arXiv:2303.06835v1 [math.OA] 13 Mar 2023

实秩零情形下的总 Cuntz 半群、扩张与 Elliott 猜想

QINGNAN AN 与 ZHICHAO LIU

Abstract. 本文展示了两个含幺、可分、核的 C*-代数，它们具有稳定秩一和实秩零，且有序带尺度的总K理论相同，但彼此不同构。这构成了实秩零情形下 Elliott分类猜想的一个反例。因此，我们引入一个额外的正规条件，并给出基于总 K-理论的分类结果。对于一般情形，我们借助一个新的不变量——总 Cuntz 半群 [2], 对一大类由扩张得到的 C*-代数进行分类。能够区分上述反例中代数的总 Cuntz 半群，有望对所有稳定秩一且实秩零的 C*-代数进行分类。

Introduction

Elliott 猜想断言，所有核、可分的 C*-代数都可由适当的 Elliott不变量分类。该猜想的原始版本由 Elliott 于 1989年 提出， [24], 当时他对实秩零的 AT-代数进行了分类。此后，分类计划取得了巨大成功，不变量不断扩展，大类 C*-代数也已得到分类。

对于单 C*-代数，Kirchberg 和 Phillips 对所有满足泛系数定理的纯无穷、单、可分、可容 C*-代数进行了分类（概述见 [39]）。对于稳定有限的单情形，修正后的不变量由 K-理论、迹以及迹与 K-理论之间的配对构成。目前，已完成对所有单、可分、含幺、核、 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数的分类：只要 UCT 成立，它们就可由 Elliott不变量分类（[26, 33, 34, 44]）；其中， $\mathcal{Z}$ 是一个单、可分、核且无限维的 C*-代数，其 Elliott不变量与 $\mathbb{C}$ 相同，而 $\mathcal{Z}$-稳定性是一种能够确保良好结构性质的正则性 [32]。

对于实秩零 C* 代数，原始的 Elliott 不变量由带序的 K_* 群和尺度组成（见 [24, 25]），鉴于 Gong 的反例 [29, 27]，现已将其修改为扩展形式。Dadarlat 和 Loring 也在 AD 代数这一类中给出了这样的例子 [21]。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 46L35，次要分类号 46K8019K35。*Key words and phrases.* 总 Cuntz 半群；总 K-理论；分类；实秩零。

改进后的不变量是带有某种序结构，并受自然系数变换和 Bockstein 映射作用的有序全 K-理论（另见 [20, 22, 40, 41]）。此后，实秩零情形下的 Elliott 猜想被修改为如下形式：

猜想 0.1。$(\mathrm{K}(A),\mathrm{K}(\underline{A})_+,\Sigma\underline{A})_\wedge$ 是实秩零且稳定秩一的可分核C*-代数的完全不变量。

如果一个 C*-代数是 A$\mathcal{HD}$ 代数（见 [30, 2.2-2.3] 和 [31]），~即它是如下形式的有限直和的归纳极限： $M_n(\mathbb{I}_p)$ 和$PM_n(C(X))P$，其中

$$\mathbb{I}_p = \{f \in M_p(C_0(0,1]) : f(1) = \lambda \cdot 1_p,\ 1_p \text{ is the identity of } M_p\}$$

是 Elliott-Thomsen 降维区间代数，且 X 是以下有限连通 CW 复形之一：$\{pt\}$， $\mathbb{T}$， $[0,1]$， $T_{II,\ k}$. $P \in M_n(C(X))$ 是一个投影，且$T_{II,\ k}$ 是一个二维连通单纯复形，具有 $H^1(T_{II,\ k}) = 0$ 和 $H^2(T_{II,\ k}) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$。

1997年，Dadarlat 和 Gong [18]证实了关于0.1的猜想$\mathcal{HD}$实秩零代数。（在 [18, 节 1], 中，$\mathcal{HD}$ A 类称为 ASH(2) 类，并且在 [18, 定理 8。14] 中证明了，该类包含所有实秩零 AD 代数，以及具有缓慢维数增长的 AH 代数；然而，尚不清楚该类是否包含所有实秩零 ASH 代数，即使它们没有维数增长，因为 [18]中唯一包含的次齐性块是降维区间代数。）最近，[1, 4] 提出了对某些具有一维局部谱的 ASH 代数进行分类的方案（该方案包含更一般的次齐性构件）。人们相信，这一猜想能够对所有实秩零 ASH 代数得到完全验证；然而，在这一范围之外，我们将给出一个反例。

本文中，我们将使用扩张理论构造两个 C*-代数，它们具有相同的有序带尺度的总 K-理论，但彼此不同构。此外，我们指出，它们的总 Cuntz 半群各不相同。已有研究表明 [2] 总 Cuntz 半群所包含的信息可能多于总 K-理论。因此，我们的工作一方面旨在说明猜想 0.1中附加正则性假设的必要性；另一方面则致力于为一般情形寻找合适的不变量。适当的条件可能是“K-纯”，它与弱无孔 K_*-群密切相关。我们相信，我们的结论将推动实秩零核 C*-代数分类的发展。

我们称 C*-代数 A 是 K-*pure*，如果对于 A 的任意理想 I，以下两个序列

$$0 \to \mathrm{K}_j(I) \to \mathrm{K}_j(A) \to \mathrm{K}_j(A/I) \to 0, \quad j = 0, 1$$

是阿贝尔群的纯扩张。这一概念源于 C*-代数的扩张理论，它与 K-理论和 KK-理论一道，是 C*-代数分类的重要工具。许多有趣的 C*-代数都是通过扩张构造的 [7, 19] 。

我们的主要结果如下：

定理 0.2。 存在两个含幺、可分、核C*-代数 E_1和 E_2 ，它们具有稳定秩一和实秩零，满足 *UCT*，并且

$$(\underline{\mathrm{K}}(E_1), \underline{\mathrm{K}}(E_1)_+, [1_{E_1}]) \cong (\underline{\mathrm{K}}(E_2), \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+, [1_{E_2}]),$$

而 $E_1 \ncong E_2$。此外， E_1 和 E_2 都不是K-纯的。

这两个代数 E_1、 E_2 由 *-代数的非 K-纯扩张构造而成，这些代数已在 [18] 中分类，我们将证明

$$\underline{\mathrm{Cu}}_u(E_1) \ncong_L \underline{\mathrm{Cu}}_u(E_2),$$

其中 $\underline{\mathrm{Cu}}_u$ 是一个恢复 (K，K+，[1]) 的函子（见 [2]）。这一结果推翻了猜想 0.1 ，也回答了 [2, 问题 5。14] 该问题由作者提出。

我们还将给出 K-纯 C*-代数的刻画，并证明 K-纯扩张的若干等价表述。对于 K-纯扩张情形，将以总 K-理论给出分类定理；对于一般扩张情形，则以总 Cuntz 半群给出分类定理。

定理 0.3. 设 A_1, A_2, B_1, B_2 是实秩零的 *AHD*-代数，且 A_1, A_2 是含幺单的，B_1, B_2 是稳定的。给定两个含幺本质的 K-纯扩张

$$0 \to B_i \to E_i \to A_i \to 0, \quad i = 1, 2.$$

当且仅当 $E_1 \cong E_2$ 时，我们有

$$(\underline{\mathrm{K}}(E_1), \underline{\mathrm{K}}(E_1)_+, [1_{E_1}]) \cong (\underline{\mathrm{K}}(E_2), \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+, [1_{E_2}]).$$

定理 0.4. 设 A_1, A_2, B_1, B_2 是实秩零的 *AHD*-代数，且 A_1, A_2 是含幺单的， B_1, B_2 是稳定的。给定两个含幺本质扩张（不一定是 K-纯扩张），且其指标映射平凡

$$0 \to B_i \to E_i \to A_i \to 0, \quad i = 1, 2.$$

当且仅当 $E_1 \cong E_2$ 时，我们有

$$\underline{\mathrm{Cu}}_u(E_1) \cong_L \underline{\mathrm{Cu}}_u(E_2),$$

其中， $\cong_L$ 是格 *Cu*-同构。

上述结果进一步表明，总 K-理论可能足以完整刻画“性质良好”的 C*-代数，而在一般的分类理论中，有必要考虑新的要素。可以预期，实秩零 C*-代数的 Elliott 猜想或可通过以下版本得以实现：

猜想 0.5。 **（强）**$(\mathrm{K}(A), \mathrm{K}(A)_+, \Sigma A)_\Lambda$ 是实秩零且稳定秩一的可分核 *K*-纯 *C**-代数的完全不变量。

猜想 0.6。 **（弱）**$\mathrm{Cu}_u(A)$ 是实秩零且稳定秩一的含幺、可分、核C*-代数的完全不变量。

本文组织如下。第 1 节列出总 K-理论与 Dadarlat-Gong 序、扩张理论的一些预备知识，以及若干基本结果。第 2 节从两个不同构代数的例子开始 B_1, B_2 该例见 [21] ，并取两个（非 K-纯的）含幺本质扩张，其指标映射平凡

$$e_i: \quad 0 \to B_i \to E_i \to A_\chi, \quad i = 1, 2,$$

其中 A_χ 是 [25]中分类的代数。我们将验证 E_1, E_2 具有相同的有序带尺度的总K理论，但它们并不同构。在第 3 节中，我们将证明 K-纯扩张和 K-纯 C*-代数的一些性质。在第 4 节和第 5 节中，我们将分别根据总 K-理论对由含幺 K-纯扩张得到的代数进行分类，并根据 [2]中引入的总 Cuntz 半群对由一般扩张得到的代数进行分类。

1. 预备知识

1.1. 设 A 是一个含幺 C*-代数。若 A的可逆元集合在 A 中稠密，则称 A 具有稳定秩一，记作$sr(A) = 1$。若自伴可逆元集合在 A_{sa} 的自伴元集合中稠密，则称 A 具有实秩零，记作 $rr(A) = 0$。若 A 不是含幺的，令$\tilde{}$表示 A 的最小单位化，并记为 $\tilde{A}$。若非含幺 C*-代数的单位化具有稳定秩一（或实秩零），则称该代数具有稳定秩一（或实秩零）。

