arXiv:2303.06781v1 [math.CT] 12 Mar 2023

幺半群与拓扑斯理论的局部化

JENS HEMELAER

Abstract. 设 M 是一个可嵌入某个群的幺半群。我们考察由带有右 M-作用的集合构成的拓扑斯 PSh(M)，并研究其中属于幺半群型的子拓扑斯，即再次具有 PSh(N) 形式的子拓扑斯，其中 N 为某个幺半群。我们的主要结果是，每个幺半群型子拓扑斯都可以通过在 M的某个素理想处进行局部化得到。反过来，我们证明，在某个素理想处进行局部化产生子拓扑斯，当且仅当 M相对于该素理想的补集具有右 Ore 性质。我们通过一些例子展示这些计算：自由幺半群、两个与 Connes–Consani 算术位点相关的幺半群，以及环面纽结幺半群。

Contents

1. 引言 1 2. 素理想与 rightOre 条件 2 3. 作为拓扑斯点的平坦左 M-集合 5 4. 例子 8 5. 幺半群型子拓扑斯 12 6. 回到我们的例子 17 致谢 19 参考文献 19

1. Introduction

对于 M 幺半群，带有右 M-作用的集合范畴是一个 Grothendieck 拓扑斯。更确切地说，它是预层拓扑斯 PSh(M)，其中将 M 视为只有一个对象的范畴。研究范畴 PSh(M) 有助于理解幺半群 M 本身的结构，参见例如 [KKM00], ；特别是，PSh(M) 的拓扑斯论性质可以转化为M [HR21]的代数性质。

在本文中，我们将讨论 PSh(M) 的幺半群型子拓扑斯，即形如 PSh(N) $\subseteq$ PSh(M) 的子拓扑斯，其中 N为另一个幺半群。我们重点研究 M 能够嵌入某个群 G的幺半群（不一定是交换幺半群）。注意，这一条件严格强于 M 可消去的[Bus71]。

在 [Pir20b，第 3.3], 节中证明，对于交换幺半群 M 和乘法子集 $S \subseteq M$，存在一个几何嵌入

$$\mathsf{PSh}(S^{-1}M) \to \mathsf{PSh}(M),$$

其中 $S^{-1}M$ 是由 S 中的每个元素都添加一个形式逆元而得到的幺半群 M。正如 [CHWW15，引理 1.1], 所指出的，我们可以在不改变

$S^{-1}M$，对于 $\mathfrak{p} \subseteq M$ 素理想 $S = M - \mathfrak{p}$。然后我们记作 $M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}M$，仿照环论中的记号。

本文将证明以下结论：对于能够嵌入群的幺半群 M，我们可以得到一个几何嵌入，正如将在第2节中讨论的那样

$$\mathsf{PSh}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathsf{PSh}(M),$$

对于素理想 $\mathfrak{p} \subseteq M$，但前提是 M 关于 $M - \mathfrak{p}$ 满足右 Ore 性质。本文的主要结果则是其逆命题：幺半群型的预层范畴 $\mathsf{PSh}(M)$ 的任意子拓扑斯都具有如下形式：对于某个素理想 $\mathfrak{p}$，$\mathsf{PSh}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathsf{PSh}(M)$，其中 M 关于 $M - \mathfrak{p}$ 满足右 Ore 性质，参见定理 5.3.2。

我们将讨论范围限制为可嵌入群的幺半群，原因在于这种情况下我们可以使用 [Hem20] 的结果。该文证明，对于群 G 的子幺半群 $M \subseteq G$，存在范畴等价

$$\mathsf{PSh}(M) \simeq \mathsf{Sh}_G(X)$$

对于某个拓扑空间 X，离散群 G 在其上有连续左群作用。拓扑空间 X 有一个显式构造；正如 [Hem20] 中所指出的，这提供了一种显式计算 $\mathsf{PSh}(M)$ 的点范畴的方法。在第3节中，我们将回顾这一构造，然后明确描述相关的平坦左 M-集合及其自同态幺半群。

在第4节中，我们将通过四个例子详细讨论我们的框架：由 k 生成元生成的自由幺半群、乘法运算下的 $\mathbb{N}_+^\times$ 非零自然数幺半群、具有非零行列式的 2×2 整数矩阵幺半群 $\mathbf{M}_2^{\mathrm{ns}}(\mathbb{Z})$，以及环面纽结幺半群 $\langle a, b : \ a^k = b^l \rangle$ 对于 $k, l \geq 2$。

对于第二个和第三个例子，点的计算已经在文献中得到广泛讨论，因此纳入这些例子只是为了阐释我们的框架，并为第6节作准备。幺半群 $M = \mathbb{N}_+^\times$ 构成了 Connes–Consani 算术位点的基础；关于拓扑斯论的点的计算，我们参阅 [CC14], [CC16] 和 [LB16]。情形 $M = \mathbf{M}_2^{\mathrm{ns}}(\mathbb{Z})$ 是算术位点的一个非交换变体；关于此情形，我们参阅 [Hem19a] [Hem19b]。关于与算术位点相关的更多例子，也请参见 [Sag20] [LB20]。对于有限生成交换幺半群，拓扑斯论的点按同构分类，可由素理想集合 [Pir20b, 定理 5.2.10],而对于有限幺半群，点可以用幂等元来描述 [Pir20a, §3]。

在第5节中，我们将运用第3节中的计算得出主要结果：$\mathsf{PSh}(M)$ 的幺半群型子拓扑斯都具有 $\mathsf{PSh}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathsf{PSh}(M)$ 的形式，其中 $\mathfrak{p}$ 是 M 的一个素理想，并且 M 相对于 $M - \mathfrak{p}$ 满足右 Ore 条件。在交换情形下，右 Ore 条件自动成立，因此幺半群型子拓扑斯恰好对应于素理想。

最后，在第6节中，我们将重新审视前面的四个例子，以展示如何在实践中应用我们的主要结果。

2. Prime ideals and the right Ore condition

2.1. 素理想。回顾一下，M 的左理想（分别地，右理想）是指 M 的一个子集，该子集在 M 从左侧（分别地，从右侧）进行乘法运算时保持封闭。双边理想是 M 的一个子集，同时既是左理想又是右理想。

定义 2.1.1。 M 的素理想是一个双边理想 $\mathfrak{p} \subseteq M$，满足 $1 \notin \mathfrak{p}$；并且对于所有 a、$b \in M$，如果 $ab \in \mathfrak{p}$，那么 $a \in \mathfrak{p}$ 或 $b \in \mathfrak{p}$。

因此，双边理想是素理想，当且仅当它的补集是子幺半群。空子集 $\varnothing \subseteq M$ 始终是素理想。如果 $\phi\colon M \to N$ 是幺半群同态，那么只要 $\mathfrak{p}$ 是 N 的素理想，就有 $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ 是 M 的素理想。

要计算幺半群的素理想，[Pir13] 中的以下结果非常有用。

命题 2.1.2（[Pir13，引理 2.1]）。设 M 是一个幺半群。那么，M 的素理想与幺半群同态$M \to \{0,1\}$之间存在双射对应，其中 $\{0,1\}$ 配备通常的乘法运算。幺半群同态 $\phi\colon M \to \{0,1\}$ 对应于素理想 $\phi^{-1}(0) \subseteq M$。

在 [Pir13], 中，我们将注意力限制在交换幺半群上，但同样的证明也适用于非交换幺半群。

特别地，一个有限生成的幺半群只有有限多个素理想，参见[CHWW15，引理 1.5]。

2.2. 局部化。对于子集 $S \subseteq M$，回顾一下，我们可以通过形式化地将 S 中的元素取逆，构造 M 的局部化$S^{-1}M$。从由生成元与关系给出的 M 表示出发，对于每个 $s \in S$，我们添加一个新的生成元 s^{-1} 以及关系 $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$。现在，$S^{-1}M$ 具有如下泛性质：对于任意幺半群同态 $\phi\colon M \to N$，只要对所有 $s \in S$，$\phi(s)$ 都是可逆的（左右两侧均可逆），就存在一个唯一的分解，使 ϕ 通过自然映射 $M \to S^{-1}M$ 分解。该泛性质唯一确定了 $S^{-1}M$；特别地，我们通过生成元与关系进行的构造不依赖于起始时所采用的 M 表示。

作为特殊情形，在素理想 $\mathfrak{p}$ 处对 M 的局部化定义为 $M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}M$，其中 $S = M - \mathfrak{p}$。

引理 2.2.1. 设 M 为一个幺半群，$\mathfrak{p} \subseteq M$ 为一个素理想。则有等式 $M - \mathfrak{p} = M_{\mathfrak{p}}^{\times} \cap M$。

证明。如果 $m \in M - \mathfrak{p}$，那么根据定义，m 在 $M_{\mathfrak{p}}$中变得可逆。

反之，假设 m 在 $M_{\mathfrak{p}}$中变得可逆。取幺半群同态 $\phi\colon M \to \{0,1\}$，其对应于 $\mathfrak{p}$，如命题 2.1.2 所示。根据 $M_{\mathfrak{p}}$的泛性质，我们可以将 ϕ 延拓为幺半群同态 $\psi\colon M_{\mathfrak{p}} \to \{0,1\}$。如果 m 在 $M_{\mathfrak{p}}$中变得可逆，那么 $\phi(m) = \psi(m) = 1$，因此 $m \in M - \mathfrak{p}$。□

