} \frac{1}{s}. \quad (109)$$

在（109）中存在一个二阶奇点，即 s^{-2}，我们需要将其消除。为此，将指数函数展开为泰勒级数，并考察属于沿同一条边定向的 $\hat{\mu}$ 和 $-\hat{\mu}$ 的各项，可以发现二阶奇点被消除了。然而，一阶奇点 s^{-1} 随之产生。沿闭合回路将其贡献求和后，这个奇点也会消失。一旦奇点 s^{-1} 被消除，在极限 $s \to 0$下，我们对每条线段只剩下一项

$$\frac{W \cdot \hat{\lambda}_j}{W \cdot \mathcal{D}} \frac{1}{\mathcal{D} \cdot \hat{\mu}_j} (-\Delta\epsilon)_{\hat{\mu}_j} \frac{1}{2} \left((i\mathcal{D} \cdot V_j)^2 - (i\mathcal{D} \cdot V_{j+1})^2 \right). \quad (110)$$

可以将这一项还原为一种格式，使得每条边对应两个$\hat{\mu}$ 向量。这就是结果（82）。

我们通过证明（82）等于三角形面积之和，来证明由此得到的结果与 W 和 $\mathcal{D}$ 的选择无关。将第 j-$\hat{}$ 条边的顶点记为 V_j 和 V_{j+1}。位于 V_j 和 V_{j+1} 处的分别是（λ_j, $\hat{\mu}_j$）$\hat{}$以及（λ_{j+1}, $\hat{\mu}_{j+1}$）$= (-\lambda_j, -\hat{\mu}_j)$。在计算过程中，我们使用 $V_{j+1} - V_j = \hat{\mu}_j l_j$，其中 l_j 是边的长度。将点积转换为叉积，$W \cdot \lambda = (\hat{z} \times W) \cdot \hat{\mu}$，即可证明该等式

$$\begin{aligned} &\frac{W \cdot \hat{\lambda}_j}{W \cdot \mathcal{D}} \frac{1}{\mathcal{D} \cdot \hat{\mu}_j} (-\Delta\epsilon)_{\hat{\mu}_j} \frac{1}{2} (i\mathcal{D} \cdot V_j)^2 + \\ &\frac{W \cdot \hat{\lambda}_{j+1}}{W \cdot \mathcal{D}} \frac{1}{\mathcal{D} \cdot \hat{\mu}_{j+1}} (-\Delta\epsilon)_{\hat{\mu}_{j+1}} \frac{1}{2} (i\mathcal{D} \cdot V_{j+1})^2 = \\ &(-\Delta\epsilon)_{\hat{\mu}_j} \frac{1}{W \cdot \mathcal{D}} \frac{1}{2} (\hat{z} \times W) \cdot \\ &\left(\frac{V_{j+1} - V_j}{l_j} (\mathcal{D} \cdot V_j) + \frac{V_{j+1} - V_j}{l_j} (\mathcal{D} \cdot V_{j+1}) \right) l_j. \end{aligned} \quad (111)$$

（111）的最后一行中有四项。当我们沿闭合回路遍历时，其中两项之和为零；需注意，由于我们处理的是一个内部具有一种介电常数、外部具有 $\epsilon = 0$ 的多边形，对于所有$\hat{\mu}_j$而言，$(-\Delta\epsilon)_{\hat{\mu}_j}$ 都相同。

剩下的是另外两项之和，根据比奈-柯西向量关系，可将其转化为三角形的有向面积之和 OV_jV_{j+1}，其中 O 是任意选取的原点。

附录 F：平面多边形镶嵌上的积分 (00) 在镶嵌平面上，对于选定的顶点 $\hat{}$ V 以及与该顶点相关的一对 $(\lambda, \hat{\mu})$，沿着 $\hat{\mu}$有一条公共边的两个多边形恰好各贡献一项。沿 $\hat{\mu}$ 的两个介电率跳跃分别源自这两个不同的多边形，每个多边形均被一种介质包围

其介电率为 $\epsilon = 0$。这些多边形跳跃之和实际上等于 $(-\Delta(f_1 f_2))_{\hat{\mu}}$，但定义在镶嵌结构上。由此得到多边形镶嵌的公式 (81)。

