arXiv:2303.06767v1 [math.GN] 12 Mar 2023

关于 T_1 紧拓扑空间中 Hutchinson算子的注记

MICHA L MORAYNE 和 ROBERT RA LOWSK I

Abstract. 在 T_1 紧拓扑空间中，压缩迭代函数系统（迭代函数系统；从该空间映射到自身的有限个闭映射组成的族）的 Hutchinson算子可能不是闭映射。然而，压缩迭代函数系统的 Hutchinson算子始终具有唯一不动点。

迭代函数系统（简称：迭代函数系统）是从 X到 X的任意有限个 $\mathcal{F}=\{f_1,\ldots,f_m\}$ 闭映射组成的族。我们称一个迭代函数系统 $\mathcal{F}=\{f_1,\ldots,f_m\}$ 是压缩的，如果对于任意开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_\lambda:\ \lambda\in\Lambda\}$，都存在 $n\in\mathbb{N}$，使得对于任意序列（i_1，…，i_n），$1\leq i_j\leq m$，集合 $f_{i_1}\circ\ldots\circ f_{i_n}[X]$ 包含于覆盖 $\mathcal{U}$的某个元素 U_α 中。映射 $f:\ X\to X$ 称为拓扑压缩，如果仅由该映射 f 组成的迭代函数系统是压缩的。等价地（ [4]中的定理4），若 f 是闭映射且 $f:\ X\to X$，则称其为拓扑压缩。

（$\star$）对于任意两个不同的点 x、$y\in X$，都存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $f^n[X]\subseteq X\setminus\{x\}$ 或 $f^n[X]\subseteq X\setminus\{y\}$。

由 Lebesgue数引理可知，在紧致度量空间上由 Lipschitz压缩映射组成的每个迭代函数系统，在上述意义下都是压缩的。令 2^X为 X的所有非空闭子集组成的族。 2^X 上的 Vietoris拓扑由所有形如以下形式的集合组成的基生成:

$$S(V_0;V_1,\ldots,V_k):=\{K\in 2^X:K\subseteq V_0,K\cap U_i\neq\emptyset,1\leq i\leq k\},$$

其中， $k\in\mathbb{N}$和 V_0、V_1、.....、V_k是 X的开子集。赋予 Vietoris拓扑的空间 2^X称为 X的超空间。已知，如果 X 是一个 T_1紧空间，那么其超空间 2^X （[3]）也是紧空间。

设 $\mathcal{F}=\{f_1,\ldots,f_m\}$是 T_1空间 X上的一个迭代函数系统。由 $\mathcal{F}$诱导的 Hutchinson算子$F:\ 2^X\to 2^X$ 定义为以下公式:

$$F(K):=\bigcup_{i=1}^{m}f_i[K]$$

（见 [2]）。如果 $K\in 2^X$ 是由迭代函数系统$\mathcal{F}$ 诱导的 Hutchinson算子的不动点，我们称 K 为 $\mathcal{F}$的吸引子。

在 [4] 中证明了以下定理（分别为 [4],中的定理 3、定理 6 和推论 7）。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 54D10、54D30、54E52、54H25、54H20。
Key words and phrases. 不动点； T_1 空间；紧空间；吸引子、压缩、Hutchinson算子。Robert Ra lowski 的研究部分获得了来自弗罗茨瓦夫科技大学纯数学与应用数学学院的资助，资助编号为 8211204601、8211104160 和 MPK：9120730000。

定理 A。如果 X 是一个 T_1 紧空间， $f\colon X \to X$ 是一个拓扑压缩，则映射 f存在唯一不动点。

定理 B. 设 X 是一个 T_1 紧空间。设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的压缩迭代函数系统。那么，如果由 $\mathcal{F}$ 诱导的 Hutchinson算子 F 是闭的，则 F 是 2^X 上的拓扑压缩。

定理 C. 如果 X 是一个 T_1 紧空间，那么每个诱导出闭 Hutchinson算子的压缩迭代函数系统都有一个唯一的吸引子；换言之：由该迭代函数系统诱导的 Hutchinson算子有一个唯一不动点。

当然，定理 C 可由定理 A 和定理 B 推出。

定理 C 的结论中的吸引子是唯一的。还应指出，对于定义在 T_1 紧空间上的迭代函数系统而言，吸引子的存在本身并不需要对该迭代函数系统附加任何条件（例如要求它是压缩的）。具体而言，下面的定理（ [4] 中的定理5）成立。

定理 D.如果 X 是一个 T_1 紧空间，那么 X 上的任意迭代函数系统都有一个吸引子；换言之，由 $\mathcal{F}$ 诱导的 Hutchinson算子 F 有一个不动点。