设 A 中有两个投影 p 和 q 。若存在 $x \in A$ 使得 $x^*x = p$ 且 $xx^* = q$，则称 p 与 q 在 A 中 $Murray–von Neumann\ equivalent$ ，记作 $p \sim q$ 。若 p 等价于 q 的某个子投影，则记作 $p \preceq q$ 。投影 p 在 $K_0(A)$ 中的类记作$[p]$ ；若 $p \preceq q$，则称 $[p] \leq [q]$。

若对于任意满足 $pe = 0$、 $qf = 0$、 $e \sim f$ 和 $p + e \sim q + f$ 的投影 p、 q、 e、 $f \in A$ ，都有 $p \sim q$，则称 A 具有投影消去性。 A 具有投影消去性，当且仅当 $p \sim q$ 蕴含存在酉元$u \in \tilde{A}$ ，使得 $u^*pu = q$ （见 [36, 3.1]）。每个稳定秩一的含幺 C*-代数都具有投影消去性，因此，任何两个具有相同 K-理论的投影都生成相同的理想；我们还经常用 $I_{[p]}$表示由 p 在 A 中生成的理想 I_p 。

1.2.（总 K-理论） （[18, 节 4]）对于 $n \geq 2$，模-n K-理论群定义为

$$\mathrm{K}_*(A; \mathbb{Z}_n) = \mathrm{K}_*(A \otimes C_0(W_n)),$$

其中， $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, W_n 表示通过次数为 n 的映射将单位圆盘粘到圆上所得到的摩尔空间，例如 $f_n: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}$。连续函数在基点处消失的 C*- 代数 $C_0(W_n)$ 同构于从自身映到自身的次数为 n 的典范映射的映射锥，其中映射的对象为 $C(\mathbb{T})$。

在 [41]的情形下（另见 [38, 15]），模n K-理论群定义为

$$\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n)=\mathrm{K}_j\left(A\otimes C_0\left(W_n\right)\right),\quad j=0,1.$$

设 $\mathrm{K}_*(A;\mathbb{Z}_n)=\mathrm{K}_0(A;\mathbb{Z}_n)\oplus\mathrm{K}_1(A;\mathbb{Z}_n)$。对于 $n=0$，我们设 $\mathrm{K}_*(A;\mathbb{Z}_n)=\mathrm{K}_*(A)$；对于 $n=1$,$\mathrm{K}_*(A;\mathbb{Z}_n)=0$。

对于 C*-代数 A，定义 A 的总 K-理论为

$$\underline{\mathrm{K}}(A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{K}_*(A;\mathbb{Z}_n).$$

它是一个 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}^+$分次群。文献 [41] 中证明，系数映射

$$\begin{aligned}\rho&:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n,\quad \rho(1)=[1],\\ \kappa_{mn,m}&:\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_{mn},\quad \kappa_{mn,m}[1]=n[1],\\ \kappa_{n,mn}&:\mathbb{Z}_{mn}\to\mathbb{Z}_n,\quad \kappa_{n,mn}[1]=[1],\end{aligned}$$

诱导出自然变换

$$\begin{aligned}\rho_n^j&:\mathrm{K}_j(A)\to\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n),\\ \kappa_{mn,m}^j&:\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_m)\to\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_{mn}),\\ \kappa_{n,mn}^j&:\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_{mn})\to\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n).\end{aligned}$$

Bockstein 运算

$$\beta_n^j:\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n)\to\mathrm{K}_{j+1}(A)$$

出现在六项正合列中

$$\mathrm{K}_j(A)\xrightarrow{\times n}\mathrm{K}_j(A)\xrightarrow{\rho_n^j}\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n)\xrightarrow{\beta_n^j}\mathrm{K}_{j+1}(A)\xrightarrow{\times n}\mathrm{K}_{j+1}(A)$$

由余纤维序列诱导

$$A\otimes SC_0\left(\mathbb{T}\right)\longrightarrow A\otimes C_0\left(W_n\right)\xrightarrow{\beta}A\otimes C_0\left(\mathbb{T}\right)\xrightarrow{n}A\otimes C_0\left(\mathbb{T}\right),$$

其中 $SC_0(\mathbb{T})$ 是 $C_0(\mathbb{T})$ 的悬挂代数。

还存在另一个涉及 Bockstein 运算的六项正合列。它由余纤维序列诱导

$$A\otimes SC_0\left(W_n\right)\longrightarrow A\otimes C_0\left(W_m\right)\longrightarrow A\otimes C_0\left(W_{mn}\right)\longrightarrow A\otimes C_0\left(W_n\right)$$

其形式为:

$$\mathrm{K}_{j+1}(A;\mathbb{Z}_n)\xrightarrow{\beta_{m,n}^{j+1}}\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_m)\xrightarrow{\kappa_{mn,m}^j}\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_{mn})\xrightarrow{\kappa_{n,mn}^j}\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n),$$

其中 $\beta_{m,\ n}^j=\rho_m^{j+1}\circ\beta_n^j$。

所有变换 ρ,β,κ 及其复合构成的集合记为 Λ。Λ 可视为一个范畴中态射的集合，该范畴的对象是 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}^+$ 的元素。稍宽泛地说，Λ 称为 Bockstein 运算范畴。借助 Bockstein 运算，$\mathrm{K}(A)$ 成为一个 Λ-模。自然地，我们考虑由所有 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}^+$ 分次群态射组成的群 $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{K}(\underline{A}),\mathrm{K}(\underline{B}))$，这些态射都是 Λ-线性的，即保持范畴 Λ的作用。

Kasparov乘积诱导出一个映射

$$\gamma_n^j : \mathrm{KK}(A,B) \to \mathrm{Hom}\left(\mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n), \mathrm{K}_j(B;\mathbb{Z}_n)\right).$$

那么 $\gamma_n = (\gamma_n^0, \gamma_n^1)$ 将是一个映射

$$\gamma_n : \mathrm{KK}(A,B) \to \mathrm{Hom}\left(\mathrm{K}_*(A;\mathbb{Z}_n), \mathrm{K}_*(B;\mathbb{Z}_n)\right).$$

注意，如果 $n=0$，那么 $\mathrm{K}_*(A,\ \mathbb{Z}_n) = \mathrm{K}_*(A)$ 且映射 γ_0 与 Rosenberg 和 Schochet 的泛系数定理（UCT）γ 中的映射相同 [40]。我们将序列 (γ_n) 组合成一个映射 Γ。由于 Bockstein 运算由与适当 KK 元素相乘诱导，且 Kasparov 乘积具有结合性，因此我们得到一个映射

$$\Gamma : \mathrm{KK}(A,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\underline{\mathrm{K}}(A), \underline{\mathrm{K}}(B)).$$

为简便起见，若 $\alpha \in \mathrm{KK}(A,\ B)$，则常将 $\Gamma(\alpha)$ 记作 α。

对于任意 $n \in \mathbb{N},\ j=0,1$，若 $\psi\colon A \to B$ 是一个同态，我们将 $\mathrm{K}(\psi) : \mathrm{K}(A) \to \mathrm{K}(B)$ 和 $\mathrm{K}_j(\psi;\ \mathbb{Z}_n) : \mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n) \to \mathrm{K}_j(B;\ \mathbb{Z}_n)$ 记为诱导映射。

若 $\beta : \underline{\mathrm{K}}(A) \to \underline{\mathrm{K}}(B)$ 是一个分次映射，我们将

$$\beta_n^j :\ \mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n) \to \mathrm{K}_j(B;\mathbb{Z}_n),\ n \in \mathbb{N},\ j=0,1$$

称为限制映射。

事实上，正如 Cuntz 和 Schochet [41, 定理6.4], 所指出的，也可以用（非交换的！）Cuntz 代数 $\mathcal{O}_{n+1}$（见 [12, 14]）代替 W_n来定义 $\mathrm{K}_*(A;\mathbb{Z}_n)$。

1.3.（Dadarlat-Gong 序）假设 A 是一个稳定秩一的可分 C*-代数，且 $\mathcal{K}$ 是作用在可分无限维希尔伯特空间上的紧算子。对于任意 $[e] \in \mathrm{K}_0^+(A)$，记 I_e 为由 e 生成的 $A\otimes\mathcal{K}$的理想，并将 $\underline{\mathrm{K}}(I_e \mid A)$ 记为 $\underline{\mathrm{K}}(I_e)$ 在 $\underline{\mathrm{K}}(A)$ 中的像，即

$$\underline{\mathrm{K}}(I_e \mid A) =: \underline{\mathrm{K}}(\iota_{I_e})(\underline{\mathrm{K}}(I_e)) \subset \underline{\mathrm{K}}(A),$$

其中 $\iota_{I_e}\colon\ I_e \to A\otimes\mathcal{K}$ 是自然嵌入映射。以下是 A 的总 K-理论的一个正锥（[18, 定义 4.6]）：

$$\underline{\mathrm{K}}(A)_+ = \{([e], \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) : [e] \in \mathrm{K}_0^+(A), ([e], \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \in \underline{\mathrm{K}}(I_e \mid A)\},$$

其中，$\mathfrak{u} \in \mathrm{K}_1(A)$、$\mathfrak{s}_{n,\ 0} \in \mathrm{K}_0(A;\mathbb{Z}_n)$ 和 $\mathfrak{s}_{n,\ 1} \in \mathrm{K}_1(A;\mathbb{Z}_n)$ 均为等价类。我们将这种序结构称为 Dadarlat-Gong 序。