附录 G：虚点的平移

虚点出现在一条来自平面 1 的直线与另一条来自平面 2 的直线的交点处，它们分别由 $r_1 = V_{12} + \mu_1 \hat{\mu}_1$ 和 $r_2 = V_{12} + \mu_2 \hat{\mu}_2$ 描述。参数 μ_1 和 μ_2 在实轴上变化。分别在平面 1 中应用平移 $\delta r_1 = (\delta x_1, \delta y_1)$，并在平面 2 中应用平移 $\delta r_2 = (\delta x_2, \delta y_2)$。用一组新参数 $\mu_1^{'}$ 和 $\mu_2^{'}$ 表示，平移后的直线为

$$\begin{aligned}(r_1)_{\text{translated}} =& V_{12} - (\delta r_1 \cdot \hat{\lambda}_1)\hat{\lambda}_1 + \mu_1^{'}\hat{\mu}_1, \\ (r_2)_{\text{translated}} =& V_{12} - (\delta r_2 \cdot \hat{\lambda}_2)\hat{\lambda}_2 + \mu_2^{'}\hat{\mu}_2.\end{aligned} \tag{112}$$

要计算平移后交点的位置 $(V_{12})_{\text{translated}}$，求解 $\mu_1^{'}$ 和 $\mu_2^{'}$，使得 $(r_1)_{\text{translated}} = (r_2)_{\text{translated}}$。使用 $\hat{\mu}_2 \cdot \lambda_1 = -\hat{\mu}_1 \cdot \lambda_2$，即可得到最终结果 (85)。

附录H：类型为 (01)、(10) 和 (11) 的导数乘积的傅里叶变换

我们进一步展开 δ_1 及其他同类项的计算，对于情形 (2)（即 $q_\perp \cdot \hat{\mu} = 0$ 和 $q_\perp \neq 0$），将两个依赖顶点的项的乘积合并到一个指数中

$$e^{iq_\perp \cdot V}(i\hat{\mu} \cdot V) = \frac{d}{ds}\left(e^{iq_\perp \cdot V + si\hat{\mu}\cdot V}\right)|_{s=0}. \tag{113}$$

对于情形 (3)，$q_\perp = 0$，以与上述类似的方式，我们得到

$$\frac{1}{2}(i\mathcal{D} \cdot V)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{ds^2}\right)_{s=0} e^{i(\mathcal{D}\cdot V)s}. \tag{114}$$

为了将情形 (1) 和 (3) 的结果归并在一起，我们发现定义函数 $e^{i(q_\perp \cdot V)^m}$ 很有用；对于 $q_\perp \neq 0$，它等于 $e^{iq_\perp \cdot V}$。对于 $q_\perp = 0$ 以及任意自然数 m，有 $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{ds^2}\right)_{s=0}\left(e^{i(\mathcal{D}\cdot V)s}s^m\right)$。因此

$$e^{i(q_\perp \cdot V)_m} = \begin{cases} e^{i(q_\perp \cdot V)} & \text{for all } m, \text{if } q_\perp \neq 0, \\ \frac{1}{2}(i\mathcal{D}\cdot V)^2 & \text{if } m = 0, \text{and } q_\perp = 0, \\ i\mathcal{D}\cdot V & \text{if } m = 1, \text{and } q_\perp = 0, \\ 1 & \text{if } m = 2, \text{and } q_\perp = 0, \\ 0 & \text{if } m \geqslant 3, \text{and } q_\perp = 0. \end{cases} \tag{115}$$

对于 $q_\perp = 0$，该函数等于泰勒展开中的第 $2 - m$ 项。

借助此函数，来自平面 1 中一对点（即 $(V_1, \hat{\mu})$）对第十六节类型（10）积分的贡献为

$$\begin{aligned} & e^{i(\mathcal{D}\cdot V_1)_{m_x^1 + m_y^1}}(-i\mathcal{D}_x)^{m_x^1}(-i\mathcal{D}_y)^{m_y^1} \\ & \frac{W\cdot\hat{\lambda}}{W\cdot\mathcal{D}}(-\Delta(f_1 f_2)_{\hat{\mu}})\frac{1}{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}}, \end{aligned} \tag{116}$$

其中 $\mathcal{D}$ 是任意值，但须满足条件：对于平面 1 中所有的 $\hat{\mu}$，$\mathcal{D}\cdot\hat{\mu} \neq 0$。来自平面 2 中所有实点（即 V_2）对类型（01）积分的贡献是其镜像。