2.3. 张量积与平坦性。设 M 为任意幺半群。对于右M-集 X 和左 M-集 A，我们将张量积定义为商群

$$X \otimes_M A = \{(x,a) : x \in X,\ a \in A\}/\sim$$

由等价关系 $\sim$ 生成，该等价关系由以下关系给出

$$(xm, a) \sim (x, ma)$$

对于 $m \in M$。(x,a) 的等价类记作 $x \otimes a$。

与 A 进行张量积定义了一个保余极限函子

$$-\otimes_M A : \mathsf{PSh}(M) \to \mathsf{Sets}$$
$$X \mapsto X \otimes_M A.$$

如果该函子保持有限极限，那么我们称 A 是平坦的。

左 M-集合 A 也可以等价地视为一个函子 $M \to$ 集合范畴，其中 M被视为一个单对象范畴；该函子将唯一对象映到集合 A，并将每个 $m \in M$ 映到函数 $A \to A,\ a \mapsto ma$。在这一对应关系下， A 作为左 M-集合是平坦的，当且仅当它作为函子是平坦的（例如参见 [HR21，命题 1.8]）。具体而言，这意味着 A 作为左 M-集合是平坦的，当且仅当

(F1) $A \neq \varnothing$；(F2) 对所有元素 $a, b \in A$，存在一个元素 $c \in A$ 以及元素 m, $n \in M$，使得 $a = mc$ 和 $b = nc$；(F3) 若对于 $a \in A$ 和 $m, n \in A$，有 $ma = na$，则存在一个元素 $b \in A$ 和一个元素 $s \in M$，使得 $a = sb$ 和 $ms = ns$。

例 2.3.1. 令 $\mathbb{N}_+^\times$ 为在乘法下的非零自然数幺半群，并令 $\mathbb{Q}_+^\times = \{q \in \mathbb{Q} :\ q > 0\}$。那么，由乘法给出的 $\mathbb{Q}_+^\times$上的左 $\mathbb{N}_+^\times$-作用是平坦的。上述第二个判据成立，因为我们可以将a 和 b 通分；第三个判据成立则是因为消去性。

例 2.3.2. 令 M 为由两个变量 x 和 y生成的自由幺半群，并令 G为由相同变量 x 和 y生成的自由群。那么， G 在乘法下有一个左 M-作用，但该作用不是平坦的。更确切地说，在上述第二个判据中，取 $a = x^{-1}$ 和 $b = y^{-1}$。若存在元素 $c \in G$ 以及元素 m、$n \in M$，使得 $x^{-1} = mc$、 $y^{-1} = nc$，那么 $xm = c^{-1} = yn$。这就产生了矛盾，因为 $xM \cap yM = \varnothing$。因此， G 作为左 M-集并不平坦。

在上面的第一个例子中， $\mathbb{Q}_+^\times$ 是 $\mathbb{N}_+^\times$的群化；在第二个例子中， G 是 M的群化。注意，群化与在空素理想处的局部化相同。在下一小节中，我们将讨论一个判据，用以判断对于任意素理想 $\mathfrak{p} \subseteq M$， $M_{\mathfrak{p}}$ 作为左 M-集是否平坦。

2.4. 右 Ore 条件。

以下概念在环论中广为人知，参见例如 [Coh91, §9.1]。

定义 2.4.1. 设 M 为一个幺半群， $S \subseteq M$ 为一个乘法子集。若对于任意 $m \in M$ 和 $s \in S$，都存在 $t \in S$ 和 $n \in M$ 使得 $mt = sn$，则称 M 相对于 S 满足右 Ore 条件。

若幺半群 M 相对于自身满足右 Ore 条件 [，则称其为右 Ore 幺半群。18] KKM00，第一章，定义 3。

命题 2.4.2. 设 $M \subseteq G$ 是群 G 的子幺半群，且 $\mathfrak{p} \subseteq M$ 是一个素理想。那么，当且仅当 M 关于 $S = M - \mathfrak{p}$ 满足右 Ore 条件时， $M_{\mathfrak{p}}$ 作为左 M-集合是平坦的。

证明。由引理 2.2.1，我们知道 $S = M_{\mathfrak{p}}^\times \cap M$。

首先，假设 $M_{\mathfrak{p}}$ 作为左 M-集是平坦的。取 $m \in M$ 和 $s \in S$。然后利用 $M_{\mathfrak{p}}$的平坦性，我们可以找到 m_1、$m_2 \in M$ 和 $a \in M_{\mathfrak{p}}$，使得

$$s^{-1}m = m_1 a$$
$$1 = m_2 a.$$

由此可得 $mm_2 = sm_1$，其中 $m_2 \in M_{\mathfrak{p}}^{\times} \cap M = S$。因此， M相对于 S是右 Ore。

反之，假设 M 关于 S 满足右 Ore 性质。那么对于任意 $m \in M$ 和 $s \in S$，我们都可以找到 $n \in M$ 和 $t \in S$，使得 $mt = sn$，因此 $s^{-1}m = nt^{-1}$。我们可以利用这一性质证明， $M_{\mathfrak{p}}$ 的任意元素都可以写成 ms^{-1} 的形式，其中 $m \in M$ 和 $s \in S$。现在设 ms^{-1} 和 nt^{-1} 是 $M_{\mathfrak{p}}$中的两个元素，且有 m、 $n \in M$ 以及 s、 $t \in S$。要证明 $M_{\mathfrak{p}}$ 是一个平坦的左 M-集合，只需找到 $r \in S$ 以及 m_1、 $m_2 \in M$，使得 $ms^{-1} = mm_1r^{-1}$ 和 $nt^{-1} = nm_2r^{-1}$。首先，应用右 Ore 性质找到 $m_1 \in M$、 $m_2 \in S$，使得 $sm_1 = tm_2$。现在取 $r = tm_2$。由于 t 和 m_2 都属于 S，所以 r 也属于其中。于是我们得到 $s^{-1} = m_1r^{-1}$和 $t^{-1} = m_2r^{-1}$，这正是我们所需要的。□

注释 2.4.3。上述证明中的论证在环论中众所周知。例如参见 [Art, 引理 II.3.1(ii)]。

例 2.4.4。设 G 是 M的群化。于是我们可以将 $G = M_{\mathfrak{p}}$写作 $\mathfrak{p} = \varnothing$。由命题 2.4.2 可得， G 是平坦的，当且仅当 M 满足右 Ore 条件。

由命题 2.4.2，我们可以推出以下结论：

定理 2.4.5。设 $M \subseteq G$ 是群 G的子幺半群，且 $\mathfrak{p} \subseteq M$ 是一个素理想。那么存在形如 PSh($M_{\mathfrak{p}}$) $\subseteq$ PSh(M) 的子拓扑斯，其逆像函子为 $- \otimes_M M_{\mathfrak{p}}$，当且仅当 M 关于 $S = M - \mathfrak{p}$ 满足右 Ore 条件。

证明。若存在这样的子拓扑斯，则 $M_{\mathfrak{p}}$ 作为左 M-集必定是平坦的，因为几何态射的逆像函子保持有限极限。由命题 2.4.2 可得， M 关于 S满足右 Ore 条件。

反过来，如果 M 关于 S 满足右 Ore 条件，那么根据命题 2.4.2， $M_{\mathfrak{p}}$ 是一个平坦的左 M-集合，因此我们得到一个几何态射 PSh($M_{\mathfrak{p}}$) $\to$ PSh(M)，其逆像函子为 $- \otimes_M M_{\mathfrak{p}}$。正像函子是 $- \otimes_M M_{\mathfrak{p}}$ 的右伴随，而 $- \otimes_M M_{\mathfrak{p}}$ 是遗忘函子，它将 $M_{\mathfrak{p}}$-作用限制为 M-作用。□

在本文余下部分，我们将证明，假设 M 是一个群的子幺半群，则 PSh(M) 中每个幺半群型子拓扑斯都具有上述形式。

3. Flat left M-sets as topos points

3.1. 点范畴。对于一个 Grothendieck 拓扑斯 $\mathcal{E}$，一个点是一个几何态射 p : 集合范畴 Sets $\to \mathcal{E}$，或者等价地，是一个函子 $p^* : \mathcal{E} \to$ Sets，它保持余极限和有限极限。拓扑斯的点构成一个范畴，其态射$p \to q$ 为自然变换 $p^* \to q^*$。

由 Diaconescu 定理可知：

命题 3.1.1（例如参见 [HR21，推论 1.9]）。PSh(M) 的点范畴等价于平坦左 M-集合范畴，以及其间的左 M-集合同态。

现在设 M 是群 G 的子幺半群。 [Hem20] 中证明了，存在范畴等价

$$\mathsf{PSh}(M) \simeq \mathsf{Sh}_G(X)$$

对于某个拓扑空间 X，离散群 G 在该空间上具有连续左群作用。拓扑空间 X 有一个显式构造，并且正如 [Hem20] 中所述，这提供了一种显式计算 PSh(M) 的点范畴的方法。由于 PSh(M) $\simeq$ Sh$_G$(X)，这两个拓扑斯具有相同的点范畴。此外，Sh$_G$(X) 的点范畴具有如下描述：

