arXiv:2303.06780v1 [math.AG] 12 Mar 2023

具有不同希尔伯特函数的特殊三元形式的 Waring 分解

ELENA ANGELINI、LUCA CHIANTINI 和 ALESSANDRO ONETO

Abstract. 我们证明，存在一些三元形式，它们拥有基数等于 Waring 秩的伴随点集，但这些点集具有不同的希尔伯特函数和不同的正则性。为此，我们利用射影平面中点集的链接理论和 Cayley-Bacharach 性质。

1. 引言 Introduction

1.1. Waring 分解。 设 $S = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} S_d = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ 是一个以复系数为系数、由 n 个变量构成的标准分次多项式环。

定义 1.1（Waring 秩）。给定一个次数为 d 的齐次多项式 $f \in S_d$， f 的一个 Waring 分解是将其表示为若干线性形式的 d 次幂之和，即

$$f = \sum_{i=1}^{r} \ell_i^d, \quad \ell_i \in S_1. \tag{1.1}$$

这类分解的最小长度 r 即为 Waring 秩，记作 rk(f)。

Waring 分解的研究源于十九世纪，这得益于 Sylvester[38, 39], Clebsch [17], Richmond [34], Palatini [29, 30], Terracini [40], 等众多学者的工作。近几十年来，这一问题重新引起了广泛关注。Alexander 和 Hirschowitz 于 1995 年提出的著名定理确定了任意变量数和次数下的一般 Waring 秩 [1]。人们对 Waring 分解的关注也源于它与张量分解的联系；在本例中，具体而言是对称张量。事实上，张量分解在多种应用中有着广泛用途，例如参见 [24, 25]。众所周知，大多数张量分解的计算都是 NP-难问题，而对称张量的情形也被猜想如此 [22]。因此，对相关代数结构和几何结构进行理论研究，有助于进一步阐明这些问题。

1.2. 伴随点集。 Waring 分解可以用 Veronese 簇来进行几何解释。考虑如下 Veronese 嵌入：

$$\nu_d : \mathbb{P}S_1 \longrightarrow \mathbb{P}S_d, \qquad [\ell] \mapsto [\ell^d].$$

定义 1.2（伴随点集）。给定 $f \in S_d$ 和点集 $A \subset \mathbb{P}S_1$，如果 A 对 f 是伴随的，即 $[f] \in \langle \nu_d(A)\rangle$，我们就称之为伴随。如果不存在子集 $A' \subset A$ 使得 $[f] \in \langle \nu_d(A')\rangle$，则称 A 是非冗余的。如果 A 的基数等于 f 的 Waring 秩，则称 A 计算了 f（的秩）。

多项式的任意 Waring 分解 $f \in S_d$ 都有一个几何对应物，即点集$A \subset \mathbb{P}S_1$与 f 伴随；也就是说，方程（1.1）等价于表述 $[f] \in \langle \nu_d（A）\rangle$对于 $A = \{[\ell_1], \dots, [\ell_r]\} \subset \mathbb{P}S_1$成立。这一几何解释使我们能够定义关于任意代数簇$X \subset \mathbb{P}^N$的秩。也就是说，任意 秩 关于 $p \in \mathbb{P}^N$ 的 X 是点集的最小基数 $A \subset X$使得 $p \in \langle A\rangle$。

将 Waring 分解与点集联系起来的一种更具代数性的方法是通过 湮灭理论。根据 Macaulay [26] （另见 [23, 引理 2。14]），底层次数为 d 的 Artinian Gorenstein 分次代数与次数为 d 的齐次多项式之间存在一一对应关系。令 $R = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} R_d = \mathbb{C}[y_0, \dots, y_n]$ 为另一个多项式环，并考虑 对偶理想作用 在 R上通过偏导数对 S的作用，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14C20、14N07；次要分类：13A02、13C40、14N05、15A69。

作者是意大利GNSAGA-INDAM的成员。

也就是说，对于任意 $g \in R_e$、$f \in S_d$，我们定义 $g \circ f := g(\partial_0, \ldots\ldots, \partial_n)f \in S_{d-e}$。给定 $f \in S_d$，f 的对偶理想是关于湮灭作用的 f 的湮灭子，即，

$$\mathrm{Ann}(f) := \{g \in R \ : \ g \circ f = 0\} \subset R.$$

Macaulay 对偶性断言，Artin 代数 $A = R/J$ 是底层次数为 d 的 Gorenstein 代数，当且仅当 $J = \mathrm{Ann}(f)$ 对某个 $f \in R_d$ 成立。阿波罗性引理，见 [23, 引理 1。15], 断言，多项式 $f \in S_d$ 的 Waring 分解与满足 $I(A) \subset \mathrm{Ann}(f)$ 的点集 $A \subset \mathbb{P}S_1$ 相对应；也就是说，方程（1.1）等价于称 $I(A) \subset \mathrm{Ann}(f)$ 对于 $A = \{[\ell_1], \ldots, [\ell_r]\} \subset \mathbb{P}S_1$ 成立。换言之，对 Waring 分解的研究等价于研究 $\mathbb{P}S_1$ 中点集的理想，即包含于 Artin-Gorenstein 理想中的高度为一的根齐次理想。

1.3. 伴随点集的希尔伯特函数。代数簇的大多数代数不变量都由希尔伯特函数编码。给定一个齐次理想 $I \subset R$，令 $I_d = I \cap R_d$ 表示其次数为 d 的齐次部分。R/I 的希尔伯特函数是数值函数 $h_{R/I} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，其中

$$h_{R/I}(d) := \dim_{\mathbb{C}}[R_d/I_d] = \dim_{\mathbb{C}} R_d - \dim_{\mathbb{C}} I_d \tag{1.2}$$

如果 $A \subset \mathbb{P}S_1$ 是一个点集，我们记 h_A 为 $R/I(A)$ 的希尔伯特函数，其中 $I(A)$ 是 A 的定义齐次理想。对约化点集的希尔伯特函数的研究已成功用于计算 Waring 秩。例如，给定多项式的对偶理想的希尔伯特函数为该多项式的 Waring 秩提供了一个下界。在某些情况下，已证明这个下界是最优的，参见例如 [9, 8]。

如果一个多项式存在唯一的最小 Waring 分解，我们就称该多项式是可辨识的。值得一提的是，秩为 r 且严格小于一般情形秩的一般齐次多项式是可辨识的，以下特殊情形除外：$(n, d, r) \in \{(2, 6, 9)、(3, 4, 8)、(5, 3, 9)\}$，参见 [16]。在 [4, 2, 3], ，研究者利用射影平面中点集的 Cayley-Bacharach 性质和链接理论，提出了用于判定一个形式是否可辨识的判据。另一方面，当多项式不可辨识时，研究计算该多项式秩的伴随点集族也很有意义，参见 [33]。在 [28], ，研究者根据计算多项式秩的伴随点集可能具有的希尔伯特函数，对低秩多项式进行了分类。