在受约束平移下，来自虚点 V_{12} 的类型（11）积分贡献具有不同的形式，即

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{all four } \hat{\mu}\text{'s}} e^{i(\mathcal{D}\cdot V_{12})_{m_x^1+m_y^1+m_x^2+m_y^2}} \\ & (\lambda_{1x})^{m_x^1}(\lambda_{1y})^{m_y^1}(\lambda_{2x})^{m_x^2}(\lambda_{2y})^{m_y^2} \\ & \left(i\frac{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1\cdot\hat{\lambda}_2}\right)^{m_x^1+m_y^1}\left(i\frac{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2\cdot\hat{\lambda}_1}\right)^{m_x^2+m_y^2} \\ & \frac{W\cdot\hat{\lambda}}{W\cdot\mathcal{D}}(-\Delta(f_1 f_2)_{\hat{\mu}})\frac{1}{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}}. \end{aligned} \tag{117}$$

为避免带入负号并得到上面的公式，我们使用 $\hat{\mu}_2 \cdot \lambda_1 = -\hat{\mu}_1 \cdot \lambda_2$。对于固定的虚点 V_{12}，求和遍历全部四个 $\hat{\mu}$，其尾部位于 V_{12}。

如有需要，上述求和可以写成一种与规范矢量 W 无关的形式。为此，首先注意到

$$\begin{aligned} & (\lambda_{1x})^{m_x^1}(\lambda_{1y})^{m_y^1}(\lambda_{2x})^{m_x^2}(\lambda_{2y})^{m_y^2} \\ & \left(i\frac{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1\cdot\hat{\lambda}_2}\right)^{m_x^1+m_y^1}\left(i\frac{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2\cdot\hat{\lambda}_1}\right)^{m_x^2+m_y^2} \end{aligned} \tag{118}$$

对于尾部位于 V_{12} 的全部四个 $\hat{\mu}$，其值都相同。

其次，使用如下关系

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{all four } \hat{\mu}\text{'s}} \frac{W\cdot\hat{\lambda}}{W\cdot\mathcal{D}}(-\Delta(f_1 f_2)_{\hat{\mu}})\frac{1}{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}} = \\ & \frac{\left|\hat{\lambda}_1\cdot\hat{\mu}_2\right|}{(\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_1)(\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_2)}(\Delta f)_{\hat{\mu}_1}(\Delta g)_{\hat{\mu}_2} \end{aligned} \tag{119}$$

适用于 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 的任意两种选择，其中，$\hat{\mu}_1$ 的尾部位于 V_{12}，尖端位于直线1；$\hat{\mu}_2$ 的尾部位于 V_{12}，尖端位于直线2。

因此，虚点的贡献可以写成与 W 无关的形式

$$\begin{aligned} & \sum_{V_{12},\text{two } \hat{\mu}\text{'s}} e^{i(\mathcal{D}\cdot V_{12})_{m_x^1+m_y^1+m_x^2+m_y^2}} \\ & \left(i\frac{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1\cdot\hat{\lambda}_2}\lambda_{1x}\right)^{m_x^1}\left(i\frac{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1\cdot\hat{\lambda}_2}\lambda_{1y}\right)^{m_y^1} \\ & \left(i\frac{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2\cdot\hat{\lambda}_1}\lambda_{2x}\right)^{m_x^2}\left(i\frac{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2\cdot\hat{\lambda}_1}\lambda_{2y}\right)^{m_y^2} \\ & \frac{\left|\hat{\lambda}_1\cdot\hat{\mu}_2\right|}{(\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_1)(\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_2)}(\Delta f)_{\hat{\mu}_1}(\Delta g)_{\hat{\mu}_2}. \end{aligned} \tag{120}$$

为证明（119），从四个尾部位于虚点、方向分别位于平面 1 和平面 2 上直线的向量中各选取两个，分别记为 $\hat{}\mu_1$ 和 $\hat{}\mu_2$。另外两个向量为 $-\hat{}\mu_1$ 和 $-\hat{}\mu_2$。使用

$$\begin{aligned}-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}_1}-\Delta(f_1f_2)_{-\hat{\mu}_1}=\\-(-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}_2}-\Delta(f_1f_2)_{-\hat{\mu}_2})\end{aligned}\tag{121}$$

