arXiv:2303.06805v1 [math.CA] 13 Mar 2023

矩阵值拉盖尔型多项式的微分算子李代数

ANDREA L. GALLO，PABLO ROM ´AN

March 14，2023

Abstract. 我们研究作用于矩阵值正交多项式（MVOPs）的微分算子代数和差分算子代数，这些多项式关于如下形式的权矩阵正交：$W_\phi^{(\nu)}(x) = x^\nu e^{-\phi(x)} W_{pol}^{(\nu)}(x)$，其中 $\nu > 0$, $W_{(\nu)\,pol}(x)$是某个矩阵值多项式，而 ϕ是一个整函数。我们引入一对微分算子 $\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger$，它们关于由 $W_\phi^{(\nu)}(x)$诱导的矩阵内积互为伴随。我们证明，由 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^\dagger$ 生成的李代数是有限维的，当且仅当 ϕ 是一个多项式；这为 M. Ismail 提出的问题给出了部分答案。在 ϕ 为多项式的情形下，我们描述这个李代数的结构。我们详细讨论 $\phi(x) = x$的情形。我们推导出矩阵值正交多项式的差分关系和微分关系。我们用经典拉盖尔多项式和对偶 Hahn 多项式，给出矩阵值正交多项式各项的显式表达式。

1. Introduction

矩阵值正交多项式（MVOPs）理论由 Krein 于 20 世纪 40 年代开创，此后被应用于数学和数学物理的诸多领域，包括谱理论、散射理论、铺砌问题、可积系统和随机过程。关于这些主题的更多细节和见解，请参阅 [1], [4], [6], [10], [12], [13],及其中的参考文献。

过去二十年来，人们在理解如何将经典标量正交多项式的微分性质和代数性质推广到矩阵值情形方面取得了重大进展。矩阵值函数在紧对称对上的调和分析与矩阵值正交多项式之间的联系发挥了基础性作用。在 [7], 中，A. Dur´an 提出了一个问题：确定哪些矩阵值正交多项式族是适当的二阶微分算子的特征函数。在标量情形下，这一问题的答案是 Bochner 的经典结果 [2]。具有这一性质的族仅有埃尔米特、拉盖尔和雅可比多项式。事实证明，矩阵值情形要复杂得多。首批明确的例子与紧对称对 (SU(3), U(2)) 的球函数有关。随后， [24], 在[22], [23] 中针对 (SU(2) × SU(2), diag) 的情形采用了直接方法，由此在无重数对的背景下建立了一套通用框架 [15]。在这一背景下，正交多项式的某些性质，如正交性、递推关系和微分方程，都可以用相应对称空间的表示论来理解。近期，Casper 和 Yakimov 在 [3] 中建立了一个框架，用以解决矩阵Bochner问题。这涉及对所有 $N \times N$ 权矩阵 $W(x)$ 进行分类，使得其对应的矩阵值正交多项式是某个二阶微分算子的特征函数。

给定 $N \in \mathbb{N}$，我们考虑一个矩阵值函数 $W\colon [a,b] \to M_N(\mathbb{C})$，使得对于所有 $x \in [a,b]$， $W(x)$ 都是正定的，并且 W 的所有阶矩均有限。在这种情况下，我们称

Key words and phrases. 正交多项式，升降关系，拉盖尔多项式。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 33C45。部分经费由 CONICET、FONCyT 和 SECyT-UNC 资助。

W 是一个权函数，它诱导出矩阵值内积

$$\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(x)W(x)Q(x)^* dx \in M_N(\mathbb{C}), \tag{1.1}$$

使得对于所有的 $P, Q, R \in M_N(\mathbb{C})[x]$, $T \in M_N(C)$ 以及 $a, b \in \mathbb{C}$，满足以下性质

$$\langle aP + bQ, R\rangle = a\langle P, R\rangle + b\langle Q, R\rangle, \qquad \langle TP, Q\rangle = T\langle P, Q\rangle, \langle P, Q\rangle^* = \langle Q, P\rangle.$$

此外，$\langle P, P\rangle = 0$ 当且仅当 $P = 0$。利用标准论证，可以证明存在唯一的关于 W 的首一矩阵值正交多项式序列 $(P(x, n))_n$，其意义如下：

$$\langle P(x, n), P(x, m)\rangle = \mathcal{H}(n)\delta_{n,m}. \tag{1.2}$$

其中平方 q范数 $\mathcal{H}$ (n) is a p正定矩阵。

根据正交性，多项式 $P(x, n)$' 满足以下三项递推关系：

$$xP(x, n) = P(x, n + 1) + B(n)P(x, n) + C(n)P(x, n - 1) \tag{1.3}$$

其中 $B(n)$ $C(n)$ $\in M_N(\mathbb{C})$ 且 $n \geq 1$。注意， $B(n)$ 和 $C(n)$ 满足

$$B(n) = X(n) - X(n + 1), \quad C(n) = \mathcal{H}(n)\mathcal{H}(n - 1)^{-1}, \tag{1.4}$$

其中 $X(n)$ 是 $P(x, n)$ 的次高项系数， $\mathcal{H}(n)$ 如 (1.2) 所示。此外，对于 $n \geq 2$, 令 $Y(n)$ 表示 $P(x, n)$ 的次次高项系数。那么

$$Y(n) = Y(n + 1) + B(n)X(n) + C(n). \tag{1.5}$$

在 [5], 中，作者研究了与权函数 $W(x) = e^{-v(x)}e^{xA}e^{xA^*}$ 相关的一类特定矩阵值正交多项式的差分—微分关系，其中 $x \in \mathbb{R}$, $v(x)$ 是偶次数的标量多项式， A 是常矩阵。通过研究两个互为伴随算子 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^\dagger$，可以获得有关矩阵正交多项式的信息。若 $v(x)$ 是二次多项式，则除 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^\dagger$ 外，还存在一个以矩阵值正交多项式为特征函数的二阶微分算子D 。事实证明， $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}^\dagger$ 和 D 生成一个有限维李代数，该代数与振子群的李代数同构。本文明确给出了该代数的卡西米尔算子，并用其获取矩阵正交多项式的信息。在这项工作中，我们求解拉盖尔型权函数的类似问题。由于相关李代数的结构以及涉及 W 的某些公式并非对角形式，这种情形比前一种更复杂。

在标量情形下，这个问题与 [16, 问题 24.5.2] 密切相关。Ismail 在此提出，研究由一对关于 Laguerre 型权互为伴随的微分算子生成的某个李代数是否为有限维。更确切地说，给定标量权函数 $w_1(x) = x^\alpha e^{-\phi(x)}$ ，其中 $x > 0, \alpha > 1$ ，以及微分算子

$$\mathcal{D}_{1,n} = x\partial_x + xB_n(x), \qquad \mathcal{D}_{2,n} = -x\partial_x + xB_n(x) + x\phi'(x),$$

其中 $\{B_n\}$ 是一列标量多项式，该问题要求证明：“由
$\mathcal{D}_{1,n}$ 和 $\mathcal{D}_{2,n}$ 生成的李代数是有限维的，当且仅当 ϕ 是一个多项式。”

本文在矩阵值正交多项式的背景下，为这个问题提供了部分解答。我们给出一个显式的矩阵值权函数 $W_{(\nu)\phi}(x) = x^\nu e^{-\phi(x)}W_{(\nu)pol}(x)$，其中 $W^{(\nu)}_{pol}(x)$ 是一个依赖于 ν 的矩阵多项式，以及微分算子

$$\mathcal{D} = \partial_x x + x(A - 1), \quad \mathcal{D}^\dagger = -\partial_x x - (1 + \nu + J) + x\phi'(x) - x.$$

在这种情况下，我们证明，由.....生成的李代数是有限维的，当且仅当 ϕ 是一个多项式。因此，当 B_n（x）对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立时，这就解决了 [16, 问题 24.5。2] $= -1$

概要与主要结果。第 2 节回顾一些预备知识。特别地，我们介绍与首一矩阵值正交多项式序列相关的左傅里叶代数和右傅里叶代数。

在第3节中，对于区间 $[0,\infty)$ 邻域上的给定解析函数 ϕ，我们引入拉盖尔型权函数 $W_\phi^{(\nu)}$ 以及算子 $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}^\dagger$，并证明它们相对于 $W_{(\nu)\phi}(x)$ 互为伴随。对于相对于 $W_{(\nu)\phi}$ 的矩阵值正交多项式 $\{P_n\}$，我们找到分别与 $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}^\dagger$ 相关联的离散算子 M、$M^\dagger$，它们由关系 $M\cdot P_n = P_n\cdot\mathcal{D}$ 和 $M^\dagger\cdot P_n = P_n\cdot\mathcal{D}^\dagger$ 给出。

在第4节中，我们研究由微分算子 $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}^\dagger$ 生成的李代数 $\mathfrak{g}_\phi$。我们证明，$\mathfrak{g}_\phi$ 是有限维的当且仅当 ϕ 是多项式。此外，对于这一族李代数 $\{\mathfrak{g}_\phi\}$，我们得到 $\mathfrak{g}_\phi = \mathbb{C}^2\oplus\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是幂零根余维为一的可解李代数。此外，我们还对这一族李代数在同构意义下进行了分类。

在第 5 节中，我们给出了 $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}^\dagger$、M 和 $M^\dagger$ 在 $\phi(x)=x$ 情形下的显式表达式。在这种情况下，我们还找到了一个对称二阶微分算子 D，其特征函数为 $\{P_n\}$。我们描述了由 $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}^\dagger$ 和 D、$\mathcal{A}=\mathcal{Z}_\mathcal{A}\oplus[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ 生成的李代数 $\mathcal{A}$，其中 $\dim\mathcal{Z}_\mathcal{A}=2$，且 $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ 同构于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$。此外，我们还得到了 $\mathcal{H}_n$、B_n 和 C_n 之间的一些关系。

在第 6 节中，我们研究多项式 $R(x,n) = K_nP(x,n)e^{xA}$，其中 $P(x,n)$ 是与权 $W^{(\nu)}$ 及某些下三角矩阵 K_n 相关联的矩阵值正交多项式。利用算子 D，我们证明 R_n 的矩阵元可以用广义拉盖尔多项式和一族常数 $\xi(n,i,j)$ 表示。最后，我们给出了常数 $\xi(n,i,j)$ 以及平方范数 $\mathcal{H}_n$ 的二项递推关系。

最后，在第 7 节中，对于 $A=-\sum_{k=1}^{N-1}E_{k+1,\,k}$，且 $\delta^k>0$ 满足两个非线性条件（与皮尔逊方程有关）的情形，我们证明常数 $\xi(n,i,j)$ 可以用对偶汉恩多项式表示。

2. Preliminaries

本节介绍 Casper 和 Yakimov 在 [3] 中提出的、与首一矩阵值正交多项式序列相关的左、右傅里叶代数。本节讨论的结果此前已在 [3] 中更全面的背景下介绍过。

设 $Q(x,n)$ 是函数 $Q\colon\mathbb{C}\times\mathbb{N}_0\to M_N(\mathbb{C})$，使得对于固定的 n，$Q(x,n)$ 是关于 x 的有理函数。形如以下形式的微分算子

$$\mathcal{D}=\sum_{j=0}^{n}\partial_x^jF_j(x),\qquad \partial_x^j:=\tfrac{d^j}{dx^j},\tag{2.1}$$

其中 $F_j\colon\mathbb{C}\to M_N(\mathbb{C})$ 是关于 x 的有理函数，它从右侧作用于 Q 的方式为

$$(Q\cdot\mathcal{D})(x,n)=\sum_{j=0}^{n}(\partial_x^jQ)(x,n)\,F_j(x).$$

所有形如 (2.1) 的微分算子构成的代数记作 $\mathcal{M}_N$。除了微分算子的右作用外，我们还考虑差分算子对变量 n 上的 Q 的左作用。对于 $j\in\mathbb{Z}$，令 δ^j 为离散算子，它作用于序列 $A:\mathbb{N}_0\to M_N(\mathbb{C})$ 的方式为

$$(\delta^j\cdot A)(n)=A(n+j).$$

这里我们假设序列在负整数处的值等于零。对于给定的序列 $A_{-\ell},\dots,A_k$，形如

$$M=\sum_{j=-\ell}^{k}A_j(n)\delta^j,\tag{2.2}$$

从左侧作用于 Q 的方式为

$$(M\cdot Q)(x,n)=\sum_{j=-\ell}^{k}A_j(n)\,(\delta^j\cdot Q)(x,n)=\sum_{j=-\ell}^{k}A_j(n)\,Q(x,n+j).$$

我们将差分算子代数（2.2）记为 $\mathcal{N}_N$。与 [3, 定义 2.20] 中一样，我们定义：

定义 2.1. 左傅里叶代数和右傅里叶代数定义如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_L(P) &= \{M \in \mathcal{N}_N : \exists\, \mathcal{D} \in \mathcal{M}_N,\ M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}\} \subset \mathcal{N}_N,\\ \mathcal{F}_R(P) &= \{\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N : \exists\, M \in \mathcal{N}_N,\ M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}\} \subset \mathcal{M}_N.\end{aligned} \tag{2.3}$$

The 傅里叶代数的定义直接说明了以下元素之间的联系：
$\mathcal{F}_L(P)$ 以及 $\mathcal{F}_R(P)$。此外，映射

$$\varphi\colon \mathcal{F}_L(P) \to \mathcal{F}_R(P), \qquad \text{defined by} \quad M \cdot P = P \cdot \varphi(M),$$

是一个代数同构。在 [3] 中，该映射称为广义傅里叶映射。更准确地说，对于所有 M_1，
$M_1M_2 \cdot P = P \cdot \varphi(M_1)\varphi(M_2)$。另一方面，根据 φ 的定义，我们有 $M_1M_2 \cdot P = P \cdot \varphi(M_1M_2)$。

注 2.2。在此语境下，三项递推关系 (1.3) 可写为

$$xP = P \cdot x = L \cdot P, \qquad \text{where} \quad L = \delta + B(n) + C(n)\delta^{-1}.$$

因此 $x \in \mathcal{F}_R$、 $L \in \mathcal{F}_L$ 和 $\varphi(L) = x$。对于任意多项式 $v \in \mathbb{C}[x]$，有

$$P \cdot v(x) = P \cdot v(\varphi(L)) = v(L) \cdot P.$$

来自 [3] 的一个关键结果是，傅里叶代数 $\mathcal{F}_L(P)$ 和 $\mathcal{F}_R(P)$ 中存在伴随运算 †，如 [3, §3.1] 所述。为了定义 $\mathcal{F}_L(P)$ 中的伴随运算，我们首先注意到差分算子代数 $\mathcal{N}_N$ 上定义了一个 $*$-运算，如下所示：

$$\left(\sum_{j=-\ell}^{k} A_j(n)\,\delta^j\right)^* = \sum_{j=-\ell}^{k} A_j(n-j)^*\,\delta^{-j}, \tag{2.4}$$

其中， $A_j(n-j)^*$ 是 $A_j(n-j)$ 的共轭转置。现在， $M \in \mathcal{N}_N$ 的伴随算子定义为

$$M^\dagger = \mathcal{H}(n) M^* \mathcal{H}(n)^{-1}, \tag{2.5}$$

其中， $\mathcal{H}(n)$ 是平方范数，我们将其视为零阶差分算子。以下关系成立：

$$\langle (M \cdot P)(x,n), P(x,m)\rangle = \langle P(x,n), (M^\dagger \cdot P)(x,m)\rangle.$$

在 [3, 推论 3.8] 中，作者证明每个微分算子 $D \in \mathcal{F}_R(P)$ 都有唯一的伴随算子 $\mathcal{D}^\dagger \in \mathcal{F}_R(P)$，满足以下性质

$$\langle P \cdot \mathcal{D}, Q\rangle = \langle P, Q \cdot \mathcal{D}^\dagger\rangle,$$

对所有 $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$。此外，对所有 $M \in \mathcal{F}_L(P)$， $\varphi(M^\dagger) = \varphi(M)^\dagger$。

3. Semi-classical Laguerre type solutions

接下来，我们考虑满足以下条件的两个矩阵 $A, J \in M_N(\mathbb{R})$

$$J = \sum_{k=1}^{N} k E_{k,k} \qquad A = \sum_{k=1}^{N-1} a_k E_{k+1,k}. \tag{3.1}$$

注意，容易证明

$$[J, A] = A \quad \text{and} \quad e^{xA} J e^{-xA} = J - Ax. \tag{3.2}$$

考虑定义在区间 $[0,\infty)$ 上的以下权矩阵：

$$W_\phi^{(\nu)}(x) = e^{Ax} T_\phi^{(\nu)}(x) e^{A^* x}, \qquad T_\phi^{(\nu)}(x) = e^{-\phi(x)} \sum_{k=1}^{N} \delta_k^{(\nu)} x^{\nu+k} E_{k,k}, \tag{3.3}$$

其中，对于 $1 \le k \le N$， $\delta_k^{(\nu)}$ 是一个实常数，而 ϕ 是区间 $[0,\infty$ 的某个邻域上的解析函数。在下文中，我们假设对于任意矩阵多项式 P， $W(x)P(x) = 0$ 在支撑集端点处的极限均为零。

命题3.1. 设 $A, J \in M_N(\mathbb{C})$ 如 (3.1) 所示。那么，一阶微分算子 s

$$\mathcal{D} = \partial_x x + x(A-1), \quad \mathcal{D}^\dagger = -\partial_x x - (1+\nu+J) + x\phi'(x) - x,$$

互为伴随。

证明。设 $P, Q \in M_N(\mathbb{C}[x])$。为简化记号，在证明余下部分中，我们记 $W(x) := W_{(\nu)\,\phi}(x)$ 和 $T(x) = W_{(\nu)\,\phi}(x)$

$$\begin{aligned}\langle P\cdot\mathcal{D}, Q\rangle &= \int_0^\infty (P\cdot\mathcal{D})W(x)Q^*(x)dx \\ &= \int_0^\infty \left(xP'(x) + xP(x)(A-1)\right)W(x)Q^*(x)dx.\end{aligned}$$

注意，由于 $W(x)P(x)$ 在端点 $x=0$ 和 $x=\infty$ 处的极限为零，分部积分可得

$$\int_0^\infty xP'(x)W(x)Q^*(x)dx = -\int_0^\infty P(x)\left(xW(x)Q^*(x)\right)' dx.$$

另一方面，我们有

$$\int_0^\infty xP(x)(A-1)W(x)Q^*(x)dx = \int_0^\infty P(x)W(x)\left(W^{-1}(x)x(A-1)W(x)\right)Q^*(x)dx,$$

由线性性可得

$$\begin{aligned}\langle P\cdot\mathcal{D}, Q\rangle &= -\int_0^\infty P(x)\left(xW(x)Q^*(x)\right)' dx + \int_0^\infty P(x)W(x)\left(W^{-1}(x)x(A-1)W(x)\right)Q^*(x)dx \\ &= -\int_0^\infty P(x)\left(W(x)Q^*(x) + xW'(x)Q^* + xW(x)(Q^*(x))'\right)dx \\ &\quad + \int_0^\infty P(x)W(x)\left(W^{-1}(x)x(A-1)W(x)\right)Q^*(x)dx.\end{aligned}$$

注意到，由于 $(Q\cdot(1+x\partial_x))^*(x) = Q^*(x) + x(Q^*(x))'$，我们可以令

$$\int_0^\infty P(x)(W(x)Q^*(x) + W(x)x(Q^*(x))')dx = \int_0^\infty P(x)W(x)\left(Q\cdot(1+x\partial_x)\right)^*(x)dx.$$