特别地，我们也可以记为

$$\mathrm{K}_j(I_e \mid A;\mathbb{Z}_n) =: \mathrm{K}_j(\iota_{I_e};\mathbb{Z}_n)(\mathrm{K}_j(I_e;\mathbb{Z}_n)) \subset \mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n), \quad j=0,1,$$

$$\mathrm{K}_*^+(A) =: \mathrm{K}_*(A) \cap \underline{\mathrm{K}}(A)_+,$$

其中，$\mathrm{K}_*(A)$ 与其在 $\underline{\mathrm{K}}(A)$ 中的自然像相对应。

于是立即得到以下命题。

命题 1.4. 设 A、B 是稳定秩一的C*-代数，且 $\phi:\mathrm{K}(A)\to\mathrm{K}(B)$ 是分次群 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}^+$ 的一个态射。以下陈述等价:

(i) $\phi(\underline{\mathrm{K}}(A)_+)\subset\underline{\mathrm{K}}(B)_+$;

(ii) 对任意满足 $x\in K_0^+(A)$ 且 $x\in K_1(I_x)\times\bigoplus_{n=1}^{\infty}K_*(I_x;\mathbb{Z}_n)$ 的 (x,x)，存在满足 $y\in\overline{K}_0^+(B)$ 且 $y\in K_1(I_y)\times\bigoplus_{n=1}^{\infty}K_*(I_y;\mathbb{Z}_n)$ 的 (y,y)，使得

$$\phi\circ\underline{\mathrm{K}}(\iota_{I_x})(x,\overline{x})=\underline{\mathrm{K}}(\iota_{I_y})(y,\overline{y}),$$

其中，I_x, I_y 分别是由 x,y生成的 $A\otimes\mathcal{K}$, $B\otimes\mathcal{K}$ 的理想，并且 ι_{I_x}：$I_x\to A\otimes\mathcal{K}$, ι_{I_y}：$I_y\to B\otimes\mathcal{K}$ 是自然单射。

例 1.5。记 $\mathcal{Q}$ 为 K_0 群是 $(\mathbb{Q},\ \mathbb{Q}_+,\ 1)$ 的 UHF 代数，并回忆 $\mathcal{K}$ 是作用于可分无限维希尔伯特空间上的紧算子。

Then

$$(\underline{\mathrm{K}}(\mathcal{Q}),\underline{\mathrm{K}}(\mathcal{Q})_+,[1_{\mathcal{Q}}])\cong(\mathbb{Q},\mathbb{Q}_+,1);$$
$$\underline{\mathrm{K}}(\mathcal{K})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\cdots$$

and

$$\underline{\mathrm{K}}(\mathcal{K})_+=\{(x,x_2,x_3,x_4,\cdots)\in\underline{\mathrm{K}}(\mathcal{K})\mid x>0\}\cup\{(0,0,0,0,\cdots)\},$$

其中 $\mathrm{K}_0(\mathcal{K};\mathbb{Z}_n)\cong\mathbb{Z}_n$ 和 $\mathrm{K}_1(\mathcal{K};\mathbb{Z}_n)\cong 0$.

定理 1.6。([18, 命题 4.8–4。9]) 假设 A 具有稳定秩一，并且有一个由投影组成的近似单位 (e_n)。那么

(i) $\underline{\mathrm{K}}(A)=\underline{\mathrm{K}}(A)_+-\underline{\mathrm{K}}(A)_+$;

(ii) $\underline{\mathrm{K}}(A)_+\cap\{-\underline{\mathrm{K}}(A)_+\}=\{0\}$，因此，$(\mathrm{K}(\underline{A}),\mathrm{K}(\underline{A})_+)$ 是一个序群;

(iii) 对任意 $x\in\mathrm{K}(A)$，存在正整数 k,n，使得 $k[e_n]+x\in\mathrm{K}(A)_+$。

—

注意，可分性和实秩零意味着存在一个由投影组成的近似单位。在上述定理中，若将 K 替换为 K_0 或 K_*，结论仍然成立。

—

定义 1.7。阿贝尔群扩张

$$0\to K\xrightarrow{\iota}G\xrightarrow{\pi}H\to 0$$

称为 *pure*，如果 $\iota(K)$ 是 G 的纯子群，即对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $n\times\iota(K)=\iota(K)\cap(n\times G)$。

定义 1.8. 设 A 和 B 是 C*-代数。A 由 B 扩张得到的扩张 e 是 C*-代数的短正合列:

$$e:\quad 0\to B\to E\to A\to 0.$$

我们称 e 是 K-*pure*，如果以下两个序列

$$0\to\mathrm{K}_j(B)\to\mathrm{K}_j(E)\to\mathrm{K}_j(A)\to 0,\quad j=0,1$$

是阿贝尔群的纯扩张。

定义 1.9。给定 A 的一个理想 I，如果扩张 $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ 是 K-纯的，我们就称 I 在 A 中是 K-*pure*。如果 C*-代数 A 的所有理想在 A 中都是 K-纯的，我们就称 A 是 K-*pure*。

显然，如果 A、B 都是 K-纯的，那么 $A \oplus B$ 和 $A \otimes \mathcal{K}$ 都是 K-纯的。根据 [17, 命题 4, 4]，所有 A$\mathcal{HD}$ 代数若具有实秩零，则都是 K- 纯的。

1.10. 给定阿贝尔群 H、K 以及两个扩张

$$e_i \ : \ 0 \to K \to G_i \to H \to 0, \quad i = 1, 2,$$

我们称 e_1、e_2 等价，若存在一个同态 α 使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \ . \end{array}$$

记 Ext(H, K) 为所有以 H 为商、以 K 为子群的扩张的等价类所成的集合。众所周知，Ext(H, K) 构成一个阿贝尔群。

设 $h_0 \in H$。我们考虑以下以 H 为商、以 K 为子群且基点为 h_0 的扩张，

$$e: \quad 0 \to K \to (G, g_0) \xrightarrow{\psi} (H, h_0) \to 0,$$

其中 $g_0 \in G$ 和 $\psi(g_0) = h_0$。我们称 e 是平凡的，若存在一个同态 $\lambda: H \to G$，使得 $\psi \circ \lambda = \mathrm{id}_H$ 且 $\lambda(h_0) = g_0$。

设我们有扩张

$$e_i: \quad 0 \to K \to (G_i, g_i) \xrightarrow{\psi} (H, h_0) \to 0, \quad i = 1, 2$$

其中 $\psi(g_i) = h_0$。若存在同态$\phi: G_1 \to G_2$，满足 $\phi(g_1) = g_2$，且使下图交换，则称 e_1 和 e_2 等价

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & (G_1, g_1) & \longrightarrow & (H, h_0) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & (G_2, g_2) & \longrightarrow & (H, h_0) & \longrightarrow & 0 \ . \end{array}$$

令 Ext((H, h_0) K) 为所有以 h_0 为基点、以 K 为核且以 H 为商的扩张的等价类集合。仿照群论中通常的 Ext(H, K) 构造，可以在 Ext((H, h_0) K) 上构造类似的运算，使其成为阿贝尔群。容易验证，存在群的短正合列

$$0 \to K/\{f(h_0) | f \in \mathrm{Hom}(H, K)\} \to \mathrm{Ext}((H, h_0), K) \to \mathrm{Ext}(H, K) \to 0.$$

以下命题众所周知，参见 [37, 命题 4]。

命题 1.11. 设

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

是C*-代数的一个扩张。令 $\delta_j : \mathrm{K}j(A) \to \mathrm{K}1-j(B)$ 为 $j = 0,1$ 对应序列的指标映射。

(i) 假设 A 和 B 具有实秩零。则以下三个条件等价：（

a) $\delta_0 \equiv 0$,
(b) $rr(E) = 0$,
(c) A 中的所有投影都是 E中投影的像。
(ii) 假设 A 和 B 具有稳定秩一。则以下条件等价：

(a) $\delta_1 \equiv 0$,
(b) $sr(E) = 1$.
此外，如果 E （以及 A ）是含幺的，那么 *(ii)* 中的 *(a)* 和 *(b)* 等价于

(c) A 中的所有酉元都是 E 中酉元的像。

定义 1.12。我们称扩张 $e : 0 \to B \to E \to A \to 0$具有 $trivialindex\ maps$，如果 δ_0 和 δ_1 都是零映射。

因此，假设 A、B 都具有稳定秩一和实秩零。由命题1.11，我们指出，E 具有稳定秩一和实秩零，当且仅当 e 具有平凡指标映射。

定义 1.13。设 A、B 是C*-代数，并且

$$e : 0 \to B \to E \to A \to 0$$

是 A 被 B 的一个扩张，其 Busby 不变量为 $\tau : A \to M(B)/B$，其中 $M(B)$ 是 B 的乘子代数。我们称扩张 e 是 $essential$ 的，当且仅当 τ 是单射。当 A 含幺时，若 τ 含幺，则称扩张 e 是 $unital$ 的。

命题 1.14。假设 A 是含幺单的，且 B 稳定并满足 $B \neq 0$。那么，A 被 B 的任意含幺扩张 e 都是本质的。

证明。对于任意 A 被 B 的含幺扩张 e，其 Busby 不变量为 τ。由于 τ 是从 A 到 $M(B)/B$ 的含幺同态，且 A 没有真理想，因此 Busby 不变量 τ 必须是单射，由此得证。

□

定义 1.15。设 $e_i : 0 \to B \to E_i \to A \to 0$ 是 A 被 B 的两个扩张，其 Busby 不变量分别为 τ_i，其中 $i = 1, 2$。若存在酉元 $u \in M(B)$ 使得对所有 $a \in A$，e_1 和 e_2 满足 $\tau_2(a) = \pi(u)\tau_1(a)\pi(u)^*$，则称它们为 $strongly\ unitarily\ equivalent$，记作 $e_1 \sim_s e_2$，其中 $\pi : M(B) \to M(B)/B$.