并得到

$$\begin{aligned}\sum_{\text{all four }\hat{\mu}\text{'s}}\frac{W\cdot\hat{\lambda}}{W\cdot\mathcal{D}}(-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}})\frac{1}{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}}=\\\left(\frac{W\cdot\hat{\lambda}_1}{W\cdot\mathcal{D}}\frac{1}{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_1}-\frac{W\cdot\hat{\lambda}_2}{W\cdot\mathcal{D}}\frac{1}{\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_2}\right)\\(-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}_1}-\Delta(f_1f_2)_{-\hat{\mu}_1}).\end{aligned}\tag{122}$$

对于任意的 W、$\mathcal{D}$ 以及两对 $\hat{}$ (λ_1、$\hat{}\mu_1$) 和 (λ_2、$\hat{}\mu_2$)，一个向量恒等式为

$$(W\cdot\hat{\lambda}_1)(\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_2)-(W\cdot\hat{\lambda}_2)(\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_1)=(W\cdot\mathcal{D})(\hat{\lambda}_1\cdot\hat{\mu}_2)\tag{123}$$

将式 (122) 的右端化为如下形式

$$\left(\frac{\hat{\lambda}_1\cdot\hat{\mu}_2}{(\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_1)(\mathcal{D}\cdot\hat{\mu}_2)}\right)(-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}_1}-\Delta(f_1f_2)_{-\hat{\mu}_1}).\tag{124}$$

最后一步是证明

$$\begin{aligned}(-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}_1}-\Delta(f_1f_2)_{-\hat{\mu}_1})(\hat{\lambda}_1\cdot\hat{\mu}_2)=\\(\Delta f_1)_{\hat{\mu}_1}(\Delta f_2)_{\hat{\mu}_2}\left|\hat{\lambda}_1\cdot\hat{\mu}_2\right|.\end{aligned}\tag{125}$$

可以通过逐一考察四种 (λ、$\hat{}\mu$) 对的情况来证明这个最后的等式。另一种方法是注意到，$-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}_1}-\Delta(f_1f_2)_{-\hat{\mu}_1}$ 等于 $(\Delta f)_{\hat{\mu}_1}(\Delta g)_{\hat{\mu}_2}$，至多相差一个符号，即 $-\Delta(f_1f_2)_{\hat{\mu}_1}-\Delta(f_1f_2)_{-\hat{\mu}_1}=\pm(\Delta f_1)_{\hat{\mu}_1}(\Delta f_2)_{\hat{\mu}_2}$。这是因为左端在符号 $\hat{}\mu_1\to-\hat{}\mu_1$ 改变时保持不变，而右端则改变其符号。绝对值消除了这一符号变化，因此等式成立。

附录I：选择介电常数的优化程序

由，.....构造 $\times$ 5 由传递矩阵元组成、仅耦合所选四个模式中的 S 偏振的子矩阵：(0，0)，(−1，0)，(0，−1)，(0，1)。待求解的方程由公式（49）得到。输出集（DIR、POL、BF）由 (±,S,m) 构成，其中 m =1，...，4 来自表 XII。由于 $z=+\infty$处不存在任何源，对于 (–,S,m)，$C^{\text{DIR}}_{\text{POL, BF}}$ 均为零，$m=1,\ldots,4$。在输入端，集合（dir、pol、bf）包含入射模式 (+,S,1) 和反射模式 (–,S,m)，其中 $m=1,\ldots,4$。共有 8 个未知系数，输出端 4 个，输入端另有 4 个。

表 XII. $\theta=17.5^\circ$ 和 $\varphi=0^\circ$的模式排序与瑞利频率

$(M_x,\ M_y)$	m	偏振, m	f_R[吉赫]
(0,0)	1	S偏振1=S偏振(0,0), P1=P(0,0)	0.0
(-1,0)	2	S偏振2=S偏振(-1,0), P2=P(-1,0)	36.6827
(0,-1)	3	S偏振3=S偏振(0,-1), P3=P(0,-1)	50.0289
(0,1)	4	S偏振4=S偏振(0,1), P4=P(0,1)	50.0289
(-1,-1)	5	S偏振5=S偏振(-1,-1), P5=P(-1,-1)	56.7146
(-1,1)	6	S偏振6=S偏振(-1,1), P6=P(-1,1)	56.7146
(1,0)	7	S偏振7=S偏振(1,0), P7=P(1,0)	68.23087
(-2,0)	8	S偏振8=S偏振(-2,0), P8=P(-2,0)	73.36548
(-2,-1)	9	S9=S(-2,-1), P9=P(-2,-1)	84.68336
(-2,1)	10	S10=S(-2,1), P10=P(-2,1)	84.68336