由压缩迭代函数系统诱导的 Hutchinson算子是否总是闭的，这是一个值得探讨的问题。我们将构造一个 T_1 紧拓扑空间，以及该空间上的一个压缩迭代函数系统，使其诱导出一个非闭的 Hutchinson算子。我们将这一空间和迭代函数系统的存在性表述为一个定理。

定理1. 存在一个 T_1 紧空间 X 和一个压缩迭代函数系统，该系统诱导出的 Hutchinson算子不是闭的（作为从 2^X 到 2^X的映射）。

证明。令

$$\mathrm{ODD} = \{1, 3, 5, \ldots\}$$

and

$$\mathrm{EVEN} = \{2, 4, 6, \ldots\}.$$

Let

$$X = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$$

其中，当满足以下条件时， $a \neq b$、 a、 $b \notin \mathbb{N}$以及集合 $A \subseteq X$ 是开集:

i) $A \subset \mathrm{ODD}$,

or

ii) $A \subseteq \mathbb{N}$ 且集合 ODD $\setminus A$ 是有限集,

or

iii) $A \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ 且 A 是 X中的余有限集。

我们将迭代函数系统 $\mathcal{F}$ 定义为

$$\mathcal{F} = \{f, g\},$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{if} \quad x = a, b, \\ b & \text{if} \quad x = 2n, n \in \mathbb{N}, \\ 2n & \text{if} \quad x = 2n-1, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

and

$$g(x) = \begin{cases} b & \text{if} \quad x = a, b, \\ a & \text{if} \quad x = 2n, n \in \mathbb{N}, \\ 2n & \text{if} \quad x = 2n-1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

设 $E \subseteq X$ 为非空闭集。如果 E 是有限的，那么 $f[E]$ 也是有限的，因此是闭集。如果 E 是无限的，那么 a、$b \in E$ 和 $E \cap$ 甚至 $\neq \emptyset$。于是 $\{a, b\} \subseteq f[E] \subseteq \{a, b\} \cup$ 甚至是一个闭集。

因此， f 是一个闭映射。类似地，可以证明 g 是闭的。

现在考虑一个复合 $h_n \circ h_{n-1} \circ \ldots \circ h_2 \circ h_1$，其中每个 h_i 都等于 f 或 g。因为 $f[X] = g[X] =$ 为偶数， $\cup \{a, b\}$ 我们有 $h_1[X] =$ 为偶数， $\cup \{a, b\}$。因为

$$f[\text{EVEN} \cup \{a, b\}] = g[\text{EVEN} \cup \{a, b\}] = \{a, b\}$$

我们有

$$h_2 \circ h_1[X] = \{a, b\}.$$

因为 $f[\{a, b\}] = \{a\}$ 和 $g[\{a, b\}] = \{b\}$，我们有 $n \geq 3$

$$h_n \circ h_{n-1} \circ \ldots \circ h_2 \circ h_1[X] = \{a\}$$

or

$$h_n \circ h_{n-1} \circ \ldots \circ h_2 \circ h_1[X] = \{b\},$$

因此，IFS $\mathcal{F} = \{f, g\}$ 是压缩的。

设 F 为由 $\mathcal{F}$ 诱导的 Hutchinson算子，即 $F\colon\ 2^X \to 2^X$ 定义为

$$F(E) := f[E] \cup g[E].$$

我们将证明，作为从 2^X 到 2^X的映射， F 不是闭的。

单点集 $\{a\}$ 不属于超空间 2^X 通过 F得到的像 $F[2^X]$。因此，只需证明 $\{a\} \in \overline{F[2^X]}$即可。设 $S(V_0;\ V_1,\ ...,\ V_k)$ 是 $\{a\}$ 的一个基邻域，这里它简单地意味着 $a \in \bigcap_{i=0}^{k} V_i$。因此，集合 $\bigcap_{i=0}^{k} V_i$ 是 a的一个开邻域。于是，它必定是 X 的余有限子集，并且对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $2n \in \bigcap_{i=0}^{k} V_i$。这意味着 $\{2n\} \in S(V_0;\ V_1,\ ...,\ V_k)$。我们还有 $\{2n\} = F(\{2n-1\})$。因此 $S(V_0;\ V_1,\ ...,\ V_k) \cap F[2^X] \neq \emptyset$。我们得出结论： $\{a\} \in \overline{F[2^X]} \setminus F[2^X]$。

□

我们已经证明，在紧T_1 空间上压缩迭代函数系统的 Hutchinson算子可能不是闭的，因此它不是拓扑压缩，因为闭性是定义拓扑压缩的条件之一。为了直接应用定理 A，我们在定理 C 的假设中假定 [4] Hutchinson算子是闭的。然而事实证明，要得到关于由压缩迭代函数系统诱导的 Hutchinson算子的唯一不动点的结论，并不需要假定 Hutchinson算子是闭的。也就是说，我们将在此证明定理 C 的以下更强版本。