众所周知，点集的希尔伯特函数在达到其基数之前严格递增。我们将 A 的正则性称为使 A 的希尔伯特函数稳定的最小整数 i，即满足 $h_A(i) = h_A(i+1)$的最小整数。

1.4. 问题。在这篇简短的文章中，我们讨论以下问题。

问题1.3（[28, 问题2.11]）。设 $f \in S_d$。所有计算 f 秩的点集是否具有相同的正则性？更一般地说，它们是否具有相同的希尔伯特函数？

对于二元形式，已知答案是肯定的（$n = 2$），因为射影直线上所有基数相同的点集具有相同的希尔伯特函数；对于单项式 $x_0^{d_0} \cdots x_n^{d_n}$，这是因为所有计算该秩的点集都已知为生成元次数为$d_1 + 1$，……，$d_n + 1$ 的完全交，其中 $d_0 \leq d_i$ 对所有 i均成立，参见 [7]。在本文中，我们证明，对于三元形式（1.3），当次数足够大时，问题的答案是否定的。我们给出两种情形。在第3.1节中，我们考察秩为 22（即一般秩）的 10 次三元形式。在这些形式中，我们研究对偶理想中恰有一条五次曲线的特殊形式。我们在定理3.1 中证明，这样的一般形式具有一个位于该五次曲线上的分解，以及一个不包含于该五次曲线中的分解。在证明过程中，我们注意到，存在一些秩为 22 且对偶理想中有唯一一条五次曲线的 10 次三元形式；相对于这条五次曲线，它们具有更高的秩，参见注3.7。我们回顾一下，催化矩阵与某些分解的希尔伯特函数之间联系的研究也曾用于 [15]，在那里对秩为九的三元六次形式进行了完全分层。在第3.2节中，我们考察秩为 30（即严格次一般）的 13次三元形式。在定理3.8中，我们证明，对于一个 13 次三元形式，存在两个计算其秩的 30 点集，且它们具有不同的正则性。我们的证明遵循 [4, 2, 3], 的思想，利用射影平面中点的希尔伯特函数的性质，尤其是链接理论。在第4节中，我们借助代数软件 Macaulay 的支持给出一个显式构造 2 [21]。

2. Algebraic properties of points in $\mathbb{P}^n$

2.1. 点集的希尔伯特函数，其中 $\mathbb{P}^n$。 设 $A \subset \mathbb{P}^n$ 是一个基数为 $\ell(A)$的点集。我们在（1.2）中回顾了希尔伯特函数的定义，其中 A。其一阶差分是由下式给出的数值函数：

$$Dh_A : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad Dh_A(i) := h_A(i) - h_A(i-1).$$

我们回顾一下 $\mathbb{P}^n$ 中点的希尔伯特函数的一些基本性质，这些性质将在后文使用。关于包括证明在内的详细论述，请参阅 [13] 。

引理 2.1. [13, 引理 2.16、命题 2.17、命题 2.18] 设 $A \subset \mathbb{P}^n$ 为一个基数为$\ell(A)$的点集。

(1) $h_A(j) \le \ell(A)$，对所有 j成立；(2) $Dh_A(j) = 0$，当 $j < 0$时；(3) $h_A(0) = Dh_A(0) = 1$；(4) $Dh_A(j) \ge 0$，对所有 j成立；(5) $h_A(i) = \sum_{j=0}^{i} Dh_A(j)$；(6) $h_A(j) = \ell(A)$，对所有 $j \gg 0$ 成立；(7) $Dh_A(j) = 0$，当 $j \gg 0$时；(8) $\sum_{j=0}^{\infty} Dh_A(j) = \ell(A)$；(9) 对任意 $A' \subset A$，$h_{A'}(j) \le h_A(j)$，且对任意 j，$Dh_{A'}(j) \le Dh_A(j)$；(10) 若 $Dh_A(j) < j$，则 $Dh_A(j) \ge Dh_A(j+1)$。

最后，我们记

$$h^1_A(d) := \ell(A) - h_A(d) = \sum_{i=d+1}^{\infty} Dh_A(i).$$

下面的命题使我们能够判断：给定两个点集，是否存在一个给定次数的齐次多项式，使得它们都与该多项式伴随。

命题 2.2. [2, 命题 2.19] 设 A、$B \subset \mathbb{P}^n$ 为有限点集，且 $Z = A \cup B$。那么，对于任意 $d \in \mathbb{N}$,

$$\dim\left(\langle \nu_d(A)\rangle \cap \langle \nu_d(B)\rangle\right) = \ell(A \cap B) - 1 + h^1_Z(d).$$

2.2. 中点的联络理论 $\mathbb{P}^2$。 我们将在此描述一些构造，这些构造将在第 3 节中用于构造回答问题 1.3的例子。这些是 联络理论中的基本构造；关于该理论的完整介绍，请参阅 [32, 27] 。

定义 2.3. 设 A、$B \subset \mathbb{P}^2$ 为两个点集。若存在一个完全交 Z，使得 $I_B = I_Z : I_A$，则称 A 与 B 链相联。当 $A \cap B = \emptyset$时，这等价于说 $Z = A \cup B$。我们称 B 为相对于 Z的 A 残余集。

$\mathbb{P}^2$ 中的一组点是余维 2 的算术 Cohen–Macaulay，因此根据希尔伯特–伯奇定理可得到一个最小自由分解，见 [20, 第 3A 节]。如果 A 与 B 链相联，那么可以通过映射锥构造，从 A 的一个 Hilbert-Burch 矩阵中恢复出 B 的 Hilbert-Burch 矩阵，见 [27, 命题 5.210]。

设 $S(i)$为分次因 i而平移的多项式环，即 $S(d)_i := S_{d+i}$。对于每个分次的 S-模，也使用类似的记号。如果 A 和 B 通过型为 (d_1, d_2) 的完全交 Z 链相联，那么我们有以下自由分解

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S(-d_1-d_2) & \to & S(-d_1)\oplus S(-d_2) & \to & I_Z & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{M} & F_0 & \longrightarrow & I_A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $\phi : S(-d_1) \oplus S(-d_2) \to F_0$ 是由最右侧垂直箭头诱导的映射，该箭头对应于包含 $I_Z \subset I_A$，而 M 是 A的 Hilbert-Burch 矩阵。于是，通过映射锥构造， I_B 的一个分解为

$$0 \to F_0(-d_1-d_2)^\vee \xrightarrow{(\phi|M)^t} \begin{array}{c} S(-d_1)\oplus S(-d_2) \\ \oplus \\ F_1(-d_1-d_2)^\vee \end{array} \to I_B \to 0.$$