a 第3列中的奇数和偶数偏振-布洛赫-弗洛凯编号分别对应S偏振和P偏振。在处理 20×20 矩阵时，使用第3列中从1到20的索引会更加方便。不过，为了赋予偏振-布洛赫-弗洛凯编号以具体含义，第3列中显示的另外两种样式可能更好。

该 8×5 矩阵将输入列向量（$\boldsymbol{\mathcal{C}}^+_{S1}$，$\boldsymbol{\mathcal{C}}^-_{S1}$，$\boldsymbol{\mathcal{C}}^-_{S2}$，$\boldsymbol{\mathcal{C}}^-_{S3}$，$\boldsymbol{\mathcal{C}}^-_{S4}$）传递为输出（$C^+_{S1}$，$C^+_{S2}$，$C^+_{S3}$，$C^+_{S4}$，0，0，0，0）。为便于阅读，输入端和输出端系数采用不同字体标记。在此近似下，通过固定输入$\boldsymbol{\mathcal{C}}^+_{S1}=1$，我们可以求解关于 8 个未知系数的 8 个方程。由此得到的系数就是所考虑 4 个模式的传输系数和反射系数。为构造优化过程的目标函数，我们采用一系列性质。第一个性质是，在共振频率附近，4×4矩阵（$T^{-,}_{Sm,\ Sn}$）的行列式绝对值达到最小值。第二个性质是，倏逝模式的传输系数和反射系数的绝对值需要达到较高值。第三个性质基于定义为 $1-\left|C^+_{S1}\right|^2-\left|C^+_{S2}\right|^2-\left|\boldsymbol{\mathcal{C}}^-_{S1}\right|^2-\left|\boldsymbol{\mathcal{C}}^-_{S2}\right|^2$的吸收率因子，其定义类似于 [44]中的定义。吸收率因子在共振频率附近达到最大值。我们所采用的目标函数为

$$\begin{aligned}\left|Det(T^{-,-}_{Sm,Sn})\right|+\\\left|\left|C^+_{S1}\right|^2+\left|C^+_{S2}\right|^2+\left|\boldsymbol{\mathcal{C}}^-_{S1}\right|^2+\left|\boldsymbol{\mathcal{C}}^-_{S2}\right|^2-0.5\right|\\+\left|\left|C^+_{S3}\right|-10\right|+\left|\left|C^+_{S4}\right|-10\right|.\end{aligned}\tag{126}$$

(126)中仅列出了倏逝波的透射系数，因为我们预计反射系数的绝对值将与透射值非常接近。我们将10选作该值的目标数值。对于吸收率因子，目标值选为0.5。

对于 37 GHz 至 50 GHz 范围内的固定频率，我们在介电常数构成的 6 维空间中找到了该目标函数的一个局部最小值，其中每个介电常数都限制在 1 到 12 之间。在扫描——

100 个频率后，我们选定的局部最小值为$f = 41.29$ GHz，$Det(T^{-}{}_{,Sm}{}^{-}{}_{,Sn}) = 2.5 \times 10^{-5} - 3.7 \times 10^{-5}i$，$C_{S1}^{+} = 0.59 - 0.0022i$，$\boldsymbol{C}_{S1}^{-} = -0.21 - 0.59i$，$C_{S2}^{+} = 0.041 + 0.31i$，$\boldsymbol{C}_{S2}^{-} = 0.04 + 0.34i$，$C_{S3}^{+} = -10.03 - 0.15i$，$\boldsymbol{C}_{S3}^{-} = -10.61 - 0.18i$，$C_{S4}^{+} = -3.92 + 9.20i$ 和 $\boldsymbol{C}_{S4}^{-} = -4.13 + 9.74i$。我们发现，得到的行列式是一个很小的数值，反射系数和透射系数的绝对值都接近我们设定的值 10。吸收率因子为 0.04，远低于 0.5。这是因为在共振频率附近，传播模式的透射系数和反射系数会在与共振频率略有差异的频率处达到最小值。该局部最小值对应的介电常数为