命题 1.16。给定两个扩张 e_1 和 e_2，且满足 $e_1 \sim_s e_2$，我们有$E_1 \cong E_2$。

证明。通过拉回构造，我们有

$$E_i = \{(a, b) \in A \times M(B) \mid \tau_i(a) = \pi(b)\}, \quad i = 1, 2.$$

$e_1 \sim_s e_2$ 意味着存在一个酉元 $u \in M(B)$，使得 $\tau_2(a) = \pi(u)\tau_1(a)\pi(u)^*$ 对所有 $a \in A$ 都成立。于是映射 $\psi\colon E_1 \to E_2$ 满足

$$\psi(a,b) = (a, ubu^*)$$

是一个同构。

□

1.17. 设 A 和 B 是 C*-代数。当 A 含幺时，我们令

$$\mathrm{Ext}_{[1]}(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B)) = \mathrm{Ext}((\mathrm{K}_0(A), [1_A]), \mathrm{K}_0(B)) \oplus \mathrm{Ext}(\mathrm{K}_1(A), \mathrm{K}_1(B)).$$

记 $\mathcal{N}$ 为 C*-代数在 [40]中的“bootstrap”类。我们列出“UCT”结果的若干种不同表述如下:

定理 1.18. ([40], **UCT**) 设 A, B 是可分的 C*-代数。假设 $A \in \mathcal{N}$。那么存在一个短正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B)) \xrightarrow{\delta} \mathrm{KK}^*(A,B) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B)) \to 0,$$

其中，映射 γ 的次数为0 ，而 δ 的次数为1。

定理 *1.19* （ [40]中的命题 *7.3* 和推论 *7.5*）。设 A_1 和A_2 是 $\mathcal{N}$ 中的 *C**-代数，且它们具有相同的（抽象）*K*-群，也就是说，存在一个分次同构 ρ *:* $K_*(A_1) \to K_*(A_2)$，那么存在一个 *KK*- 等价 $\lambda \in KK(A_1, A_2)$，使得 $\gamma(\lambda) = \lambda_* = \rho \in Hom(K_*(A_1), K_*(A_2))$。

定理 1.20。([20], [18, 定理 4。2], **UMCT**) 设 A, B 是C*-代数。假设 $A \in \mathcal{N}$ 和 B 是 σ-含幺的。那么存在一个短正合列

$$0 \to \mathrm{Pext}(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B)) \to \mathrm{KK}(A,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\underline{\mathrm{K}}(A), \underline{\mathrm{K}}(B)) \to 0,$$

它在每个变量中都是自然的。

对于阿贝尔群 G，我们用 tor(G) 表示 G 的所有挠元构成的子群。

定义 1.21. ([23],[35, 引理 8.1], [25, 定义 1.2.7]) 如果有序阿贝尔群 (G, G_+) 满足以下两个条件，则称其为弱无孔:

(i) G/tor(G) 无孔，即在商有序群中，$ng \geq 0$且 $n \in \mathbb{N}^+$ 蕴含 $g \geq 0$;

(ii) 给定 $g \in G_+$, $t \in$ tor(G)、 $n \in \mathbb{N}^+$ 和满足 $ng + mt \in G_+$ 的 $m \in \mathbb{Z}$, 则存在某个 t'， $t'' \in$ tor(G)，使得 $t = t' + t''$ 、 $mt' = 0$ 和 $g + t'' \in G_+$。

我们还需要以下由 [46, 定理 4.9], 得到的结果；在 [42, 43, 45] 的情形下也可以看到类似的版本。

定理 1.22 (定理 3.5，见 [3])。 设 A, B 为稳定秩一、实秩零且具有 $A \in \mathcal{N}$ 的核可分C*-代数。假设A 是含幺单的， B 是稳定的，且 $(\mathrm{K}_0(B), \mathrm{K}_0^+(B))$ 弱无孔。令 $\mathrm{Text}_s^u(A,B)$ 为所有以 B 为理想、商代数为 A 且具有平凡指标映射的含幺扩张的强酉等价类集合。那么我们有

$$\mathrm{Ext}_{[1]}(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B)) \cong \mathrm{Text}_s^u(A,B).$$

设 A, B 是满足上述条件的 C*-代数，并且

$$\varepsilon \in \mathrm{Ext}_{[1]}(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B))$$

是该扩张的等价类

$$0 \to \mathrm{K}_*(B) \to (G, g_0) \to (\mathrm{K}_*(A), [1_A]) \to 0.$$

那么存在一个由 A 到 B 的平凡指标映射扩张：

$$0 \to B \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \to 0,$$

使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*(B) & \longrightarrow & (G, g_0) & \longrightarrow & (\mathrm{K}_*(A), [1_A]) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*(B) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\iota)} & (\mathrm{K}_*(E), [1_E]) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\pi)} & (\mathrm{K}_*(A), [1_A]) & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

这里，这样的 E 在同构意义下是唯一的，根据命题1.16。

2. Counterexample

在本节中，我们构造两个含幺、可分、核的 C*-代数，它们具有稳定秩一和实秩零，并且具有相同的有序带尺度的总K理论；我们证明它们不同构。

2.1. 回顾在定理 3.3] 中构造的 C*-代数 C, D （其中 $p = 2$）。

~对于任意带单位元 1_A 的 C*-代数 A，记 $\delta_i : \mathbb{I}_2 \to A$，其中 $i = 0,1$,~映射 $\delta_i(f) = f(i) \cdot 1_A$。若 $0 < t < 1$，则记 $\delta_t : \mathbb{I}_2 \to M_2(A)$ 为映射 $\delta_t(f) = 1_A \otimes f(t)$。设 $\{t_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的一个稠密序列，定义~ ~$\psi_n = \mathrm{id} \oplus \delta_{t_n} : \mathbb{I}_2 \to M_3(\mathbb{I}_2)$，令

$$\varphi_n = \psi_n \otimes \mathrm{id} : M_{3^{n+1}}(\widetilde{\mathbb{I}_2}) \to M_{3^{n+2}}(\widetilde{\mathbb{I}_2}).$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$，令

$$A_n = M_{3^{n+1}}(\widetilde{\mathbb{I}_2}) \oplus M_{3^n} \oplus \cdots \oplus M_3 \oplus \mathbb{C} \oplus M_3 \oplus \cdots \oplus M_{3^n}.$$

定义连接映射 $\phi_{n,\ n+1}$，$\phi'_{n,\ n+1} : A_n \to A_{n+1}$ 如下

$$\phi_{n,n+1}(f, x_{-n}, \cdots, x_n) = (\varphi_n(f), f(0), x_{-n}, \cdots, x_n, f(0)),$$

$$\phi'_{n,n+1}(f, x_{-n}, \cdots, x_n) = (\varphi_n(f), f(0), x_{-n}, \cdots, x_n, f(1)),$$

~其中 $f \in M_{3^{n+1}}(\mathbb{I}_2)$，$x_0 \in \mathbb{C}$ 且 x_{-m}，$x_m \in M_{3^m}$ 对于 $m = 1$，$\cdots$，n。

记 $C = \varinjlim(A_n, \phi_{n,\ n+1})$，$D = \varinjlim(A_n, \phi'_{n,\ n+1})$。则 C，D 具有实秩零和稳定秩一。

在本节中，我们采用以下约定

$$B_1 := C \otimes \mathcal{K}, \quad B_2 := D \otimes \mathcal{K}.$$

由 [21, 定理 3.3] 可证明 B_1与 B_2 不同构，并且

$$(\mathrm{K}_*(B_1), \mathrm{K}_*^+(B_1)) \cong (\mathrm{K}_*(B_2), \mathrm{K}_*^+(B_2)).$$

根据 [18, 定理 9.1],可得

$$(\underline{\mathrm{K}}(B_1), \underline{\mathrm{K}}(B_1)_+) \ncong (\underline{\mathrm{K}}(B_2), \underline{\mathrm{K}}(B_2)_+),$$

其中，上述采用的序均为 Dadarlat-Gong 序。注意，由定理 1.19，我们仍可有 $\mathrm{K}(B_1) \cong \mathrm{K}(B_2)$，尽管这些序并未得到保持。

2.2. 记$\mathbf{Z}$为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \oplus \prod_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ 的子群，它由所有形如 $(a, \prod_{\mathbb{Z}} a_m)$ 且满足 $a_m = 3^{|m|} \cdot a$ （对所有充分大的 $|m|$）的元素组成。

对于 B_1、B_2，由 [21, 定理 3.3], 可得

$$\mathrm{K}_0(B_i) = \mathbf{Z}, \quad \mathrm{K}_1(B_i) = \mathbb{Z}_2,$$

and

$$\mathrm{K}_0^+(B_i) = \mathbf{Z} \cap (\mathbb{R}_+ \oplus \prod_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_+),$$

其中 $i = 1$，2 和 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ 。

对于每个 $i = 1$，2，$\mathrm{K}_0(B_i)$ 是无挠群，并且显然 $\mathrm{K}_0(B_i)$ 是弱无孔的（见定义 1.21）。

2.3. (反例) 记 **有理数集** 为 $\mathbb{Q} \oplus \prod_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的子群，它由所有形如 $(a, \prod_{\mathbb{Z}} a_m)$ 且对所有充分大的 $|m|$ 都成立的元素组成。

考虑以下正合列

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\zeta} \mathbf{Q} \xrightarrow{\eta} \mathbf{Q}_\chi^3 \to 0,$$

其中 $\zeta(a, \prod_{\mathbb{Z}} a_m) = (a, \prod_{\mathbb{Z}} a_m)$ 是自然嵌入映射，**有理数集**$_\chi^3$:= **有理数集**/**整数集**是商群，而 η 是商映射。

(记

$$\mathbb{Q}_\chi^3 = \{[\frac{q}{p}] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : p, q \in \mathbb{Z}, 3 \nmid p\}.$$

可以验证，**有理数集**$_\chi^3$ 同构于 $\mathbb{Q}_\chi^3 \oplus \prod_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的子群，该子群由所有形如 $(b, \prod_{\mathbb{Z}} b_m)$ 且对所有充分大的 $|m|$ 都成立的元素组成。)