两个链相联点集之间的 Hilbert 函数满足以下关于其一阶差分的公式：

$$Dh_B(i) + Dh_A(d_1 + d_2 - i - 2) = Dh_Z(i), \tag{2.1}$$

见 [18, 定理 3] 或 [27, 推论 5.2。19]。

2.3. Cayley-Bacharach 性质。我们在此还回顾一些关于射影空间中点集的 Cayley-Bacharach 性质的基本事实。利用这些性质，可以理解满足 $A \cup B$ 其中 A 和 B 与同一个齐次形式伴随的点集的可能 Hilbert 函数。这些性质对于为 [4, 2, 3] 中形式的可识别性提供证书至关重要。

定义 2.4. 设 $Z \subset \mathbb{P}^n$ 为一个点集。我们称其在次数 d ($CB(d)$) 上满足 Cayley-Bacharach 性质，如果对于所有 $p \in Z$，每个在 $Z \setminus \{p\}$ 处消失的次数为 d 的形式也在p处消失。

命题 2.5。 [2, 命题 2.25] 设 $f \in S_d$，且 A 是一个关于 f 伴随的非冗余点集。设 B 是另一个关于 f 伴随的非冗余点集，满足 $A \cap B = \emptyset$。那么，集合 $Z = A \cup B$ 满足 $CB(d)$。

定理 2.6。[4, 定理 4.9] 设 $Z \subset \mathbb{P}^n$ 是满足 $CB(d)$ 的点集。那么，对于任意 $i \in \{0, \dots, d+1\}$,

$$\sum_{j=0}^{i} Dh_Z(j) \leq \sum_{j=0}^{i} Dh_Z(d+1-j).$$

2.4. 割线簇与 Terraccini轨迹。处理 Waring 分解的几何框架是 Veronese 簇的割线簇，见 [10, 6]。给定一个不可约代数簇 $X \subset \mathbb{P}^N$，其 r 阶割线簇是一个不可约簇，定义为由 r 元点组在 X 上张成的线性空间的并集的 Zariski闭包，即：

$$\sigma_r(X) := \overline{\bigcup_{p_1,\dots,p_r \in X} \langle p_1, \dots, p_r \rangle} \subset \mathbb{P}^N.$$

若 X 是 d的第 $\mathbb{P}S_1$阶 Veronese 嵌入，那么根据定义 1.1,

$$\sigma_r(\nu_d(\mathbb{P}^n)) = \overline{\{[f] \in \mathbb{P}S_d \ : \ \mathrm{rk}(f) \leq r\}} \subset \mathbb{P}S_d.$$

根据定义，割线簇显然彼此嵌套；但是，如果簇 X 是非退化的，那么其割线簇最终会充满环境空间，参见 [10, 练习 2。6]例如，使得 r 满足 $\sigma_r(\nu_d(\mathbb{P}^n)) = \mathbb{P}S_d$ 的最小 d，就是 $n+1$ 变量中的一般次数为d 的形式的 Waring 秩。

要理解哪个割线簇能够充满环境空间，就需要计算割线簇的维数。通过简单的参数计数，代数簇 $X \subset \mathbb{P}^N$ 的 r阶割线簇的预期维数为

$$\exp.\dim \sigma_r(X) := \min\{r \dim(X) + r - 1, N\}.$$

预期维数始终是实际维数的上界；如果 $\dim\ \sigma_r(X) < \exp.\dim \sigma_r(X)$，那么我们称 X 是 r-缺陷的。缺陷簇的分类是一个非常经典的问题，其根源可追溯至 19 世纪末。根据 Palatini [31], ，如果 $\sigma_r(X)$ 不是超曲面且不充满环境空间，那么它在 $\sigma_{r+1}(X)$ 中的余维至少为 2。因此，射影曲线从不具有缺陷。缺陷曲面的分类归功于 Severi 和 Terracini，参见 [12, 定理 14 和定理 15], ；而缺陷三维簇的分类归功于 Scorza [35]。四维簇的情形首先由 Scorza 在 [36] 中处理（另见 [37]），随后在近期预印本 [14]中完成。

若将 X的第 r对称积记为 $X^{(r)}$，则 X 的第 r抽象割线簇为

$$ab\sigma_r(X) := \overline{\{((p_1, \dots, p_r), q) \ : \ q \in \langle p_1, \dots, p_r \rangle\}} \subset X^{(r)} \times \mathbb{P}^N.$$

在全文中，我们始终用 π_i 表示从笛卡尔积到第 i 个因子的投影。第 r 个抽象割线簇是不可约的，其维数为 $r\dim(X) + r - 1$。因此，如果 $\sigma_r(X) \subsetneq \mathbb{P}^N$, ，则非亏格性等价于投影 $\pi_2 : ab\sigma_r(X) \to \mathbb{P}^N$ 具有一般有限纤维。r阶 Terracini轨迹 X 是

$$\mathbb{T}_r(X) := \overline{\left\{(p_1, \dots, p_r) \ : \ \begin{array}{c} p_i \in X^{\mathrm{smooth}}, \{p_1,\dots,p_r\} \text{ are linearly independent,} \\ T_{p_1}(X),\dots,T_{p_r}(X) \text{ are linearly dependent} \end{array}\right\}} \subset X^{(r)}.$$

研究割线簇维数的主要工具是Terracini 引理，它描述了割线簇的一般切空间，见 [6, 引理 1]。特别地，该引理断言：给定一般点p_1、……、 $p_r \in X$ 以及一般点 $p \in \langle p_1$、……、 $p_r\rangle$，则

$$T_p\sigma_r(X) = \langle T_{p_1}(X), \ldots, T_{p_r}(X)\rangle.$$

如果 X 不是有缺陷的 r，且 $\sigma_r(X)$未充满整个空间，那么 $\mathbb{T}_r(X)$是 $X^{(r)}$的真子簇。换言之，Terracini 轨迹 $\pi_1^{-1}(\mathbb{T}_r(X))$的原像包含于投影 $\pi_2 : ab\sigma_r(X) \to \mathbb{P}^N$ 的微分秩下降的轨迹中。

Veronese 簇的缺陷分类被称为 Alexander-Hirschowitz 定理[1]。20 世纪 80 年代，Alexander 和 Hirschowitz 建立了一套强有力的方法，用于处理多项式插值问题，例如计算在一般点处具有 r 个奇点的 $\mathbb{P}^n$ 的 d次超曲面线性系的维数。后一个问题等价于计算 Veronese 簇的割线簇的维数，进而计算 S_d中的一般 Waring 秩。

定理 2.7（Alexander-Hirschowitz 定理， [1]）。Veronese 簇 $\nu_d(\mathbb{P}^n)$的第 r个割线簇是非缺陷的，但以下情形除外：

- $d = 2$、 $n \geq 2$ 和 $2 \leq r \leq n$;
- $d = 3$、 $n = 4$、 $r = 7$;
- $d = 4$， $(n,\ r) \in \{(2,\ 5)$、$(3,\ 9)$、$(4,\ 14)\}$。