另一方面，

$$\int_0^\infty P(x)xW'(x)Q^*(x)dx = \int_0^\infty P(x)W(x)xW^{-1}(x)W'(x)Q^*(x)dx.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\langle P\cdot\mathcal{D}, Q\rangle &= -\int_0^\infty P(x)W(x)\left(Q\cdot(1+x\partial_x)\right)^*(x)dx - \int_0^\infty P(x)W(x)xW^{-1}(x)W'(x)Q^*(x)dx \\ &\quad + \int_0^\infty P(x)W(x)\left(W^{-1}(x)x(A-1)W(x)\right)Q^*(x)dx.\end{aligned}$$

由 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}W^{-1}(x)W'(x) &= e^{-A^*x}\left(T^{-1}(x)\,A\,T(x) + T^{-1}(x)T'(x) + A^*\right)e^{A^*x}, \\ W^{-1}(x)x(A-1)W(x) &= e^{-A^*x}\left(xT^{-1}(x)\,A\,T(x) - x\right)e^{A^*x}.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\langle P\cdot\mathcal{D},Q\rangle &= -\int_0^\infty P(x)W(x)\left(Q\cdot(1+x\partial_x)\right)^*(x)dx\\ &\quad -\int_0^\infty P(x)W(x)e^{-A^*x}\left(xT^{-1}(x)\,A\,T(x)+xT^{-1}(x)T'(x)+xA^*\right)e^{A^*x}Q^*(x)dx\\ &\quad +\int_0^\infty P(x)W(x)e^{-A^*x}\left(xT^{-1}(x)\,A\,T(x)-x\right)e^{A^*x}Q^*(x)dx\\ &= -\int_0^\infty P(x)W(x)\left(Q\cdot(1+x\partial_x)\right)^*(x)dx\\ &\quad -\int_0^\infty P(x)W(x)e^{-A^*x}\left(xT^{-1}(x)T'(x)+xA^*+x\right)e^{A^*x}Q^*(x)dx.\end{aligned}$$

考虑到 $xT'(x)=T(x)(-x\phi'(x)+\nu+J)$，我们得到

$$\begin{aligned}\langle P\cdot\mathcal{D},Q\rangle &= -\int_0^\infty P(x)W(x)\left(Q\cdot(1+x\partial_x)\right)^*(x)dx\\ &\quad -\int_0^\infty P(x)W(x)e^{-A^*x}(-x\phi'(x)+\nu+J+xA^*+x)e^{A^*x}Q^*(x)dx.\end{aligned}$$

注意，上述等式右端的第二个表达式为

$$e^{-A^*x}(-x\phi'(x)+\nu+J+xA^*+x)e^{A^*x}=-x\phi'(x)+\nu+e^{-A^*x}Je^{A^*x}+xA^*+x.$$

另一方面，方程 $e^{xA}Je^{-xA}=J-Ax$ 意味着 $e^{-A^*x}Je^{A^*x}=J-A^*x$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\langle P\cdot\mathcal{D},Q\rangle &= -\int_0^\infty P(x)W(x)\left(Q\cdot(1+x\partial_x)\right)^*(x)dx\\ &\quad -\int_0^\infty P(x)W(x)(x-x\phi'(x)+(\nu+J-A^*x+xA^*)Q^*(x)dx\\ &= \int_0^\infty P(x)W(x)\left(Q\cdot-(x\partial_x+x-x\phi'(x)+(\nu+J+1)\right)^*(x)dx\\ &= \langle P,Q\cdot\mathcal{D}^\dagger\rangle.\end{aligned}$$

因此，算子 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^\dagger$ 互为伴随，正如所断言的那样。 □

根据上述定理，由于 $\mathcal{D}=\partial_x x+x(A-1)$ 且 $\mathcal{D}^\dagger=-\partial_x x-(1+\nu+J)+x\phi'(x)-x$，因此我们得到

$$\mathcal{D}^\dagger=-\mathcal{D}+(Ax-J)-(1+\nu)+x\phi'(x)-2x. \tag{3.4}$$

引理3.2. 设 $A,J\in M_N(\mathbb{C})$ 是 (3.1) 中的矩阵。那么， $\mathcal{C}=Ax-J$ 是关于权 W 的对称算子: $=W_\phi^{(\nu)}$ 如 (3.3) 所示。此外，若 $P(x,n)$ 是与权 W 相关联的首一矩阵值正交多项式，且满足

$$P\cdot\mathcal{C}=M_{\mathcal{C}}\cdot P,\quad then\quad M_{\mathcal{C}}=\sum_{i=-1}^{1}U_j(n)\delta^j,$$

with

$$U_1(n):=A,\qquad U_0(n):=X(n)A-AX(n+1)-J,$$
$$U_{-1}(n):=Y(n)A-AY(n+1)+[J,X(n)]+(AX(n+1)-X(n)A)X(n),$$

其中， $X(n)$ 和 $Y(n)$ 分别是 $P(x,n)$ 中 $(n-1)$ 项和 $(n-2)$ 项的系数。

证明. 与命题3.1相同，可以证明 $\mathcal{C}$ 是关于 W 的对称算子。

如果我们取 $M_{\mathcal{C}}=\sum U_j(n)\delta^j$，使得 $P\cdot\mathcal{C}=M_{\mathcal{C}}\cdot P$。考虑到 $\mathcal{C}$会增加 1 中任意多项式的次数，我们得到，对于 $j>1$， $U_j(n)=0$。另一方面，由于$\mathcal{C}$是关于 W的对称算子，我们有 $M_{\mathcal{C}}=M_{\mathcal{C}}^\dagger$，因此对于 $j<-1$， $U_j(n)=0$。

$U_{-1}(n)$ $U_0(n)$ 和 $U_1(n)$ 的公式可通过对 $P\cdot\mathcal{C}=M_{\mathcal{C}}\cdot P$ 进行直接计算得到。□

注 3.3. 由于 $\mathcal{C}=Ax-J=(Ax-J)^{\dagger}$，因此 $M_{\mathcal{C}}=M_{\mathcal{C}}^{\dagger}$。由方程 (2.5) 可得

$$U_1(n)=\mathcal{H}(n)U_{-1}(n+1)^{*}\mathcal{H}(n+1)^{-1},$$
$$U_0(n)=\mathcal{H}(n)U_0(n)^{*}\mathcal{H}(n)^{-1},$$

因此我们得到

$$A=\mathcal{H}(n)\Big(Y(n+1)A-AY(n+2)+[J,X(n+1)]+(AX(n+2)-X(n+1)A)X(n+1)\Big)^{*}\mathcal{H}(n+1)^{-1},$$

$$X(n)A-AX(n+1)-J=\mathcal{H}(n)\Big(X(n)A-AX(n+1)-J\Big)^{*}\mathcal{H}(n)^{-1}.$$

定理 3.4. 设 $W:=W_{\phi}^{(\nu)}$ 是如 (3.3) 所示的矩阵权，其首一矩阵值正交多项式为 $P(x,n)$，且满足

$$\mathcal{D}=\partial_x x+(A-1)x,\qquad \mathcal{D}^{\dagger}=-\mathcal{D}+\mathcal{C}+v'(x)$$

对于某个次数为 k 的多项式 $v(x)$ 以及 $\mathcal{C}=Ax-J$。若 $X(n)$ 和 $Y(n)$ 分别是 $P(x,n)$ 的 ($n-1$) 项和 ($n-2$) 项的系数，则首一多项式 $P(x,n)$ 满足以下关系

$$P\cdot\mathcal{D}=M\cdot P,\qquad M=\sum_{j=-k+1}^{1}A_j(n)\delta^{j}\tag{3.5}$$

with

$$A_1(n)=A-1,\quad A_0(n)=n+X(n)A-AX(n+1)-B(n),$$
$$A_{-1}(n)=(n-1)X(n)+Y(n)(A-1)-(A-1)Y(n+1)-A_0(n)X(n),$$
$$A_j(n)=(v'(L))_j(n),\quad -k+1<j<-1$$

其中 $B(n)$ 由 (1.4) 给出。

证明。显然，利用 $\mathcal{D}$ 的定义，可由 (3.5) 中的等式推导出 $A_j(n)$ 在 $j=-1,0,1$ 时的公式。

对于 $j<-1$，我们有

$$\begin{aligned}A_j(n)&=\langle P\cdot\mathcal{D},\delta^{j}\cdot P\rangle\mathcal{H}(n-j)^{-1}=\langle P,\delta^{j}\cdot P\cdot\mathcal{D}^{\dagger}\rangle\mathcal{H}(n-j)^{-1}\\&=\langle P,\delta^{j}\cdot P\cdot v'(x)\rangle\mathcal{H}(n-j)^{-1}=\langle P\cdot v'(x),\delta^{j}\cdot P\rangle\mathcal{H}(n-j)^{-1}\\&=\langle v'(L)\cdot P,\delta^{j}\cdot P\rangle\mathcal{H}(n-j)^{-1},\end{aligned}$$

其中，在第三个等式中，我们利用了当 $j<-1$ 时 $\langle P,\delta^{j}\cdot P\cdot\mathcal{D}\rangle$ 和 $\langle P,\delta^{j}\cdot P\cdot\mathcal{C}\rangle$ 均为零这一事实；在第四个等式中，我们利用了 $v'(x)$ 是一个标量函数这一事实。于是，我们有

$$A_j(n)=(v'(L))_j(n)\quad\text{for } j<-1.$$

为完成证明，注意到对于 $j\le -k$，$(v'(L))_j(n)=0$。□

作为直接推论，我们得到以下推论。

推论 3.5. 在与定理 3.4 相同的假设下，若多项式 v 的次数为 1，则与 $\mathcal{D}$ 相关联的离散算子 M 满足

$$M=A_0(n)+(A-1)\delta$$

其中 $A_0(n)$如定理 3.4 所述。此外，在这种情况下，我们有

$$(n-1)X(n)+Y(n)(A-1)-(A-1)Y(n+1)-\Big(n+X(n)A-AX(n+1)-B(n)\Big)X(n)=0.\tag{3.6}$$

证明。由定理 3.4 可知，由于 $\deg(v) < 2$，我们得到，对所有 $j < -1$，$A_j(n) = 0$。另一方面，注意到由于 v 的次数为 1，因此 $v'(x)$ 是常函数，所以算子 $\mathcal{D}^\dagger$不会增加次数。这意味着 $A_1^\dagger = 0$，因此

$$A_{-1}(n) = (n-1)X(n) + Y(n)(A-1) - (A-1)Y(n+1) - A_0(n)X(n) = 0,$$

$A_1(n)$ 和 $A_0(n)$ 的公式是定理 3.4 的推论。 □

4. Lie algebras associated to orthogonal polynomials

本节中，我们将求解 Ismail 在引言中所述的 [17, 问题 24.5.2], 提出的一个特例。为此，我们研究与算子 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^\dagger$相关的李代数的结构。

回顾一下，若 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维李代数，且 $\mathfrak{g}^j$ 和 $\mathfrak{g}_j$ 表示以下递推 ns

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{j+1} = [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j] \quad \text{and} \quad \mathfrak{g}_{j+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j],$$

那么，如果对于某个 j 有 $\mathfrak{g}^j = 0$（如果对于某个 j 有 $\mathfrak{g}_j = 0$），则称 $\mathfrak{g}$ 为可解（幂零）。显然，任何幂零李代数都是可解的。$\mathfrak{g}$ 的根基（幂零根）是 $\mathfrak{g}$ 的最大可解理想（最大幂零理想）。我们分别用 Rad(g) 和 Nil(g) 表示 $\mathfrak{g}$ 的根基和幂零根。

由 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^\dagger$生成的李代数。

引理 4.1. 设 $A, J \in M_N(\mathbb{C})$ 如 (3.1) 所示，并设 ϕ 是定义在 $\mathbb{C}$上的一个整函数，考虑算子

$$\mathcal{D} = \partial_x x + x(A-1), \quad \mathcal{D}^\dagger = -\partial_x x - (1 + \nu + J) + x\phi'(x) - x.$$

若 x 和 $x^j\phi^{(j)}(x)$ 通过右侧常数乘法作用于矩阵值多项式，则有

$$[\mathcal{D}, x] = -x, \qquad [\mathcal{D}^\dagger, x] = x, \qquad [\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger] = -x^2\phi^{(2)}(x) + (2 - \phi'(x))x,$$
$$[\mathcal{D}, \phi^{(j)}(x)x^j] = -(jx^j\phi^{(j)}(x) + x^{j+1}\phi^{(j+1)}(x)) = -[\mathcal{D}^\dagger, \phi^{(j)}(x)x] \quad \textit{for all } j \geq 1.$$

下文中，给定一个定义在 $\mathbb{C}$上的整函数 ϕ，记

$$\mathfrak{g}_\phi = \langle 1, \mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger, x, x\phi'(x), x^2\phi^{(2)}(x), \ldots \rangle \tag{4.1}$$

括号运算如上所述。我们关注该李代数为有限维的情形。下面的命题说明，当且仅当 ϕ 是多项式时，这种情形才会出现。我们需要以下记号：给定一个在 $\mathbb{C}$ 上系数均非零的多项式 ϕ，

$$k = \begin{cases} \ell + 2 & \text{if } \phi'(0) = \phi(0) = 0, \\ \ell + 1 & \text{if } \phi'(0) = 0, \phi(0) \neq 0, \\ \ell + 1 & \text{if } \phi(0) = 0, \phi'(0) \neq 0, \\ \ell & \text{if } \phi(0) \neq 0, \phi'(0) \neq 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

命题 4.2. 设 ϕ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的解析函数，且 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_\phi$ 是其如 (4.1) 所示的伴随李代数。则 dim(g) 有限，当且仅当 ϕ 是多项式。在这种情况下，若 k 如 (4.2) 所示，则

$$\dim(\mathfrak{g}) = k + 2.$$

证明。显然，若 ϕ 是多项式，则 $\mathfrak{g}$ 的维数有限，因为若 n 是 ϕ的次数
则 $\phi^{(m)}(x) = 0$ 对所有 $m > n$成立。

反过来，现在假设 ϕ 不是多项式。由于 ϕ 是解析的，我们可以将 ϕ 表示如下

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

这意味着

$$x^j\phi^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{i,j}x^i, \quad \text{with} \quad b_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{j} j!\, a_i & \text{if } j \leq i, \\ 0 & \text{if } i < j. \end{cases} \tag{4.3}$$

特别是，如果 $a_i = 0$，那么 $b_{i,\ j} = 0$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$ 均成立。

令 $\{i_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ 为 ϕ 的非零系数指标序列，即对于所有 $t \in \mathbb{N}$，$a_i \neq 0$ 当且仅当存在某个 $t \in \mathbb{N}$ 使得 $i = i_t$。

断言：向量空间 $\langle x^{i_1}\phi^{(i_1)}(x) \ldots, x^{i_\ell}\phi^{(i_\ell)}(x)\rangle$ 的维数为 ℓ。

令 $c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{C}$，使得

$$c_1 x^{i_1}\phi^{(i_1)}(x) + \cdots + c_\ell x^{i_\ell}\phi^{(i_\ell)}(x) = 0,$$

这导出以下方程组

$$\sum_{t=1}^{h} c_t \tbinom{i_h}{i_t} i_h! a_{i_t} = 0 \quad \text{for } h = 1, \ldots, \ell.$$

考虑到 $a_{i_1} \neq 0$，关于 $h = 1$ 的方程意味着 $c_1 = 0$。同样地，由于 $c_1 = 0$，关于 $h = 2$ 的方程意味着 $c_2 a_{i_2} i_2!$ $= 0$ 因此，由于 $a_{i_2} \neq 0$，有 $c_2 = 0$。归纳法地，如果 $c_1 = c_2 = \ldots = c_{\ell-1} = 0$，那么关于 $h = \ell$ 的方程意味着 $c_\ell a_{i_\ell} i_\ell!$ $= 0$ 因此，由于 $a_{i_\ell} \neq 0$，有 $c_\ell = 0$，从而我们得到，对于所有 $h \in \{1, \ldots, \ell\}$，都有 $c_h = 0$。

根据该断言，空间 $\mathfrak{g}$ 具有所有可能维数的子空间，因此是无限维的，正如所断言的那样　ite di的。

现在，假设 ϕ 是次数为 n 的多项式，使用与上文相同的记号，根据 (4.3) w　e hav使得

$$\langle x\phi'(x), x^2\phi^{(2)}(x), \ldots, x^n\phi^{(n)}(x)\rangle \subseteq \langle x^{i_1}, \ldots, x^{i_\ell}\rangle.$$

该断言和上述陈述意味着 $\langle x\phi'(x)\ x^2\phi^{(2)}(x) \ldots, x^n\phi^{(n)}(x)\rangle$ 的维数为 ℓ。最后，最后一个断言由以下事实得出：$\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger$ 相对于

$$\langle 1, x, x\phi'(x), x^2\phi^{(2)}(x), \ldots, x^n\phi^{(n)}(x)\rangle$$

且该向量空间的维数为 k，其中 k 如陈述所述。 □

注4.3。上述命题解决了 Ismail 在 [17, Problem 24.5.2] 中提出的问题，适用于 $B_n = -1$ 对所有 n 自然数的情形。按照 [17], 微分算子$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^\dagger$ 的记号，它们分别对应于 $\mathcal{D} = xL_{1,n}$ 和 $\mathcal{D}^\dagger = xL_{2,n} + (1 + \nu)$。于是，由$\{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger, 1\}$ 生成的代数与由 $\{xL_{1,n}, xL_{2,n}, 1\}$生成的代数同构。

注4.4。根据上述定理的证明，如果 $\phi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ 是一个次数为 n 且具有 ℓ 个非零系数的多项式。如果 $\{i_1, \ldots, i_\ell\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$ 是满足$a_{i_j} \neq 0$的指标集合，那么我们有

$$\langle x\phi'(x), x^2\phi^{(2)}(x), \ldots, x^n\phi^{(n)}(x)\rangle = \langle x^{i_1}, \ldots, x^{i_\ell}\rangle. \tag{4.4}$$

例4.5. 设 $\phi_1(x) = x^3$ 和 $\phi_2(x) = x^3 + x^2$，根据上述定理，相应的李代数 $\mathfrak{g}_{\phi_1}$ 和 $\mathfrak{g}_{\phi_2}$ 的维数分别为 5 和 6。因此，代数 $\mathfrak{g}_{\phi_1}$ 和 $\mathfrak{g}_{\phi_2}$不同构。

引理 4.6. 元素 $z = \mathcal{D} + \mathcal{D}^\dagger + 2x - x\phi'(x)$ 是一个对称微分算子，属于李代数 $\mathfrak{g}$的中心。

证明. 这可由 $\mathfrak{g}_\phi$的括号定义立即得出。 □

注4.7. 我们在上述引理中找到的中心元与引理3.2中讨论的对称算子 $\mathcal{C}$ 有关，这一点将在下一节中看到。

接下来，给定一个次数为 $n \geq 2$、含有 ℓ 个非零系数的多项式 $\phi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，并令 k 如式 (4.2) 所示，考虑以下记号。

$$I_\phi = \{i \in \{2, \ldots, n\} : a_i \neq 0\} = \{j_1, \ldots, j_{k-2}\} = \begin{cases} \{i_3, \ldots, i_\ell\} & \text{if } a_0 \neq 0,\ a_1 \neq 0, \\ \{i_2, \ldots, i_\ell\} & \text{if } a_0 = 0 \text{ and } a_1 \neq 0, \\ \{i_2, \ldots, i_\ell\} & \text{if } a_0 \neq 0 \text{ and } a_1 = 0, \\ \{i_1, \ldots, i_\ell\} & \text{if } a_0 = 0 \text{ and } a_1 = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