命题 3.1.2. 设 X 是一个拓扑空间，且 G 是一个离散群，并在 X 上具有连续的左作用。那么，Sh$_G$(X) 的点所成的范畴 Pts$_G$(X) 具有

- 作为对象：谱化 $\widehat{X}$ 的元素；
- 作为态射：满足 $x \leq gy$ 的元素 $g \in G$ $x \to y$；
- 复合由对立群 G_{op} 中的乘法定义。

这里，$\leq$ 表示 X 上的特化序，因此 $x \leq gy$ 意味着 x 位于 gy 的闭包中，或者等价地，对于每个开集 $U \subseteq X$，都有 $x \in U \Rightarrow gy \in U$。$\widehat{X}$ 上的左 G-作用是由 X 上的 G-作用诱导的。

证明见 [Hem19b，第 1.35]小节。

我们将根据 [Hem20] 回顾如何构造拓扑空间 X、其谱化 $\widehat{X}$，以及 G的作用。之后，我们将说明如何计算与元素 $x \in X$对应的平坦$\widehat{M}$左 M-集 A_x。类似地，我们将能够用 G的群作用来描述左 M-集 $A_x \to A_y$ 的态射。

设 $\leq$ 是 $G/M^\times$ 上的偏序，定义为

$$[a] \leq [b] \;\Leftrightarrow\; \exists m \in M,\; am = b. \tag{1}$$

设 X 是这样一个拓扑空间：其元素为 $G/M^\times$的元素，其开集为关于上述偏序的上闭集。X 上存在一个自然的左 G-作用，即由左乘法给出，且该作用是连续的。

对于上述拓扑空间 X 及 G-作用，有一个等价 PSh(M) $\simeq$ Sh$_G$(X)，见 [Hem20]。根据 3.1.2，要完整描述点范畴，剩下最困难的步骤是计算 X的谱化 $\widehat{X}$。

3.2. 计算谱化 $\widehat{X}$。构造谱化 $\widehat{X}$ 的一种方法如下。X 的元素是 X的不可约闭子集。函数 $X \to \widehat{X}$将元素 $x \in X$ 映射到 x 的闭包（这始终是一个不可约闭子集）。X 的不可约闭子集按包含关系$\widehat{\ }$排序，由此在 X上诱导出一个偏序，它扩展了 X上的特化序$\widehat{\ }$。X 的开集则是如下形式的集合

$$\hat{U} = \{x \in \hat{X} : \exists m \in U,\; m \leq x\}$$

其中 $U \subseteq X$是一个开子集。这在 X 的开子集框架与 X的开子集框架之间诱导出一个双射。

备注 3.2.1。在我们的情形中，回顾一下，X 上的拓扑来自 X上的偏序 $\leq$，其开集取为向上闭的子集 $U \subseteq X$。这个偏序也就是该拓扑的特化序，即 $x \leq y$ 当且仅当 x 属于 $\{y\}$的闭包。

一些术语：X 上的拓扑通常称为 Alexandrov 拓扑，而赋予这种拓扑的 X 称为亚历山德罗夫离散。X 上的诱导$\widehat{\ }$拓扑则称为斯科特拓扑。

如何刻画 $X = G/M^{\times}$的不可约闭子集？ X 的开集是上闭集，因此闭集是向下闭集。我们声称，不可约闭子集与 X中的理想相对应。这是 [GHK+03]中的一道习题，但为求完整，我们在下文给出证明。

引理 3.2.2（[GHK+03，习题 V-4.9]）。设 X 是带有 Alexandrov 拓扑的偏序集。X 的不可约闭子集恰好是 X 的理想，即满足以下条件的子集 $F \subseteq X$：

(1) F 非空；(2) F 向下闭，即 $x \leq y$ 且 $y \in F$ 蕴含 $x \in F$；(3) F 向上有向，即若 x、$y \in F$，则存在一个 $z \in F$，使得 x、$y \leq z$。

证明。我们已经看到，$F \subseteq X$ 闭当且仅当它向下闭。此外，若 $F = F' \cup F''$ 且 F'、$F'' \subseteq X$ 闭蕴含 $F = F'$ 或 $F = F''$，则 F 不可约。等价地，对于任意两个开子集 U、$V \subseteq X$，若 $U \cap F \neq \varnothing$ 且$V \cap F \neq \varnothing$，则有 $U \cap V \cap F \neq \varnothing$。因此，若 F 不可约，则它向上有向：取 U 和 V 分别为 x 和 y的向上闭包即可。反过来，假设 F 向上有向。取开子集（即向上有向子集）U、$V \subseteq X$，使得 $U \cap F \neq \varnothing$ 且 $V \cap F \neq \varnothing$。取 $x \in U \cap F$ 和 $y \in V \cap F$，并进一步取 $z \in F$，使得 x、$y \leq z$。于是 $z \in U \cap V \cap F$。□

现在定义 $\hat{}X$ 上的 G-作用如下：$x \in F\}$，其中 $g \in G$为一个元素，$F \subseteq X$为一个理想。

3.3. 从点到平坦左 M-集合的转换。由于 PSh(M) $\simeq$ Sh$_G$(X)，存在一个范畴等价

$$\mathsf{Flat}(M) \simeq \mathbf{Pts}_G(X) \tag{2}$$

其中，Flat(M) 表示平坦左 M-集合的范畴，而 Pts$_G$(X) 表示 Sh$_G$(X) 的点范畴，如命题 3.1.2 所述。

由于 X 是一个单 G_0-集，我们将 X 视为 $\hat{}X$ 的自然映射。X 的元素全都属于同一个 G-轨道，因此根据命题 3.1.2，它们定义了 Sh$_G$(X) 的同构点。根据 [Hem20] 中 Sh$_G$(X) $\simeq$ PSh(M) 范畴等价的构造可知，点 $[1] \in X$ 对应于平坦左 M-集合 M。现在我们可以确定与任意点 $x \in X$ 对应的 $\hat{}$ 平坦左 M-集合 A_x，因为 A_x 的元素由态射 $M \to A_x$ 给出，而根据等价 (2)，这些态射与满足 $1 \leq gx$ 的元素 $g \in G$ 相同。因此我们得到：

$$A_x = \{g \in G : gx \geq 1\}.$$

A_x 上的左 M作用由乘法给出。此外，对于一个元素 $h \in G$，我们发现

$$A_{hx} = \{g \in G : ghx \geq 1\} = A_x\, h^{-1}. \tag{3}$$

$\hat{}$ 3.4. 平坦左 M-集合的态射。对于两个点 x、$y \in X$，现在我们还可以计算同态的集合 $A_x \to A_y$。根据等价关系 (2) 和命题 3.1.2，我们可以作如下同一化：

$$\mathcal{H}om^M(A_x, A_y) = \{g \in G : x \leq gy\}$$

（我们用 $\mathcal{H}\text{om}^M$ 表示左 M-集合之间的态射，用 $\mathcal{H}\text{om}_M$ 表示右M-集合之间的态射）。与 $g \in G$ 对应的态射是将 $a \in A_x$ 映射到 $ag \in A_y$ 的态射。注意，态射的复合对应于对立群 G^{op}中的乘法。特别地，我们得到

$$\mathcal{E}nd^M(A_x) = \{g \in G : gx \geq x\}^{\text{op}} \subseteq G^{\text{op}}.$$

是 G^{op} 的子幺半群。

我们将记作 $M_x = \mathcal{E}\text{nd}^M(A_x)^{\text{op}}$，因此

$$M_x = \{g \in G : gx \geq x\} \subseteq G.$$

特别地，$M_{[1]} = M$ 作为 G 的子幺半群。包含 $M_x \to \mathcal{E}\text{nd}^M(A_x)^{\text{op}}$ 在 A_x 上定义了一个右 M_x-作用，并且这个右 M_x-作用与左M-作用相容。它由 $a \cdot m = am$ 给出，其中 $a \in A_x$ 和 $m \in M_x$，等式右侧的乘法在 G 中进行。

对于一个元素 $h \in G$，我们得到

$$M_{hx} = hM_xh^{-1}. \tag{4}$$

3.5. 包含 $[1]$ 的理想。如果 $F \subseteq X$ 是一个理想，且 $[g] \in F$ 是一个具有代表元 $g \in G$ 的元素，那么 $g^{-1} \cdot F$ 是一个包含 $[1]$ 的理想。因此，在同构意义下，$\text{Sh}_G(X)$ 的每个点都由一个包含 $[1]$ 的理想 $F \subseteq X$ 给出。