定理2. 如果 X 是一个 T_1 紧空间，那么每个压缩迭代函数系统都有一个唯一的吸引子；换句话说：由该迭代函数系统诱导的Hutchinson算子有一个唯一不动点。

我们给出该定理的两种证明。在这两种情况下，我们都使用了由任意迭代函数系统（[4]）诱导的Hutchinson算子至少存在一个不动点这一事实，但第一种证明相当直接；第二种证明更简短，但更多地依赖于在 [4]中证明的一些事实。

证明 1. 设 $\mathcal{F} = \{f_1 \ldots, f_m\}$ 是一个压缩迭代函数系统。设 F 是由 $\mathcal{F}$ 诱导的 Hutchinson算子。根据 [4] F 中的定理5， F 有一个不动点。假设 E_1、 $E_2 \in 2^X$ 是 F 的两个不同的不动点。例如，设 $z \in E_1 \setminus E_2$。设$U = E_2^c$ 和 $V = \{z\}^c$。我们有 $U \cup V = X$。由于 $\mathcal{F}$ 是一个压缩迭代函数系统，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得对于每个序列（i_1，...， i_n）， $\in \{1, \ldots, m\}^n$

$$f_{i_n} \circ \ldots \circ f_{i_1}[X] \subseteq U \text{ or } f_{i_n} \circ \ldots \circ f_{i_1}[X] \subseteq V.$$

由于 E_1 是 F 的一个不动点，我们有 $F^n[E_1] = E_1$。因此，存在 $s \in E_1$ 以及一个序列（i_1，...， i_n） $\in \{1, \ldots, m\}^n$，使得

$$f_{i_n} \circ \ldots \circ f_{i_1}(s) = z$$

这意味着

$$f_{i_n} \circ \ldots \circ f_{i_1}[X] \subseteq U.$$

因为

$$f_{i_n} \circ \ldots \circ f_{i_1}[E_2] \subseteq f_{i_n} \circ \ldots \circ f_{i_1}[X]$$

我们推断出

$$f_{i_n} \circ \ldots \circ f_{i_1}[E_2] \subseteq U.$$

由于 $U \cap E_2 = \emptyset$ 我们得到

$$f_{i_n} \circ \ldots \circ f_{i_1}[E_2] \setminus E_2 \neq \emptyset$$

。因此

$$F(E_2) \setminus E_2 = \bigcup_{(j_1,\ldots,j_n) \in \{1,\ldots,m\}^m} f_{j_n} \circ \ldots \circ f_{j_1} \setminus E_2 \neq \emptyset,$$

这显然与 E_2 是 F的不动点相矛盾。证明完毕。

□

证明 2. 通过检查 [4] 中定理4（此处为上文的定理 B）的证明可以看出，证明Hutchinson算子具有性质（$\star$）时，并未使用该算子是闭的这一假设。

设 F 为由我们的迭代函数系统 $\mathcal{F}$诱导的 Hutchinson算子。设 E_1 和 E_2 为 F的两个不同的不动点。对于每个$n \in \mathbb{N}$，有 F^n（E_1） $= E_1$和 F^n（E_2） $= E_2$。因此

$$\{E_1, E_2\} \subseteq F^n[2^X]. \tag{1}$$

集合 $U = \{E_1\}^c$、 $V = \{E_2\}^c$ 是 2^X 的一个开覆盖，并且由于 F 满足 **(⋆)**，对于某个 n，要么 $F^n[2^X] \subseteq U$，要么 $F[2^X] \subseteq V$，但这与 **(1)** 矛盾。□

References

[1] R. Engelking, 《一般拓扑学》, Pa ´nstwowe Wydawnictwo Naukowe, 华沙, 1977 年。[2] J. Hutchinson, 《分形与自相似性》, 《印第安纳大学数学杂志》30（1981）, 713–747。[3] E. Michael, 《子集空间上的拓扑》, 《美国数学学会汇刊》71（1951）, 152–182。[4] M. Morayne, R. Ra lowski, 《Baire 定理、Banach 不动点定理的一个类比及紧空间中的吸引子》, 《数学科学通报》183（2023）。 T_1 J. Munkers, 《拓扑学》, 普伦蒂斯·霍尔出版社, 2000 年。

Michał Morayne: Faculty of Fundamental Problems of Technology, Wrocław University of Science and Technology, 50-370 Wrocław, Poland.

Robert Rałowski: Faculty of Pure and Applied Mathematics, Wrocław University of Science and Technology, 50-370 Wrocław, Poland.

Email address: michal.morayne@pwr.edu.pl
Email address: robert.ralowski@pwr.edu.pl