其中 $j_t < j_{t+1}$ 和 $i_t < i_{t+1}$。

定理 4.8。设 $\phi(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 是一个次数为 $n \geq 2$ 且具有 ℓ 个非零系数的多项式，k 如式 (4.2) 所示。若 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_\phi$ 是 ϕ 在式 (4.1) 中对应的李代数，则有

$$\mathfrak{g} \cong \mathbb{C}^2 \oplus \mathfrak{h}$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是一个维数为 k的可解李代数，其阿贝尔幂零根的维数为 $k-1$。更确切地说，若 I_ϕ 如 (4.5) 所示，则

$$\mathfrak{h} \cong \langle E \rangle \ltimes \langle E_1, \dots E_{k-1} \rangle$$

其中 $\langle E_1, \dots E_{k-1} \rangle$ 是阿贝尔的，其余括号满足

$$[E, E_1] = E_1 \quad and \quad [E, E_t] = j_{t-1}E_t \quad for\ t = 2, \dots, k-1. \tag{4.6}$$

证明。由引理 4.6，元素 $z = \mathcal{D} + \mathcal{D}^\dagger + 2x - x\phi'(x)$ 属于 $\mathfrak{g}$的中心，因此我们得到一个不属于 $\langle 1 \rangle$ 的中心元素，于是若

$$\mathfrak{h} = \langle \mathcal{D}, x, x\phi'(x), x^2\phi^{(2)}(x), \dots, x^n\phi^{(n)}(x) \rangle$$

则我们得到

$$\mathfrak{g} \cong \mathbb{C}^2 \oplus \mathfrak{h},$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是一个维数为 k的李代数。

因此，只需证明 $\mathfrak{h}$ 是可解的，且其幂零根的维数为 $k-1$。我们来考虑 er

$$\mathfrak{k} = \langle x, x\phi'(x), x^2\phi^{(2)}(x), \dots, x^n\phi^{(n)}(x) \rangle,$$

根据括号的定义，并考虑到

$$[x, x^l\phi^{(l)}(x)] = [x^i\phi^{(i)}(x), x^j\phi^{(j)}(x)] = 0 \qquad \text{for all } i \neq j, \tag{4.7}$$

我们得到 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{k}$。因此，由(4.7)可得 $\Big[[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\Big] = 0$，从而 $\mathfrak{h}$ 是可解的。最后，注意到 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个维数为

$$\dim(\mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{h}) - 1 = k - 1,$$

这意味着 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{h}$的幂零根，证毕。

与注4.4中相同，我们有

$$\mathfrak{h} = \langle \mathcal{D}, x, x^{j_1}, \dots, x^{j_{k-2}} \rangle,$$

在这种情况下，$\langle x、\ x^{j_1}、\ \dots、\ x^{j_{k-2}} \rangle$是一个维数为 $k-1$的阿贝尔子代数。只需考察括号 $[\mathcal{D}, x^{j_t}]$ 和 $[\mathcal{D}, x]$; 在这种情况下，我们得到

$$[\mathcal{D}, x] = -x \qquad \text{and} \qquad [\mathcal{D}, x^{j_t}] = -j_t x^{j_t},$$

因此我们得到 $\langle x, x^{j_1}, \dots, x^{j_{k-2}} \rangle$ 是一个阿贝尔理想。最后，考虑以下对应关系

$$\mathcal{D} \longmapsto -E, \quad x \longmapsto E_1, \quad x^{j_i} \longmapsto E_{i+1} \quad \text{for } i = 1, \dots, k-2,$$

这是 $\mathfrak{h}$ 与 $\langle E \rangle \ltimes \langle E_1, \dots E_{k-1} \rangle$ 之间的李代数同构，其括号由 (4.6) 给出，正如所断言的那样。□

接下来我们将研究可解李代数 $\mathfrak{h}_\phi$ 的结构。一般而言，具有余维为 1 的阿贝尔理想的李代数 $\mathfrak{h}'$ 称为几乎阿贝尔李代数。V.V. Gorbatsevich 在 [11] 中研究了这类代数。作者断言，一般来说，这类代数可分解为

$$\mathbb{C} \ltimes_\psi \mathbb{C}^{k-1},$$

这个半直积给出一个线性变换 $\psi \colon \mathbb{C} \to gl_{k-1}(\mathbb{C})$，此外，他还断言，这类代数的结构由矩阵 $\Psi = \psi$ (1) 决定。更确切地说，

$$\mathbb{C} \ltimes_\psi \mathbb{C}^{k-1} \cong \mathbb{C} \ltimes_{\psi'} \mathbb{C}^{k-1} \iff \quad \Psi \text{ and } \Psi' \text{ are conformally similar}, \tag{4.8}$$

回忆一下，Ψ 与 Ψ' 共形相似，当且仅当存在一个矩阵 $P \in Gl_{k-1}(\mathbb{C})$ 和一个非零复数 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，使得 $\Psi = \lambda P \Psi' P^{-1}$。

引理 4.9. 设 k 是一个大于 1 的整数，且 $1 < j_1 < \ldots < j_{k-2}$ 和 $1 < j'_1 < \ldots < j'_{k-2}$ 是两个正整数序列。考虑

$$\Psi = \mathrm{diag}(1, j_1, \ldots, j_{k-2}) \quad and \quad \Psi' = \mathrm{diag}(1, j'_1, \ldots, j'_{k-2}).$$

那么，当且仅当 $\Psi = \Psi'$ 时， Ψ 和 Ψ' 共形相似。

证明。显然，若 $\Psi = \Psi'$，那么它们显然共形相似。

现在，假设 Ψ 和 Ψ' 共形相似，因此存在 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 和 $P \in GL_{k-1}(\mathbb{C})$，使得

$$\Psi' = \lambda P \Psi P^{-1},$$

由相似关系，我们得到以下谱关系

$$\mathrm{Spec}(\Psi') = \lambda \cdot \mathrm{Spec}(\Psi),$$

也就是说， Ψ' 的所有特征值都可以通过将 Ψ 的特征值乘以 λ得到。由于 Ψ 和 Ψ' 都是对角的，我们有

$$\mathrm{Spec}(\Psi) = \{1, j_1, \ldots, j_{k-2}\} \quad \text{and} \quad \mathrm{Spec}(\Psi') = \{1, j'_1, \ldots, j'_{k-2}\},$$

由于 1 同时属于两个谱，且 Ψ 和 Ψ' 的其余特征值都大于 1，因此必有 $\lambda = 1$。于是，我们得到

$$\mathrm{Spec}(\Psi') = \mathrm{Spec}(\Psi).$$

因此，正如所断言的， $\Psi = \Psi'$。 □

现在可以给出以下定理，它说明了何时两个不同多项式（如 (4.1) 中所示）所关联的李代数同构。

定理 4.10. 设 $\phi_1(x)$ $\phi_2(x)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、次数大于或等于 2 的多项式。设 $\mathfrak{h}_{\phi_1}$ 和 $\mathfrak{h}_{\phi_2}$ 是如定理 4.8 中所给出的与其关联的可解李代数。那么，

$$\mathfrak{h}_{\phi_1} \cong \mathfrak{h}_{\phi_2} \iff I_{\phi_1} = I_{\phi_2},$$

其中 I_{ϕ_1}、 I_{ϕ_2} 如 (4.5) 中所示。此外，我们有

$$\mathfrak{g}_{\phi_1} \cong \mathfrak{g}_{\phi_2} \iff I_{\phi_1} = I_{\phi_2},$$

其中， $\mathfrak{g}_{\phi_1}$ 和 $\mathfrak{g}_{\phi_2}$ 分别是 ϕ_1 和 ϕ_2的关联李代数。

证明。由定理 4.8 可知， $\mathfrak{g}_{\phi_1} \cong \mathfrak{g}_{\phi_2}$ 当且仅当 $\mathfrak{h}_{\phi_1} \cong \mathfrak{h}_{\phi_2}$。因此，只需证明

$$\mathfrak{h}_{\phi_1} \cong \mathfrak{h}_{\phi_2} \iff I_{\phi_1} = I_{\phi_2}.$$

由 (4.8) 可知，只需证明关联矩阵 Φ_1 和 Φ_2 共形相似。由定理 4.8 和 (4.8) 可知， Φ_1 和 Φ_2 与以下矩阵共形相似:

$$\Psi = \mathrm{diag}(1, j_1, \ldots, j_{k-2}) \quad \text{and} \quad \Psi' = \mathrm{diag}(1, j'_1, \ldots, j'_{k-2}) \quad \text{respectively,}$$

其中， $\{j_1, \ldots, j_{k-2}\} = I_{\phi_1}$和 $\{j'_1, \ldots, j'_{k-2}\} = I_{\phi_2}$。最后，由引理 4.9 可得， Ψ和 Ψ' 共形相似当且仅当 $\Psi = \Psi'$，这等价于说 $I_{\phi_1} = I_{\phi_2}$。因此，如所述， $\mathfrak{h}_{\phi_1} \cong \mathfrak{h}_{\phi_2}$ 当且仅当 $I_{\phi_1} = I_{\phi_2}$。□

作为直接推论，我们得到如下结论。

推论 4.11. 设 $\phi_1(x)$ $\phi_2(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 上次数大于 2 的多项式。那么，我们有以下几种情况:

(1) 如果 $\deg \phi_1 = \deg \phi_2 = 2$，那么 $\mathfrak{g}_{\phi_1} \cong \mathfrak{g}_{\phi_2}$。
(2) 如果 $\deg \phi_1 \neq \deg \phi_2$，那么 $\mathfrak{g}_{\phi_1} \ncong \mathfrak{g}_{\phi_2}$。

注 4.12。注意，如果我们考虑 $\phi_m(x) = x^m + ax$，其中 $m \geq 2$，那么 $\dim(\mathfrak{h}_{\phi_m}) = 3$。维数为 3 的可解李代数的结构由 J. Patera 和 H. Zassenhaus 在 [25] 中研究。在第 4 页，作者定义了李代数 $L_{3,\ 6} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$，其括号为

$$[a_1, a_2] = a_3 \qquad [a_1, a_3] = a_3 - \alpha \cdot a_2$$

参数 α 满足 $\alpha \neq 0$ 和 $1-4\alpha \neq 0$ 时，该参数 α 与这类代数的同构类一一对应。其关联矩阵 $\psi_\alpha(1)$ 为

$$\psi_\alpha(1) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\psi_\alpha(1)$ 的特征值为

$$\lambda_0 = \tfrac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2} \quad \text{and} \quad \lambda_1 = \tfrac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2}.$$

On 另一方面，若我们考虑 $\phi_m(x) = x^m + ax$，其中 $m \geq 2$，则 $\mathfrak{h}_{\phi_m}$ 的维数为 3 a nd its 关联矩阵 Ψ_m 与下式共形相似

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

因此， Ψ_m 与 $\psi_\alpha(1)$ 共形相似，当且仅当

$$\lambda_0 = r, \qquad \lambda_1 = rm \qquad \text{for some complex number } r,$$

因为可对角化矩阵相似当且仅当它们的谱相同。这个方程组有解 $r = \frac{1}{m+1}$ 和 $\alpha = \ ^{m}{}_{(m+1)^2}$。因此 $\mathfrak{h}_{\phi_m} \cong L^{\alpha}_{3,6}$ 满足 $\alpha = \ ^{m}{}_{(m+1)^2}$。

5. Laguerre type solutions

设 $A \in M_N(\mathbb{C})$ 为常矩阵，并设 $\nu \in \mathbb{R}$ 满足 $\nu > 0$。在本节及后续内容中，我们将考虑由下式给出的权矩阵 W

$$W^{(\nu)}(x) = e^{Ax} T^{(\nu)}(x) e^{A^* x}, \qquad T^{(\nu)}(x) = e^{-x} \sum_{k=1}^{N} \delta_k^{(\nu)} x^{\nu+k} E_{k,k}. \tag{5.1}$$

若记 $L(x) = e^{Ax}$，则

$$W^{(\nu)}(x) = L(x) T^{(\nu)}(x) L^*(x). \tag{5.2}$$

回顾一下，若 A、J 如 (3.1) 中所述，则用 L 表示的方程 (3.2) 表明

$$L(x) J L^{-1}(x) = J - Ax. \tag{5.3}$$

在这种情况下，我们得到与第3节中考虑的同类权，其中 $\phi(x) = x$。

命题 5.1。一阶微分算子

$$\mathcal{D} = \partial_x x + x(A-1), \quad \mathcal{D}^\dagger = -\partial_x x - (1 + \nu + J),$$

互为伴随算子，并满足

$$M = \psi^{-1}(\mathcal{D}) = (A-1)\delta - (n+1+\nu) - \mathcal{H}(n) J \mathcal{H}^{-1}(n),$$
$$M^\dagger = \psi^{-1}(\mathcal{D}^\dagger) = -(n+\nu+J+1) + \mathcal{H}(n)(A-1)^* \mathcal{H}^{-1}(n-1)\delta^{-1}.$$

证明。根据命题3.1，算子 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^\dagger$ 互为伴随算子，取 $\phi(x) = x$.

另一方面，由于在此情形下 $v(x)$ 的次数为 1，根据推论 3.5，我们得到：对于 $j \leq -1$，$A_j(n) = 0$，且 $A_1(n) = A - 1$。

最后， $A_0^\dagger(n)$ 的公式可由关系 $P \cdot \mathcal{D}^\dagger = M_{\mathcal{D}^\dagger} \cdot P$ 直接得到，而项 $A_0(n)$ 可由方程 (2.5) 得到。□

由上述命题和推论 3.5 可直接得到以下结果。

推论 5.2。设 $A, J \in M_N(\mathbb{C})$ 如 (3.1) 中所述，并设 $W := W_{(\nu)\phi}$ 是 (3.3) 中所述的矩阵权，其中 $\phi(x) = x$，且矩阵值正交多项式为 $P(x,n)$。若 $X(n)$ 和 $Y(n)$ 分别是 $P(x,n)$ 的 $(n-1)$ 项和 $(n-2)$ 项的系数，则

$$n + X(n)A - AX(n+1) - B(n) = -(n+1+\nu) - \mathcal{H}(n)J\mathcal{H}^{-1}(n), \tag{5.4}$$

$$X(n) + [J, X(n)] = \mathcal{H}(n)(A^* - 1)\mathcal{H}^{-1}(n-1), \tag{5.5}$$

其中 $\mathcal{H}(n)$ 和 $B(n)$ 如 (1.2) 和 (1.4) 所示。

证明。由命题 5.1 和推论 3.5 可得，并考虑到 $\mathcal{D}$ 的项 $A_0(n)$。

另一方面，由等式 $P \cdot \mathcal{D}^\dagger = M^\dagger \cdot P$ 及

$$\mathcal{D}^\dagger = -\partial_x x - (1 + \nu + J) \quad \text{and} \quad M^\dagger = -(n + \nu + J + 1) + A_{-1}^\dagger(n)\delta^{-1},$$

我们可以由上述定理得到方程 (5.5)。 □

算子 D 的存在性。作为二阶微分算子特征函数的矩阵值正交多项式族非常重要，参见例如 [8], [9],[14], [19]。采用 [19], 的方法，我们得到一个对称二阶微分算子，它保持多项式及其次数不变。为此，我们建立了一个与对角矩阵微分算子的共轭变换。

考虑次数分别为二、一和零的矩阵值多项式 F_2, F_1, F_0，并假设存在一个矩阵值二阶微分算子 D，使得

$$Q \cdot D = \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)(x)\, F_2(x) + \left(\frac{dQ}{dx}\right)(x)\, F_1(x) + Q(x)F_0(x). \tag{5.6}$$

对于矩阵值多项式 Q。由矩阵值内积 (1.1) 的定义可知，微分算子 D 关于 W 对称，当且仅当对任意矩阵值多项式 G, H，都有

$$\int_0^\infty (GD)(x)W(x)(H(x))^*\, dx = \int_0^\infty G(x)W(x)((HD)(x))^* dx.$$

根据 [9, 定理 3.1],，此对称条件等价于以下方程

$$F_2(x)W(x) = W(x)\big(F_2(x)\big)^*, \qquad 2\tfrac{d(F_2W)}{dx}(x) - F_1(x)W(x) = W(x)\big(F_1(x)\big)^*, \tag{5.7}$$

$$\tfrac{d^2(F_2W)}{dx^2}(x) - \tfrac{d(F_1W)}{dx}(x) + F_0(x)W(x) = W(x)\big(F_0(x)\big)^*, \tag{5.8}$$

以及边界条件

$$\lim_{x\to 0} F_2(x)W(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} F_2(x)W(x), \tag{5.9}$$

$$\lim_{x\to 0} F_1(x)W(x) - \tfrac{d(F_2W)}{dx}(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} F_1(x)W(x) - \tfrac{d(F_2W)}{dx}(x). \tag{5.10}$$

有如下引理。

引理 5.3. 二阶微分算子

$$D_Q = \partial_x^2 x + \partial_x(1 + \nu - x + J) - J$$

关于权 $T^{(\nu)}(x)$ 对称。

证明. 考虑到 $F_2(x) = x$, $F_1(x) = 1 + \nu - x + J$ 以及 $F_0(x) = -J$，可以通过直接计算验证，对于 D_Q 和$T^{(\nu)}(x)$，(5.9)、(5.10)、(5.7) 和 (5.8) 均成立。□

命题 5.4. 二阶微分算子

$$D = \partial_x^2 x + \partial_x((A-1)x + 1 + \nu + J) + A\nu + JA - J$$

关于权 $W(x)$ 对称。此外

$$P \cdot D = \Gamma \cdot P \quad where \quad \Gamma(n) = A(n + \nu + 1 + J) - n - J.$$

证明。由 [21] 中的注 4.1 可知。 □

与 W 相关联的李代数。

回顾一下，若李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基等于其中心，则称其为约化的。

引理 5.5。设 $A, J \in M_N(\mathbb{C})$ 如 (3.1) 所示，并考虑算子

$$\mathcal{D} = \partial_x x + x(A-1) \quad \mathcal{D}^\dagger = -\partial_x x - (1+\nu+J) \quad D = \partial_x^2 x + \partial_x((A-1)x + 1 + \nu + J) + A\nu + JA - J.$$

If x 通过右常数乘法作用于矩阵值多项式，则有

$$[\mathcal{D}, x] = -x, \qquad [\mathcal{D}^\dagger, x] = x, \qquad [\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger] = x, \qquad [D, x] = -\mathcal{D} + \mathcal{D}^\dagger,$$

$$[\mathcal{D}, D] = -\mathcal{D} + D - (1+\nu), \quad [\mathcal{D}^\dagger, D] = \mathcal{D}^\dagger - D + (1+\nu).$$

由 $\{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger, D, x, I\}$ 生成的底层李代数与李代数 $\mathcal{A} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$ 同构，其括号为

$$[x_1, x_2] = -x_4, \quad [x_1, x_4] = -x_4, \quad [x_2, x_4] = x_4, \quad [x_3, x_4] = -x_1 + x_2,$$

$$[x_1, x_3] = -x_2 + x_3 + x_4 - (1+\nu)x_5 \quad \textit{and} \quad [x_2, x_3] = x_1 - x_3 - x_4 + (1+\nu)x_5,$$