包含 $[1]$ 的滤子在以下意义下更容易处理：

引理 3.5.1。设 F 是一个包含 $[1]$ 的理想。令

$$Y = \{x \in X : x \geq [1]\} \subseteq X.$$

则 $F \cap Y \subseteq Y$ 是 Y 的理想。反之，若 $F' \subseteq Y$ 是 Y 的理想，并令 F 为 F' 在 X 中的向下闭包，则 $F \subseteq X$ 是 X 的理想。这两个过程互为逆过程，因此 $Y = \{x \in X : x \geq [1]\}$。

证明。这直接由引理 3.2.2 中所述的理想公理得出。

□

由上可知，为了理解 X 上的理想，我们只需确定 $Y = M/M^\times$ 上的理想。事实上，X 上的每个理想都具有 $g \cdot F$ 的形式，其中 $g \in G$ 和 F 是 Y 上某个理想的向下闭包。

4. Examples

在第5节中，我们将使用第3节中的计算来研究 $\text{PSh}(M)$ 的幺半群型子拓扑斯。但首先，我们展示如何将第3节的结果应用于确定一些例子中的平坦左 M-集合范畴。我们使用第3节中的记号。

4.1. 自由幺半群。令 $M = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ 为由 k 个变量 $a_1, \ldots, a_k$ 生成的自由幺半群。为了确定 $\text{PSh}(M)$ 的点，我们首先必须确定 $Y = M/M^\times$ 上的理想，其中 Y 按关系 $[x] \leq [y] \Leftrightarrow \exists m \in M,\ y = xm$ 排序。

在这种情况下，单位群 $M^\times$ 是平凡的，因此 $Y = M$。

Y中的有限理想具有 $y = \{1, x_0, x_0x_1, x_0x_1x_2, \ldots, x_0x_1 \ldots x_r\}$的形式，其中对所有 $0 \leq i \leq r$均有 $x_i \in \{a_1, \ldots, a_k\}$。利用公式 (3) 和 (4)，我们在此得到$A_y = Mm^{-1}$和 $M_y = mMm^{-1}$。

偏序集 $Y = M$ 上的无限理想更有趣。它们由无限词给出

$$x_0x_1x_2\dots$$

其中 $x_i \in \{a_1, \dots, a_k\}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$都成立。相应的 Y理想是子集

$$\{1, x_0, x_0x_1, x_0x_1x_2, \dots\} \subseteq Y$$

再取向下闭包，即可得到 X中相应的理想。

注意， Y 的两个不同无限理想必然不可比较。这意味着，如果 $y \in Y$ 不是有限的，那么 $y \leq gy$ 当且仅当 $y = gy$。由此可知，平坦左 M-集合的所有自同态幺半群都是群。我们计算一些例子（记作 $a = a_1$ 和 $b = a_2$）。

- 取点 $y = aaa\dots$。那么 $y = gy$ 当且仅当 $g \in \langle a, a^{-1}\rangle$。因此，自同态幺半群同构于 $(\mathbb{Z}, +)$。
- 取点 $y = abbaabbaabba\dots$。那么 $y = gy$ 当且仅当 g 属于由元素 $abba$生成的自由子群。因此，自同态幺半群同构于 $(\mathbb{Z}, +)$。

在所有点由重复完全相同模式的“周期”序列表示的情形下，情况都类似：自同态幺半群同构于 $(\mathbb{Z}, +)$。更一般地，如果该点的形式为 gy ，其中 y 是周期序列且 $g \in G$，那么我们可以使用公式 $M_{gy} = gM_yg^{-1}$。因此，自同态幺半群再次同构于 $(\mathbb{Z}, +)$。结论是，只要序列 y 是最终周期的，与 y 相关联的平坦左 M-集的自同态幺半群就同构于 $(\mathbb{Z}, +)$。

我们断言，如果 y 不是最终周期的，那么相关联的平坦左 M-集的自同态幺半群就是平凡的。取 $g \in G$。记 $y = x_0x_1x_2\dots$ 和 $gy = x'_0x'_1x'_2\dots$。如果 $gy \geq 1$，那么必有 $g = x'_0x'_1\dots x'_rx_s^{-1}x_{s-1}^{-1}\dots x_0^{-1}$，其中某个 r、$s \in \mathbb{N}$。于是我们可以将 gy 改写为

$$gy = x'_0\dots x'_rx_{s+1}x_{s+2}\dots$$

换言之， $x_{s+i} = x'_{r+i}$ 对所有 $i \geq 1$均成立。现在假设 $gy = y$。那么，取如上所述的 r和 s ，我们有：对所有 $i \geq 1$， $x_{s+i} = x_{r+i}$ 均成立。如果 $r \neq s$ ，则这意味着 y 是最终周期的，其周期整除 $|r - s|$。如果 $r = s$，那么由 $g = x'_0x'_1\dots x'_rx_s^{-1}x_{s-1}^{-1}\dots x_0^{-1}$可知， g是平凡的。我们得出结论：如果 y不是最终周期的，那么相应平坦左 M-集合的自同态幺半群是平凡的。

4.2. 算术位点。Connes–Consani 算术位点 [CC14] [CC16]的底层拓扑斯是预层范畴 $\mathbf{PSh}(M)$，其中 $M = \mathbb{N}_+^\times$ 是关于乘法运算的非零自然数幺半群。在此情形下，同样有 $M^\times = \{1\}$，因此 $Y = \mathbb{N}_+^\times$，其偏序为整除关系。$\mathbb{N}_+^\times$ 的群化是严格正有理数 $\mathbb{Q}_+^\times$所成的群。

在 [LB16 的命题 3], 中证明了， Y的理想与超自然数一一对应；超自然数即由素数索引的形式无限乘积 $\prod_p p^{e_p}$ ，其中每个素数 p 都满足 $e_p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ 。与超自然数 s 对应的理想 F_s 是

$$F_s = \{n \in \mathbb{N}_+^\times : n|s\},$$

参见 [LB16，命题 3]的证明。这里我们采用超自然数上的自然整除关系。

与超自然数 $y = \prod_p p^{e_p}$ 相关联的平坦左 $\mathbb{N}_+^\times$-集是

$$A_y = \{\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^* : b|y\}, \tag{5}$$

如 [LB16，定理 2]的证明中所示。我们还可以计算出

$$M_y = \{\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^* : \forall p \text{ prime}, \ p|b \Rightarrow p \notin \Sigma_y\} \tag{6}$$

其中， Σ_y 是指数 e_p 有限的素数集合 p 。

如果我们改为取 $M = \mathbb{Z}^{\text{ns}}$ 乘法下的非零整数，那么$Y = M/M^*$ 仍可与 $\mathbb{N}_+^\times$ 对应，其偏序由除法给出。因此， Y 上的滤子与上面相同，而 (5) 和 (6) 的类似形式为

$$A_y = \{\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^* : b|y\}, \quad M_y = \{\tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^* : \forall p \text{ prime}, \ p|b \Rightarrow p \notin \Sigma_y\}.$$

4.3. 整数系数矩阵。令 $M = \mathbf{M}_2^{\text{ns}}(\mathbb{Z})$ 表示具有整数系数且行列式非零的 2×2-矩阵。其群化为 $G = \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$。我们已经从 [Hem19a] 得知， $Y = M/M^\times$上的滤子偏序集为

$$\mathrm{M}_2(\widehat{\mathbb{Z}})/\operatorname{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$$

$\widehat{\ }$当且仅当存在某个 $m \in \mathbf{M}_2(\mathbb{Z})$ 使得 $x = ym$时， $[x] \geq [y]$ 。对于

$\widehat{\ }$ $\backsim y \in \mathbf{M}_2(\mathbb{Z})/\operatorname{GL}_2(\mathbb{Z})$，相应的平坦 M-集为

$$A_y = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) : gy \in \mathrm{M}_2(\widehat{\mathbb{Z}})\}.$$

此外，我们有

$$M_y = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) : gy \geq y\}.$$

更详细地概述 A_y 和 M_y 可能的形式会让我们离题太远。不过，我们可以讨论一些特殊情形:

- If y is the zero matrix, then $A_y = M_y = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.
- Suppose that $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. We write an element $g \in G$ as $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so $gy = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Now $gy \geq y$ if there is an $m \in \mathrm{M}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ such that $gy = ym$. If we let $m = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$ then $gy = ym$ holds if and only if $c = 0$ and $z_{11} = a$, $z_{12} = 0$. It follows that $gy \geq y$ if and only if $c = 0$ and $a \in \mathbb{Z}$. We can symbolically write this down as
$$M_y = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}).$$

请注意， $\mathbf{PSh}(\mathbf{M}_2^{\text{ns}}(\mathbb{Z}))$ 的点范畴等价于秩为 2 的无挠阿贝尔群范畴，以及它们之间的单同态范畴，参见 [Hem19b，命题 4.1]。

4.4. 环面纽结幺半群。考虑幺半群 $M = \langle a, b : a^k = b^l \rangle$ ，其中 $k, l \geq 2$为自然数。按照 [EK13] 的用法，我们将 M 称为环面纽结幺半群。