$$\epsilon_{1\mathrm{B}} = 4.98655, \epsilon_{2\mathrm{B}} = 2.95855, \epsilon_{1\mathrm{L}} = 7.59549, \quad (127)$$
$$\epsilon_{2\mathrm{L}} = 5.663, \epsilon_{1\mathrm{R}} = 5.92965, \epsilon_{2\mathrm{R}} = 1.63434$$

附录 J：复频率平面

实共振频率位于实 Ω 轴上行列式的最小值处。余因子的零点位于复上半平面中，$\mathrm{Im}(f_{zero}) > 0$。对绝对值最小值的搜索

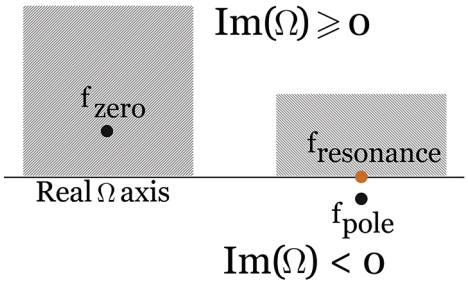

图 26。用于余因子的区域包围零点 f_{zero}。行列式的区域不包含 f_{pole}，但包含共振频率。两个区域均位于实 Ω 轴上方

余因子的值$S(0,0),\ S(0,1)(T^{-},\ -)$给出一个复频率 Ω $_{zero} = 0.213999052599 + 0.000143225473 92i$，此时余因子达到 $-4.17186 \times 10^{-7} + 5.51181 \times 10^{-7}i$的值。使用$c = 0.25$毫米换算为频率后，我们得到 $f_{zero} = 40.8425 + 0.0273351i$ 吉赫。一旦确定该零点的位置，便可通过线性回归估计参数 a 和 b，[38]。

Ω$_{zero}$附近余因子的线性近似，

$$\mathrm{Cofactor}_{S(0,0),S(0,1)}(T^{-,-}) \cong (a + ib)(\Omega - \Omega_{zero}), \quad (128)$$

包含两个未知参数，a 和 b。数值数据由一组组 (Ω，余因子$_{S(0,0),\ S(0,1)}(T^{-},\ -)$) 构成，这些数据是通过使用传递矩阵的解析公式对复频率上半平面进行采样获得的。

行列式的线性近似首先将 Re(Ω$_{resonance}$) = 0.21632449245970709 定位在实轴上行列式绝对值最小的点，此时其值为 1。15869。就频率而言，共振位于 Re($f_{resonance}$) = 41.28635279688047 吉赫。行列式在 Ω $_{pole} = 0.21632449245970709 +$ 附近的线性近似

$$iy_{pole},$$

$$Det(T^{-,-}) \cong (a^{'} + ib^{'})(\Omega - \Omega_{pole}), \quad (129)$$

包含三个未知参数：$a^{'}$、$b^{'}$ 和 y_{pole}。数值数据由采样复频率上半平面中 $Re(\Omega_{resonance})$附近区域所得的成对数据(Ω $Det(T^{-,-})$)组成，采样使用了传递矩阵的解析公式。这次拟合是非线性的，因为存在乘积$(a^{'} + ib^{'})$ y_{pole}。