对应关系为：

$$x_1 \longmapsto \mathcal{D} + x, \quad x_2 \longmapsto \mathcal{D}^\dagger + x, \quad x_3 \longmapsto D, \quad x_4 \longmapsto x, \quad x_5 \longmapsto 1.$$

证明。令 $\mathcal{D}' = \mathcal{D} + x$ 和 $\mathcal{D}'^\dagger = \mathcal{D}^\dagger + x$。通过直接计算可得

$$[\mathcal{D}', x] = -x, \quad [\mathcal{D}'^\dagger, x] = x, \quad [\mathcal{D}', \mathcal{D}'^\dagger] = -x, \quad [D, x] = -\mathcal{D}' + \mathcal{D}'^\dagger,$$

$$[\mathcal{D}', D] = -\mathcal{D}'^\dagger + D + x - (1+\nu), \quad [\mathcal{D}'^\dagger, D] = \mathcal{D}' - D - x + (1+\nu).$$

Cle显然，与此表示相关联的底层李代数是李代数
$\mathcal{A} = \langle x_1、\ x_2、\ x_3、\ x_4、\ x_5 \rangle$，其括号为

$$[x_1, x_2] = -x_4, \quad [x_1, x_4] = -x_4, \quad [x_2, x_4] = x_4, \quad [x_3, x_4] = -x_1 + x_2,$$

$$[x_1, x_3] = -x_2 + x_3 + x_4 - (1+\nu)x_5 \quad \text{and} \quad [x_2, x_3] = x_1 - x_3 - x_4 + (1+\nu)x_5,$$

对应关系为

$$x_1 \longmapsto \mathcal{D} + x, \quad x_2 \longmapsto \mathcal{D}^\dagger + x, \quad x_3 \longmapsto D, \quad x_4 \longmapsto x, \quad x_5 \longmapsto 1,$$

正如所需。 □

我们有如下结构性结果。

命题 5.6。上述定义的李代数 $\mathcal{A}$ 是一个 5 维约化代数，其中心维数为二，由 $\mathcal{Z}_\mathcal{A} = \langle x_1 + x_2 - x_4、\ x_5 \rangle$ 给出。此外， $\mathcal{A} = [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \oplus \mathcal{Z}_\mathcal{A}$ 的 $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ 同构于 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$。特别地，

$$\mathcal{C}_1 = -4x_4(x_1 - x_3 - x_4 + (1+\nu)x_5) + (x_4 - x_1 + x_2)^2, \quad \mathcal{C}_2 = x_1 + x_2 - x_4 \quad \textit{and} \quad \mathcal{C}_3 = x_5$$

$\mathcal{A}$ 的卡西米尔元为。

证明。根据李代数理论（见 [18]）， $\mathcal{A}$ 的根基可由其基灵形式计算得到；在本例中，我们有

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathcal{Z}_\mathcal{A} = \langle x_1 + x_2 - x_4, x_5 \rangle,$$

因此，李代数 $\mathcal{A}$ 是约化的。现在，根据一般理论，由于 $\mathcal{A}$ 是约化的，我们得到

$$\mathcal{A} = [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \oplus \mathcal{Z}_\mathcal{A}.$$

在本例中，我们得到

$$[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \langle x_4,\ x_1 - x_2,\ x_1 - x_3 - x_4 + (1+\nu)x_5 \rangle.$$

取 $a_1 = x_4、\ a_2 = x_1 - x_2$ 和 $a_3 = x_1 - x_3 - x_4 +$ $(1+\nu)$ x_5，我们得到

$$[a_1, a_2] = -2a_1, \quad [a_1, a_3] = a_1 - a_2, \quad [a_2, a_3] = -a_3$$

因此，如果我们取 $\hat{a}_2 = a_1 - a_2$ 和 $\hat{a}_3 = -a_3$，则有

$$[a_1, \hat{a}_2] = 2a_1, \quad [a_1, \hat{a}_3] = -\hat{a}_2, \quad [\hat{a}_2, \hat{a}_3] = 2\hat{a}_3,$$

因此，通过考虑映射 $a_1 \mapsto e_1\, \hat{a}_2 \mapsto e_2$ 和 $\hat{a}_3 \mapsto e_3$，$[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ 与 SL(2,$\mathbb{C}$) 同构。特别地，SL(2,$\mathbb{C}$) 的卡西米尔元 $4e_1e_3+e_2^2$ 诱导出 $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$的一个卡西米尔元

$$\mathcal{C}_{[\mathcal{A},\mathcal{A}]} = -4x_4(x_1 - x_3 - x_4 + (1+\nu)x_5) + (x_4 - x_1 + x_2)^2.$$

考虑到 $\mathcal{C}_{[\mathcal{A},\mathcal{A}]}$ 与 $\mathcal{A}$ 的中心元对易，我们得到 $\mathcal{C}_{[\mathcal{A},\mathcal{A}]}$与 $\mathcal{A}$ 的所有元素对易，因此它是 $\mathcal{A}$ 的卡西米尔元。

最后一个断言显然成立，因为中心元始终是给定李代数的卡西米尔元。□

注 5.7。注意，

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 + (1+\nu)\mathcal{C}_3 = \mathcal{D} + \mathcal{D}^\dagger + x + (1+\nu)$$

it is 也是 $\mathcal{A}$ 的卡西米尔不变量。因此，在由 $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}^\dagger$、D、x、1、t 给出的表示下，he ima这个卡西米尔的.....满足

$$\mathcal{C} = Ax - J.$$

因此，用 M、$M^\dagger$ 和 L 表示，我们得到

$$\varphi^{-1}(\mathcal{C}) = M + M^\dagger + L + (1+\nu). \tag{5.11}$$

另一方面，可以验证的是。

$$\mathcal{C}_{[\mathcal{A},\mathcal{A}]} = \frac{1}{8}(A^2x^2 + \nu^2 + J^2 + Ax - 2\nu Ax - 2xJA + 2\nu J - 1).$$

因此，$\mathcal{C}' = A^2x^2 - 2xJA + J + J^2$ 也是一个卡西米尔，因为

$$\mathcal{C}' = 8\mathcal{C}_{[\mathcal{A},\mathcal{A}]} - (1-2\nu)\mathcal{C} - (\nu^2-1)\mathcal{C}_3,$$

此外，注意到关系 $[J,A] = A$ 意味着 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^2 - \mathcal{C}$，因此我们得到

$$\mathcal{C}_{[\mathcal{A},\mathcal{A}]} = \tfrac{1}{8}\Big(\mathcal{C}^2 - 2\nu\mathcal{C} + (\nu^2-1)\mathcal{C}_3\Big).$$

Th因此，在这个表示中，与 $\mathcal{C}_{[\mathcal{A},\mathcal{A}]}$ 对应的卡西米尔元并未给出更多..... re info比 $\mathcal{C}$ 更多的信息。因此，在本文余下部分中，我们将只考虑卡西米尔元 $\mathcal{C}$.

我们也可以考虑由 $\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ 生成的李子代数。请注意，在上一节中，通过取 $\phi(x) = x$, 讨论了这类代数的一个表示。在这种情况下，我们有如下结构结果。

命题 5.8. $\mathcal{A}$ 中由 $\mathcal{A}' = \langle x_1, x_2, x_4, x_5\rangle$ 生成的李子代数同构于 $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathbb{C}^2$，其中 $\mathfrak{g}_2$ 是一个二维可解李代数，其括号为 $[e_1, e_2] = e_2$。特别地，$\mathcal{A}'$ 没有非中心的卡西米尔不变量。

证明. 取映射

$$x_2 \mapsto e_1, \quad x_4 \mapsto e_2, \quad x_1 + x_2 - x_4 \mapsto e_3 \quad \text{and} \quad x_5 \mapsto e_4.$$

我们得到一个与 $\mathcal{A}'$ 同构的代数。在这种情况下，$\langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$ 的唯一非零括号是 $[e_1, e_2] = e_2$，因此 $\mathcal{A}'$ 同构于 $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathbb{C}^2$，如所断言。

最后一个断言是由 $\mathfrak{g}_2$ 没有中心元这一点得出的。因此，$\mathcal{A}'$ 的卡西米尔不变量只有中心元。□

在下文中，为了简化记号，我们将考虑

$$B_n := B(n), \quad C_n := C(n), \quad \mathcal{H}_n := \mathcal{H}(n), \quad \Gamma_n = \Gamma(n). \tag{5.12}$$

下面的命题是由 M、$M^\dagger$、L、Γ 的括号之间的关系得出的。

命题 5.9. 设 $A, J \in M_N(\mathbb{C})$ 是 (3.1) 中的矩阵，并设 $B_n, C_n, \mathcal{H}_n$ 和 Γ_n 如 (5.12) 所示。则，

$$B_n(A-1) - (A-1)B_{n+1} = 2 + \mathcal{H}_{n+1}J\mathcal{H}_{n+1}^{-1} - \mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}, \tag{5.13}$$

$$B_n = [B_n, J] + \mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1} - \mathcal{H}_{n+1}(A^t-1)\mathcal{H}_n^{-1}, \tag{5.14}$$

$$2\mathcal{H}_n\mathcal{H}_{n-1}^{-1} = [\mathcal{H}_n\mathcal{H}_{n-1}^{-1}, J] - B_n\mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1} - \mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}B_{n-1}, \tag{5.15}$$

$$B_n = -[J, \mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}] - \mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}(A-1) + (A-1)\mathcal{H}_{n+1}(A^t-1)\mathcal{H}_n^{-1}, \tag{5.16}$$

$$[\Gamma, C_n\delta^{-1}] = \mathcal{H}_n(A-1)^*\mathcal{H}_{n-1}^{-1}, \tag{5.17}$$

$$[\Gamma_n, \mathcal{H}_n J\mathcal{H}_n^{-1}] = n + \Gamma_n + \mathcal{H}_n J\mathcal{H}_n^{-1}, \tag{5.18}$$

$$[\Gamma, \mathcal{H}_n(A-1)^*\mathcal{H}_{n-1}^{-1}\delta^{-1}] = -\mathcal{H}_n(A-1)^*\mathcal{H}_{n-1}^{-1}. \tag{5.19}$$

证明. 方程 (5.13) 可通过考察括号关系 $[M, L] = L$ 中 δ^1 的系数得出。

同理，方程 (5.14)、(5.15) 可通过考察括号关系 $[M^\dagger, L] = L$ 中 δ^0 和 δ^{-1} 的系数得出。

另一方面，方程 (5.16) 可由括号关系 $[M, M^\dagger] = L$ 得出。方程 (5.17) 是括号 $[\Gamma, L] = -M + M^\dagger$ 中 δ^{-1} 的系数所导出的结果。方程 (5.18) 可由括号 $[\Gamma, M] = M - \Gamma + (1+\nu)$ 中 δ^0 的系数得出。最后，方程 (5.19) 可由括号关系$[\Gamma, M^\dagger] = -M^\dagger + \Gamma - (1+\nu)$ 中 δ^{-1} 的系数得出。□

命题 5.10. 设 $A, J \in M_N(\mathbb{C})$ 是 (3.1) 中的矩阵。那么，

$$[B_n, J] = B_n - \overline{\Gamma_n C_n} + \overline{C_n\Gamma_{n-1}} + \overline{\Gamma_{n+1}C_{n+1}} - \overline{C_{n+1}\Gamma_n},$$
$$[C_n, J] = 2C_n + B_n(\overline{\Gamma_n C_n} - \overline{C_n\Gamma_{n-1}}) + (\overline{\Gamma_n C_n} - \overline{C_n\Gamma_{n-1}})B_{n-1},$$

其中 B_n、C_n、$\mathcal{H}_n$ 和 Γ_n 如 (5.12) 中所述

证明。由 (5.14) 可得

$$[B_n, J] = B_n - \mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1} + \mathcal{H}_{n+1}(A^t-1)\mathcal{H}_n^{-1}.$$

另一方面，由 (5.17)，并考虑到 $\mathcal{H}_n \in M_N(\mathbb{R})$，可得

$$\mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1} = \overline{[\Gamma, C_n\delta^{-1}]} = \overline{\Gamma_n C_n} - \overline{C_n\Gamma_{n-1}},$$
$$\mathcal{H}_{n+1}(A^t-1)\mathcal{H}_n^{-1} = \overline{[\Gamma, C_n\delta^{-1}]} = \overline{\Gamma_{n+1}C_{n+1}} - \overline{C_{n+1}\Gamma_n},$$

因此我们有

$$[B_n, J] = B_n - \overline{\Gamma_n C_n} + \overline{C_n\Gamma_{n-1}} + \overline{\Gamma_{n+1}C_{n+1}} - \overline{C_{n+1}\Gamma_n},$$

如所述。

对于第二个等式，注意到由于 $C_n = \mathcal{H}_n\mathcal{H}_{n-1}^{-1}$，因此方程 (5.15) 意味着 th at

$$[C_n, J] = 2C_n + B_n\mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1} + \mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}B_{n-1}.$$

与上面相同，我们得到

$$[C_n, J] = 2C_n + B_n(\overline{\Gamma_n C_n} - \overline{C_n\Gamma_{n-1}}) + (\overline{\Gamma_n C_n} - \overline{C_n\Gamma_{n-1}})B_{n-1},$$

如所需。 □

6. Matrix entries of $P(x, n)$ as classical Laguerre polynomials

本节将用经典标量拉盖尔多项式给出拉盖尔型矩阵值正交多项式各项的显式表达式。为此，我们采用 [19], [17], [20],的方法，其核心思想是观察到，对称二阶微分算子可以通过与适当的矩阵值函数作共轭变换而对角化。本节的情形比前面几种更复杂，因为尽管微分算子可以对角化，其特征值仍不是对角的。

在本节其余部分，权矩阵 $W(x)$ 与上一节中的相同。

步骤 I：将微分算子对角化：设 $A, J \in M_N(\mathbb{C})$ 为（3.1）中的矩阵。我们可以定义以下辅助矩阵值多项式

$$Q(x,n) := P(x,n)L(x), \qquad \text{where } L(x) = e^{xA}. \tag{6.1}$$

多项式 Q_n 满足以下关系，

$$Q_n \cdot \mathcal{D}_Q = M \cdot Q_n, \qquad Q_n \cdot D_Q = \Lambda_n \cdot Q_n, \qquad Q_n \cdot \mathcal{C}_Q = M_{\mathcal{C}} \cdot Q_n,$$

其中

$$\mathcal{D}_Q = L(x)^{-1}\mathcal{D}L(x), \qquad D_Q = L(x)^{-1}DL(x), \qquad \mathcal{C}_Q = L(x)^{-1}\mathcal{C}L(x). \tag{6.2}$$

这里的 $\mathcal{D}$、D 分别与命题 5.1、命题 5.4中的定义相同，且 $\mathcal{C} = Ax - J$。在下面的引理中，我们将证明 $\mathcal{D}_Q$、D_Q 和 $\mathcal{C}_Q$ 是简单的对角算子。

引理 6.1。算子 $\mathcal{D}_Q$、D_Q 和 $\mathcal{C}_Q$ 如式（6.2）所示，其显式形式如下：

$$\mathcal{D}_Q = \partial_x x - x, \qquad D_Q = \partial_x^2 x + \partial_x(1 + \nu - x + J) - J, \qquad \mathcal{C}_Q = -J.$$

证明。所有等式都可直接由定义和方程 (3.2) 得出。 □

在下面的命题中，我们将利用 $\mathcal{C}_Q$、$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的表达式，得到一个关联 $Q(x,n)$ 与递推矩阵 $H_n(A^* - 1)H_{n-1}^{-1}$ 的方程。

命题 6.2。由 (6.1) 定义的辅助函数 $Q(x,n)$，满足下列与平方范数有关的方程：

$$-Q(x,n)J = xQ'(x,n) - (n+J)Q(x,n) + \mathcal{H}(n)(A-1)^*\mathcal{H}^{-1}(n-1)Q(x,n-1) \quad \textit{for } n \geq 1$$

且对于 $n = 0$

$$-Q(x,0)J = -J - xQ'(x,0).$$

证明。由引理 3.2 和 6.1 可得

$$-Q(x,n)J = Q(x,n) \cdot \mathcal{C}_Q = (M_{\mathcal{C}} \cdot P(x,n))e^{xA}$$

其中 $M_{\mathcal{C}}$ 是离散算子

$$M_{\mathcal{C}} = A\delta + X(n)A - AX(n+1) - J + \Big(Y(n)A - AY(n+1) + [J, X(n)] + (AX(n+1) - X(n)A)X(n)\Big)\delta^{-1}.$$

根据方程（3.6），我们有

$$(n-1)X(n) + Y(n)(A-1) - (A-1)Y(n+1) - \Big(n + X(n)A - AX(n+1) - B(n)\Big)X(n) = 0,$$

因此

$$Y(n)A - AY(n+1) + (AX(n+1) - X(n)A)X(n) = X(n) + Y(n) - Y(n+1) - B(n)X(n).$$

考虑到关系 $P \cdot x = L \cdot P$with $L = \delta + B(n) + C(n)\delta^{-1}$，因此我们有

$$Y(n) = Y(n+1) + B(n)X(n) + C(n).$$

因此，我们得到

$(M_{\mathcal{C}} \cdot P(x,n))e^{xA} = AQ(x,n+1) + (X(n)A - AX(n+1) - J)Q(x,n) + (C(n) + [J, X(n)] + X(n))Q(x,n-1)$。

另一方面，根据推论 3.5，我们有

$$\begin{aligned}(M_{\mathcal{D}} \cdot P(x,n))e^{xA} &= (A-1)Q(x,n+1) + \Big(n + X(n)A - AX(n+1) - B(n)\Big)Q(x,n),\\ (L \cdot P(x,n))e^{xA} &= Q(x,n+1) + B(n)Q(x,n) + C(n)Q(x,n-1),\end{aligned}$$

其中 $B(n)$ 和 $C(n)$ 如方程（1.4）所示。因此，我们有

$$((M_{\mathcal{D}} + L) \cdot P(x,n))e^{xA} = AQ(x,n+1) + (n + X(n)A - AX(n+1))Q(x,n) + C(n)Q(x,n-1)$$

and thus

$$(M_{\mathcal{C}} \cdot P(x,n))e^{xA} = ((M_{\mathcal{D}} + L) \cdot P(x,n))e^{xA} - (n+J)Q(x,n) + (X(n) + [J, X(n)])Q(x,n-1).$$

注意，若记 $L(x) = e^{xA}$，则由引理 6.1 可知

$$((M_{\mathcal{D}} + L) \cdot P(x,n))L(x) = (P(x,n) \cdot (\mathcal{D} + x))L(x) = Q(x,n) \cdot L^{-1}(x)(\mathcal{D} + x))L(x) = Q(x,n) \cdot \partial_x x,$$

并且根据 (5.5)， $X(n) + [J, X(n)] = \mathcal{H}(n)(A-1)^*\mathcal{H}^{-1}(n-1)$。因此，我们得到

$$-Q(x,n)J = xQ'(x,n) - (n+J)Q(x,n) + \mathcal{H}(n)(A-1)^*\mathcal{H}^{-1}(n-1),$$