$Y = M/M^\times$上的理想有哪些? 请注意，单位群 $M^\times$是平凡的，因此 $Y = M$ 上的序关系为 $x \leq y \Leftrightarrow \exists m \in M, \ y = mx$。为简化讨论，我们将 M 写成一个性质更好的幺半群的子幺半群，如下所示。

$H = \langle a, b : \ a^k = b^l = 1 \rangle$ 的商群 M 是一个群。我们还可以在 M上引入次数函数，即幺半群同态 $\deg : M \to \mathbb{N}$ ，它将

a 映射到 l ，并将 b 映射到 k，其中 $\mathbb{N}$ 视为关于加法的幺半群。我们断言映射 $M \to \mathbb{N} \times H$，$m \mapsto (\deg(m)\ [m])$是单射。首先，我们写出

$$\delta(h) = \min_{[m]=h} \deg(m).$$

其中，最小值取遍所有满足 $m \in M$ 和 $[m] = h$的情形。现在取 m、$m' \in M$，使得 $[m] = [m']$ 且 $\deg(m) = \deg(m')$。我们通过对 $\deg(m)$ $=\deg(m')$ 进行归纳来证明 $m = m'$。作为基础情形，考虑 $\deg(m)$ $=\deg(m')$ $= \delta([m])$ 的情况。由 $[m] = [m']$ 可知，$m = m'$ 或 $m, m' \in McM$ 对于 $c = a^k = b^l$成立。在第二种情况下，我们可以写成 $m = m_0 c$, $m' = m'_0 c$ ，其中 $m_0, m'_0 \in M$。这会导致矛盾，因为 $\deg(m_0)$ $=\deg(m)$ $-$ $\deg(c)$ $<\deg(m)$ 且 $[m_0] = [m] = g$。在归纳步骤中，我们再次由 $[m] = [m']$ 得到 $m = m'$，否则 $m = m_0 c$, $m' = m'_0 c$ 对于 $m_0, m'_0 \in M$成立。在第二种情况下，由归纳假设可得 $m_0 = m'_0$，从而得到 $m = m'$。

通过上述过程，我们现在将 M 视为 $\mathbb{N} \times H$ 的子幺半群。于是， M 的元素均可唯一表示为 $(\delta(h) + \lambda kl, h)$，其中 $\lambda \in \mathbb{N}, h \in H$。我们称 λ 为 m 的层级，并称 $\nu = \delta(h)$ 为 m 的层位，沿用 [Hem19a, §2.1] 中的术语。如果希望强调对 m 的依赖性，我们分别将层级和层位写作 $\lambda(m)$ 和 $\nu(m)$。

回顾我们的记号 $c = a^k = b^l$。

引理 4.4.1。对于层级为 λ 的 $m \in M$ 元素，我们有 $m \in Mc^\lambda$ ，并且 λ 在满足此性质的元素中是极大的。

证明。设 $(\delta(h) + \lambda kl, h)$ 是 M 的任意元素。于是我们可以写成

$$(\delta(h) + \lambda kl, h) = (\delta(h), h)(\lambda kl, 1)$$

其中 $(\lambda kl, h) = c^\lambda$ 且 $(\delta(h)\ h) \notin Mc$。 □

现在我们区分偏序集 $Y = M$ 的三类理想。

如果在理想 $F \subseteq Y$ 中，$_{m \in F}$ λ的层级无界，即 $\sup_{m \in F} \lambda(m) = +\infty$，那么利用引理 4.4.1，我们看到 F 对每个 $N \in \mathbb{N}$都包含 c^N ，因为 F是向下闭的。现在令 $m = (\delta(h) + \mu kl, h)$ 为 M的任意元素。于是

$$(\delta(h^{-1}), h^{-1})(\delta(h) + \mu kl, h) = (\delta(h^{-1} + \delta(h) + \mu kl, 1),$$

右侧集合中的元素是 c的幂。由于 F 是向下闭的，因此可得 $m \in F$。但 $m \in M$ 是任意的，所以 $F = M$。反过来，我们可以验证 $F = M$ 确实是一个理想。如果 y 是对应于理想 $F = M$ 的点，那么 $A_y = M_y = G$，其中 G 是 M 的群化。

现在假设在 F中，λ 取得最大值 $\lambda = \lambda_0$。由于 F 是向下闭的，利用引理 4.4.1 可得 $c^{\lambda_0} \in F$。由于 F 是向上有向的，因此可推出 F 是满足 $\lambda(m) = \lambda_0$的元素 $m \in F$的向下闭包。这意味着对于一个仅包含 0 级元素的滤子 $F_0 \subseteq Y$，我们可以写成 $F = c^{\lambda_0} \cdot F_0$。为简化讨论，我们将注意力限制在后一类滤子上，因此 $F = F_0$。对于每个元素 $m \in F_0$，存在唯一的词 w，它由字母 a 和 b 组成，使得 w 在 M 中的等价类与 m 重合（因为只有当 w 包含 a^k 或 b^l 作为子串时，才能应用等价 $a^k \sim b^l$，但此时 $\lambda(m) \geq 1$）。如同在第 4.1 小节中一样，我们得出结论：或者

$$F = \{1, x_0, x_0x_1, x_0x_1x_2, \dots\} \tag{7}$$

其中，$\{a, b\}$ 中的无限词 $x_0x_1x_2\dots$不包含 a^k 或 b^l 作为子串，或者

$$F = \{1, x_0, x_0x_1, \dots, x_0x_1\dots x_r\} \tag{8}$$

对于 $\{a,b\}$ 中的有限词 $x_0x_1\dots x_r$，同样不包含 a^k 或 b^l 作为子串。这对应于在 F 中，层位 ν 无界或有界的情形。若 y 是对应于 F的点，且 F 如式（7）所示，则我们得到

$$A_y = \{mx_r^{-1}\dots x_0^{-1} : m \in M,\ r \in \mathbb{N}\}.$$

M_y 的计算与第 4.1 小节中的计算类似：我们发现，当 $y = x_0x_1x_2\dots$ 是最终周期词时，$M_y \cong \mathbb{Z}$；否则， $M_y = \{1\}$。如果 F 对应于如（8）中的有限词，那么我们可以写成 $m = x_0x_1\dots x_r$，然后使用公式（3）和（4）求得 $A_y = Mm^{-1}$ 和 $M_y = mMm^{-1}$。

提醒：这仅适用于 $\lambda_0 = 0$ 的情况；对于一般的 λ_0，当 F_0 如（7）或（8）时，我们得到 $F = c^{\lambda_0}F_0$。如果 y 和 y_0 分别是对应于 F 和 F_0 的点，那么我们可以利用（3）和（4）得出 $A_y = A_{y_0}c^{-\lambda_0}$ 和 $M_y = M_{y_0}$。

5. Subtoposes of monoid type

5.1. 第一个必要条件。设 M 是嵌入群 $M \subseteq G$ 中的幺半群。设 X 是之前构造的空间，使得

$$\mathsf{Sh}_G(X) \simeq \mathsf{PSh}(M).$$

我们希望确定 PSh(M) 的幺半群型子拓扑斯，即那些本身具有某个幺半群 N 的 PSh(N) 形式的子拓扑斯。与所有预层拓扑斯一样，这些子拓扑斯都有足够多的点。因此，我们可以使用以下命题:

命题5.1.1。设 X 是一个带有离散群 G 的左连续作用的谱拓扑空间。则 $\mathsf{Sh}_G(X)$ 中具有足够多点的子拓扑斯与 G-不变谱子空间 $Z \subseteq X$ 之间存在双射对应。与 $Z \subseteq X$ 对应的子拓扑斯是 $\mathsf{Sh}_G(Z)$。

证明参见 [Hem19b，命题3.27]。

何时可以将 $\mathsf{Sh}_G(Z)$ 写成某个幺半群 N 的 PSh(N)? 如果 $\mathsf{Sh}_G(Z) \simeq \mathsf{PSh}(N)$，那么特别地，通过考察点范畴可得 $\mathsf{Pts}_G(Z) \simeq \mathsf{Flat}(N)$。我们将每个平坦左 N-集与其在 Z 中对应的点相联系。设 $x \in Z$ 是与平坦左 N-集 N 对应的点。通过两种方式计算其自同态幺半群，我们得到 $N_{\mathrm{op}} = \mathcal{E}\mathsf{nd}^N(N) = \mathcal{E}\mathsf{nd}^M(A_x) = M_{\mathrm{op}x}$。

取对偶后，我们得到

$$N = M_x = \{g \in G : gx \geq x\},$$

特别地， N 是 G的子幺半群。

设 i: PSh(N) $\to$PSh(M)对应于包含$\mathsf{Sh}_G(Z) \to \mathsf{Sh}_G(X)$。几何态射 i具有一个逆像函子 i^*: PSh(M) $\to$PSh(N)，其右伴随为 i_*。函子 i^* 具有如下形式

$$i^*(X) \simeq X \otimes_M P$$

其中， P是一个集合，带有相容的左 M-作用和右 N-作用。正像函子是右伴随

$$i_*(Y) \simeq \mathcal{H}om_N(P, Y),$$

例如参见 [HR21，命题 1.5]。由于 i^* 保持有限极限， P 作为左M-集合是平坦的。

几何态射 i 在点范畴之间诱导出一个函子

$$\begin{aligned}\mathsf{Flat}(N) &\longrightarrow \mathsf{Flat}(M)\\ B &\mapsto P \otimes_N B.\end{aligned}$$