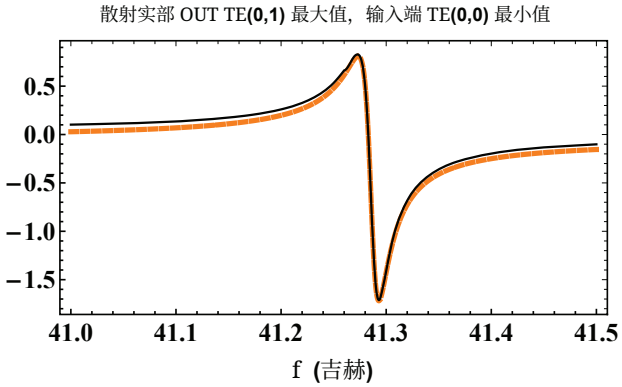

图 27. 散射矩阵元的实部。虚线曲线（橙色）表示零极点近似，而连续曲线（黑色）则由 20×20 传递矩阵使用前 10 个瑞利排序模态得出。

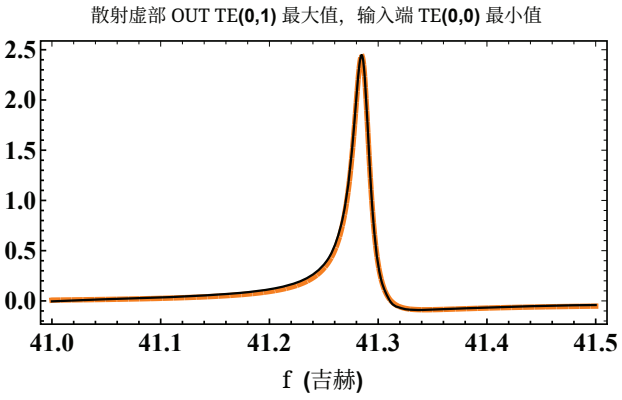

图 28. 散射矩阵元的虚部。虚线曲线（橙色）表示零极点近似，而连续曲线（黑色）则由 20×20 传递矩阵使用前 10 个瑞利排序模态得出。

[1] J. Xiong、E.-L. Hsiang、Z. He、T. Zhan和S.-T. Wu，增强现实与虚拟现实显示：新兴技术与未来展望，《Light: Science & Applications》10，1（2021）。[2] B. C. Kress和I. Chatterjee，混合现实头显的波导合束器：纳米光子学设计视角，《Nanophotonics》10，41（2021）。[3] N. Shlezinger、G. C. Alexandropoulos、M. F. Imani、Y. C. Eldar和D. R. Smith，面向6G极大规模MIMO通信的动态超表面天线，《IEEE Wireless Communications》28，106（2021）。[4] J. Lorenzo、A. L´azaro、R. Villarino和D. Girbau，面向可穿戴射频识别和传感器应用的调制频率选择表面，《《IEEE天线与传播汇刊》》64，4447（2016）。[5] E. Descrovi、T. Sfez、M. Quaglio、D. Brunazzo、L. Do-minici、F. Michelotti、H. P. Herzig、O. J. Martin和F. Giorgis，超薄聚合物脊上的导引布洛赫表面波，《Nano letters》10，2087（2010）。[6] P. Lova、G. Manfredi和D. Comoretto，功能性溶液处理平面一维光子晶体的进展，《Advanced Optical Materials》6，1800730（2018）。[7] R. P. Feynman，用计算机模拟物理学，载于 *Feynman and computation*（CRC出版社，2018），第133–153页。[8] A. Hagar， *Discrete or continuous?: the quest for fundamental length in modern physics*（剑桥大学出版社，2014）。[9] N. E. N¨orlund， *Vorlesungen über differenzenrechnung*，第13卷（J. Springer，1924）。[10] F. Nijhoff和H. Capel，离散Korteweg–de Vries方程，《Acta Applicandae Mathematica》39，133（1995）。[11] M. J. Feigenbaum，一类非线性变换的定量普适性，《Journal of Statistical Physics》19，25（1978）。[12] P. Cvitanovi´c， *Universality in chaos*，2017，3，34，《混沌中的普适性》，载于（劳特里奇出版社，）第–页。[13] B. B. Mandelbrot和B. B. Mandelbrot， *The fractal geometry of nature* 1 1982 ，第卷（WH Freeman，纽约，）。[14] D. J. Korteweg和G. De Vries，XLI. 关于矩形运河中传播的长波形状变化以及一种新型长驻波，《The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science》39，422（1895）。[15] R. Hirota，非线性偏差分方程III；离散正弦–Gordon方程，《Journal of the Physical Society of Japan》43，2079（1977）。[16] R. Hirota，广义Toda方程的离散类似物，《Journal of the Physical Society of Japan》50，3785（1981）。[17] I. Krichever、O. Lipan、P. Wiegmann和A. Zabrodin，量子可积模型与离散经典Hirota方程，《Communications in Mathematical Physics》188，267（1997）。[18] O. Lipan、P. B. Wiegmann和A. Zabrodin，量子传递矩阵的融合规则：格拉斯曼流形上的动力系统，《Modern Physics Letters A》12，1369（1997）。[19] J. Pendry和A. MacKinnon，光子色散关系的计算，《Physical Review Letters》69，2772（1992）。