如前所述。最后，关于 $n=0$ 的方程由方程 (5.3) 得出。 □

第二步：对特征值 Λ_n 对角化：尽管微分算子 D_Q 是对角算子，但由 $Q_n \cdot D_Q = \Lambda_n Q_n$ 给出的方程组并非解耦的方程组，因为 Λ_n 是下三角矩阵。不过， Λ_n 可以用一种相当简单的方式对角化：

$$\Gamma_n = A(n+\nu+J+1) - (n+J) = K_n \Lambda_n K_n^{-1}, \tag{6.3}$$

其中 Λ_n 是对角矩阵 $\Lambda_n = -(n+J)$。

引理 6.3. 我们可以选择 K_n ，使其为对角元素为 $(K_n)_{i,\,i} = 1$ 的下三角矩阵，对所有 $i = 1, \ldots\ldots, N$ 均成立。此外，此时 K_n 为以下矩阵：

$$(K_n)_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \frac{(n+\nu+j+1)_{i-1}}{(i-j)!} \prod_{k=j}^{i-1} a_k & i > j, \\ 1 & i = j, \\ 0 & i < j. \end{cases} \tag{6.4}$$

证明。由于 $A(n+\nu+J+1)-(n+J)$ 是下三角矩阵，其特征多项式满足

$$\det\Big(\lambda I - \Big(A(n+\nu+J+1) - (n+J)\Big)\Big) = \det(\lambda I + nI + J) = \prod_{r=1}^{N} (\lambda + n + r).$$

那么， $A(n+\nu+J+1) - (n+J)$ 的特征值为

$$\lambda_1 = -(n+1), \ldots, \lambda_N = -(n+N) \quad \text{with multiplicity 1.}$$

Sin若 K_n 对角化了 $A(n+\nu+J+1)$ $-(n+J)$，则其第 r 列可由 t 得到 he eig特征子空间对应于 $\lambda_r = -(n+r)$，即

$$Nu(\lambda_r I - A(n+\nu+J+1) + n + J) = Nu(-A(n+\nu+J+1) + J - rI), \quad \text{for } r = 1, \ldots, N.$$

通过直接计算这些特征子空间，我们可以得到 (6.4)。 □

对于 (6.4) 中的矩阵 K_n ，我们将考虑以下矩阵多项式

$$R(x,n) := K_n^{-1} Q(x,n). \tag{6.5}$$

以下结果揭示了 $R(x,n)$ 的非零矩阵元与广义拉盖尔多项式之间的关系。

定理 6.4. 设 $n \in \mathbb{N}$ ，并设 $\nu > 0$。 $R(x,n)$ 的矩阵元是标量拉盖尔函数的倍数

$$R(x,n)_{i,j} = \begin{cases} L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(x)\xi(n,i,j) & \text{if } n+i-j \geq 0 \\ 0 & \text{if } n+i-j < 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

证明。注意，多项式 $R(x,n)$ 是 $D_Q = \partial_x^2 x + \partial_x(1+\nu-x+J) - J$ 的特征函数，其对应的特征值为 $\Lambda_n = -(n+J)$，其中 J 是对角矩阵 $\mathrm{diag}(1, 2, \ldots, N)$。考察

$$xR''(x,n) + R'(x,n)(1+\nu-x+J) + (nR(x,n) + JR(x,n) - R(x,n)J) = 0,$$

({v11},{v12}) 项，我们得到下列表达式

$$xR''(x,n)_{i,j} + \sum_{k=1}^{N} R'(x,n)_{i,k}(1+\nu-x+J)_{k,j} + nR(x,n)_{i,j} + \sum_{k=1}^{N} (J_{i,k}R(x,n)_{k,j} - R(x,n)_{i,k}J_{k,j}) = 0.$$

由于 $J = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, N)$，上述等式等价于

$$xR''(x,n)_{i,j} + R'(x,n)_{i,j}(1+\nu-x+j) + (n+i-j)R(x,n)_{i,j} = 0.$$

因此，我们得到

$$R(x,n)_{i,j} = L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(x)\xi(n,i,j),$$

正如所断言的。

另一方面，众所周知，如果 $M < 0$ 微分方程的唯一解

$$xP''(x) + P'(x)(1 + \nu - x) + MP(x) = 0,$$

是 $P(x) = 0$，并且由于

$$xR''(x,n)_{i,j} + R'(x,n)_{i,j}(1 + \nu - x + j) + (n + i - j)R(x,n)_{i,j} = 0,$$

我们得到 $R(x,n)_{i,\,j} = 0$ 若 $n + i - j < 0$，正如所断言的。 □

注 6.5. 请注意，根据上述定理，它们仅在 $n + i - j \geq 0$ 时有定义，因此我们将其定义扩展如下

$$\xi(n,i,j) = 0 \qquad \text{if } n + i - j < 0. \tag{6.7}$$

众所周知，广义拉盖尔多项式满足

$$L_N^{(\alpha)}(0) = \frac{(\alpha+1)_N}{N!},$$

其中 $(a)_N$ 是 Pochhammer 符号，定义为

$$(a)_N = \begin{cases} 1 & \text{if } N = 0, \\ a(a+1)\cdots(a+N-1) & \text{if } N > 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

由上述定理可直接推出以下推论。

推论 6.6. 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $\nu > 0$。则，$R(0,n)$ 的系数满足

$$R(0,n)_{i,j} = \begin{cases} \frac{(\nu+j+1)_{n+i-j}}{(n+i-j)!}\xi(n,i,j) & \text{if } n + i - j \geq 0, \\ 0 & \text{if } n + i - j < 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

特别地，$R(0,n)$ 的第 $(i, n+i)$ 个坐标和第 $(i, n+i-1)$ 个坐标满足

$$R(0,n)_{i,n+i} = \xi(n,i,n+i) \quad \text{and} \quad R(0,n)_{i,n+i-1} = (n + \nu + i)\xi(n,i,n+i-1).$$

现在我们需要确定系数 $\xi(n,i,j)$。为此，我们利用命题 6.2 中的关系。在下面的引理中，我们注意到，通过乘以适当的矩阵 K_n，该关系中的因子 $\mathcal{H}(n)(A-1)^*\mathcal{H}^{-1}(n-1)$ 会转化为对角矩阵。这将使我们能够得到 $\xi(n,i,j)$ 的一个简单递推关系。为此，我们定义如下

$$G(n) := K_n^{-1}\mathcal{H}_n(A^* - 1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}K_{n-1} \qquad I(n) := K_n^{-1}\mathcal{H}_n J\mathcal{H}_n^{-1}K_n, \tag{6.10}$$

其中 $\mathcal{H}_n$ 和 K_n 分别与 (5.12) 和 (6.4) 中的相同。

引理 6.7. 对于 $n \geq 1$，并令 $G(n)$、$I(n)$ 为 (6.10) 中的矩阵。则 $G(n)$ 是对角的，且 $I(n)$ 满足

$$(I(n))_{i,i} = i, \qquad (I(n))_{i,j} = 0 \quad \text{for } i \neq j \text{ and } i \neq j - 1.$$

此外

$$(G(n))_{i,i} = (\mathcal{H}_n(A^* - 1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1})_{i,i} \quad \text{and} \quad (I(n))_{i,i+1} = (\mathcal{H}_n J\mathcal{H}_n^{-1})_{i,i+1}. \tag{6.11}$$

证明. 根据方程 (5.19)，

$$[\Gamma_n, \mathcal{H}_n(A^* - 1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}\delta^{-1}] = -\mathcal{H}_n(A^* - 1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}.$$

于是，

$$K_n^{-1}\Gamma_n(\mathcal{H}_n(A^* - 1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1})K_{n-1} - K_n^{-1}(\mathcal{H}_n(A^* - 1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1})\Gamma_{n-1}K_{n-1} = -G(n).$$

于是，由 $K_n^{-1}\Gamma_n K_n = \Lambda_n = -(n + J)$ 可得

$$\Lambda_n G(n) - G(n)\Lambda_{n-1} = -G(n).$$

该断言可通过观察 $i \neq j$ 的 (i,j) 项得出。另一方面，根据定义，我们有

$$K_n G(n) K_{n-1}^{-1} = \mathcal{H}_n(A^* - 1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}.$$

由于 K_n 和 K_{n-1}^{-1} 都是对角线上元素为 1 的下三角矩阵，因此上式左侧的项是一个下三角矩阵，其 (i,i) 坐标等于 $(G(n))_{i,\,i}$，因此

$$(\mathcal{H}_n(A^*-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1})_{i,i} = (K_nG(n)K_{n-1}^{-1})_{i,i} = (G(n))_{i,i},$$

如断言所述。

现在，对于第二个断言，我们可以采用相同的方法；在这种情况下，由方程 (5.18) 可得

$$[\Gamma_n, \mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}] = n + \Gamma_n + \mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}.$$

于是，我们得到

$$K_n^{-1}\Gamma_n\mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}K_n - K_n^{-1}\mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}\Gamma_nK_n = K_n^{-1}(n + \Gamma_n + \mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1})K_n.$$

因此，由 $K_n^{-1}\Gamma_nK_n = \Lambda_n = -(n+J)$ 可得

$$\Lambda_nI(n) - I(n)\Lambda_n = n + \Lambda_n + I(n)).$$

观察上述矩阵等式中的 (i,j) 项即可得到证明。最后，根据定义，我们有

$$K_nI(n)K_n^{-1} = \mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}.$$

因此，一般而言，我们有

$$(K_nI(n)K_n^{-1})_{i,j} = \sum_{k=1}^{N}(K_n)_{i,k}(I(n)K_n^{-1})_{k,j} \quad \text{and} \quad (I(n)K_n^{-1})_{k,j} = (I(n))_{k,k}(K_n^{-1})_{k,j} + (I(n))_{k,k+1}(K_n^{-1})_{k+1,j}.$$

考虑到 $(K_n)_{i,\,j} = (K_n^{-1})_{i,\,j} = 0$ 对于 $j > i$，若 $j = i+1$，我们得到

$$(K_nI(n)K_n^{-1})_{i,i+1} = \sum_{k=1}^{N}(K_n)_{i,k}(I(n)K_n^{-1})_{k,j} = \sum_{k=1}^{i}(K_n)_{i,k}(I(n)K_n^{-1})_{k,i+1} = (I(n))_{i,i+1}(K_n^{-1})_{i+1,i+1},$$

考虑到 $(K_n^{-1})_{i+1,\,i+1} = 1$ 对任意 i 均成立。因此，我们有 $(K_nI(n)K_n^{-1})_{i,\,i+1} = (I(n))_{i,\,i+1}$，如所需。□

以下命题是由卡西米尔算子给出的关系和命题 6.4 推出的

命题 6.8。设 $\xi(n,i,j)$ 如定理 6.4 中所述。若 $n+i-j>0$，则常数 $\xi(n,i,j)$' 满足以下条件：

(a) $\xi(0,i,j) = (K_0^{-1})_{i,\,j}\frac{(i-j)!\,(\nu+j+1)}{i-j}$，$(b)$ 若 $i=1$ 且 $n>0$，则

$$\xi(n,1,j) = \tfrac{(G(n))_{1,1}}{n+\nu+1}\xi(n-1,1,j), \tag{6.12}$$

(c) 若 $i>1$ 且 $n>0$，则

$$\xi(n,i,j) = a_{i-1}\xi(n,i-1,j) + \tfrac{(G(n))_{i,i}}{n+\nu+i}\xi(n-1,i,j), \tag{6.13}$$

其中 $G(n)$如 (6.10) 所示。

证明。对于第一个断言，回忆

$$R(0,0) = K_0^{-1}Q(0,0) = K_0^{-1}P(0,0) = K_0^{-1},$$

因此我们有

$$(K_0^{-1})_{i,j} = \xi(0,i,j)L_{i-j}^{(\nu+j)}(0).$$

考虑到 $L_N^{(\nu)}(0) = \frac{(\nu+1)_N}{N!}$ 对任意 N 均成立，因此得到

$$(K_0^{-1})_{i,j}\tfrac{(i-j)!}{(\nu+j+1)_{i-j}} = \xi(0,i,j),$$

如断言所述。

对于条目（b）和（c），回顾一下，命题 6.2 意味着

$$-Q(0,n)J = -(n+J)Q(0,n) + \mathcal{H}(n)(A^*-1)\mathcal{H}(n-1)^{-1}Q(0,n-1).$$

于是，

$$-K_nR(0,n)J = -(n+J)K_nR(0,n) + \mathcal{H}(n)(A^*-1)\mathcal{H}(n-1)^{-1}K_{n-1}R(0,n-1),$$

因此，我们得到

$$-R(0,n)J = -K_n^{-1}(n+J)K_nR(0,n) + G(n)R(0,n-1)$$

其中 $G(n) = K_n^{-1}\mathcal{H}(n)(A^* - 1)\mathcal{H}(n-1)^{-1}K_{n-1}$。回忆

$$K_n^{-1}(n+J)K_nR(0,n) = (n+J) - A(n+\nu+J+1),$$

我们得到

$$-R(0,n)J = -(n+J)R(0,n) + A(n+\nu+J+1)R(0,n) + G(n)R(0,n-1).$$

因此，用坐标表示可得

$$-jR(0,n)_{i,j} = -(n+i)R(0,n)_{i,j} + \sum_{k=1}^{N}(A(n+\nu+J+1))_{i,k}R(0,n)_{k,j} + \sum_{k=1}^{N}(G(n))_{i,k}R(0,n-1)_{k,j}. \quad (6.14)$$

由于 A 仅在位置（i, $i+1$）处有非零元素 a_i，且 $n+\nu+J+1$ 是对角的，因此可得

$$\sum_{k=1}^{N}(A(n+\nu+J+1))_{i,k}R(0,n)_{k,j} = \begin{cases}(a_{i-1}(n+\nu+i))R(0,n)_{i-1,j} & \text{if } i>1,\\ 0 & \text{if } i=1.\end{cases} \quad (6.15)$$

因此，对于 $i>1$，方程 (6.14) 可写为

$$-jR(0,n)_{i,j} = -(n+i)R(0,n)_{i,j} + a_{i-1}(n+\nu+i)R(0,n)_{i-1,j} + (G(n))_{i,i}R(0,n-1)_{i,j}$$

在等式最后一项中，我们用到了引理 6.7。由定理 6.4，可得

$$(n+i-j)L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(0)\xi(n,i,j) = L_{n+i-1-j}^{(\nu+j)}(0)\Big(a_{i-1}(n+\nu+i)\xi(n,i-1,j) + (G(n))_{i,i}\xi(n-1,i,j)\Big).$$

因此，由于 $n+i-j>0$，我们将 (6.13) 乘以 $((n+i-j)L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(0))^{-1}$，可得到类似的表达式，即

$$\xi(n,i,j) = C_1(n,i,j)\xi(n,i-1,j) + C_2(n,i,j)\xi(n-1,i,j),$$

其中

$$C_1(n,i,j) = \frac{(a_{i-1}(n+\nu+i))L_{n+i-1-j}^{(\nu+j)}(0)}{(n+i-j)L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(0)} \quad \text{and} \quad C_2(n,i,j) = \frac{(G(n))_{i,i}L_{n-1+i-j}^{(\nu+j)}(0)}{(n+i-j)L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(0)}.$$

为完成证明，回顾

$$L_N^{(\alpha)}(0) = \frac{(\alpha+1)_N}{N!},$$

其中 $(a)_N$ 是由下式定义的 Pochhammer 符号

$$(a)_N = \begin{cases}1 & \text{if } N=0,\\ a(a+1)\cdots(a+N-1) & \text{if } N>0.\end{cases}$$

因此，我们有

$$\frac{L_{n+i-1-j}^{(\nu+j)}(0)}{L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(0)} = \frac{n+i-j}{n+\nu+i}.$$

因此，我们得到（6.13），如前所述。

现在，对于 $i=1$，方程（6.14）具有如下形式

$$-jR(0,n)_{1,j} = -(n+1)R(0,n)_{i,j} + (G(n))_{1,1}R(0,n-1)_{1,j}.$$

因此，方程（6.12）可以用与情形 $i>1$ 类似的方法证明。 □

注记 6.9。注意，上述命题中的条目（a）对于 $n+i-j=0$ 仍然成立，因为在这种情况下，我们只需使用 ξ 的定义。

现在，我们将研究情形 $n+i-j=0$。在这种情况下，我们有如下结果 .

命题 6.10。设 $n\in\mathbb{N}_0$，并令 I（n） G（n）如（6.10）所示。若 $i\geq 1$，则常数ξ 满足以下条件:

(a) $\xi(0,i,i) = 1$ 以及 $\xi(1,i,i+1) = I(0)_{i,\ i+1}$。

(*b*) 如果 $i=1$ 且 $n>0$，那么

$$N_1(n,i)\xi(n,1,n+1)=N_2(n,i)\xi(n-1,2,n+1),\qquad with$$

$N_1(n,i)=(\nu+2n+3)\,(G(n+1))_{1,1}+(n+2+\nu)+I(n)_{1,2}(\nu+2n+2)a_1$，$N_2(n,i)=I(n)_{1,2}(\nu+2n+2)\,(G(n))_{2,2}$. (*c*) 若 $i>1$ 且 $n>0$，则

$$M_1(n,i)\xi(n+1,i-1,n+i)=M_2(n,i)\xi(n,i,n+i)+M_3(n,i)\xi(n-1,i+1,n+i),\qquad (6.16)$$

$$with\quad M_1(n,i)=a_{i-1}\Big(i(n+1+\nu+i)_{i-2}-(n+\nu+i)\Big),$$

$$M_2(n,i)=(G(n+1))_{i,i}+(n+\nu+i+1),\quad M_3(n,i)=(I(n))_{i,i+1}G(n)_{i+1,i+1}.$$

证明。条目 (*a*) 的第一条断言可由 6.8 的条目 (*a*) 得出（见注记 6.9）。事实上，由于 K_n^{-1} 的对角线元素均为 1，在这种情况下我们有

$$\xi(0,i,i)=(K_0^{-1})_{i,i}\tfrac{0!}{(\nu+i+1)_0}=(K_0^{-1})_{i,i}=1.$$

由命题 5.1，我们有 $\mathcal{D}=\partial_x x+x(A-1)$ 和 $M=(A-1)\delta-(n+1+\nu)-\mathcal{H}(n)J\mathcal{H}^{-1}(n)$ sati满足

$$P_n\cdot\mathcal{D}=M\cdot P_n.$$

回想起 $(P_n\cdot\mathcal{D})(0)=0$，我们得到

$$(A-1)P(0,n+1)-(n+1+\nu)P(0,n)-\mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}P(0,n)=0,$$

由于 $P(0,m)=K_mR(0,m)$，我们有

$$K_n^{-1}(A-1)K_{n+1}R(0,n+1)-(n+1+\nu)R(0,n)-I(n)R(0,n)=0\qquad (6.17)$$

其中 $I(n)=K_n^{-1}\mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}K_n$。

将 $n=0$ 代入表达式 (6.17)，可得

$$0=K_0^{-1}(A-1)K_1R(0,1)-K_0^{-1}(1+\nu)K_0R(0,0)-I(0)R(0,0).$$

取第 $(i,i+1)$ 个坐标，可得

$$0=-R(0,1)_{i,i+1}-(1+\nu)R(0,0)_{i,i+1}-I(0)_{i,i}R(0,0)_{i,i+1}-I(0)_{i,i+1}R(0,0)_{i+1,i+1}.$$