我们已在上文假设此函子将 N 映到 $A_{x\circ}$ 因此，我们可以作同一化 $P = A_{x\circ}$ 借助先前的同一化 $N = M_x$，A_x 上的右 N作用便与第3.4小节中 A_x 上的右M_x作用一致。

我们现在已证明如下结论：

引理 5.1.2. 设 M是群 G的子幺半群，且 i: PSh(N) $\to$PSh(M) 是一个几何嵌入，其中 N 是某个幺半群。那么，采用第3节的记号并忽略等价差异，该几何嵌入可写成如下形式

$$\begin{array}{ccc} & \overset{-\otimes_M A_y}{\curvearrowleft} & \\ \mathsf{PSh}(M_y) & & \mathsf{PSh}(M) \\ & \underset{\mathcal{H}om_{M_y}(A_y,-)}{\curvearrowright} & \end{array} \tag{9}$$

ˆ 对某个 $y \in X$成立。

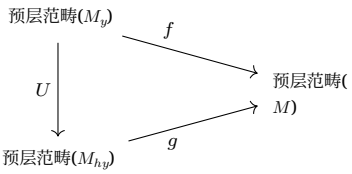
ˆ 注记 5.1.3. 对于 $y \in X$ 和 $h \in G$，假设我们有两个如下形式的几何态射 f 和 g：

$$\begin{array}{ccc} & \overset{-\otimes_M A_y}{\curvearrowleft} & \\ \mathsf{PSh}(M_y) & & \mathsf{PSh}(M) \\ & \underset{\mathcal{H}om_{M_y}(A_y,-)}{\curvearrowright} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \overset{-\otimes_M A_{hy}}{\curvearrowleft} & \\ \mathsf{PSh}(M_{hy}) & & \mathsf{PSh}(M) \\ & \underset{\mathcal{H}om_{M_{hy}}(A_{hy},-)}{\curvearrowright} & \end{array}$$

函数 $M_y \to M_{hy}$，$m \mapsto hmh^{-1}$ 是幺半群的同构。若将 A_{hy} 视为右 M_{hy}-集，再通过$a \cdot m = a\phi(m)$考察由此诱导的右 M-作用，则双射 $A_y \to A_{hy}$，$a \mapsto ah^{-1}$ 对于左 M-作用和右 M_y-作用都是等变的。

由上述讨论，我们得到如下交换图



在自然同构意义下交换，其中 U 是一个等价。因此，如果 $-\otimes_M A_y$定义了形如(9)的子拓扑斯，那么 $-\otimes_M A_{hy}$ 定义的是同一个子拓扑斯。

例 5.1.4. 设 M 是由 k 个变量生成的自由幺半群。根据第 4.1 小节，我们知道 M_y 有三种可能：

- 如果 $y = a_0a_1 \dots a_r$ 是一个有限词，那么 $M_y \cong M$；
- 如果 $y = a_0a_1a_2 \dots$ 是最终周期的，那么 $M_y \cong \mathbb{Z}$；

• 若 $y = a_0 a_1 a_2 \ldots$ 不是最终周期的，则 $M_y \cong \{1\}$。

由引理 5.1.2可知，如果 PSh(N) $\to$PSh(M) 是某个幺半群 N的几何嵌入，那么 N同构于 M、 $\mathbb{Z}$或平凡幺半群。我们稍后将排除后两种可能性，这意味着，除了 PSh(M) $\subseteq$ PSh(M) 本身之外，PSh(M) 没有其他幺半群型子拓扑斯。

5.2. 更进一步。现在考虑右 M-集 G （在乘法下）。我们证明它在逆像下保持不变。

引理 5.2.1。采用第3节中的记号，考虑如下形式的几何嵌入

$$\mathsf{PSh}(M_y) \underset{\mathcal{H}om_{M_y}(A_y,-)}{\overset{-\otimes_M A_y}{\rightleftarrows}} \mathsf{PSh}(M)$$

˄ 对于某个 $y \in X$。那么映射 $G \otimes_M A_y \to G$, $g \otimes a \mapsto ga$ 是双射。

证明。由于我们讨论的是几何嵌入，余单位

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{M_y}(A_y, G) \otimes_M A_y &\longrightarrow G \\ \phi \otimes a &\mapsto \phi(a) \end{aligned} \tag{10}$$

是一个同构。现在考虑嵌入 $G \hookrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}^{M_y}(A_y, G)$，它将 g映射为同态 $a \mapsto ga$。对 A_y 取张量积保持单态射，因此限制映射

$$\begin{aligned} G \otimes_M A_y &\longrightarrow G \\ g \otimes a &\mapsto ga \end{aligned}$$

(10) 仍然是单射。由于 $1 \otimes a$ 映射到 a，可知该映射也是满射。□

引理 5.2.2。沿用第3节中的记号，考虑如下形式的几何嵌入

$$\mathsf{PSh}(M_y) \underset{\mathcal{H}om_{M_y}(A_y,-)}{\overset{-\otimes_M A_y}{\rightleftarrows}} \mathsf{PSh}(M)$$

˄ 对某个 $y \in X$成立。于是存在一个 $g \in G$ ，使得 $M_y = gA_y$。

证明。包含 $M_y \subseteq G$ 诱导出一个包含 $\mathcal{H}\mathrm{om}^{M_y}(A_y, M_y) \subseteq \mathcal{H}\mathrm{om}^{M_y}(A_y, G)$。我们也可以通过将 g映射到映射 $a \mapsto ga$，把 G 视为 $\mathcal{H}\mathrm{om}^{M_y}(A_y, G)$ 的子集。由于我们讨论的是几何嵌入，可以作如下同一认定： $\mathcal{H}\mathrm{om}^{M_y}(A_y, G) \otimes_M A_y = G$。于是还可得到 $\mathcal{H}\mathrm{om}^{M_y}(A_y, M_y) \otimes_M A_y = M_y$。由引理 5.2.1可知， $G \otimes_M A_y = G$。

现在我们将 S 定义为交集 $S = \mathcal{H}\mathrm{om}^{M_y}(A_y, M_y) \cap G$。与$A_y$ 进行张量积会保留交集，因此 $S \otimes_M A_y = M_y$。

将 $S = \bigcup_{i \in I} g_i M$ 写成右 M-集合并与 A_y 进行张量积后，我们得到

$$M_y = \bigcup_{i \in I} g_i A_y.$$

取 $i_0 \in I$ 使得 $1 \in g_{i_0} A_y$。由于 1 生成 M_y 作为右 M_y-集合，我们看到 $M_y = g_{i_0} A_y$，这正是我们想要证明的结论。□

定理 5.2.3. 设 M 是群 G的一个子幺半群。假设存在一个元素 $\hat{}\,\hat{}y \in X$，使得 $M_y = A_y$。那么 $y \in Y$，并且存在一个幺半群型的子拓扑斯i : PSh(M_y) $\to$ PSh(M)，其逆像函子由 $i^*(X) \simeq X \otimes_M M_y$给出。反过来，PSh($M$)的每个幺半群型子拓扑斯都具有这种形式，且对应于唯一的 $\hat{}y \in Y$，使得 $M_y = A_y$。

证明。假设 $M_y = A_y$。那么 $M \subseteq M_y = A_y$，因为 $M_y = A_y$ 包含 1，且在乘法所给出的左 M-作用下封闭。由 $M \subseteq A_y$ 可得 $y \geq [1]$。

此外，由于 M_y 作为左 M-集是平坦的，函子 i^* 满足 $i^*(X) = X \otimes_M M_y$，保持余极限和有限极限，因此它是一个几何态射 i : PSh(M_y) $\to$ PSh(M)的逆像函子。我们声称 i 是一个几何嵌入。首先注意，正像函子 i_* 由 $i_*(Y) \simeq \mathrm{Hom}^{M_y}(M_y, Y) \simeq Y$给出。更确切地说，正像函子 i_* 是遗忘函子，它将一个右M_y-集映射为同一个集合，并赋予由此诱导的右 M-作用。特别地，i_* 保持余极限。为了证明 i 是一个几何嵌入，我们要证明余单位 ϵ : $i^* i_* \to 1$ 是自然同构。由于 $i^* i_*$ 保持余极限，只需证明 ϵ 在生成元 M_y处是同构，换句话说，

$$M_y \otimes_M M_y \xrightarrow{\epsilon_{M_y}} M_y$$

$$g \otimes h \longmapsto gh$$

是一个同构。满射性显然。为证明单射性，考虑包含$M_y \subseteq G$。应用 i^* 得到一个单射映射 j : $M_y \otimes_M M_y \to G \otimes_M M_y \simeq G$，其中后一个同构由引理 5.2.1 得出。单射映射 j 分解为先经过ϵ_{M_y}，再经过包含 $M_y \subseteq G$，因此 ϵ_{M_y} 也是单射的。由此可得，i是一个几何嵌入。