我们只用到 **有理数集**$_\chi^3$ 是一个可数挠群这一事实。根据 [25, 定理 4.20], , 令 A_χ 为一个含幺单 AH 代数，其稳定秩为一、实秩为零且没有维数增长，并满足

$$\mathrm{K}_0(A_\chi) = \mathbb{Q} \oplus \mathbf{Q}_\chi^3, \quad \mathrm{K}_1(A_\chi) = 0, \quad [1_{A_\chi}] = (1, 0),$$

$$\mathrm{K}_0^+(A_\chi) = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \oplus \mathbf{Q}_\chi^3 | \, x > 0\} \cup \{(0, 0) \in \mathbb{Q} \oplus \mathbf{Q}_\chi^3\}.$$

令 $\varepsilon_i \in \mathrm{Ext}^{[1]}(\mathrm{K}_*(A_\chi), \mathrm{K}_*(B_i))$ 为.....的等价类

$$0 \to \mathrm{K}_0(B_i) \xrightarrow{\zeta_i} (\mathbb{Q} \oplus \mathbf{Q}, (1, 0)) \xrightarrow{\eta_i} (\mathrm{K}_0(A_\chi), (1, 0)) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{K}_1(B_i) \xrightarrow{\nu_i} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathrm{K}_1(A_\chi) \to 0,$$

其中 $\zeta_i(a,\ \prod_{\mathbb{Z}} a_m) = (0,\ (a,\ \prod_{\mathbb{Z}} a_m))$, $\nu_i = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$ 和

$$\eta_i(x,(b,\prod_{\mathbb{Z}} b_m)) = (x,\eta(b,\prod_{\mathbb{Z}} b_m)).$$

根据定理1.22，存在两个含幺本质扩张，其 C*-代数具有平凡指标映射（见定义1.12）

$$0 \to B_i \xrightarrow{\iota_i} E_i \xrightarrow{\pi_i} A_\chi \to 0, \quad i = 1,2$$

实现 ε_i 并满足以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{K}_*(B_i) & \xrightarrow{(\zeta_i,\nu_i)} & ((\mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q},\mathbb{Z}_2),(1,0)) & \xrightarrow{(\eta_i,0)} & (\mathrm{K}_*(A_\chi),[1_{A_\chi}]) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_i} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \to & \mathrm{K}_*(B_i) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\iota_i)} & (\mathrm{K}_*(E_i),[1_{E_i}]) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\pi_i)} & (\mathrm{K}_*(A_\chi),[1_{A_\chi}]) & \to & 0\ . \end{array}$$

我们将通过同构 $_*(E_i) = (\mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q}\ \mathbb{Z}_2$来识别 K ρ_i。注意，根据命题 1.16，对于每个 $i = 1,2$, E_i 在同构意义下唯一；根据命题 1.11， E_1, E_2 均具有稳定秩一和实秩零。

在本节中， E_1、 E_2 和 A_χ 始终表示上述 C*-代数。

注记 2.4. 由于 B_1, B_2, A_χ 是可分核 C*-代数，具有稳定秩一和实秩零，且属于 bootstrap 类 $\mathcal{N}$，所以 E_1, E_2 均为含幺、可分、核 C*-代数，具有稳定秩一和实秩零，且属于 $\mathcal{N}$（对每个 E_i，可分性显然；核性见 [6, IV 3.1.3]）。对于每个 $i = 1,2$，以下正合列

$$0 \to \mathrm{K}_0(B_i) \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\iota_i)} \mathrm{K}_0(E_i) \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\pi_i)} \mathrm{K}_0(A_\chi) \to 0,$$

即

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{0\oplus\zeta} \mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q} \xrightarrow{\mathrm{id}\oplus\eta} \mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q}^3_\chi \to 0,$$

不是阿贝尔群的纯扩张（参见定义 1.7）。因此，二者 E_1和 E_2 都不是 K-纯 C*-代数（参见定义 1.9）。根据 [17, 命题 4.4], 可知，它们都不是 $A\mathcal{HD}$ 代数。我们预先告知读者，根据引理 3.1 (iii) 和 (iv)，对于每个 $i = 1,2$, 在下列序列中

$$\underline{\mathrm{K}}(B_i) \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_i)} \underline{\mathrm{K}}(E_i) \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\pi_i)} \underline{\mathrm{K}}(A_\chi),$$

$\underline{\mathrm{K}}(\iota_i)$ 不是单射，同时 $\underline{\mathrm{K}}(\pi_i)$ 不是满射。

命题 2.5. 对于每个 $i = 1,2$，我们有

$$\mathrm{K}_0(E_i) = \mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q} \quad \text{and} \quad \mathrm{K}_1(E_i) = \mathbb{Z}_2;$$

并且对于任意 $n \geq 1$,

$$\mathrm{K}_0(E_i;\mathbb{Z}_{2n}) = \mathbb{Z}_2, \quad \mathrm{K}_1(E_i;\mathbb{Z}_{2n}) = \mathbb{Z}_2$$

and

$$\mathrm{K}_0(E_i;\mathbb{Z}_{2n-1})=0,\quad \mathrm{K}_1(E_i;\mathbb{Z}_{2n-1})=0.$$

证明。回顾一下，在 2.3中，对每个 $i=1,\ 2$，我们有

$$\mathrm{K}_0(E_i)=\mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q}\quad\text{and}\quad \mathrm{K}_1(E_i)=\mathbb{Z}_2.$$

对于每个 $k\geq 1$，由余纤维序列可得以下正合序列

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{K}_0(E_i) & \xrightarrow{\times k} & \mathrm{K}_0(E_i) & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(E_i;\mathbb{Z}_k)\\
\uparrow & & & & \downarrow\\
\mathrm{K}_1(E_i;\mathbb{Z}_k) & \longleftarrow & \mathrm{K}_1(E_i) & \xleftarrow{\times k} & \mathrm{K}_1(E_i).
\end{array}$$

注意，第一行中的映射 $\times k\colon\ \mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q}\to\mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q}$ 是一个同构。若 k 为偶数，则第二行中的映射 $\times k\colon\ \mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$ 是零映射；若 k为奇数，则映射 $\times k\colon\ \mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$ 是一个同构。

由图表的正合性可立即得出，对于任意 $n\geq 1$,

$$\mathrm{K}_0(E_i;\mathbb{Z}_{2n})=\mathbb{Z}_2,\quad \mathrm{K}_1(E_i;\mathbb{Z}_{2n})=\mathbb{Z}_2$$

and

$$\mathrm{K}_0(E_i;\mathbb{Z}_{2n-1})=0,\quad \mathrm{K}_1(E_i;\mathbb{Z}_{2n-1})=0.$$

□

2.6. 现在我们定义

$$\lambda:\ \underline{\mathrm{K}}(E_1)\to\underline{\mathrm{K}}(E_2)$$

为上述命题中的恒等映射。

注意，根据 UCT（定理 1.18）和 UMCT（定理 1.20），K_*-群之间的每个同构都可以提升为相应 K-群之间的一个 Λ-同构。此外，λ 是从 $\mathrm{K}(E_1)$ 到 $\mathrm{K}(E_2)$ 的唯一分次同构,一其在 K_*-群上的限制为 id $\in\mathrm{Hom}(\mathrm{K}_*(E_1),\mathrm{K}_*(E_2))$。因此，$\lambda$ 自动就是一个 Λ-同构。

引理 2.7。 ([3, 推论 2。7]) 设 A,B 是具有稳定秩一和实秩零的核可分 C*-代数。假设 A 是含幺单的，B是稳定的，并且 $(\mathrm{K}_0(B),\mathrm{K}_0^+(B))$ 是弱无孔的（见定义 *1.21*）。设 e 是一个具有平凡指标映射的含幺本质扩张（见定义*1.12*）

$$0\to B\xrightarrow{\iota}E\xrightarrow{\pi}A\to 0.$$

那么，对于任意非零投影 $p\in E\backslash B$ 和任意投影 $q\in B$，我们有 $[\iota(q)]\leq[p]$ 属于 $\mathrm{K}_0(E)$。

定理 2.8. 设 A、B 是具有稳定秩一和实秩零的核可分 C* 代数。假设 A 是含幺单代数，B 是稳定代数，并且 $(\mathrm{K}_0(B),\mathrm{K}_0^+(B))$ 无孔。设 e 是一个指标映射平凡的含幺本质扩张

$$0\to B\xrightarrow{\iota}E\xrightarrow{\pi}A\to 0.$$

Then

$$\mathrm{K}_0^+(E) = ((\mathrm{K}_0(\pi))^{-1}(\mathrm{K}_0^+(A)\backslash\{0\})) \cup (\mathrm{K}_0(\iota)(\mathrm{K}_0^+(B))).$$

证明。 注意到

$$0 \to B \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

是 C*代数的含幺本质扩张，且指标映射平凡。由命题 1.11，可得 E 具有稳定秩一和实秩零。特别地，我们得到如下阿贝尔群正合列

$$0 \to \mathrm{K}_0(B) \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\iota)} \mathrm{K}_0(E) \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\pi)} \mathrm{K}_0(A) \to 0.$$

由于 ι， π 是同态，因此有

$$\mathrm{K}_0(\iota)(\mathrm{K}_0^+(B)) \subset \mathrm{K}_0^+(E)$$

并且由正合性可得，

$$\mathrm{K}_0^+(E) \subset ((\mathrm{K}_0(\pi))^{-1}(\mathrm{K}_0^+(A)\backslash\{0\})) \cup (\mathrm{K}_0(\iota)(\mathrm{K}_0(B))).$$