3. The examples

在本节中，我们通过证明存在一些三元形式来对问题1.3 给出否定回答：这些三元形式具有计算其 Waring 秩的伴随点集，且这些点集具有不同的希尔伯特函数和不同的正则性。

其思路是从一个特殊的点集 Z_1 开始，并通过链接理论构造出第二个具有相同基数 Z_2但希尔伯特函数不同的点集，使得 $\langle \nu_d(Z_1)\rangle \cap \langle \nu_d(Z_2)\rangle$ 非空；也就是说，存在一个次数为d的形式 f，其 Z_1 和 Z_2 都与之伴随。完成构造后，我们证明 Z_1 和 Z_2 确实计算了 f的秩。

3.1. 第一个例子。秩为 22 的 10 次三元形式。

定理3.1. 存在一个秩为 22 的形式 $f \in S_{10}$，它有两个计算其秩的点集，且对应不同的希尔伯特函数。

证明. 设 $Z_1 \subset \mathbb{P}^2$ 是五次曲线上的 22 个一般点。那么，

$$\begin{array}{lccccccccc} h_{Z_1}: & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 20 & 22 & 22 & \cdots \\ Dh_{Z_1}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 2 & - & \end{array} \tag{3.1}$$

设 $L \subset \mathbb{P}^2$ 是一条一般直线，并设 Y 是 L 上的五个一般点集。考虑 $A = Z_1 \cup Y$。显然，没有五次曲线经过 A，因为经过 Z_1 的五次曲线唯一，且直线 L 是一般选取的。此外， Y 对经过 Z_1的六次曲线空间施加独立条件：事实上，只需注意到 dim $I(Z_1)_6 - \dim I(Z_1)_5 = 5 \geq \#Y$，例如参见 [11, 引理 1.9-(i)]。因此，

$$\begin{array}{lccccccccc} h_A: & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 27 & 27 & \cdots \\ Dh_A: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & - & \end{array} \tag{3.2}$$

设 X 是包含 A的两条一般七次曲线的完全交。于是，我们定义 Z_2 为 A通过 X所得的残余集。由（2.1），可得

$$\begin{array}{lcccccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ Dh_X(i) & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ Dh_{Z_2}(i) & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & - & - & - & & & \\ Dh_A(12-i) & & & & & & & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \tag{3.3}$$

注意，由于我们考虑的是通过两个次数都至少为 Z_1 加一（即七）的曲线的完全交进行的链接，因此根据 Peskine-Szpiro定理，参见 [27, 定理 6.4.4 和例 6.4。5]， Z_2 是光滑的，并且 $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$。因此， Z_2 是与 Z_1 不相交的 22 个互异点的集合，其希尔伯特函数不同于 Z_1。

命题 3.2。 Z_1 和 Z_2 关于某个公共的 10 次三元形式互为伴随。

证明。 根据命题 2.2，只需计算并集 $Z_1 \cup Z_2$的希尔伯特函数。注意，根据构造， $Z_1 \cup Z_2$ 与集合 Y中的五个共线点链相联。因此，根据（2.1）

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Dh_X(i)$	:	1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2	1
$Dh_{Z_1\cup Z_2}(i)$	:	1	2	3	4	5	6	7	6	4	3	2	1	
$Dh_Y(12-i)$	:									1	1	1	1	1

因此，根据命题 2.2，$\dim\langle\nu_{10}(Z_1)\rangle\cap\langle\nu_{10}(Z_2)\rangle = 0$。也就是说，存在 $f \in S_{10}$ 使得 $[f] \in \langle\nu_{10}(Z_1)\rangle\cap\langle\nu_{10}(Z_2)\rangle$。 □

现在，我们需要证明，按照命题 f 3.2 所构造的一般 10 次形式 f 确实具有秩 22。令 $\mathcal{X}$ 表示由一组位于某条五次曲线上的 22 个既约点组成伴随集的 10 次形式所构成的簇。

命题 3.3。簇 $\mathcal{X}$ 不可约，且余维为 2。

证明。注意到， $f \in S_{10}$ 具有对偶理想中五次曲线的 10 次三元形式所构成的簇，是一个超曲面，其定义方程是与映射相关联的中心催化矩阵的行列式为零

$$\mathrm{cat}_5(f) : R_5 \to S_5, g \mapsto g \circ f.$$

簇 $\{\det(\mathrm{cat}_5(f)) = 0\}$ 不可约这一事实由 [19]得到。固定一条平面五次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$，根据 Riemann-Roch 定理，我们有 $\langle\nu_{10}(C)\rangle = \mathbb{P}^{44}$。由于曲线是非缺陷的，$\dim \sigma_{22}\nu_{10}(C) = 43$，参见第 2.4节。因此，一般形式 $f \in \langle\nu_{10}(C)\rangle$ 相对于 $\nu_{10}(X)$ 的秩为 23，并且 $\mathcal{X}$ 在具有对偶理想中五次曲线的形式所构成的超曲面中余维为一。换言之，如果我们考虑位于平面五次曲线的 10 次 Veronese 嵌入的第22割线簇上的形式所构成的关联簇

$$\mathcal{I} = \{(C, [f]) : [f] \in \sigma_{22}(\nu_{10}(C))\} \subset \mathbb{P}S_5 \times \mathbb{P}S_{10},$$

于是 $\mathcal{X} = \pi_2(\mathcal{I})$。投影 π_2 是一般一一的，因为对于一般形式 $[f] \in \mathcal{X}$，对偶理想中的五次曲线唯一地是 $\mathrm{cat}_5(f)$ 的行列式。给定一个五次曲线 C，我们有 $\pi_1^{-1}(C) \cong \sigma_{22}(\nu_{10}(C))$。因此，$\dim \mathcal{X} = \dim \mathcal{I} = \dim \mathbb{P}S_5 + \dim \sigma_{22}(\nu_{10}(C))$ $= 20 + 43 = 63$ 包含于 $\mathbb{P}S_{10} = \mathbb{P}^{65}$ 中。□

命题3.4。一般形式 $[f] \in \mathcal{X}$ 的秩为 22。

证明。 根据 Alexander-Hirschowitz 定理（定理 2.7），

$$\dim \sigma_{21}(\nu_{10}(\mathbb{P}^2)) = 21 \cdot 2 + 20 = 62,$$

即 σ_{21}（ν_{10}（$\mathbb{P}^2$））的余维为 3。因此，根据命题 3.3， $\mathcal{X} \cap \sigma_{21}$（$\nu_{10}$（$\mathbb{P}^2$））是 $\mathcal{X}$ 的真子簇。 □