由定理 6.4 可知

$$\xi(1,i,i+1)=I(0)_{i,i+1}\xi(0,i+1,i+1)=I(0)_{i,i+1}.$$

正如所断言的。

现在，考虑方程 (6.17) 中的 $n>0$。取 (6.17) 中的 $(i,n+i)$-坐标，

$$\sum_{r=1}^{N}(K_n^{-1}(A-1)K_{n+1})_{i,r}R(0,n+1)_{r,n+i}-(n+1+\nu)R(0,n)_{i,n+i}-\sum_{r=1}^{N}I(n)_{i,r}R(0,n)_{r,n+i}=0.$$

由引理（6.7），且由于 $R(0,n+1)_{r,\,n+i}=0$ 对于 $r<i-1$，我们有

$$\sum_{r=i-1}^{N}(K_n^{-1}(A-1)K_{n+1})_{i,r}R(0,n+1)_{r,n+i}-(n+1+\nu+i)R(0,n)_{i,n+i}-I(n)_{i,i+1}R(0,n)_{i+1,n+i}=0.$$

另一方面，由于矩阵 $K_n^{-1}(A-1)K_{n+1}$ 是下三角的，我们得到

$$\sum_{r=i-1}^{N}(K_n^{-1}(A-1)K_{n+1})_{i,r}R(0,n+1)_{r,n+i}=\sum_{r=i-1}^{i}(K_n^{-1}(A-1)K_{n+1})_{i,r}R(0,n+1)_{r,n+i}.$$

考虑到 $(K_n^{-1}(A-1)K_{n+1})_{i,\,i-1}=a_{i-1}-(K_n^{-1}K_{n+1})_{i,\,i-1}$ 以及 $(K_n^{-1}(A-1)K_{n+1})_{i,\,i}=-1$，我们得到

$$\begin{aligned}0&=\big(a_{i-1}-(K_n^{-1}K_{n+1})_{i,i-1}\big)R(0,n+1)_{i-1,n+i}-R(0,n+1)_{i,n+i}\\&\quad-(n+1+\nu+i)R(0,n)_{i,n+i}-I(n)_{i,i+1}R(0,n)_{i+1,n+i}.\end{aligned}$$

由推论 6.6 可得

$$\begin{aligned}0 &= \big(a_{i-1}-(K_n^{-1}K_{n+1})_{i,i-1}\big)\xi(n+1,i-1,n+i)-(n+1+\nu+i)\xi(n+1,i,n+i)\\ &- (n+1+\nu+i)\xi(n,i,n+i)-I(n)_{i,i+1}(n+\nu+i+1)\xi(n,i+1,n+i).\end{aligned}$$

另一方面，根据命题 6.8，若 $n+i-j>0$，我们知道

$$\xi(n,i,j)=a_{i-1}\xi(n,i-1,j)+\tfrac{(G(n))_{i,i}}{n+\nu+i}\xi(n-1,i,j).$$

因此，特别地，我们得到

$$\xi(n+1,i,n+i)=a_{i-1}\xi(n+1,i-1,n+i)+\tfrac{(G(n+1))_{i,i}}{n+1+\nu+i}\xi(n,i,n+i),$$

$$\xi(n,i+1,n+i)=a_i\xi(n,i,n+i)+\tfrac{(G(n))_{i+1,i+1})}{n+\nu+i+1})\xi(n-1,i+1,n+i)$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\big(a_{i-1}-(K_n^{-1}K_{n+1})_{i,i-1}\big)\xi(n+1,i-1,n+i)\\ &-(\nu+n+i+1)\Big(a_{i-1}\xi(n+1,i-1,n+i)+\tfrac{(G(n+1))_{i,i}}{n+1+\nu+i}\xi(n,i,n+i)\Big)\\ &=(n+1+\nu+i)\xi(n,i,n+i)\\ &+I(n)_{i,i+1}(n+1+\nu+i)\Big(a_i\xi(n,i,n+i)+\tfrac{(G(n))_{i+1,i+1}}{n+\nu+i+1}\xi(n-1,i+1,n+i)\Big).\end{aligned}$$

因此

$$M_1(n,i)\xi(n+1,i-1,n+i)=M_2(n,i)\xi(n,i,n+i)+M_3(n,i)\xi(n-1,i+1,n+i),$$

其中 $M_1(n,i)=-(K_n^{-1}K_{n+1})_{i,\,i-1}-a_{i-1}(\nu+n+i)$、$M_2(n,i)=(G(n+1))_{i,\,i}+(n+\nu+i+1)$，以及 $M_3(n,i)=(I(n))_{i,\,i+1}G(n)_{i+1,\,i+1}$. 为完成证明，注意到由于 K_n^{-1}和 K_{n+1} 都是对角线上为 1 的下三角矩阵，因此我们有

$$(K_n^{-1}K_{n+1})_{i,i-1}=(K_n^{-1})_{i,i-1}+(K_{n+1})_{i,i-1}\quad\text{and}\quad(K_n^{-1})_{i,i-1}=-(K_n)_{i,i-1},$$

根据 K_n 的定义，我们有

$$(K_n^{-1}K_{n+1})_{i,i-1}=a_{i-1}\Big((n+\nu+i)_{i-1}-(n+1+\nu+i)_{i-1}\Big)=-a_{i-1}i(n+1+\nu+i)_{i-2}.$$

因此,

$$M_1(n,i)=a_{i-1}\Big(i(n+1+\nu+i)_{i-2}-(n+\nu+i)\Big),$$

如所断言。

对于表达式 (6.17) 中的情形 $i=1,\,j=n+1$，我们得到

$$0=-R(0,n+1)_{1,n+1}-(n+2+\nu)R(0,n)_{1,n+1}-I(n)_{1,2}R(0,n)_{2,n+1},$$

于是，根据推论 6.6，我们有

$$0=-(\nu+2n+3)\xi(n+1,1,n+1)-(n+2+\nu)\xi(n,1,n+1)-I(n)_{1,2}(\nu+2n+2)\xi(n,2,n+1).$$

(6.18) 由命题 6.8 可知

$$\xi(n,i,j)=a_{i-1}\xi(n,i-1,j)+\tfrac{(G(n))_{i,i}}{n+\nu+i}\xi(n-1,i,j)\quad\text{for } j<n+i,$$

这意味着

$$\xi(n,2,n+1)=a_1\xi(n,1,n+1)+\tfrac{(G(n))_{2,2}}{n+\nu+2}\xi(n-1,2,n+1),$$

and

$$\xi(n,1,j)=\tfrac{(G(n))_{1,1}}{n+\nu+1}\xi(n-1,1,j)\quad\text{for } j<n+1.$$

特别地

$$\xi(n+1,1,n+1)=\tfrac{(G(n+1))_{1,1}}{n+\nu+2}\xi(n,1,n+1).$$

因此，我们得到

$$N_1(n,i)\xi(n,1,n+1)=N_2(n,i)\xi(n-1,2,n+1),$$

with

$N_1(n,i)=(\nu+2n+3)\,\frac{(G(n+1))}{n+\nu+2}{}_{1\,1}+(n+2+\nu)+I(n)_{1,2}(\nu+2n+2)a_1$，　$N_2(n,i)=I(n)_{1,2}(\nu+2n+2)\,\frac{(G(n))}{n+\nu+2}{}_{2,2}$

如所需。 □

由命题 6.8 和命题 6.10 可得以下结果。

定理 6.11. 设 $n \geq 0$ 且令 $G(n)$ $I(n)$ 如 (6.10) 所示。那么，$R(x,n)$ 的所有非零元素均可用 $G(\ell)$、$I(\ell)$ 以及广义拉盖尔多项式 $L_\ell^{(\alpha)}$ （其中 $\ell = 0, \ldots, n$）表示。

证明. 等式 (6.6) 意味着 $(R(x,n))_{i,\ j} = L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(x)\xi(n,i,j)$，其中 $n+i-j \geq 0$。只需证明所有非零常数 $\xi(n,i,j)$ 均可用 $G(\ell)$ 和 $I(\ell)$ 表示，其中 $\ell = 0, \ldots, n+1$。

根据命题 6.8 和命题 6.10 的第 (a) 项，我们得到 $\xi(0,i,j)$ 的取值。因此，假设$n > 0$，并设我们要确定满足 $n+i-j > 0$ 的 $\xi(n,i,j)$。注意，每次使用命题 6.8 的第 (b) 项和第 (c) 项时，“$n+i-j$”的值都会减少 1，因此，若归纳法使用这些项，就可得到 $\xi(n,i,j)$ 可由若干个满足 $n'+i'-j' = 0$ 的 $\xi(n',i',j')$ 的取值确定；并且每一步还会出现满足 $\ell = 0$ 的 $G(\ell)$，....., n。因此，只需证明我们可以用 $G(\ell)$ 和 $I(\ell)$ 来确定满足 $n+i-j = 0$ 的 $\xi(n,i,j)$。□

注 6.12. 注意，由引理 6.7 以及命题 6.8、6.10 可知，我们可以分别将 $(G(n))_{i,i}$和 $(I(n))_{i,i+1}$ 替换为表达式 $(\mathcal{H}_n(A^*-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}))_{i,i}$ 和 $(\mathcal{H}_n J\mathcal{H}_n^{-1})_{i,i+1}$。

由上述结果以及命题 5.9 中得到的方程可直接推出关于 $\mathcal{H}_n$ 的三项非线性递推。鉴于此，我们需要以下引理。

引理 6.13. 设 $A, J \in M_N(\mathbb{C})$ 是 (3.1) 中的矩阵。那么，矩阵 $\mathcal{H}_1$ 可以由 $\mathcal{H}_0$ 得到。

证明. 由 (5.5)，我们有

$$\mathcal{H}_1 = \big(X(1) + [J, X(1)]\big)\mathcal{H}_0(A^*-1)^{-1}.$$

因此，只需证明我们可以用 $\mathcal{H}_0$ 表示 $X(1)$。

为证明这一点，回忆一下 $P(x,1) = x + X(1)$。令 $P_1(x) := P(x,1)$，将算子 $D = \partial_x^2 x + \partial_x((A-1)x + 1 + \nu + J) + A\nu + JA - J$ 作用于 $P_1(x)$，可得

$$(P_1 \cdot D)(x) = (A-1)x + 1 + \nu + J + (x + X(1))(A\nu + JA - J),$$

by 考虑到 $P_1 \cdot D = \Gamma_1 \cdot P_1$，其中 Γ_1 是离散常数算子 $A(\nu+2+J)-1-J$。因此我们得到

$$(A-1)x + 1 + \nu + J + (x + X(1))(A\nu + JA - J) = \big(A(\nu+2+J) - 1 - J\big)(x + X(1)).$$

经过一些计算，我们得到

$$X(1)(A\nu + JA - J) + 1 + \nu + J = \big(A(\nu+2+J) - 1 - J\big)X(1),$$

考虑到 $[J, A] = A$，我们得到 $JA = A + AJ$，因此

$$[X(1), A(1+\nu+J)] + X(1) + [J, X(1)] + 1 + \nu + J - AX(1) = 0.$$

因此，观察上面等式中的 (i,j) 项，可得以下递推关系

$$a_j(\nu+j+1)X(1)_{1,j+1} + (2-j)X(1)_{1,j} + (1+\nu+J)_{1,j} = 0, \tag{6.19}$$

$$a_j(\nu+j+1)X(1)_{i,\ j+1} - a_{i-1}(\nu+i+1)X(1)_{i-1,\ j} + (1+i-j)X(1)_{i,\ j} + (1+\nu+J)_{i,\ j} = 0 \text{对于 } i \geq 2. \tag{6.20}$$

回顾一下，根据定理 6.4，我们有 $(R(0,1))_{i,\ j} = 0$ 若 $i+1 < j$。

断言：若 $i+1 < j$ 则 $X(1)_{i,\ j} = 0$。

我们将对 i 进行归纳，以证明这一断言。首先假设 $i=1$，并考虑 $j>2$；在这种情况下

$$0=(R(0,1))_{1,j}=(K_1P(0,1))_{1,j}=\sum_{r=1}^{N}(K_1)_{1,r}X(1)_{r,j}=X(1)_{1,j}.$$

现在，令 $i>1$，并假设该命题对 $r<i$ 成立，即 $X(1)_{r,\,j}=0$ 当$r+1<j$时。因此，若 $i+1<j$，则

$$0=(R(0,1))_{i,j}=(K_1P(0,1))_{i,j}=\sum_{r=1}^{N}(K_1)_{i,r}X(1)_{r,j}=(K_1)_{i,i}X(1)_{i,j}=X(1)_{i,j}.$$

By 根据归纳假设，并考虑到 K_1 是一个下三角矩阵，且 1's in i其对角线为，我们有

$$\sum_{r=1}^{N}(K_1)_{i,r}X(1)_{r,j}=\sum_{r=1}^{i}(K_1)_{i,r}X(1)_{r,j}=(K_1)_{i,i}X(1)_{i,j}=X(1)_{i,j}.$$

因此，$X(1)_{i,\,j}=0$ 当 $i+1<j$ 时，结论如所述。

因此，由方程 (6.19) 和 (6.20)，通过递归论证可知，为了计算 $X(1)$，只需知道任意 $i\geq 1$ 时 $X(1)_{i,\,i+1}$ 的值。考虑到

$$(R(0,1))_{i,i+1}=(K_1P(0,1))_{i,i+1}=\sum_{r=1}^{i}(K_1)_{i,r}(X(1))_{r,i+1}=X(1)_{i,i+1},$$

因此，由推论 6.6 可得

$$X(1)_{i,i+1}=(R(0,1))_{i,i+1}=\xi(1,i,i+1).$$

因此，由命题 6.10 的第 (a) 项可得

$$X(1)_{i,i+1}=\xi(1,i,i+1)=I(0)_{i,i+1}=(\mathcal{H}_0J\mathcal{H}_0^{-1})_{i,i+1}.$$

□

命题 6.14. 设 $A, J\in M_N(\mathbb{C})$ 为 (3.1) 中的矩阵。则，

$$\mathcal{H}_{n+2}=(A-1)^{-2}\Big((-[J,\mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}]-\mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}(A-1)+(A-1)\mathcal{H}_{n+1}(A^t-1)\mathcal{H}_n^{-1})(A-1)$$
$$-2-\mathcal{H}_{n+1}J\mathcal{H}_{n+1}^{-1}+\mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}+(A-1)[J,\mathcal{H}_{n+1}J\mathcal{H}_{n+1}^{-1}]+(A-1)\mathcal{H}_{n+1}(A^t-1)\mathcal{H}_n^{-1}(A-1)\Big)\mathcal{H}_{n+1}(A^t-1)^{-1},$$

where B_n, C_n *and* $\mathcal{H}_n$ *be as in* (5.12)。

Moreover,

$$(\mathcal{H}_0)_{i,j}=\Gamma(\nu)\sum_{r=1}^{\min\{i,j\}}\frac{\delta_r^{(\nu)}}{(i-r)!(j-r)!}\Big(\prod_{k=r}^{i-1}a_k\Big)\Big(\prod_{s=r}^{j-1}a_s\Big)(\nu)_{i+j-r},$$

where Γ *is the Gamma function.*

证明。由 (5.13)，可得

$$B_{n+1}=(A-1)^{-1}\Big(B_n(A-1)-2-\mathcal{H}_{n+1}J\mathcal{H}_{n+1}^{-1}+\mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}\Big).\tag{6.21}$$

另一方面，方程 (5.16) 表明

$$B_n=-[J,\mathcal{H}_nJ\mathcal{H}_n^{-1}]-\mathcal{H}_n(A^t-1)\mathcal{H}_{n-1}^{-1}(A-1)+(A-1)\mathcal{H}_{n+1}(A^t-1)\mathcal{H}_n^{-1}.$$

$$B_{n+1}=-[J,\mathcal{H}_{n+1}J\mathcal{H}_{n+1}^{-1}]-\mathcal{H}_{n+1}(A^t-1)\mathcal{H}_n^{-1}(A-1)+(A-1)\mathcal{H}_{n+2}(A^t-1)\mathcal{H}_{n+1}^{-1}$$

将 (6.21) 中的 B_{n+1} 和 B_n 替换后，即可得到该结论。

对于最后一个断言，根据定义，我们有

$$\mathcal{H}_0=\int_0^\infty e^{xA}T^{(\nu)}(x)e^{xA^*}dx\quad\text{ with }\quad T^{(\nu)}(x)=e^{-x}\sum_{k=1}^{N}\delta_k^{(\nu)}x^{\nu+k}E_{k,k}.$$

于是,

$$(\mathcal{H}_0)_{i,j} = \sum_{r=1}^{N} \delta_r^{(\nu)} \int_0^\infty e^{-x} x^{(\nu+r)} (e^{xA})_{i,r} (e^{xA^*})_{r,j}.$$

考虑到 $A^*_{r,\ j} = A_{j,\ r}$，以及 $(e^{xA})_{i,\ r} = \frac{1}{(i-r)!} \big((xA)^{i-r}\big)_{i,\ r}$ 若 $r < i$，否则为 0，我们有

$$(\mathcal{H}_0)_{i,j} = \sum_{r=1}^{\min\{i,j\}} \delta_r^{(\nu)} \int_0^\infty e^{-x} x^{(\nu+r)} \frac{\big((xA)^{i-r}\big)_{i,r}}{(i-r)!} \frac{\big((xA)^{j-r}\big)_{j,r}}{(j-r)!} dx = \sum_{r=1}^{\min\{i,j\}} \delta_r^{(\nu)} \frac{(A^{i-r})_{i,r}}{(i-r)!} \frac{(A^{j-r})_{j,r}}{(j-r)!} \int_0^\infty e^{-x} x^{(\nu+i+j-r)} dx.$$

注意到 $(A^{i-r})_{i,\ r} = \prod_{k=r}^{i-1} a_k$，并回忆 $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^z dx$，我们可以写成

$$(\mathcal{H}_0)_{i,j} = \sum_{r=1}^{\min\{i,j\}} \frac{\delta_r^{(\nu)}}{(i-r)!(j-r)!} \Big(\prod_{k=r}^{i-1} a_k \Big) \Big(\prod_{s=r}^{j-1} a_s \Big) \Gamma(\nu + i + j - r + 1).$$

考虑到 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$，我们得到

$$(\mathcal{H}_0)_{i,j} = \Gamma(\nu) \sum_{r=1}^{\min\{i,j\}} \frac{\delta_r^{(\nu)}}{(i-r)!(j-r)!} \Big(\prod_{k=r}^{i-1} a_k \Big) \Big(\prod_{s=r}^{j-1} a_s \Big) (\nu)_{i+j-r},$$

正如所断言的。 □

注 6.15。注意，我们还可以得到如下表达式

$$\mathcal{H}_0 = (L_\mu^{(\nu)}(0))^{-1} \mathcal{H}_0^{(\nu,\nu)} (L_\mu^{(\nu)}(0))^*,$$

其中 $L_\mu^{(\nu)}(0)$ 和 $\mathcal{H}_0^{(\nu,\nu)}$ 定义于 [21], , 其中

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \quad \text{such that } a_i = \tfrac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \quad \text{for } i = 1, \dots, N-1.$$

该断言可由 $W^\nu(x) = (L_\mu^{(\nu)}(0))^{-1} W_{(\nu,\ \nu)}(x) (L_\mu^{(\nu)}(0))^*$ 推得，其中 $W_{(\nu,\ \nu)}(x)$ 与 [21] 中的定义相同。他们还证明了 $\mathcal{H}_0^{(\nu,\nu)}$ 是一个对角矩阵。