反之，设给定 PSh(M) 的一个幺半群型子拓扑斯。根据引理 5.1.2，该子拓扑斯具有如下形式 i : PSh(M_y) $\to$ PSh(M)，其中 $i^*(X) \simeq \hat{} - \otimes_M A_y$，对于某个 $y \in X$。此外，根据引理 5.2.2，我们还可以找到某个 $g \in G$，使得 $M_y = g A_y$。然后利用基变换公式 (3) 和 (4) 得到 $M_{g^{-1}y} = g^{-1} M_y g = A_y g = A_{g^{-1}y}$。将 y 替换为 $g^{-1}y$（见注记 5.1.3）后，不妨设 $M_y = A_y$。

$\hat{}$ 在每个 G-轨道中，至多有一个 $y \in X$ 满足 $M_y = A_y$。事实上，假设 $M_y = A_y$ 且 $M_{gy} = A_{gy}$。利用等式 (3) 和 (4)，后一个等式可化简为 $gM_y = A_y$。由于 $gM_y = M_y$，我们得到 $g \in M_y$ 和$g^{-1} \in M_y$，换言之，$gy \geq y$ 和 $g^{-1}y \geq y$。第二个不等式等价于 $y \geq gy$，因此我们得到 $gy = y$。□

推论 5.2.4. 设 M 是群 G的一个子幺半群。那么，PSh(M)的幺半群型子拓扑斯（在等价意义下）与满足 $M \subseteq N \subseteq G$ 且作为左 M-集是平坦的幺半群 N 之间存在双射对应。

证明。根据定理 5.2.3，幺半群型子拓扑斯具有 PSh(M_y) $\to$PSh(M) 的形式，其中 $y \in \hat{}Y$是满足 $A_y = M_y$ 的元素。由于 $y \in \hat{}Y$，我们发现 $M_y = A_y$ 包含 M。因此，取 $N = A_y = M_y$，我们看到每个子拓扑斯都给出了如陈述中所述的幺半群 N。

反之，假设 N 是一个幺半群，且具有 $M \subseteq N \subseteq G$，使得 N 作为左 N-集是平坦的。于是，对于某个 $y \in X$，有 $N = A_y$。由于 $M \subseteq N$，我们得到 $y \in Y$。我们断言 $M_y = A_y = N$。由 $y \geq 1$ 可知 $M_y \subseteq A_y$。我们可以将 M_y 写成 $M_y = \{g \in G : \forall a \in A_y、 ag \in A_y\}$。由于 $A_y = N$ 在乘法下封闭，我们也看到包含关系的逆向 $A_y \subseteq M_y$同样成立。我们得出 $N = M_y = A_y$。□

例5.2.5. 令 $M = \langle a_1、.....、a_k \rangle$ 为由 k 个变量生成的自由幺半群。由第 4.1 小节可知， M_y 同构于 M、 $\mathbb{Z}$ 或平凡幺半群。若$M_y = A_y$，则有 $M \subseteq M_y$，这只有在 $M_y \cong M$时才可能。因此， y 是一个有限词，并且我们看到，当且仅当 $y = 1$时，等式 $M_y = A_y$ 成立。这对应于全子拓扑斯 PSh(M) $\subseteq$ PSh(M)，除此之外不存在其他幺半群型子拓扑斯。

5.3. 与素理想的联系。像之前一样，取 M、 G 和 X。我们知道，任何幺半群型子拓扑斯都可以写成如下形式

$$\mathsf{PSh}(M_y) \underset{\mathcal{H}om_{M_y}(M_y,-)}{\overset{-\otimes_M M_y}{\rightleftarrows}} \mathsf{PSh}(M)$$

˄ 对于某个 $y \in X$，使得 $M_y = A_y$。我们断言，此处 M_y 是将 M 在某个素理想 $\mathfrak{p}$处进行局部化所得的结果。

对于 N 群的子幺半群 G， N 中的任意左可逆元素也是右可逆的，反之亦然。可逆元素的子集为

$$N^\times = \{n \in N : n^{-1} \in N\},$$

逆元取自 G。然后我们可以直接验证， $N - N^\times$ 是 N的素理想。

取 $N = M_y$，我们得到 M_y的素理想 $M_y - M_y^\times$。现在定义 $\mathfrak{p}_y$为沿包含 $M \subseteq M_y$对该素理想的逆像，即

$$\mathfrak{p}_y = (M_y - M_y^\times) \cap M.$$

˄ 命题 5.3.1。设 $y \in X$ 为满足 $M_y = A_y$的元素。则 $M_y = M_{\mathfrak{p}_y}$。

证明。根据构造， $S = M - \mathfrak{p}_y$ 中的每个元素在 M_y中都变为可逆元素。根据局部化的泛性质，这意味着包含 $M \subseteq M_y$可通过 $M_{\mathfrak{p}_y}$进行分解。除去同构差异，我们可以假设该分解通过包含 $M \subseteq M_{\mathfrak{p}_y} \subseteq M_y$进行。

接下来要证明反向包含 $M_y \subseteq M_{\mathfrak{p}_y}$。取 $g \in M_y$。由于$M_y = A_y$，我们知道 M_y 是平坦的左 M-集。因此，我们可以取 $a \in M_y$ 以及元素 m、 $n \in M$，使得 $ma = g$ 且 $na = 1$。于是我们找到 $g = mn^{-1}$，满足$n \in S$，因此 $g \in M_{\mathfrak{p}_y}$。□

结合定理 2.4.5、定理 5.2.3 和命题 5.3.1，我们可以得出结论：

定理 5.3.2. 设 M 是群的一个子幺半群。则预层范畴 PSh(M) 的幺半群型子拓扑斯恰好是子拓扑斯 PSh($M_\mathfrak{p}$) $\subseteq$PSh(M)，其逆像函子为 $-\otimes_M M_\mathfrak{p}$；其中 $\mathfrak{p} \subseteq M$ 是满足 M 关于 $M - \mathfrak{p}$ 为右 Ore 的一个素理想。

6. Returning to our examples

6.1. 自由幺半群。我们已经在例5.2.5中看到，对于 $M = \langle a_1, \ldots\ldots, a_k \rangle$ 是由 $k \geq 2$ 个变量生成的自由幺半群，$\mathsf{PSh}(M)$ 没有任何非平凡的幺半群型子拓扑斯。利用定理 5.3.2，我们可以从不同角度看待同一现象。

设 $S \subseteq M$ 是任意乘法子集。若 $s \in S$ 是满足 $s \neq 1$ 的一个元素，那么我们可以找到一个 $m \in M$，使得 $sM \cap mM = \varnothing$。例如，若 $s \in a_1 M$，则可以取 $m \in a_2 M$。由此可知，M 关于 S 是右 Ore 的，当且仅当 $S = \{1\}$。根据定理 5.3.2，此时唯一的幺半群型子拓扑斯对应于素理想 $\mathfrak{p} = M - \{1\}$，也就是说，全子拓扑斯 $\mathsf{PSh}(M) \subseteq \mathsf{PSh}(M)$。

为了得出这个结论，无须计算 M 的素理想。不过，了解一下这些素理想或许仍有帮助。对于由 k 个生成元生成的自由幺半群 M，根据命题 2.1.2 可知，存在 2^k 个素理想。事实上，构造幺半群同态 $M \to \{0,1\}$ 时，我们可以为 M 的每个生成元任意选择 0 或 1 作为其像。于是，M 的素理想可以写成

$$\mathfrak{p}_J = \bigcup_{j \in J} M a_j M$$

对于 $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ 任意子集。

6.2. 算术站。我们可以使用命题 2.1.2 来计算 $M = \mathbb{N}_+^\times$的素理想。由于 M 是由可数多个生成元生成的自由交换幺半群，因此我们看到，素理想恰好是如下形式的理想：

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{p \in \Sigma} p\mathbb{N}_+^\times \tag{11}$$

对于 Σ 任意素数集合。由于 M 是交换的，因此相对于任意子集，它都具有右 Ore 性质。由定理 5.3.2 可知，$\mathsf{PSh}(\mathbb{N}_+^\times)$ 的幺半群型子拓扑斯为

$$\mathsf{PSh}(\mathbb{N}_{+,\mathfrak{p}}^\times) \subseteq \mathsf{PSh}(\mathbb{N}_+^\times)$$

对于 $\mathfrak{p}$ 与式 (11) 中相同。

对于 $M = \mathbb{Z}^{\mathrm{ns}}$ 乘法下的非零整数，情况完全类似。这一次，素理想的形式为

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{p \in \Sigma} p\mathbb{Z}^{\mathrm{ns}} \tag{12}$$

对于 Σ 任意素数集合。对于每个素理想，都有一个幺半群型子拓扑斯 $\mathsf{PSh}(\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ns}}) \subseteq \mathsf{PSh}(\mathbb{Z}^{\mathrm{ns}})$，而这些就是仅有的幺半群型子拓扑斯。