[20] J. Pendry，《光子能带结构》，《现代光学杂志》41，209（1994）。[21] J. Pendry 和 P. Bell，《电磁波的传递矩阵技术》，载于 *Photonic Band Gap Materials*（Springer，1996），第203–228页。[22] Z.-Y. Li 和 L.-L. Lin，《利用基于平面波的传递矩阵方法求解光子能带结构》，《物理评论E》67，046607（2003）。[23] L. L. S´anchez-Soto、J. J. Monz´on、A. G. Barriuso 和 J. F. Cari˜nena，《传递矩阵：一种几何视角》，《物理学报告》513，191（2012）。[24] D. Rhazi 和 N. Atalla，《一种在传递矩阵方法中考虑尺寸效应的简单方法》，《美国声学学会杂志》127，EL30（2010）。[25] P. Yeh、A. Yariv 和 C.-S. Hong，《周期性分层介质中的电磁波传播。I. 一般理论》，《美国光学学会杂志》67，423（1977）。[26] S. Fan，《侧耦合波导-腔系统中的尖锐非对称线型》，《应用物理学快报》80，908（2002）。[27] S. F. Koufidis 和 M. W. McCall，《M¨obius变换与耦合波理论：传递矩阵的完整识别》，《物理评论A》106，062213（2022）。[28] L. Faddeev，《可积模型中的代数Bethe拟设如何发挥作用》，arXiv预印本 hep-th/9605187（1996）。[29] B. Grammaticos、T. Tamizhmani 和 Y. Kosmann-Schwarzbach，《离散可积系统》，《离散可积系统》644（2004）。[30] J. B. Pendry， *Low energy electron diffraction: the theory and its application to determination of surface structure*，2 1974（学术出版社，）。[31] C. E. J. Png 和 Y. Akimov，《纳米光子学与等离激元学：集成视角》，（2017）。[32] U. Fano，《电弧光谱极限附近稀有气体的吸收光谱》，《新物理学杂志》（1924-1942）12，154（1935）。[33] I. Avrutsky、R. Gibson、J. Sears、G. Khitrova、H. Gibbs 和 J. Hendrickson，《用于描述和分类Fano共振的线性系统方法》，《物理评论B》87，125118（2013）。[34] J. Schwinger、L. L. DeRaad Jr、K. Milton 和 W.-y. Tsai， *Classical electrodynamics*（Westview出版社，1998）。[35] S.-W. Lee 和 R. Mittra，《多边形形状函数的傅里叶变换及其在电磁学中的应用》，《IEEE天线与传播汇刊》31，99（1983）。[36] J. Wuttke，《多边形和多面体的形状因子（傅里叶形状变换）》，arXiv预印本 arXiv:1703.00255（2017）。[37] 全波CST Microwave Studio。[38] W. R. Inc.，《Mathematica》，11.3版，尚佩恩，伊利诺伊州，2018。[39] M. Barbuto、Z. Hamzavi-Zarghani、M. Longhi、A. Monti、D. Ramaccia、S. Vellucci、A. Toscano 和 F. Bilotti，《超表面3.0：构建智能电磁环境的新范式》，《IEEE天线与传播汇刊》（2021）。[40] J. Zhou、P. Zhang、J. Han、L. Li 和 Y. Huang，《用于无线电能传输和能量采集的超材料与超表面》，《IEEE会刊》（2021）。[41] H. A. Atwater 和 A. Polman，《用于改进

光伏器件的等离激元学》，《自然材料》**9**，205（2010）。[42] A. A. Eteng、H. H. Goh、S. K. A. Rahim 和 A. Alo-mainy，《无线供电网络中用于微波能量传输与采集的超表面综述》，IEEE Access **9**，27518（2021）。[43] D. Ferreira、R. F. Caldeirinha、I. Cuinas 和 T. R. Fernandes，频率选择结构的制造材料与生产方法综述 [无线专栏], **60**, IEEE天线与传播杂志（）。[44] J. Polo、T. Mackay 和 A. Lakhtakia，*Electromagnetic surface waves: a modern perspective* 2013 （Newnes，）。110 2018