对于任意满足 $\mathrm{K}_0(\pi)(x) \in \mathrm{K}_0^+(A)\backslash\{0\}$ 的 $x \in \mathrm{K}_0(E)$，$\mathrm{K}_0(\pi)(x)$ 都可以提升为 $M_m(A)$ 中某个整数 m 对应的投影。考虑如下诱导扩张：

$$0 \to M_m(B) \xrightarrow{\iota} M_m(E) \xrightarrow{\pi} M_m(A) \to 0,$$

其中我们仍分别用 ι、 π表示诱导映射。由命题 1.11 (i)(c)，存在一个投影 $g \in M_m(E)$，使得

$$\mathrm{K}_0(\pi)([g]) = \mathrm{K}_0(\pi)(x) \in \mathrm{K}_0^+(A).$$

由正合性，存在投影 $p_0, q_0 \in M_m(B) \cong B$ 使得

$$[g] = x + [\iota(q_0)] - [\iota(p_0)] \in \mathrm{K}_0^+(E).$$

于是由引理 2.7，对于任意投影 $f \in M_m(B) \cong B$，我们有

$$[\iota(f)] \leq [g] = x + [\iota(q_0)] - [\iota(p_0)] \in \mathrm{K}_0^+(E).$$

特别地，我们取 $f \in M_m(B) \cong B$ 使得 $[f] = [q_0]$. 由于 E 具有投影消去性，我们得到

$$x - [\iota(p_0)] \in \mathrm{K}_0^+(E).$$

因此， $x \in \mathrm{K}_0^+(E)$. 也就是说，

$$(\mathrm{K}_0(\pi))^{-1}(\mathrm{K}_0^+(A)\backslash\{0\}) \subset \mathrm{K}_0^+(E).$$

注意到

$$(\mathrm{K}_0(\pi))^{-1}(0) = \mathrm{K}_0(\iota)(\mathrm{K}_0(B)).$$

任取 $y \in \mathrm{K}_0(B)$，其中 $\mathrm{K}_0(\iota)(y) \in \mathrm{K}_0^+(E)$。由于 E 具有稳定秩一，y 可在 $E \otimes \mathcal{K}$中实现为一个投影 h 。由于

$$\mathrm{K}_0(\pi)([1_E] - [h]) = [1_A] \in \mathrm{K}_0^+(A)\backslash\{0\},$$

正如我们刚才所示，我们得到

$$[1_E] - [h] = [1_E] - y \in \mathrm{K}_0^+(E).$$

于是，存在某个酉元 $u \in M_n(E)$，其中 n 为某个整数，使得 $uhu^* \in E$。由于 A 具有稳定秩一，因此 $[\pi(uhu^*)] = 0$ 推出 $\pi(uhu^*) = 0$，也就是说，根据正合性，$\iota^{-1}(uhu^*) \in B$ 实现了 y。现在我们有

$$((\mathrm{K}_0(\pi))^{-1}(0)) \cap \mathrm{K}_0^+(E) = \mathrm{K}_0(\iota)(\mathrm{K}_0^+(B)).$$

证明到此结束。

□

下面的命题是定理 2.8 的直接应用。

命题 2.9。对于每个 $i = 1, 2$，

$$\mathrm{K}_0^+(E_i) = \{(\frac{l}{k}, y) | k, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, y \in \mathbf{Q}\} \cup \{(0, y) | y \in \mathrm{K}_0^+(B_i)\}.$$

因此，

$$\mathrm{K}_0^+(E_1) \cong \mathrm{K}_0^+(E_2).$$

此外，对于每个 $i = 1, 2$，$(\mathrm{K}_0(E_i), \mathrm{K}_0^+(E_i))$ 是无挠的，且不是弱无孔的（见定义 1.21）。

现在来验证 $\lambda : \mathrm{K}(E_1) \to \underline{\mathrm{K}}(E_2)$ 是一个保序的、带尺度的 Λ-同构，这也是我们的主要结果之一：

定理 2.10. 我们有

$$(\underline{\mathrm{K}}(E_1), \underline{\mathrm{K}}(E_1)_+, [1_{E_1}]) \cong (\underline{\mathrm{K}}(E_2), \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+, [1_{E_2}]),$$

而 $E_1 \ncong E_2$。

证明。根据 2.6，由于 λ已经是一个 Λ-线性同构，我们只需验证 λ 也是一个保序同构。

给定任意一个

$$(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \in \underline{\mathrm{K}}(E_1)_+,$$

我们将证明

$$\lambda(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \in \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+.$$

根据 Dadarlat-Gong 序 1.3，我们有 $x \in \mathrm{K}_0^+(E_1)$、$\mathfrak{u} \in \mathrm{K}_1(I_x|E_1)$、$\mathfrak{s}_{n,0} \in \mathrm{K}_0(I_x|E_1; \mathbb{Z}_n)$ $\mathfrak{s}_{n,1} \in \mathrm{K}_1(I_x|E_1; \mathbb{Z}_n)$，其中 I_x 是由 x 生成的 $E_1 \otimes \mathcal{K}$ 的理想。注意，x、$\mathfrak{u}$、$\mathfrak{s}_{n,0}$、$\mathfrak{s}_{n,1}$ $(n \geq 1)$ 中至多有有限多个元素非零。

根据命题 2.9，我们有

$$x \in \mathrm{K}_0^+(E_1) = \{(\frac{l}{k}, y) \,|\, k, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, y \in \mathbf{Q}\} \cup \{(0, y) \,|\, y \in \mathrm{K}_0^+(B_1)\}.$$

我们考虑以下两种情况：

情形 1：若 $x \in \{(\frac{l}{k}, y) \,|\, k, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, y \in$ **有理数集**$\}$，则对于任意 $y' \in \mathrm{K}_0^+(B_1)$，都有 $x \geq (0, y') \in \mathrm{K}_0^+(E_1)$。因此，$I_x = E_1 \otimes \mathcal{K}$ (A_χ 是单的)。

由于 λ_0^0：$\mathrm{K}_0(E_1) \to \mathrm{K}_0(E_2)$ 是恒等映射，我们有 $I_{\lambda_0^0(x)} = E_2 \otimes \mathcal{K}$。$\lambda$ 是一个同构，当然我们有

$$\lambda(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \in \underline{\mathrm{K}}(E_2) = \underline{\mathrm{K}}(I_{\lambda_0^0(x)} \mid E_2).$$

情形 2：若 $x \in \{(0,\ y) \mid y \in \mathrm{K}_0^+(B_1)\}$, y 具有形式 $(a,\ \prod_{\mathbb{Z}} a_m) \in \mathrm{K}_0^+(B_1)$。

情形 2.1：若 $a = 0$，那么只有有限多个 a_m 非零。由 x 生成的理想 I_x在 $E_1 \otimes \mathcal{K}$中，恰好是由 $(a,\ \prod_{\mathbb{Z}} a_m)$ 在 B_1（B_1 中生成的理想（是稳定的），同构于有限个 $\mathcal{K}$ 的直和（参见 B_1 在 2.1中的构造）。于是自然嵌入映射 ι_{I_x}： $I_x \to E_1 \otimes \mathcal{K}$ 将诱导如下具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{K}_0(I_x) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_0(I_x) & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(I_x;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_1(I_x) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_1(I_x) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_{I_x})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_{I_x})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_{I_x};\mathbb{Z}_n)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_1(\iota_{I_x})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_1(\iota_{I_x})} \\
\mathrm{K}_0(E_1) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_0(E_1) & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(E_1;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_1(E_1) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_1(E_1),
\end{array}$$

也就是说

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{K}_0(I_x) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_0(I_x) & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(I_x;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\times n} & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_{I_x})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_{I_x})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_{I_x};\mathbb{Z}_n)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_1(\iota_{I_x})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_1(\iota_{I_x})} \\
\mathbb{Q} \oplus \mathbf{Q} & \xrightarrow{\times n} & \mathbb{Q} \oplus \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(E_1;\mathbb{Z}_n) & \xrightarrow{\beta_n^{0,E_1}} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\times n} & \mathbb{Z}_2.
\end{array}$$

在上述图中：当 n 为偶数（$n \geq 2$）时，映射 $\times n$： $\mathbb{Q} \oplus \mathbf{Q} \to \mathbb{Q} \oplus \mathbf{Q}$ 是同构，而映射 $\times n$： $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ 是零映射。由第二行的正合性可得 $\beta^0{}_n{}^{E_1}$: $\mathrm{K}_0(E_1;\mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}_2$ 是同构。因此，由交换性可知，$\mathrm{K}_0(\iota_{I_x};\mathbb{Z}_n)$ 是零映射；当 n 为奇数（$n \geq 1$）时，根据命题 2.5，我们得到 $\mathrm{K}_0(E_1;\mathbb{Z}_n) = 0$，因此 $\mathrm{K}_0(\iota_{I_x};\mathbb{Z}_n)$ 也是零映射。（$\mathrm{K}_1(\iota_{I_x};\mathbb{Z}_n)$ 始终是零映射，因为 $\mathrm{K}_1(I_x;\mathbb{Z}_n)$ 始终是零群。）

这意味着我们可以将 $\mathrm{K}(I_x \mid E_1)$ 与 $\mathrm{K}_0(I_x)$ 等同起来，尽管对于任意非零的 $x = (0,\ y)$，$\mathrm{K}(I_x)$ 所包含的信息都比 $\mathrm{K}_0(I_x)$ 更多。根据 Dadarlat-Gong 序 1.3，$(x,\ \mathfrak{u},\ \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,\,0},\ \mathfrak{s}_{n,\,1}))$ 的正性意味着所有 $\mathfrak{u},\ \mathfrak{s}_{n,\,0},\ \mathfrak{s}_{n,\,1}$ $(n \geq 1)$ 都为零，因此我们有

$$\lambda(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) = (\lambda_0^0(x), 0, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(0,0)) \in \underline{\mathrm{K}}(I_{\lambda_0^0(x)} \mid E_2).$$