6.3. 整数系数矩阵。现在考虑幺半群 $M = \mathbf{M}^{\mathrm{ns}}(\mathbb{Z})$。对于 $\det\colon\ M \to \mathbb{Z}^{\mathrm{ns}}$ 行列式映射，我们发现，对于 $\mathbb{Z}^{\mathrm{ns}}$ 的每个素理想 $\mathfrak{p}$，都有一个素理想 $\det^{-1}(\mathfrak{p}) \subseteq M$。对于如（12）中的素理想 $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{Z}^{\mathrm{ns}}$，$M$ 的对应素理想为

$$\mathfrak{q} = \det^{-1}(\mathfrak{p}) = \{a \in M : \exists p \in \Sigma,\ p \,|\, \det(a)\}.$$

令 S 为 $\mathfrak{q} = \det^{-1}(\mathfrak{p})$ 的补集。换言之，S 由行列式不能被 Σ 中任何素数整除的矩阵组成。

对于每个 $a \in M$，都有 $aa^* = \det(a)$，其中 a^* 是 a的伴随矩阵，而 $\det(a)$ 被视为数量矩阵。由此可知，给 S 的每个元素添加逆元，等同于给每个 $n \in \mathbb{Z}^{\text{ns}} - \mathfrak{p}$添加逆元，其中 n 被视为数量矩阵。换言之，我们得到 $M_{\mathfrak{q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}^{\text{ns}}} \mathbb{Z}^{\text{ns}}_{\mathfrak{p}}$，这里张量积是相对于包含映射$\mathbb{Z}^{\text{ns}} \subseteq M$取的，该映射将一个整数映射到相应的数量矩阵。由于 $\mathbb{Z}^{\text{ns}}_{\mathfrak{p}}$作为左 $\mathbb{Z}^{\text{ns}}$-集合是平坦的，我们知道 $M_{\mathfrak{q}}$ 作为左 M-集合也将是平坦的。事实上，$- \otimes_M M_{\mathfrak{q}}$是复合函子：先是 $- \otimes_M M$: $\text{PSh}(M) \to \text{PSh}(\mathbb{Z}^{\text{ns}})$，再接着是 $- \otimes_{\mathbb{Z}^{\text{ns}}} \mathbb{Z}^{\text{ns}}_{\mathfrak{p}}$: $\text{PSh}(\mathbb{Z}^{\text{ns}}) \to$集合范畴；而两个保持有限极限的函子的复合仍将保持有限极限。因此，如果 M 的一个素理想具有 $\mathfrak{q} = \det^{-1}(\mathfrak{p})$ 的形式，那么我们就得到一个子拓扑斯 $\text{PSh}(M_{\mathfrak{q}}) \subseteq \text{PSh}(M)$。

我们现在断言，M 的每个素理想都具有 $\mathfrak{q} = \det^{-1}(\mathfrak{p})$ 的形式。我们再次使用命题 2.1.2。每个矩阵 $a \in M$ 都可以写成其史密斯标准形 $a = udv$，其中 u、$v \in M^\times$和 d是对角矩阵，且每个对角元素都整除下一个元素。由此可知，M 由其单位元以及形如以下形式的矩阵生成：

$$a_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

对于每个素数 p，根据命题 2.1.2，这意味着对于每组素数 Σ，至多存在一个 M 的素理想 $\mathfrak{q}$，使得

$$a_p \in \mathfrak{q} \;\Leftrightarrow\; p \in \Sigma,$$

即

$$\mathfrak{q} = \bigcup_{p \in \Sigma} M a_p M. \tag{13}$$

对于 $\mathfrak{p} = \bigcup_{p \in \Sigma} p\mathbb{Z}^{\text{ns}}$，该素理想恰好是 $\mathfrak{q} = \det^{-1}(\mathfrak{p})$。

我们得出，$\mathfrak{p} \mapsto \det^{-1}(\mathfrak{p})$在 $\mathbb{Z}^{\text{ns}}$ 的素理想与 M的素理想之间建立了双射对应。进而，这在 $\text{PSh}(\mathbb{Z}^{\text{ns}})$ 的幺半群型子拓扑斯与 $\text{PSh}(M)$ 的幺半群型子拓扑斯之间建立了双射对应，将 $\text{PSh}(\mathbb{Z}^{\text{ns}}_{\mathfrak{p}}) \subseteq \text{PSh}(\mathbb{Z})$ 发送到 $\text{PSh}(M_{\mathfrak{q}}) \subseteq \text{PSh}(M)$，其中 $\mathfrak{q} = \det^{-1}(\mathfrak{p})$。

6.4. 环面纽结幺半群。让我们回到环面纽结幺半群

$$M = \langle a, b : a^k = b^l \rangle,$$

以及 k、$l \geq 1$ 自然数。首先，让我们确定 M 的素理想。根据命题 2.1.2，这些素理想与幺半群同态ϕ：$M \to \{0,1\}$一一对应。如果 $\phi(a) = 0$，那么 $\phi(b)^l = \phi(b^l) = \phi(a^k) = \phi(a)^k = 0$，但此时$\phi(b) = 0$ 也成立。反过来，如果 $\phi(b) = 0$，那么 $\phi(a) = 0$ 也成立。因此，我们可以将 a 和 b 都映到 0，或者将 a 和 b 都映到 1。M 对应的素理想是 $M - \{1\}$ 和 $\varnothing$。

显然，M 相对于 $\{1\}$是右 Ore 的，我们也可以验证 M相对于自身是右 Ore 的。根据定理 5.3.2，我们得出恰好存在两个幺半群型子拓扑斯：在 $M - \{1\}$ 处局部化得到全子拓扑斯 $\text{PSh}(M) \subseteq \text{PSh}(M)$；而在 $\varnothing$处局部化则得到 $\text{PSh}(G) \subseteq \text{PSh}(M)$，其中 G是 M 的群化（即相应的环面纽结群）。

Acknowledgements

作者是法兰德斯研究基金会的博士后研究员（档案编号 1276521N）。

References

[Art] M. Artin, *Noncommutative rings*, https://math.mit.edu/~etingof/artinnotes.pdf, 《课程讲义》, 数学251, 伯克利, 1999年秋。[Bus71] G.C. Bush, *The embeddability of a semigroup in a group*, *Conditions common to Mal'cev and Lambek* **157** 1971 437–448, 《美国数学学会汇刊》（）, –。[CC14] A. Connes 和 C. Consani, *The arithmetic site*, 《巴黎科学院数学报告》352（2014）, 第12期, 971–975。[CC16] , *Geometry of the arithmetic site*, 《高级数学》291（2016）, 274–329。[CHWW15] G. Corti ˜ *Toric varieties monoid* nas、*schemes and cdh descent* **698** 2015 1 54 C. Haesemeyer、M.E. Walker 和 C. Weibel, , 《纯粹与应用数学杂志》（）, –。[Coh91] P.M. Cohn, *Algebra. Vol. 3*, 第二版, John Wiley & Sons, Ltd., 奇切斯特, 1991年。[EK13] M. Elder 和 A. Kalka, *Logspace computations for Garside groups of spindle type*, 预印本（2013）, arXiv:1310.0933v3。[GHK+03] G. Gierz、K.H. Hofmann、K. Keimel、J.D. Lawson、M.W. Mislove 和 D.S. Scott, *Continuous lattices and domains*, 《数学及其应用百科全书》第93卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2003年。[Hem19a] J. Hemelaer, *An arithmetic topos for integer matrices*, 《数论杂志》204（2019）, 155–184。[Hem19b] , *Topos theoretic methods in noncommutative geometry* 2019 , , 《博士论文》, 安特卫普大学, repository.uantwerpen.be/docman/irua/30dcd7/160955.pdf。[Hem20] Jens Hemelaer, *A topological groupoid representing the topos of presheaves on a monoid* **28** 2020 5, 749–772, 《应用范畴结构》（）, 第–期。[HR21] J. Hemelaer 和 M. Rogers, *Monoid properties as invariants of toposes of Monoid actions* **29** 2021 3, 379–413, 《应用范畴结构》（）, 第–期。[KKM00] M. Kilp、U. Knauer 和 A.V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories*, 《德格鲁伊特数学论丛》第29卷, Walter de Gruyter & Co., 柏林, 2000年。[LB16] L. Le Bruyn, *Covers of the arithmetic site*, 预印本（2016）, arXiv:1602.01627。[LB20] , *Three arithmetic sites*, 预印本（2020）, arXiv:2003.01387。[Pir13] I. Pirashvili, *On the spectrum of monoids and semilattices*, 《纯粹与应用代数杂志》217（2013）, 第5期, 901–906。[Pir20a] , *Idempotents and the points of the topos of M-sets*, 预印本（2020）, arXiv:2011.11747v1。[Pir20b] , *Topos points of quasi-coherent sheaves over monoid schemes*, 《剑桥哲学学会数学论文集》169（2020）, 第1期, 31–74。[Sag20] A. Sagnier, *An arithmetic site at the complex place*, 《数论杂志》212（2020）, 173–202。

Department of Mathematics, University of Antwerp, Middelheimlaan 1, B-2020 Antwerp (Belgium), jens.hemelaer@uantwerpen.be