考虑 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ 按照命题 3.2 构造的 10 次形式的集合。令 $\mathrm{Hilb}^\circ_{22}(\mathbb{P}^2)$ 为 $\mathbb{P}^2$ 中 22 个点的希尔伯特概形的开子集，并令 $\mathrm{Hilb}^\circ_{22,\ 5}(\mathbb{P}^2)$ 表示所有位于 $\mathbb{P}^2$ 的某个五次曲线上的 22个一般点集合。然后，考虑关联簇

$$\mathcal{J} = \{(Z_1, Z_2, [f]) : \langle\nu_{10}(Z_1)\rangle \cap \langle\nu_{10}(Z_2)\rangle = [f]\} \subset \mathrm{Hilb}^\circ_{22,5}(\mathbb{P}^2) \times \mathrm{Hilb}^\circ_{22}(\mathbb{P}^2) \times \mathbb{P}S_{10}.$$

根据构造， $\mathcal{Y} = \pi_3(\mathcal{J})$。此外，根据证明开头所描述的构造，对于 $\mathbb{P}^2$中五次曲线上的一组 Z_1 22 个点的一般选择，存在$Z_2 \in \mathrm{Hilb}^\circ_{22}(\mathbb{P}^2)$以及 $f \in S_{10}$，使得$(Z_1, Z_2, [f]) \in \mathcal{J}$。通过类似的构造，我们还可以证明投影 π_2 是支配的。

命题3.5。投影 $\pi_2 : \mathcal{J} \to \mathrm{Hilb}^\circ_{22}(\mathbb{P}^2)$ 是支配的。

证明。 设 Z_2 是 $\mathbb{P}^2$中的一组一般的22 个点。取 Y为位于一般直线 L 上的三个一般共线点，并令 $A = Z_2 \cup Y$。由于不存在经过 Z_2的五次曲线，因此这三个点对经过 Z_2的六次曲线施加独立条件，参见 [11, 引理1。9]因此，

h_A :	1	3	6	10	15	21	25	25	$\cdots$
Dh_A :	1	2	3	4	5	6	4	−	

令 $\{G_1, G_2, G_3\}$ 为经过 A的六次曲线空间的一组基，即 $[I_A]_6 = \langle G_1, G_2, G_3\rangle$。将 $[I_A]_6$ 限制在 L 上，在点集 Y之外定义了一个非完备线性级数 g^2_3 。该线性

级数在 L 上一般是无基点的，因此它在 $\mathbb{P}^2$ 上定义了一个正则映射，将 L 映射到奇异三次曲线 C中。事实上，由于无基点性是一个开条件，可以借助代数软件 Macaulay2 [21], 直接在一个具体例子上进行验证，参见第4.1节。例如，不失一般性地，令 $L=\{x_0=0\}$和 $Y=\{(0:1:0)、(0:0:1)、(0:1:1)\}$。因此，对于 $i=1、2、3$，将 G_i 限制在 L 上可表示为 $G_i(0,x_1,x_2) = x_1x_2(x_1-x_2)H_i(x_1,x_2)$，并考虑映射$\varphi$：$L\to\mathbb{P}^2, p\mapsto (H_1(p):H_2(p):H_3(p))$。令 $C=\varphi(L)$。按上述方式构造的一般三次曲线 C 是节点型的。事实上，由于节点型是有理平面三次曲线空间上的一个开条件，只需给出一个上述构造产生节点曲线的例子即可。借助代数软件 Macaulay2 [21], 即可完成验证，参见第4.1节。

现在，令 X 为 L 上的两个不同点的集合，它们是 C 的奇异点的原像，并考虑五个点的集合 $X\cup Y\subset L$。根据构造， $X\cup Y$ 不会对经过 A 的六次曲线空间施加独立条件。这意味着

$$\begin{array}{rcccccccccc} h_{X\cup A} & : & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 26 & 27 & 27 & \cdots \\ Dh_{X\cup A} & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 1 & - & \end{array}$$

现在，我们通过一个类型为 (7, 7) 的一般完全交来考虑与 $X\cup A$ 的链接，即 $U=(X\cup A)\cup Z_1$。于是， Z_1 是一个具有如下希尔伯特函数的 22 个点的集合

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} & & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 7} & {\scriptstyle 8} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 12} \\ Dh_U(i) & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ Dh_{Z_1}(i) & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 2 & - & - & - & & & \\ Dh_{X\cup A}(12-i) & : & & & & & & 1 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \tag{3.4}$$

再次根据 Peskine-Szpiro定理，见[27, 定理 6.4.4 和例 6.4。5])， Z_1 是光滑的，并且 $Z_1\cap Z_2=\emptyset$。因此， $Z_1\in \mathrm{Hilb}^{\circ}_{22,\ 5}(\mathbb{P}^2)$。此外，根据构造， $U=(Z_1\cup Z_2)\cup(X\cup Y)$。也就是说，并集 $Z_1\cup Z_2$ 通过 U 与由 $X\cup Y$ 个共线点组成的集合相链。于是，根据（2.1），

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} & & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 7} & {\scriptstyle 8} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 12} \\ Dh_U(i) & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ Dh_{X\cup Y}(12-i) & : & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ Dh_{Z_1\cup Z_2}(i) & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & \end{array}$$

因此， $Dh_{Z^1\cup Z_2}(11)=1$并且根据命题 2.2，存在 $f\in S_{10}$使得 $(Z_1,\ Z_2,\ [f])\in\mathcal{J}$。 □

断言3.6。 $\mathcal{Y}$在 $\mathcal{X}$中稠密。特别地，一般的 $[f]\in\mathcal{Y}$的秩为22。

证明。由于对于任意五次曲线 $C\subset\mathbb{P}^2$， $\nu_{10}(\mathbb{P}^2)$和 $\nu_{10}(C)$的第22割线簇都是非缺陷的，因此我们有，$\mathrm{Hilb}^{\circ}_{22,5}(\mathbb{P}^2)$和$\mathrm{Hilb}^{\circ}_{22}(\mathbb{P}^2)$中的Terracini轨迹是适当的子簇。特别地，我们可以将投影 π_3限制在 $\mathcal{J}$的稠密子空间上，该子空间由满足 Z_1和Z_2 不属于相应Terracini轨迹的三元组（Z_1， Z_2， $[f]$）给出。这意味着，对于一般的 $[f]\in\mathcal{Y}$，纤维$\pi_3^{-1}([f])$是有限的，参见 [5, 命题6.2]。特别地，$\dim\ \mathcal{Y}=\dim\ \mathcal{J}$。

由于 π_2是支配的，对于一般的 $Z_2\in\mathrm{Hilb}^{\circ}_{22}(\mathbb{P}^2)$，我们有 $\dim\ \mathcal{J}=\dim\mathrm{Hilb}^{\circ}_{22}(\mathbb{P}^2)+\dim\ \pi_2^{-1}(Z_2)$。现在，$\dim\mathrm{Hilb}^{\circ}_{22}(\mathbb{P}^2)=44$。按照命题3.5中的构造，我们看到 $\dim\ \pi_2^{-1}(Z_2)=19$。事实上，这取决于三个共线点的选取，即五个参数（确定一条直线需要2个参数，在其上确定三个点需要3个参数），以及两个七次曲线的一般完全交的选取，也就是在经过由27个点 A组成的集合的七次曲线所在的8维射影空间中选取一条铅笔，即另外 $14=2(9-2)$个参数。特别地，$\dim\ \mathcal{J}=63=\dim\ \mathcal{X}$。由于 $\mathcal{X}$不可约，我们得出该陈述的第一部分。该陈述的第二部分直接由命题3.4得出。□