情形 2.2：若 $a > 0$，则只有有限多个 a_m 为零。记由 I_x 在 a、$\prod_{\mathbb{Z}} a_m$中生成的理想 $E_1 \otimes \mathcal{K}$，它也是 B_1的一个理想。由 B_1 在 2.1中的构造可知，存在一个 C*-代数 R_1，它是与 $\mathcal{K}$ 的零项相对应的有限直和 $\prod_{\mathbb{Z}} a_m$，满足

$$B_1 = R_1 \oplus I_x.$$

类似地，考虑图表

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{K}_0(B_1) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_0(B_1) & \to & \mathrm{K}_0(B_1;\mathbb{Z}_n) & \to & \mathrm{K}_1(B_1) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_1(B_1) & \to & \mathrm{K}_1(B_1;\mathbb{Z}_n) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_1;\mathbb{Z}_n)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_1(\iota_1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_1(\iota_1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_1(\iota_1;\mathbb{Z}_n)} \\
\mathrm{K}_0(E_1) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_0(E_1) & \to & \mathrm{K}_0(E_1;\mathbb{Z}_n) & \to & \mathrm{K}_1(E_1) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_1(E_1) & \to & \mathrm{K}_1(B_1;\mathbb{Z}_n),
\end{array}$$

其中

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{Z} & \xrightarrow{\times n} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(B_1;\mathbb{Z}_n) & \xrightarrow{\beta_n^{0,B_1}} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\times n} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\rho_n^{1,B_1}} & \mathrm{K}_1(B_1;\mathbb{Z}_n) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_1)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_1;\mathbb{Z}_n)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_1(\iota_1;\mathbb{Z}_n)} \\
\mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q} & \xrightarrow{\times n} & \mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(E_1;\mathbb{Z}_n) & \xrightarrow{\beta_n^{0,E_1}} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\times n} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\rho_n^{1,E_1}} & \mathrm{K}_1(E_1;\mathbb{Z}_n).
\end{array}$$

（回顾 2.3 中的构造，我们取 $\mathrm{K}_1(\iota_1) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$。）在上图中：当 n 为奇数时，根据命题 2.5，我们有 $\mathrm{K}_0(E_1;\mathbb{Z}_n) = 0$，且 $\mathrm{K}_1(E_1;\mathbb{Z}_n) = 0$。因此，$\mathrm{K}_0(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 和 $\mathrm{K}_1(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 都自动是满射。当 n 为偶数（$n \geq 2$）时，映射 $\times n : \mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q} \to \mathbb{Q}\oplus\mathbf{Q}$ 和 $\times n : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ 是同构，而 $\times n : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ 是单射。由两行的正合性可知，β^0、$_n{}^{E_1}$、ρ^1、$_n{}^{E_1}$、ρ^1、$_n{}^{B_1}$ 都是同构，且 β^0、$_n{}^{B_1}$ 是满射。由交换性可知，$\mathrm{K}_0(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 和 $\mathrm{K}_1(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 都是满射。

现在，对任意 $n \geq 1$，如我们在情形 2.1 中讨论的，$\mathrm{K}_0(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 在 $\mathrm{K}_0(R_1;\mathbb{Z}_n)$ 上的限制以及 $\mathrm{K}_1(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 在 $\mathrm{K}_1(R_1;\mathbb{Z}_n)$ 上的限制都是零映射，这意味着 $\mathrm{K}_0(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 在 $\mathrm{K}_0(I_x;\mathbb{Z}_n)$ 上的限制以及 $\mathrm{K}_1(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 在 $\mathrm{K}_1(I_x;\mathbb{Z}_n)$ 上的限制都是满射。还要注意，$\mathrm{K}_1(\iota_1)$ 在 $\mathrm{K}_1(I_x)$ 上的限制也是满射。也就是说，

$$\underline{\mathrm{K}}(B_1 \mid E_1) = \underline{\mathrm{K}}(R_1 \oplus I_x \mid E_1) = \underline{\mathrm{K}}(R_1 \mid E_1) \oplus \underline{\mathrm{K}}(I_x \mid E_1).$$

与情形 2.1 的证明类似，我们可以将 $\mathrm{K}(R_1 \mid E_1)$ 与 $\mathrm{K}_0(R_1)$ 等同。这意味着，对于任意选取的 $\mathfrak{v} \in \mathrm{K}_1(E_1)\mathfrak{t}_{n,0} \in \mathrm{K}_0(E_1;\mathbb{Z}_n)\mathfrak{t}_{n,1} \in \mathrm{K}_1(E_1;\mathbb{Z}_n)$，我们总有

$$(x, \mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1})) \in \underline{\mathrm{K}}(I_x \mid E_1)$$

是关于 Dadarlat-Gong 序的正元素1.3。

由于 $\lambda_0^0 : \mathrm{K}_0(E_1) \to \mathrm{K}_0(E_2)$ 是恒等映射，对 $\lambda_0^0(x)$ 和 E_2 进行相同的操作，我们得到

$$\lambda(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) = (\lambda_0^0(x), \lambda_0^1(\mathfrak{u}), \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^0(\mathfrak{s}_{n,0}), \lambda_n^1(\mathfrak{s}_{n,1}))) \in \underline{\mathrm{K}}(I_{\lambda_0^0(x)} \mid E_2)$$

是 $\mathrm{K}(E_2)$ 中的正元素。

结合情形 1、情形 2.1 和情形 2.2，由 1.3，λ 保 Dadarlat-Gong 序。反向结论同理。

一般而言，我们有

$$(\underline{\mathrm{K}}(E_1), \underline{\mathrm{K}}(E_1)_+, [1_{E_1}]) \cong (\underline{\mathrm{K}}(E_2), \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+, [1_{E_2}]).$$

更直接地，我们有：$(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1}))$ 为正，当且仅当满足以下条件之一：

(1) $x = (\frac{l}{k},\ y)$ 和 $\frac{l}{k} > 0$; (2) $x = (0,\ y)$, $y = (a,\ \prod_{\mathbb{Z}} a_m) \in \mathrm{K}_0^+(B_i)$ 和 $a > 0$; (3) $x = (0,\ y)$, $y = (0,\ \prod_{\mathbb{Z}} a_m) \in \mathrm{K}_0^+(B_i)$, $\mathfrak{u} = 0$, $\mathfrak{s}_{n,\ 0} = 0$, $\mathfrak{s}_{n,\ 1} = 0$ 对所有$n \geq 1$均成立。

由于 E_1, E_2 是实秩零且稳定秩一的可分 C*-代数，它们的所有理想均由投影生成。根据命题 2.9，我们指出 B_1, B_2 分别是 E_1, E_2的唯一极大理想，这意味着

$$E_1 \ncong E_2.$$

否则，假设存在一个从 E_1 到 E_2的同构，它必将唯一极大理想 B_1 映射到与唯一极大理想B_2同构的理想。然而， $B_1 \ncong B_2$，这就产生了矛盾。

□

注 2.11。 现在我们已经证明，总 K-理论无法区分E_1 和 E_2，因此猜想 0.1 并不成立。回顾2.3中的构造，我们选取的扩张不是纯扩张，且 E_1、 E_2 不是 K-纯扩张，因此总 K-理论无法充分反映理想的结构。在“K-纯”的设定下，这种情况不会发生。可以预期，对于 K-纯代数，实秩零 C*-代数的 Elliott 猜想可能成立。在最后一节中，我们将使用一种称为总 Cuntz 半群的新不变量来区分 E_1、 E_2 并对非 K-纯扩张进行分类。这为以下观点提供了证据：总 Cuntz 半群可能是稳定秩一且实秩零的可分核 C*-代数的完全不变量。

3. K-pureness and total K-theory

本节将阐述 K-纯扩张和 K-纯 C*-代数的一些基本性质。

引理 3.1. 给定一个 $extension$ 的C*-代数

$$e: \quad 0 \to B \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \to 0,$$

以下陈述等价：

(i) e 是一个K-纯扩张；

(ii) 对任意 $n \geq 0$，序列

$$0 \to \mathrm{K}_*(B; \mathbb{Z}_n) \to \mathrm{K}_*(E; \mathbb{Z}_n) \to \mathrm{K}_*(A; \mathbb{Z}_n) \to 0$$

都是正合的；

(iii) 对任意 $n \geq 0$, $j = 0,\ 1$, $\mathrm{K}j(\iota;\ \mathbb{Z}_n)$ 是单射映射，即 $\mathrm{K}(\iota)$ 是单射；

(iv) 对任意 $n \geq 0$, $j = 0,\ 1$, $\mathrm{K}j(\pi;\ \mathbb{Z}_n)$ 是满射映射，即 $\mathrm{K}(\pi)$ 是满射；

(v) 该序列

$$0 \to \underline{\mathrm{K}}(B) \to \underline{\mathrm{K}}(E) \to \underline{\mathrm{K}}(A) \to 0$$

是正合的。

证明。 对于任意 $n \geq 0, j = 0, 1,$ 由下列正合列

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{K}_j(B;\mathbb{Z}_n) & \xrightarrow{\mathrm{K}_j(\iota;\mathbb{Z}_n)} & \mathrm{K}_j(E;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_j(A;\mathbb{Z}_n) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \mathrm{K}_{1-j}(A;\mathbb{Z}_n) & \xleftarrow{\mathrm{K}_{1-j}(\pi;\mathbb{Z}_n)} & \mathrm{K}_{1-j}(E;\mathbb{Z}_n) & \longleftarrow & \mathrm{K}_{1-j}(B;\mathbb{Z}_n), \end{array}$$

$\mathrm{K}j(\iota;\mathbb{Z}_n)$ 是单射，当且仅当 $\mathrm{K}1-j(\pi;\mathbb{Z}_n)$ 是满射。

因此，(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) 是平凡的。可以看到 [2, 引理 5。6]或[17, 第 4] 对 (i) $\Rightarrow$ (ii)。现在证明 (iii) $\Rightarrow$ (i)。