以下结果给出了 $X(n)$ 的递推关系，表示为 $I(n)$ 的形式。

命题 6.16。对于 $n \geq 1$，令 $I(n)$ 如 (6.10) 所示。若 $\delta_{i,\ j}$ 表示克罗内克δ函数，则:

(a) $n\delta_{1,j} + X(n)1,_{j+1} a_j - X(n)1,_j = -(n+1+\nu)\delta_{1,j} - I(n)1,_j$. (b) $n\delta_{i,j} + X(n)_{i,j+1} a_j - a_{i-1} X(n+1)_{i-1,j} - X(n)_{i,j} + X(n+1)_{i,j} = -(n+1+\nu)\delta_{i,j} - I(n)_{i,j}$适用于 $i \geq 2$。

证明。根据推论 5.2，我们有

$$n + X(n)A - AX(n+1) - B(n) = -(n+1+\nu) - \mathcal{H}(n) J \mathcal{H}^{-1}(n).$$

该结果可直接通过取上述方程的第 (i,j) 个坐标得到。 □

注 6.17。(a) 根据推论 5.2 的第 (a) 项，我们可以得到 $G(n)_{i,\ i} = X(n)_{i,\ i}$，对任意$i \geq 1$均成立。

(b) 为了计算 $P(x,n)$，对于给定的 n，我们可以进行如下操作:
(a) 利用引理 6.13 和命题 6.14 计算 $\mathcal{H}_n$ 及 $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ 的显式形式。(b) 利用 $\mathcal{H}_n$ 计算 $G(n)$ 和 $I(n)$。(c) 利用命题 6.8 和命题 6.10 的递推关系计算 $\xi(n,i,j)$。(d) 于是我们有 $R(x,n)$，从而 $P(x,n) = K_n R(x,n) e^{-xA}$。

7. Matrix entries of $P(x,n)$ in terms of Laguerre and dual Hahn polynomials.

本节将说明，在某些假设下， $\xi(n,i,j)$'s 可以用对偶 Hahn 多项式表示。

一些技术引理。设 $N \geq 1$ 是一个固定的整数， $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ 是一个由非零系数组成的序列，且 $\alpha > 0$。那么， $L_\mu^{(\alpha)}$是由下式定义的 $N \times N$ 幺幂下三角矩阵:

$$L_\mu^{(\alpha)}(x)_{m,n} = \begin{cases} \frac{\mu_m}{\mu_n} L_{m-n}^{(\alpha+n)}(x), & m \geq n, \\ 0 & n < m. \end{cases} \tag{7.1}$$

对于 $\nu > 0$ ，我们考虑权矩阵

$$W_\mu^{(\alpha,\nu)}(x) = L_\mu^{(\alpha)}(x)\, T^{(\nu)}(x)\, L_\mu^{(\alpha)}(x)^*, \qquad T^{(\nu)}(x) = e^{-x} \sum_{k=1}^{N} x^{\nu+k} \delta_k^{(\nu)}\, E_{k,k}. \tag{7.2}$$

可以证明

$$W_\mu^{(\alpha,\nu)}(x) = L_\mu^{(\alpha)}(0) e^{xA_\mu} T^{(\nu)}(x) e^{xA_\mu^*} L_\mu^{(\alpha)}(0)^* \quad \text{where} \quad A_\mu = -\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} E_{k+1,k}. \tag{7.3}$$

我们对序列 $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ 和系数 $\delta_k^{(\nu)}$ 施加条件。首先，假设系数 μ_i 对所有 i 和 $\delta_k^{(\nu)} > 0$、$1 \leq k \leq N$ 都是实数且非零，因此权矩阵是正定的（有关权矩阵 $W_\mu^{(\alpha,\nu)}$ 的更多信息，请参见 [21] ）。另一方面，我们考虑对角矩阵 $\Delta^{(\nu)} = \mathrm{diag}(\delta_1^{(\nu)}, \ldots, \delta_N^{(\nu)})$，使得 $(T^{(\nu)})_{k,k} = e^{-x} x^{\nu+k} (\Delta^{(\nu)})_{k,k}$。我们假设存在系数 $c^{(\nu)}$ 和 $d^{(\nu)}$ ，使得

$$\Delta^{(\nu+1)} = (d^{(\nu)} J + c^{(\nu)})\, \Delta^{(\nu)}. \tag{7.4}$$

我们还假设系数 μ_k 和 $\delta_k^{(\nu)}$ 满足关系

$$\frac{\mu_{k+1}^2}{\mu_k^2} = d^{(\nu)} k (N-k) \frac{\delta_{k+1}^{(\nu)}}{\delta_k^{(\nu+1)}}, \qquad k = 1, \ldots, N-1. \tag{7.5}$$

在上述条件下， [21] 中的命题 5.1 和 5.2 表明

$$\Phi^{(\alpha,\nu)}(x) = (W_\mu^{(\alpha,\nu)}(x))^{-1} W_\mu^{(\alpha,\nu+1)}(x) \quad \text{and} \quad \Psi^{(\alpha,\nu)}(x) = (W_\mu^{(\alpha,\nu)}(x))^{-1} \frac{dW_\mu^{(\alpha,\nu+1)}}{dx}(x) \tag{7.6}$$

分别是次数为 2 和 1 的矩阵多项式。此外， [21] 中的推论 6.3 指出，由下式定义的算子 D_2

$$D_2(x) = \frac{d^2}{dx^2}\Phi^*(x) + \frac{d}{dx}\Psi^*(x) \tag{7.7}$$

相对于 $W_\mu^{(\alpha,\nu)}$是对称的。

我们先介绍下面这个技术性引理，它给出了矩阵多项式 $R_n(x)$ 与常数 $c^{(\nu)}$ 和 $d^{(\nu)}$之间的关系。引理 7.1 和引理 7.3 的证明见附录。

引理 7.1. 设 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ 和 $\delta_k^{(\nu)} > 0$ 对于 $1 \leq k \leq N$ 满足 (7.4) 和 (7.5)。令$A := A_\mu$ 如 (7.3) 所示。若 $R(x, n)$ 是 (6.5) 中定义的矩阵多项式，则

$$(R'(0,n) - R(0,n)A) C^{(\nu)} = D^{(\nu)} R(0,n) \tag{7.8}$$

其中 $C^{(\nu)} = (d^{(\nu)} J + c^{(\nu)})(\nu + J + 1) + ((\Delta^{(\nu)})^{-1} A \Delta^{(\nu+1)})^*$和 $D^{(\nu)} = n(d^{(\nu)}(J - N - 1) - c^{(\nu)})$, 其中 $c^{(\nu)}$ 和 $d^{(\nu)}$ 如 (7.4) 中所定义。

在下文中，令 $0 \leq n, 1 \leq i \leq N$。我们考虑由递归定义的序列 $\epsilon_j := \epsilon_j^{(n,i)}$:

$$\epsilon_0 = 1, \qquad \epsilon_j = (n+i-j+1) d^{(\nu)} \Big((j-1) + \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}} \Big) \epsilon_{j-1} \quad \text{for } n+i-j \geq 0, \tag{7.9}$$

其中 $c^{(\nu)}, d^{(\nu)}$ 如 (7.4) 中所定义。我们有以下结果。

引理 7.2. 设 $0 \leq n$ ，且 $1 \leq N, 1 \leq i \leq N$ 为整数，并令 $\{\epsilon_l\}_{l=0}^{i+n}$ 为如 (7.9) 中所定义的序列。若 $\nu > 0, \delta^{(\nu)}$ 满足 (7.4) 且 $0 \leq j < n + i$，则有

$$\tfrac{\epsilon_j}{\epsilon_{j+1}} M_j = 1 \qquad where \qquad M_j = (n+i-j)(d^{(\nu)} j + c^{(\nu)})$$

其中 $c^{(\nu)}$、$d^{(\nu)}$ 如式 (7.4) 所示。

证明。由 ϵ_j 的定义，经过简单的归纳论证即可得出。 □

给定 $i = 1, \dots, N$, $n \geq 0$ 和 j，其中 j 为正整数，且满足 $n + i - j \geq 0$，下文将考虑由以下表达式定义的序列 $q_j := q_j^{(n,i)}$

$$q_j^{(n,i)} := \epsilon_j^{(n,i)} \xi(n, i, j), \tag{7.10}$$

其中，ϵ_j's 与 (7.9) 中的相同。

引理 7.3. 设 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ 和 $\delta_k^{(\nu)} > 0$（$1 \leq k \leq N$），满足 (7.4) 和 (7.5)。对于 $1 \leq i \leq N$ 和 $0 \leq n$，令 $\{q_l\}_{l=0}^{i+n}$ 为 (7.10) 中的序列。则序列 $\{q_l\}_{l=0}^{i+n}$ 满足

$$E_j q_j + F_j q_{j-1} + \tfrac{1}{d^{(\nu)}} q_{j+1} = 0, \quad n + i - j > 0,$$

其中

$$\begin{aligned} E_j &= (n + i - j)(j + \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}) + (j - 1)(N - j + 1) + n((i - N - 1) - \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}), \\ F_j &= (j - 1)(N - j + 1)\tfrac{\mu_{j-1}}{\mu_j}(n + i - j + 1)\big(d^{(\nu)}(j - 1) + c^{(\nu)}\big) \end{aligned}$$

其中 $c^{(\nu)}, d^{(\nu)}$ 如 (7.4) 中所示。

对偶 Hahn 多项式。对于 $0 \leq n$, $1 \leq i \leq N$，考虑以下序列

$$\widetilde{q}_j^{(n,i)} := (d^{(\nu)})^{-j} q_j^{(n,i)}, \quad n + i - j > 0, \tag{7.11}$$

其中 q_j 的取值如 (7.10) 所示，$d^{(\nu)}$ 的取值如 (7.4) 所示。

引理 7.4。设 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ 和 $0 < \delta_k^{(\nu)}$，其中 $1 \leq k \leq N$ 满足 (7.4) 和 (7.5)。设 $\widetilde{q}_l$ 如 (7.11) 所示。若对所有 j，都有 $\mu_j = 1$，则 $\widetilde{q}_l$ 满足以下方程

$$\widetilde{E}_j \widetilde{q}_j + \widetilde{F}_j \widetilde{q}_{j-1} + \widetilde{q}_{j+1} = 0, \quad n + i - j > 0,$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_j &= (n + i - j)(j + \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}) + (j - 1)(N - j + 1) + n(i - N - 1 - \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}), \\ \widetilde{F}_j &= (j - 1)(N - j + 1)(n + i - j + 1)\Big(j - 1 + \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}\Big) \end{aligned}$$

其中 $c^{(\nu)}$, $d^{(\nu)}$ 如 (7.4) 所示。

证明。由引理 7.3 可得，$E_j q_j + F_j q_{j-1} + \frac{1}{d^{(\nu)}} q_{j+1} = 0$，其中

$$\begin{aligned} E_j &= (n + i - j)(j + \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}) + (j - 1)(N - j + 1) + n((i - N - 1) - \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}), \\ F_j &= (j - 1)(N - j + 1)\tfrac{\mu_{j-1}}{\mu_j}(n + i - j + 1)\big(d^{(\nu)}(j - 1) + c^{(\nu)}\big). \end{aligned}$$

现在，由于对于所有 j 和 $\widetilde{q}_j(x)$, $\mu_j = 1 = (d^{(\nu)})^{-j} q_j(x)$，我们得到

$$\begin{aligned} &\Big((n + i - j)(j + \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}) + (j - 1)(N - j + 1) + n((i - N - 1) - \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}})\Big)\widetilde{q}_j (d^{(\nu)})^j \\ + \quad &(j - 1)(N - j + 1)(n + i - j + 1)\big(d^{(\nu)}(j - 1) + c^{(\nu)}\big)(d^{(\nu)})^{j-1}\widetilde{q}_{j-1} + \tfrac{1}{d^{(\nu)}}(d^{(\nu)})^{j+1}\widetilde{q}_{j+1} = 0. \end{aligned}$$

将 $(d^{(\nu)})^{-j}$ 相乘后，我们得到

$$\widetilde{E}_j \widetilde{q}_j + \widetilde{F}_j \widetilde{q}_{j-1} + \widetilde{q}_{j+1} = 0,$$

with

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_j &= (n + i - j)(j + \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}) + (j - 1)(N - j + 1) + n(i - N - 1 - \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}), \\ \widetilde{F}_j &= (j - 1)(N - j + 1)(n + i - j + 1)\Big(j - 1 + \tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}\Big), \end{aligned}$$

正如所断言的。 □

回顾一下，如果多项式序列 $\{s_k\}$ 满足归一化递推关系

$$xs_k(x) = s_{k+1}(x) - (u_k + v_k)s_k(x) + u_{k-1}v_k s_{k-1}(x), \tag{7.12}$$

with

$$u_k = (k+\gamma+1)(k-M), \qquad v_k = k(k-\delta-M-1),$$

则 s_k 满足

$$T_k(\lambda(x);\gamma,\delta,M) = \tfrac{1}{(\gamma+1)_k(-M)_k} s_k(\lambda(x))$$

其中 $\lambda(x) = x(x+\gamma+\delta+1)$，且 $\{T_k\}$ 是由 b 定义的对偶 Hahn 多项式序列 y

$$T_k(\lambda(x);\gamma,\delta,M) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}-k, & -x, & x+\gamma+\delta+1\\ \gamma+1, & & -M\end{matrix};1\right) \qquad \text{for } k=0,1,\dots,M.$$

命题 7.5。设 $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_N)$和 $\delta_k^{(\nu)} > 0$对于 $1 \le k \le N$满足 (7.4) 和 (7.5)。设 $\widetilde{q_j}$如 (7.11) 所示。若对于所有 $\ell = 1,\dots,N,\ \ \mu_\ell = 1$，则 $\widetilde{q_j}$满足

$$\widetilde{q}_j = (\gamma+1)_{j-1}(-(N-1))_{j-1}T_{j-1}(\lambda(x^{(n,i)});\gamma,\delta,N-1) \quad n+i-j>0 \tag{7.13}$$

其中 $\gamma = \frac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}$、 $\delta = n+i-N$和 $x^{(n,i)} = (\gamma+1)(N+i-2) - n(N-i)$。

证明。根据引理 7.4，我们有

$$\widetilde{E}_j\widetilde{q}_j + \widetilde{F}_j\widetilde{q}_{j-1} + \widetilde{q}_{j+1} = 0, \quad n+i-j>0,$$

其中

$$\widetilde{E}_j = (n+i-j)(j+\tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}) + (j-1)(N-j+1) + n(i-N-1-\tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}),$$
$$\widetilde{F}_j = (j-1)(N-j+1)(n+i-j+1)\Big(j-1+\tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}\Big)$$

其中 $c^{(\nu)}$、$d^{(\nu)}$ 如式 (7.4) 所示。现在，考虑

$$u_k = (k+\gamma+1)(k-M) \text{ and } v_k = k(k-\delta-M-1),$$

其中有 $\gamma = \frac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}$、 $\delta = n+i-N$ 和 $M = N-1$。不难验证

$$\widetilde{F}_j = u_{j-2}v_{j-1} \quad \text{and} \quad \widetilde{E}_j = -(u_{j-1}+v_{j-1}+x^{(n,i)})$$

其中 $x^{(n,i)} = (\gamma+1)(N+i-2) - n(N-i)$。因此，由于 $\widetilde{q_j}$ 可视为常数多项式，我们有

$$x^{(n,i)}\widetilde{q}_j(x^{(n,i)}) = \widetilde{q}_{j+1}(x^{(n,i)}) - (u_{j-1}+v_{j-1})\widetilde{q}_j(x^{(n,i)}) + u_{j-2}v_{j-1}\widetilde{q}_{j-1}(x^{(n,i)}).$$

因此，根据对偶 Hahn 多项式的定义，并注意到 $\widetilde{q_j}$ 是常数多项式，我们得到所需的式 (7.13)。□

回顾到，对于 $n+i-j>0,\ \ \widetilde{q_j} = (d^{(\nu)})^{-j}q_j = \epsilon_j(d^{(\nu)})^{-j}\xi(n,i,j)$，我们得到如下结果

定理 7.6. 设 $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_N)$ 和 $\delta_k^{(\nu)} > 0$ 对于 $1 \le k \le N$ 满足 (7.4) 和 (7.5)。令ϵ_j如 (7.9) 所示。若对于所有 $\ell = 1,\dots,N,\ \ \mu_\ell = 1$，则常数 $\xi(n,i,j)$ 满足

$$\xi(n,i,j) = \frac{(d^{(\nu)})^j(\gamma+1)_{j-1}(-(N-1))_{j-1}}{\epsilon_j}T_{j-1}(\lambda(x^{(n,i)});\gamma,\delta,N-1), \quad n+i-j>0 \tag{7.14}$$

其中 $\gamma = \frac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}$、 $\delta = n+i-N$ 和 $x^{(n,i)} = (\gamma+1)(N+i-2) - n(N-i)$。此外，若 $n+i=j$，常数 $\xi(n,i,j)$'s 满足递推关系

$$\xi(0,1,1) = \tfrac{1}{\nu+2}, \qquad \xi(n,i,j-1) = \Big(\tfrac{n(N+1-i)(i-1)}{(j-1)(N-j+1)}+1\Big)\xi(n,i,j), \quad j>1, \tag{7.15}$$

证明。若 $n+i-j>0$，根据命题 7.5，我们有

$$\xi(n,i,j)=\frac{(d^{(\nu)})^j}{\epsilon_j}\widetilde{q}_j=\frac{(d^{(\nu)})^j(\gamma+1)_{j-1}(-(N-1))_{j-1}}{\epsilon_j}T_{j-1}(\lambda(x^{(n,i)});\gamma,\delta,N-1)$$

其中 $\gamma=\frac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}$、 $\delta=n+i-N$和 $x^{(n,i)}=(\gamma+1)(N+i-2)-n(N-i)$ 如上所述。

现在，若在表达式 (7.8) 中取 $j=n+i$，则得到

$$R_n'(0)_{i,j}(d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})(\nu+j+1)+R_n'(0)_{i(j-1)}((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)})^*{}_{(j-1)j}$$
$$-(R_n(0)_{i,j}A_{j(j-1)}((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)})^*{}_{(j-1),j}=n(d^{(\nu)}(J-N-1)-c^{(\nu)})R(n,0)_{i,j}.$$

考虑到 $R_n(x)_{i,j}=L^{(\nu+j)}_{n+i-j}(x)\xi(n,i,j)$,

$$L_n^\alpha(0)=\tfrac{(\alpha+1)_n}{n!}\qquad\text{and}\qquad\tfrac{\partial}{\partial x}L_n^\alpha(x)=(-1)L_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

我们有

$$\begin{aligned}-\xi(n,i,j-1)((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)})^*{}_{(j-1)j} &- (\xi(n,i,j)A_{j(j-1)}((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)})^*{}_{(j-1),j}\\ &= n(d^{(\nu)}(i-N-1)-c^{(\nu)})\xi(n,i,j).\end{aligned}$$

回顾一下，根据 (7.5) 我们有

$$((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)})^*{}_{(j-1,j)}=d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\tfrac{\mu_{j-1}}{\mu_j},$$

那么，考虑到对所有 k 都有 $\mu_k=1$，我们得到

$$\begin{aligned}-\xi(n,i,j-1)d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1) &- (\xi(n,i,j)A_{j(j-1)}d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\\ &= n(d^{(\nu)}(i-N-1)-c^{(\nu)})\xi(n,i,j).\end{aligned}$$