因此， $\mathcal{Y}$ 的一般元素表明了该定理。 □

注记 3.7。 在断言 3.3 的证明中，我们观察到，给定一般的五次曲线 $C\subset\mathbb{P}^2$，其中的一般 10 次形式 $\langle\nu_{10}(C)\rangle=\mathbb{P}^{44}$ 相对于该曲线的秩为 23。然而，由于根据 Alexander-Hirschowitz 定理（定理 2.7），10 次三元形式的一般秩等于 22，我们还可以推 deduce： $\langle\nu_{10}(C)\rangle$ 中的一般形式相对于 Veronese 簇 $\nu_{10}(\mathbb{P}^2)$ 的秩为 22。换言之，存在这样的 10 次三元形式：其对偶理想在次数五处具有最小生成元，但其最小 Waring 分解由点集给出，而该点集的理想不包含这些最小生成元。

3.2. 第二个例子。秩30的13次三元形式。

定理 3.8。存在一个形式 $f \in S_{13}$，其秩为 30，并且有两个点集可以计算其秩，同时具有不同的希尔伯特函数和正则性。

证明。设 A 是位于一条三次曲线上的一组12个一般点。即，

$$\begin{array}{rcccccccc} h_A: & 1 & 3 & 6 & 9 & 12 & 12 & \cdots \\ Dh_A: & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & - & \end{array}$$

然后，我们考虑 Z_1 这组30个点，它们通过 A 一个完全交 $X = A \cup Z_1$ 与 42个点链相联，该完全交由一条一般六次形式和一个七次形式定义。即，由（2.1）可得，

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} Dh_X: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & - \\ Dh_{Z_1}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 2 & 1 & - & & & \end{array}$$

我们将 Z_1 与另一组 Z_2 30个点通过一个完全交 $Y = Z_1 \cup Z_2$ 链相联，该完全交包含 60个点，由一条六次形式和一个10次形式定义。即，由（2.1）可得，

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} Dh_Y: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & - \\ Dh_{Z_1}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 2 & 1 & - & & & & & & \\ Dh_{Z_2}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & - & & & & & & & \end{array} \tag{3.5}$$

我们立即观察到，Z_1 和 Z_2 都伴随于一个次数为13的形式。事实上，由（$Y = Z_1 \cup Z_2$ 3.5）中 $h^1_{14}(Z_1 \cup Z_2) = 1$的一阶差分，我们得到 $h^1_{14}(Z_1 \cup Z_2)$。根据命题 2.2，$\langle \nu_{13}(Z_1)\rangle \cap \langle \nu_{13}(Z_2)\rangle = [f]$对于某个次数为13的形式 f。

断言 3.9. f 的秩为30。

证明。设 Z_1 如上，并设 $Z' \subset \mathbb{P}^n$ 是与 f伴随的另一组点。

首先，假设 $Z_1 \cap Z' = \emptyset$ 并令 $\overline{Z} = Z_1 \cup Z'$。根据引理 2.1-(9)，由于 $\sum_{i=0}^{5} Dh_{Z_1}(i) = 21$，则同样有 $\sum_{i=0}^{5} Dh_{\overline{Z}}(i) = 21$。根据命题 2.5，$\overline{Z}$ 满足 $CB(13)$，进而根据定理 2.6，

$$21 = \sum_{i=0}^{5} Dh_{\overline{Z}}(i) \leq \sum_{i=9}^{14} Dh_{\overline{Z}}(i).$$

特别地，我们推得 $Dh_{\overline{Z}}(5) = Dh_{\overline{Z}}(9) = 6$，并且根据引理 2.1(10)，有 $Dh_{\overline{Z}}(i) \geq 6$，其中$i \in \{6,7,8\}$。即，

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ Dh_{\overline{Z}}(i) & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \geq 6 & \geq 6 & \geq 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ Dh_{Z_1}(i) & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 2 & 1 & - & & & & & \\ Dh_{Z'}(14-i) & : & & & & & & & ? & ? & ? & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

由于 $Dh_{Z_1}(7) + Dh_{Z_1}(8) = 3$，我们得出 $Dh_{\overline{Z}}(7) + Dh_{\overline{Z}}(8) \geq 9$。因此，

$$\ell(Z') \geq \sum_{i=7}^{14} Dh_{Z'}(i) \geq 9 + 21 = 30.$$

现在假设 $Z_1 \cap Z' \neq \emptyset$。正如 [2, 注释 3。3], 所观察到的，如果 $Z'' = Z' \setminus (Z' \cap Z_1)$，那么存在一个形式 $f_0 \in S_{13}$使得 $[f] \in \langle \nu_{13}(Z_1)\rangle \cap \langle \nu_{13}(Z'')\rangle$。事实上，如果 $Z_1 = \{\ell_1, \ldots, \ell_{30}\}$ 以及 $Z' = \{\ell_1, \ldots, \ell_k, m_{k+1}, \ldots, m_r\}$，那么，

$$f = \sum_{i=1}^{30} a_i \ell_i^{13} = \sum_{i=1}^{k} b_i \ell_i^{13} + \sum_{i=k+1}^{r} b_i m_i^{13}$$

and

$$f_0 = \sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i)\ell_i^{13} + \sum_{i=k+1}^{30} a_i \ell_i^{13} = \sum_{i=k+1}^{r} b_i m_i^{13}.$$

因此，我们可以通过考虑 f_0而不是 f和 $\overline{Z} = Z_1 \cup Z''$，采用与之前相同的论证来推导出 $\ell(Z_1) \geq \ell(Z'') \geq 30$。□

因此，根据（Z_1 和 Z_2，由（3.5）可知它们具有不同的希尔伯特函数和正则性，并且二者都计算了 f 的秩（见断言3.9）。证明至此完成。□

4. Explicit Macaulay2 computations

在最后一节中，我们提供一段使用代数软件 Macaulay2 [21] 语言编写的代码，用于构造上一节中给出的示例。4.1. 第一个示例。秩为 22 的 10 次三元形式。

```
i1 : k = QQ;i2 : S = k[x,y,z];i3 : -- consider a set of 22 general points
IZ1 = intersect for i from 1 to 22 listminors(2,vars(S)||random(QQ^1,QQ^3));i4 : degree IZ1,
 for i to 10 list hilbertFunction(i,IZ1)o4 = (22, {1, 3, 6, 10, 15, 21, 22, 22, 22, 22, 22})
i5 : -- consider the set of points Y = {(0:1:0),(0:0:1),(0:1:1)} on the line x = 0 and the
union A = Z1 u YIY = intersect(ideal(x,z), ideal(x,y), ideal(x,y-z));
i6 : IA = intersect(IZ1,IY);i7 : -- take the degree-6 part of the ideal of A
G = ideal super basis(6,IA);
i8 : -- take the ideal generated by the restriction of G over the line x = 0 away from the
set of points YR = k[y,z];i9 : G0 = sub(G,R);i10 : G' = G0 : sub(IY,R);
i11 : -- G' is then defined by three cubics: let C be the cubic curve as image of the line L
via the map defined by G'phi = map(R,S,first entries mingens G');i12 : C = ker phi;
i13 : -- We compute the singular locus and we check that it is nodalVC = Proj (S/C);
i14 : singVC = singularLocus VC;i15 : codim singVC, degree singVCo15 = (2, 1)
i16 : IO = ideal singVC;i17 : -- We compute the pre-image X of the singular point:
-- that is a union of two simple pointsT = QQ[a,b,c,y,z, MonomialOrder => Eliminate 3];
i18 : psi = map(T,S,{a,b,c});
i19 : J = psi(IO) + ideal(a-sub(G'_0,T),b-sub(G'_1,T),c-sub(G'_2,T));i20 : use S;
i21 : IX=saturate(ideal(x)+sub(ideal selectInSubring(1,gens gb J),S));i22 : dim IX,
 degree IX,  IX == radical IXo22 = (1, 2, true)i23 : -- Now,
 the union A u X is a set of 27 pointsIA' = intersect(IA,IX);
```

```
i24 : degree IA',  for i to 10 list hilbertFunction(i,IA')

o24 = (27, {1, 3, 6, 10, 15, 21, 26, 27, 27, 27, 27})

i25 : -- Construct a general c.i. of type (7,7)
      B7 = super basis(7,IA');
i26 : C1 = B7 * random(QQ^(numcols B7), QQ^1);
```

```
i27 : C2 = B7 * random(QQ^(numcols B7), QQ^1);
i28 : IU = ideal(C1,C2);
i29 : degree IU, for i to 12 list hilbertFunction(i,IU)

o29 = (49, {1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 34, 39, 43, 46, 48, 49})

i30 : -- Consider the linkage to A' through U
      IZ2 = IU : IA';
i31 : degree IZ2,  for i to 10 list hilbertFunction(i,IZ2)

o31 = (22, {1, 3, 6, 10, 15, 20, 22, 22, 22, 22, 22})

i32 : -- we compute now the intersection of their linear spans
      perpSpace = ideal super basis(10,IZ1)+ideal super basis(10,IZ2);
i33 : B10 = basis(10,S);
i34 : f = (B10 * gens ker diff(B10, transpose mingens perpSpace))_0_0;
i35 : -- Z1 and Z2 are apolar to f and have different HFs
      fperp = inverseSystem f; -- computes the apolar ideal of f
i36 : isSubset(IZ1,fperp), isSubset(IZ2,fperp),
          netList {for i to 14 list hilbertFunction(i,IZ1), for i to 14 list hilbertFunction
              (i,IZ2)}
                    +-+-+-+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+
o36 = (true, true, |1|3|6|10|15|21|22|22|22|22|22|22|22|22|)
                    +-+-+-+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+
                    |1|3|6|10|15|20|22|22|22|22|22|22|22|22|
                    +-+-+-+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+
```

4.2. 第二个示例。秩30的13次三元形式。

```
i1 : k = QQ;
i2 : S = k[x,y,z];

i3 : -- consider 12 random points on the rational cubic xz^2 - y^3 = 0
     a = entries random(k^12,k^2);
i4 : A = (p -> {p_0^3, p_0*p_1^2, p_1^3}) \ a;
i5 : IA = intersect ((p -> minors(2,matrix{{x,y,z},p})) \ A);
i6 : degree IA, for i to 5 list hilbertFunction(i,IA)

o6 = (12, {1, 3, 6, 9, 12, 12})

i7 : -- consider a c.i. X of type (6,7) containing A
     B6 = super basis(6,IA);    B7 = super basis(7,IA);
i9 : F1 = B6 * random(QQ^(numcols B6), QQ^1);
i10 : F2 = B7 * random(QQ^(numcols B7), QQ^1);
i11 : IX = ideal(F1,F2);
i12 : degree IX, for i to 13 list hilbertFunction(i,IX)

o12 = (42, {1, 3, 6, 10, 15, 21, 27, 32, 36, 39, 41, 42, 42, 42})

i13 : -- consider the link to A through X
      IZ1 = IX : IA;
i14 : degree IZ1, for i to 13 list hilbertFunction(i,IZ1)

o14 = (30, {1, 3, 6, 10, 15, 21, 27, 29, 30, 30, 30, 30, 30, 30})

i15 : -- consider a c.i. Y of type (6,10) containing Z1
      B6 = super basis(6,IZ1);    B10 = super basis(10,IZ1);
i17 : G1 = B6 * random(QQ^(numcols B6), QQ^1);
i18 : G2 = B10 * random(QQ^(numcols B10), QQ^1);
```

```
i19 : IY = ideal(G1,G2);i20 : degree IY,
 for i to 14 list hilbertFunction(i,IY)
o20 = (60, {1, 3, 6, 10, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 50, 54, 57, 59, 60})
i21 : -- consider the link to Z1 through YIZ2 = IY : IZ1;
i22 : degree IZ2, for i to 13 list hilbertFunction(i,IZ2)
o22 = (30, {1, 3, 6, 10, 15, 21, 26, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30})
i23 : -- we compute now the intersection of their linear spans
perpSpace = ideal super basis(13,IZ1)+ideal super basis(13,IZ2);
i24 : B13 = basis(13,S);
i25 : f = (B13 * gens ker diff(B13, transpose mingens perpSpace))_0_0;
i26 : -- note that Z1 and Z2 are apolar to f
-- and have different Hilbert functions and regularity
fperp = inverseSystem f; -- computes the apolar ideal of f
i27 : isSubset(IZ1,fperp), isSubset(IZ2,fperp),
netList {for i to 14 list hilbertFunction(i,IZ1),
for i to 14 list hilbertFunction(i,IZ2)}
+-+-+-+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+
o27 = (true, true, |1|3|6|10|15|21|27|29|30|30|30|30|30|30|30|)
+-+-+-+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+
|1|3|6|10|15|21|26|30|30|30|30|30|30|30|30|
+-+-+-+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+--+
```