因此，利用条件 (7.4)、(7.5)，并考虑到, $_{s-1}=-1$，我们得到 n
$-d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\xi(n,i,j-1)=\Big(-nd^{(\nu)}(N+1-i)(i-1)-d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\Big)\xi(n,i,j),$

如所期望的。

最后一个断言由下式推出

$$\xi(0,1,1)(\nu+2)=\xi(0,1,1)L_1^1(0)=R(0,0)_{1,1}=(K_1P(0,0))_{1,1}=1$$

□

References

[1] Gerardo Ariznabarreta 和 Manuel Ma˜nas。单位圆上的矩阵正交劳朗多项式与 Toda 型可积系统。 *Adv. Math.*，264:396–463，2014。[2] S. Bochner。 ¨关于 Sturm-Liouville 多项式系统。 *Math. Z.*，29(1):730–736，1929。[3] W.R. Casper 和 M. Yakimov。矩阵Bochner问题。 *American Journal of Mathematics*，144(4):1009–1065，2022。[4] David Damanik、Alexander Pushnitski 和 Barry Simon。矩阵正交多项式的解析理论。 *Surv. Approx. Theory*，4:1–85，2008。[5] Alfredo Dea˜no、Bruno Eijsvoogel 和 Pablo Rom´an。某类矩阵值正交多项式的升降关系。 *Studies in Applied Mathematics*，146(2):463–497，2021。[6] Maurice Duits 和 Arno B.J. Kuijlaars。双周期阿兹特克钻石与矩阵值正交多项式。即将发表于《欧洲数学会杂志》，2017。[7] Antonio J. Dur ´ *Rocky* an。 *Mountain J. Math.* 27 2 585 600, 1997
具有矩阵对称二阶微分算子的矩阵内积。，(): –。[8] Antonio J. Dur´an。寻找具有矩阵首项系数的对称二阶微分算子之权矩阵的一种方法。 *Constr. Approx.*，29(2):181–205，2009。[9] Antonio J. Dur´an 和 F. Alberto Gr¨unbaum。满足二阶微分方程的正交矩阵多项式。 *Int. Math. Res. Not.*，2004(10):461–484，2004。[10] J. S. Geronimo。实数轴上的散射理论与矩阵正交多项式。 *Circuits Systems Signal Process.* 1 3 4 471 495, 1982 ，(-): –。

[11] V. V. Gorbatsevich。关于某些可解李代数的层级。 *Siberian Mathematical Journal* 39 5 872 883, ，(): –。 1998
[12] Wolter Groenevelt、Mourad E. H. Ismail 和 Erik Koelink。谱分解与矩阵值正交多项式。 *Adv. Math.*，244:91–105，2013。

[13] F. Alberto Gr¨unbaum 和 Manuel D. de la Iglesia。源于群表示论和一族拟生灭过程的矩阵值正交多项式。 *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*，30(2):741–761，2008。[14] F. Alberto Gr¨unbaum、Manuel D. de la Iglesia 和 Andrei Mart´ınez-Finkelshtein。通过黎曼-希尔伯特刻画研究矩阵正交多项式的性质。 *SIGMA Symmetry Integrability Geom. MethodsAppl.*，7(098):31页，2011。[15] Gert Heckman 和 Maarten van Pruijssen。秩一盖尔范德对的矩阵值正交多项式。 *Tohoku Math. J. (2)*，68(3):407–437，2016。[16] Mourad E. H. Is mail。一元经典与量子正交多项式。98，2005。[17] Mourad E.H. Ismail、Erik Koelink 和 Pablo Rom´an。矩阵值埃尔米特多项式、伯奇纳尔公式与非阿贝尔托达格。 *Advances in Applied Mathematics*，110:235–269，2019。[18] Anthony W. Knapp。 *Lie groups beyond an introduction*，第140卷。施普林格，1996。[19] Erik Koelink、Ana M. de los R ´ ´ *Constr.* ıos 和 *Approx.* 46 3 459 487, 2017
Pablo Roman。矩阵值盖根鲍尔型多项式。，( ): –。[20] Erik Koelink 和 Pablo Rom ´ *SIGMA* an。矩阵 *Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 12 008 9 2016
值测度的正交可约性与非正交可约性。，( ): 页，。[21] Erik Koelink 和 Pablo Rom ´ *Positivity and Noncommutative Analysis:* an。矩阵 *Festschrift in Honour of Ben de Pagter on the Occasion of his 65th Birthday* 295 320, 2019
值拉盖尔多项式。，页–。[22] Erik Koelink、Maarten van Pruijssen 和 Pablo Rom´an。与 (SU(2) × SU(2), diag) 相关的矩阵值正交多项式。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，2012(24):5673–5730，2012。[23] Erik Koelink、Maarten van Pruijssen 和 Pablo Rom´an。与 (SU(2) × SU(2), diag) 相关的矩阵值正交多项式，II。 *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*，49(2):271–312，2013。[24] Tom H. Koornwinder。SU(2) × SU(2) 的不可约表示的矩阵元与向量值正交多项式。 *SIAM J. Math. Anal.*，16(3):602–613，1985。[25] J. Patera 和 H. Zassenhaus。完美域上维数为 ≤ 4 *Linear Algebra and its* 的可解李 *Applications* 142 1 17, 1990
代数。，：–。

Appendix A.

在本附录中，我们给出引理 7.1 和 7.3 的证明。

引理 7.1 的证明。设 $P_n(x) = P(x,n)$ 是关于权 $W^{(\nu)}$ 的首一正交多项式序列，如 (5.1) 所示。由于 $W_{(\alpha,\nu)\mu}(x) = L_\mu^{(\alpha)}(0)W_{(\nu)}(x)L_\mu^{(\alpha)}(0)^*$，我们有

$$\int_0^\infty P_n(x)(L_\mu^{(\alpha)}(0)^{-1})W_\mu^{(\alpha,\nu)}(x)(P_m(x)L_\mu^{(\alpha)}(0)^{-1})^*dx = \int_0^\infty P_n(x)W^{(\nu)}(x)P_m(x)^*dx = \delta_{n,m}\mathcal{H}_n.$$

因此，若 $P_n^{(\alpha,\nu)}(x) = L_\mu^{(\alpha)}(0)P_n(x)L_\mu^{(\alpha)}(0)^{-1}$，则 $P_n^{(\alpha,\nu)}(x)$ 是关于权 $W_\mu^{(\alpha,\nu)}$ 的首一正交多项式序列。现在，若 D_2 是 (7.7) 中定义的算子，则 [21] 的推论 6.3 表明，对于某个矩阵 $K_n^{(\alpha,\nu)}$，有 $P_n^{(\alpha,\nu)}D_2 = n\hat{}K_n^{(\alpha,\nu)}P_n^{(\alpha,\nu)}$；该矩阵在第 6 节中由 [21]，递归定义，因此

$$P_nL_\mu^{(\alpha)}(0)^{-1}D_2L_\mu^{(\alpha)}(0) = nL_\mu^{(\alpha)}(0)^{-1}\hat{K}_n^{(\alpha,\nu)}L_\mu^{(\alpha)}(0)P_n. \tag{A.1}$$

由 [21]，的命题 6.1 可得

$$(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1}\hat{K}_n^{(\alpha,\nu)}L_\mu^{(\alpha)}(0) = d^{(\nu)}(J-(J+\nu+n)A-N-1)-c^{(\nu)},$$

并考虑到 $JA-AJ=A$，我们有

$$J-JA-(\nu+n)A-N-1 = J-AJ-A-(\nu+n)A-N-1.$$

另一方面，由于 $\Gamma_n = A(n+\nu+J+1)-(n+J) = -J+(n+\nu)A+A+AJ-n$，因此

$$(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1}\hat{K}_n^{(\alpha,\nu)}L_\mu^{(\alpha)}(0) = d^{(\nu)}(-\Gamma_n-n-N-1)-c^{(\nu)}.$$

由 (A.1)，我们有

$$K_nR_ne^{-xA}(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1}D_2L_\mu^{(\alpha)}(0) = n(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1}\hat{K}_n^{(\alpha,\nu)}L_\mu^{(\alpha)}(0)K_nR_ne^{-xA}$$

因此

$$R_ne^{-xA}(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1}D_2L_\mu^{(\alpha)}(0)e^{xA} = nK_n^{-1}(d^{(\nu)}(-\Gamma_n-n-N-1)-c^{(\nu)})K_nR_n.$$

回想 $K_n^{-1}\Gamma_nK_n = -n-J$，我们有

$$R_ne^{-xA}(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1}D_2L_\mu^{(\alpha)}(0)e^{xA} = n(d^{(\nu)}(J-N-1)-c^{(\nu)})R_n. \tag{A.2}$$

现在，考虑到 $D_2 = \frac{d^2}{dx^2}\Phi^*(x) + \frac{d}{dx}\Psi^*(x)$，其中 Φ, Ψ 是次数分别为 2 和 1 的多项式。一般而言，如果 $U(x)$ 是一个多项式，则有

$$\begin{aligned} U(x)\cdot e^{-xA}(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1} D_2 L_\mu^{(\alpha)}(0)e^{xA} &= \frac{d^2}{dx^2}\Big(U(x)e^{-xA}\Big)(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1}\Phi^*(x)L_\mu^{(\alpha)}(0)e^{xA} \\ &\quad + \frac{d}{dx}\Big(U(x)e^{-xA}\Big)(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1}\Psi^*(x)L_\mu^{(\alpha)}(0)e^{xA} \\ &= \Big(U''(x) - 2U'(x)A + U(x)A^2\Big)e^{-xA}(L_\mu^{(\alpha)}0))^{-1}\Phi^*(x)L_\mu^{(\alpha)}(0)e^{xA} \\ &\quad + \Big(U'(x) - U(x)A\Big)e^{-xA}(L_\mu^{(\alpha)}(0))^{-1}\Psi^*(x)L_\mu^{(\alpha)}(0)e^{xA}. \end{aligned}$$

因此，我们希望找到一个简洁的表达式

$$e^{-xA}L(0)^{-1}\Phi^*(x)L(0)e^{xA} \quad \text{and} \quad e^{-xA}L(0)^{-1}\Psi^*(x)L(0)e^{xA}.$$

Koelink 和 Roman 研究过一些类似的表达式（见 [21]）。根据 [21], 中的推论 5.3，我们有

$$\begin{aligned} L_\mu^{(\alpha)}(0)^*\Phi(x)((L_\mu^{(\alpha)}(0))^*)^{-1} &= -d^{(\nu)}x^2A^* + x(d^{(\nu)}J + c^{(\nu)}) \\ L_\mu^{(\alpha)}(0)^*\Psi(x)((L_\mu^{(\alpha)}(0))^*)^{-1} &= x\Big(d^{(\nu)}(J - A^*(J+\nu+1) - N - 1) - c^{(\nu)})\Big) \\ &\quad + (\nu + J + 1)(d^{(\nu)}J + c^{(\nu)}) + (\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} e^{-xA}L_\mu^{(\alpha)}(0)^{-1}\Phi^*(x)L_\mu^{(\alpha)}(0)e^{xA} &= -d^{(\nu)}x^2e^{-xA}Ae^{xA} + xd^{(\nu)}e^{-xA}Je^{xA} + xc^{(\nu)} \\ &= -d^{(\nu)}x^2A + xd^{(\nu)}(xA + J) + xc^{(\nu)} \\ &= x(d^{(\nu)}J + c^{(\nu)}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-xA}L_\mu^{(\alpha)}(0)^{-1}\Psi^*(x)L_\mu^{(\alpha)}(0)e^{xA} &= x\Big(d^{(\nu)}(xA + J - (xA + J + \nu + 1)A - N - 1) - c^{(\nu)})\Big) \\ &\quad + (d^{(\nu)}(xA + J) + c^{(\nu)})(\nu + xA + J + 1) + e^{-xA}((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)})^*e^{xA}. \end{aligned}$$

将 $x = 0$ 代入 (A.2)，并结合上述表达式进行计算，我们便得到 (7.8)，这正是所求。□

引理 7.3 的证明。考虑到 $(R_n(x))_{i,\ j}$ 满足定理 6.4 给出的表达式，(7.8) 右侧矩阵的 (i, j) 坐标为

$$n(d^{(\nu)}(i - N - 1) - c^{(\nu)})(R_n(0))_{i,j} = n(d^{(\nu)}(i - N - 1) - c^{(\nu)})L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(0)\xi(n, i, j).$$

另一方面， $n + i - j > 0$ 等式 (7.8) 左侧矩阵的 (i, j) 坐标为

$$\begin{aligned} &R_n'(0)_{i,j}(d^{(\nu)}j + c^{(\nu)})(\nu + j + 1) + R_n'(0)_{i(j-1)}((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)})^*{}_{(j-1)j} \\ &-R_n(0)_{i(j+1)}(d^{(\nu)}j + c^{(\nu)})(\nu + j + 1)A_{(j+1)j} - (R_n(0)_{i,j}A_{j(j-1)}((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)})^*{}_{(j-1),j}. \end{aligned}$$

考虑到 $R_n(x)_{i,\ j} = L_{n+i-j}^{(\nu+j)}(x)\xi(n, i, j)$,

$$L_n^\alpha(0) = \tfrac{(\alpha+1)_n}{n!} \qquad \text{and} \qquad \tfrac{\partial}{\partial x}L_n^\alpha(x) = (-1)L_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

我们得到上述表达式等价于

$$\begin{aligned} -n\Big(d^{(\nu)}(i - N - 1) - c^{(\nu)}\Big)\tfrac{(\nu+j+1)_{n+i-j}}{(n+i-j)!}\xi(n, i, j) &= \tfrac{(\nu+j+2)_{n+i-j-1}}{(n+i-j-1)!}(d^{(\nu)}j + c^{(\nu)})(\nu + j + 1)\xi(n, i, j) \\ &\quad + \tfrac{(\nu+j+1)_{n+i-j}}{(n+i-j)!}((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)})^*{}_{(j-1,j)}\xi(n, i, j - 1) \\ &\quad + \tfrac{(\nu+j+2)_{n+i-j-1}}{(n+i-j-1)!}(d^{(\nu)}j + c^{(\nu)})(\nu + j + 1)\xi(n, i, j + 1) \\ &\quad + \tfrac{(\nu+j+1)_{(n+i-j)}}{(n+i-j)!}A_{j(j-1)}\Big((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu)}\Big)^*{}_{(j-1)j}\xi(n, i, j). \end{aligned}$$

因此，考虑到 $(\nu+j+2)_{n+i-j-1}(\nu+j+1) = (\nu+j+1)_{n+i-j-1}$，并将两边同乘 $\frac{(n+i-j-1)!}{(\nu+j+1)_{n+i-j-1}}$，我们得到

$$\begin{aligned}-n\Big(d^{(\nu)}(i-N-1)-c^{(\nu)}\Big)\tfrac{(n+i-j-1)}{n+i-j}\xi(n,i,j) &= (d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})\xi(n,i,j)\\ &\quad+\tfrac{(n+i-j-1)}{n+i-j}\big((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)}\big)^{*}{}_{(j-1,j)}\xi(n,i,j-1)\\ &\quad+(d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})\xi(n,i,j+1)\\ &\quad+\tfrac{(n+i-j-1)}{n+i-j}A_{j(j-1)}\Big((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu)}\Big)^{*}{}_{(j-1)j}\xi(n,i,j).\end{aligned}$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned}&\Big((n+i-j)(d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})+A_{j(j-1)}\big((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu)}\big)^{*}{}_{(j-1)j}+n(d^{(\nu)}(i-N-1)-c^{(\nu)})\Big)\xi(n,i,j)\\ &+\big((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)}\big)^{*}{}_{(j-1,j)}\xi(n,i,j-1)+(n+i-j)(d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})\xi(n,i,j+1)=0.\end{aligned}$$

由（7.5）可知 $\frac{\delta_{k+1}^{(\nu)}}{\delta_k^{(\nu+1)}} = {}_{d^{(\nu)}k}{}^{\mu_{k+1}^2}{}_{N\underline{\quad k}()\mu_k^2}$，于是

$$\begin{aligned}\big((\Delta^{(\nu)})^{-1}A\Delta^{(\nu+1)}\big)^{*}{}_{(j-1,j)} &= \tfrac{\delta_{j-1}^{(\nu+1)}}{\delta_j^{(\nu)}}A_{j(j-1)}\\ &= d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\tfrac{{\mu_{j-1}}^2}{{\mu_j}^2}\tfrac{\mu_j}{\mu_{j-1}}\\ &= d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\tfrac{\mu_{j-1}}{\mu_j}.\end{aligned}$$

因此，我们可以将上面的方程改写如下

$$\begin{aligned}&\Big((n+i-j)(d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})+d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)+n(d^{(\nu)}(i-N-1)-c^{(\nu)})\Big)\xi(n,i,j)\\ &+d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\tfrac{\mu_{j-1}}{\mu_j}\xi(n,i,j-1)+(n+i-j)(d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})\xi(n,i,j+1)=0.\end{aligned}$$

现在，考虑 $M_j = (n+i-j)(d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})$。由于 $\epsilon_j^{(n,i)}\xi(n,i,j) = q_j^{(n,i)}$，我们可以将上面的方程改写如下

$$\begin{aligned}&\Big((n+i-j)(d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})+d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)+n(d^{(\nu)}(i-N-1)-c^{(\nu)})\Big)\tfrac{q_j}{\epsilon_j}\\ &+d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\tfrac{\mu_{j-1}}{\mu_j}\tfrac{q_{j-1}}{\epsilon_{j-1}}+M_j\tfrac{q_{j+1}}{\epsilon_{j+1}}=0.\end{aligned}$$

如果乘以 ϵ_j，则有

$$\begin{aligned}&\Big((n+i-j)(d^{(\nu)}j+c^{(\nu)})+d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)+n(d^{(\nu)}(i-N-1)-c^{(\nu)})\Big)q_j\\ &+d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\tfrac{\mu_{j-1}}{\mu_j}\tfrac{\epsilon_j}{\epsilon_{j-1}}q_{j-1}+M_j\tfrac{\epsilon_j}{\epsilon_{j+1}}q_{j+1}=0.\end{aligned}$$

根据引理 7.2，有 $M_j\frac{\epsilon_j}{\epsilon_{j+1}}=1$，因此得到

$$\begin{aligned}&d^{(\nu)}\Big((n+i-j)(j+\tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}})+(j-1)(N-j+1)+n((i-N-1)-\tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}})\Big)q_j\\ +\quad&d^{(\nu)}(j-1)(N-j+1)\tfrac{\mu_{j-1}}{\mu_j}(n+i-j+1)\big(d^{(\nu)}(j-1)+c^{(\nu)}\big)q_{j-1}+q_{j+1}=0,\end{aligned}$$

这等价于

$$E_jq_j+F_jq_{j-1}+\tfrac{1}{d^{(\nu)}}q_{j+1}=0,$$

with

$$\begin{aligned}E_j&=(n+i-j)(j+\tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}})+(j-1)(N-j+1)+n((i-N-1)-\tfrac{c^{(\nu)}}{d^{(\nu)}}),\\ F_j&=(j-1)(N-j+1)\tfrac{\mu_{j-1}}{\mu_j}(n+i-j+1)\big(d^{(\nu)}(j-1)+c^{(\nu)}\big),\end{aligned}$$

如所断言。 □