References

1. James Alexander 和 Andr´e Hirschowitz, *Polynomial interpolation in several variables*, 《代数几何杂志》4（1995），第 2 期，201–222。2. ELENA ANGELINI 和 LUCA CHIANTINI, *On the identifiability of ternary forms*, 《线性代数及其应用》599（2020），36–65。3. , *Minimality and uniqueness for decompositions of specific ternary forms*, 《计算数学》91（2022），第 334 期，973–1006。4. ELENA ANGELINI、LUCA CHIANTINI 和 Nick Vannieuwenhoven, *Identifiability beyond kruskal's bound for symmetric tensors of degree 4* **29** 2018 3, 465 485 , 《Lincei 论丛》（），第 期，–。5. Edoardo Ballico 和 LUCA CHIANTINI, *On the terracini locus of projective varieties*, 《米兰数学杂志》89（2021），1–17。6. Alessandra Bernardi、Enrico Carlini、Maria Virginia Catalisano、Alessandro Gimigliano 和 ALESSANDRO ONETO, *The hitchhiker guide to: Secant varieties and tensor decomposition* **6** 2018 12, 314 , 《数学》（），第 期，。7. Weronika Buczy´nska 、 Jaros law Buczy´nski 和 Zach Teitler, *Waring decompositions of monomials*, 《代数杂志》378（2013），45–57。8. Enrico Carlini、Maria Virginia Catalisano、LUCA CHIANTINI、Anthony V Geramita 和 Youngho Woo, *Symmetric tensors:rank, strassen's conjecture and e-computability*, 《比萨高等师范学校学报：科学类》18（2018），第 1 期，363–390。9. Enrico Carlini、Maria Virginia Catalisano 和 Anthony V Geramita, *The solution to the waring problem for monomials and the sum of coprime monomials* **370** 2012 5 14 , 《代数杂志》（），–。10. Enrico Carlini、Nathan Grieve 和 Luke Oeding, *Four lectures on secant varieties*, 《代数、组合学与几何之间的联系》，Springer，2014 年，第 101–146 页。11. Maria Virginia Catalisano、Anthony V Geramita 和 Alessandro Gimigliano, *Segre-veronese embeddings of $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$and their secant varieties*, 《数学汇刊》（2007），1–24。12. LUCA CHIANTINI, *Lectures on the structure of projective embeddings* **62** 2004 4, , 《都灵理工大学数学研讨会纪要》（），第 期，–。13. , *Hilbert functions and tensor analysis*, 《量子物理与几何》（2019），125–151。14. LUCA CHIANTINI、Ciro Ciliberto 和 Francesco Russo, *On secant defective varieties, in particular of dimension 4*, arXiv 预印本 arXiv:2011.01105（2020）。15. LUCA CHIANTINI 和 Giorgio Ottaviani, *A footnote to a footnote to a paper of B. Segre*, 《数学趋势》，即将出版。arXiv 预印本 arXiv:2103.04659（2021）。16. LUCA CHIANTINI、Giorgio Ottaviani 和 Nick Vannieuwenhoven, *On generic identifiability of symmetric tensors of subgeneric rank* **369** 2017 6, 4021 4042 , 《美国数学学会汇刊》（），第 期，–。

17. Alfred Clebsch, *Ueber curven vierter ordnung.*, （1861）。18. Edward D Davis、Anthony V Geramita 和 Ferruccio Orecchia, *Gorenstein algebras and the cayley-bacharach theorem*, 《美国数学学会会刊》93（1985），第 4 期，593–597。19. David Eisenbud, *Linear sections of determinantal varieties*, 《美国数学杂志》110（1988），第 3 期，541–575。20. , *The geometry of syzygies: A second course in commutative algebra and algebraic geometry*, 第 229 卷，Springer，2005 年。21. Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman, *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*, 可访问 http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。22. Christopher J Hillar 和 Lek-Heng Lim, *Most tensor problems are np-hard* **60** 2013 6, , 《美国计算机学会杂志》（JACM）（ ），第 期，–。23. Anthony Iarrobino 和 Vassil Kanev, *Power sums, gorenstein algebras, and determinantal loci*, Springer Science & Business Media，1999 年。24. Tamara G Kolda 和 Brett W Bader, *Tensor decompositions and applications*, 《SIAM 评论》51（2009），第 3 期，455–500。25. Joseph M Landsberg, *Tensors: geometry and applications*, 《表示论》381（2012），第 402 期，3。26. Francis S Macaulay, *The algebraic theory of modular systems*, 大学出版社，，1916 年。27. Juan C Migliore, *Introduction to liaison theory and deficiency modules*, 第 165 卷，Springer Science & Business Media，1998 年。28. Bernard Mourrain 和 Alessandro Oneto, *On minimal decompositions of low rank symmetric tensors*, 《线性代数及其应用》607（2020），347–377。29. Francesco Palatini, *Sulla rappresentazione delle forme ed in particolare della cubica quinaria con la somma di potenze di forme lineari* 38, 1902 , 第 Atti Acad. Torino 卷，。30. , *Sulla rappresentazione delle forme ternarie mediante la somma di potenze di forme lineari*, 第 V 卷，Tip. delle R. Accademia dei Lincei，1903 年。31. , *Sulle varieta algebriche per le quali sono di dimensione minore dell'ordinario senza riempire lo spazio ambiente una o alcune delle varieta formate da spazi seganti* 1909 , 。32. Christian Peskine 和 Lucien Szpiro, *Liaison des variétés algébriques. i.*, 《数学发明》26（1974），271–302。33. Kristian Ranestad 和 Frank-Olaf Schreyer, *Varieties of sums of power*, 《纯粹与应用数学杂志》（2000），第 525 期，147–181。34. Herbert W Richmond, *On canonical forms*, 《纯粹与应用数学季刊》33（1904），967–984。35. Gaetano Scorza, *Determinazione delle varietà tre dimensioni di s_r, $(r \geq 7)$ i cui s_3 tangenti si tangliano a due a due*, 《巴勒莫数学学会汇刊》（1884–1940）25（1908），193–204。36. , *Sulle varietà a quattro dimensioni di s_r $(r > 9)$ i cui s_4 tangenti si tagliano a due a due*, 《巴勒莫数学学会汇刊》27（1909），148–178。37. , *Opere scelte*, 1（1960），252–292。38. James Joseph Sylvester, *An essay on canonical forms, supplement to a sketch of a memoir on elimination*, 《数学论文集 I》34（1851），1851。39. , *On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants*, 原载于《哲学杂志》1（1851），265–283。40. Alessandro Terracini, *Sulla rappresentazione delle coppie di forme ternarie mediante somme di potenze di forme lineari*, 《纯粹与应用数学年鉴》（1898–1922）24（1915），第 1 期，1–10。

Dip. di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche, U. di Siena, Italy
Email address: elena.angelini@unisi.it, luca.chiantini@unisi.it

Dip. di Mathematics, U. of Trento, Via Sommarive 14, 38123 Povo (Trento), Italy
Email address: alessandro.oneto@unitn.it