对于 $n = 0,$ 下列为正合列：

$$0 \to \mathrm{K}_*(B) \to \mathrm{K}_*(E) \to \mathrm{K}_*(A) \to 0.$$

我们需要证明该序列是纯正合的（参见定义 1.7）。

对于任意 $n \geq 1,$ 考虑如下正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{K}_j(B) & \xrightarrow{\times n} & \mathrm{K}_j(B) & \xrightarrow{\rho_j^B} & \mathrm{K}_j(B;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_{1-j}(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_j(\iota)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_j(\iota)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_j(\iota;\mathbb{Z}_n)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_{1-j}(\iota)} \\ \mathrm{K}_j(E) & \xrightarrow[\times n]{} & \mathrm{K}_j(E) & \xrightarrow[\rho_j^E]{} & \mathrm{K}_j(E;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_{1-j}(E), \end{array}$$

其中 $j = 0, 1$。

由于显然 $n \times \mathrm{K}j(\iota)(\mathrm{K}j(B)) \subset \mathrm{K}j(\iota)(\mathrm{K}j(B)) \cap (n \times \mathrm{K}j(E))$，我们只需验证

$$n \times \mathrm{K}_j(\iota)(\mathrm{K}_j(B)) \supset \mathrm{K}_j(\iota)(\mathrm{K}_j(B)) \cap (n \times \mathrm{K}_j(E)).$$

对于任意 $\tilde{y} \in \mathrm{K}j(\iota)(\mathrm{K}j(B)) \cap (n \times \mathrm{K}j(E))$，存在 $x \in \mathrm{K}j(B)$ 和 $y \in \mathrm{K}j(E)$，使得

$$\mathrm{K}_j(\iota)(x) = \tilde{y} \quad \text{and} \quad ny = \tilde{y}.$$

由第二行的正合性可知，$\rho_j^E(\tilde{y}) = 0 = \rho_j^E(\mathrm{K}j(\iota)(x))$。交换性意味着

$$\mathrm{K}_j(\iota;\mathbb{Z}_n) \circ \rho_j^B(x) = 0.$$

根据假设，$\mathrm{K}j(\iota;\mathbb{Z}_n)$ 是一个单射，这意味着 $\rho_j^B(x) = 0$。由第一行的正合性可知，存在一个 $\tilde{x} \in \mathrm{K}j(B)$，使得 $n\tilde{x} = x$.现在我们有

$$\tilde{y} = \mathrm{K}_j(\iota)(x) = \mathrm{K}_j(\iota)(n\tilde{x}) = n \times \mathrm{K}_j(\iota)(\tilde{x}) \in n \times \mathrm{K}_j(\iota)(\mathrm{K}_j(B)).$$

证明到此结束。

□

注 3.2. 设 I 是 A 的一个理想。那么 $0 \to I \xrightarrow{\iota} A \to A/I \to 0$ 是一个扩张。由引理 3.1 可知，如果 I 在 A 中是 K-纯的，这意味着当我们通过 K(ι) 检查 K(I) 在 K(A) 中的像时，所有信息都得以保留（K(ι) 是单射）；相反，如果 I 在 A 中不是 K-纯的，那么当我们只关注 K(A) 时，包含在 ker(K(ι)) 中的信息就会丢失。特别地，对于 2.3 中非 K-纯代数 E_1、$\overline{E_2}$，K(B_1) 和 K(B_2) 的一些关键刻画分别会在 $\underline{\mathrm{K}}(E_1)$ 和 $\underline{\mathrm{K}}(E_2)$ 中丢失。

定理 3.3. 若 A 是一个 K-纯 C*-代数，则对于 A 的任意理想 I，I 和 A/I 都是 K-纯C*-代数。

证明。 任取 I 的一个理想 I'，I' 也是 A 的一个理想。根据假设，I' 和 I 在 A 中都是 K-纯的。考虑下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{K}}(I) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_{IA})} & \underline{\mathrm{K}}(A). \\ \uparrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{K}}(\iota_{I'I})} & \nearrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{K}}(\iota_{I'A})} & \\ \underline{\mathrm{K}}(I') & & \end{array}$$

引理 3.1 (iii) 蕴含 K(ι_{IA}) 和 $\underline{\mathrm{K}}(\iota_{I'A})$ 都是单射，则 K($\iota_{I'I}$) 是单射。再次应用引理3.1 (iii)，可得 I' 在 I 中是 K-纯的。于是I 是一个 K-纯 C*-代数。

关于 A/I 的证明类似，只需利用满射性和引理 3.1 (iv)。□

推论 3.4. 设 A、B、C 是 C*-代数。若 A 在 B 中是K-纯的，且 B 在 C 中是K-纯的，则 A 在 C 中是K-纯的。

推论 3.5. 若 $A_1 \xrightarrow{\psi_{1,2}} A_2 \xrightarrow{\psi_{2,3}} A_3 \to \cdots$ 是由K-纯的 C*-代数组成的归纳系统，其归纳极限为 A，则 A 是K-纯的。

证明。 对每个 $n \geq 1$，记由 A_n 到 A 的诱导映射为 ψ_n。给定 A 的任意理想 I，我们有如下归纳系统

$$I_1 \xrightarrow{\psi'_{1,2}} I_2 \xrightarrow{\psi'_{2,3}} I_3 \to \cdots,$$

其中 $I_n = \psi_n^{-1}(I)$ 是 A_n 的一个理想，$\psi'_{n,\,n+1}$ 是限制映射。于是，$I = \varinjlim(I_n, \psi'_{n,\,n+1})$。由于每个 I_n 在 A_n 中都是 K-纯的，根据引理 3.1 (iii)，利用 K(I) 和 K(A) 均为代数归纳极限这一事实，不难验证 I 在 A 中是 K-纯的。由此可得，A 是 K- 纯的。

□

定理 3.6。 设 A, B 为K-纯C*代数。那么，对于任意K-纯扩张

$$0 \to B \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} A \to 0,$$

我们有 E 是一个K-纯 C*-代数。

证明。我们将 B 视为其在 E 中的像，并将 A 视为 E/B。任取 E 的一个理想 I。对于任意 $n \geq 0$、$j = 0, 1$，由自然嵌入映射诱导出如下正合行构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{K}_{1-j}(I_1;\mathbb{Z}_n) & \rightarrowtail & \mathrm{K}_j(I\cap B;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_j(I;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_j(I_1;\mathbb{Z}_n) & \twoheadrightarrow & \mathrm{K}_{1-j}(I\cap B;\mathbb{Z}_n) \\
\cong\downarrow & & \mathrm{K}_j(\iota_1;\mathbb{Z}_n)\downarrow & & \mathrm{K}_j(\iota_2;\mathbb{Z}_n)\downarrow & & \cong\downarrow & & \mathrm{K}_{1-j}(\iota_1;\mathbb{Z}_n)\downarrow \\
\mathrm{K}_{1-j}(I_2;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_j(B;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_j(I+B;\mathbb{Z}_n) & \twoheadrightarrow & \mathrm{K}_j(I_2;\mathbb{Z}_n) & \longrightarrow & \mathrm{K}_{1-j}(B;\mathbb{Z}_n),
\end{array}$$

其中 $I_1 := I/(I\cap B)$，$I_2 := (I+B)/B$，$\iota_1 : I\cap B \to B$ 和 $\iota_2 : I \to I+B$。

由于 B 是 K-纯的，因此 $I\cap B$ 在 B中是 K-纯的。由引理 3.1，$\mathrm{K}_0(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 和 $\mathrm{K}_1(\iota_1;\mathbb{Z}_n)$ 都是单射。利用五引理的弱形式，可得 $\mathrm{K}_j(\iota_2;\mathbb{Z}_n)$ 是单射。再次由引理 3.1，I 在 $I+B$ 中是 K- 纯的。

考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\iota} & E & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \mathrm{id}\downarrow & & \pi_{AA'}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I+B & \longrightarrow & E & \xrightarrow[\pi_{EA'}]{} & A' & \longrightarrow & 0\,,
\end{array}$$

其中 $A' := E/(I+B) \cong A/I_2$ 和 $\pi_{AA'}$, $\pi_{EA'}$ 分别是相对商映射。

由于 B 在 E 中是 K-纯的，且 I_2 在 A中是 K-纯的，由引理 3.1，对于任意$n \geq 0$, $j = 0, 1$，我们有 $\mathrm{K}_j(\pi;\mathbb{Z}_n)$ 和 $\mathrm{K}_j(\pi_{AA'};\mathbb{Z}_n)$ 都是满射。因此，复合映射 $\mathrm{K}_j(\pi_{EA'};\mathbb{Z}_n)$ 也是满射。同样由引理 3.1，可得 $I+B$ 在 E 中是 K-纯的。由推论 3.4，I 在 E中是 K-纯的。一般而言，E 是 K-纯的。□

4. Classification: K-pure extension

本节给出由 K-纯扩张产生的 K-纯代数类的分类定理。主要结果是定理4.8。

我们称 C*-代数的一个类 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{DG}$ 类，若 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{N}$ 的一个子类，由某些 K-纯、核、可分的实秩零且稳定秩一的 C*-代数组成，其 K_0-群是弱无孔的，并且 $\mathcal{R}$ 可通过带尺度的总 K-理论与 Dadarlat-Gong 序进行分类。（这里，我们要求不变量之间的每个同构都能提升为代数之间的同构。）

因此，对于一个 $\mathcal{DG}$ 类，相应情形下将满足 UCT、UMCT 和定理 1.22 。

给定一个阿贝尔群扩张

$$e: \quad 0 \to K \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} H \to 0$$

容易看出，以下条件等价：

(i) e is pure exact, i.e., $n \times \iota(K) = \iota(K) \cap (n \times G)$ for every $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\iota(K)$ 是 G 的相对可除子群，即对于每个 $n \in \mathbb{N}$，如果 h 在 G 中可被 n 整除，那么 $h \in \iota(K)$ 在 $\iota(K)$ 中可被 n 整除。

注意，若 A 是稳定秩一且实秩零的可分 C*-代数，则存在自然同构 ϕ: Lat(A) $\cong$ Lat(K$_*$(A))，其中 Lat(A) 是 A 的理想格，Lat(K$_*$(A)) 是 (K$_*$(A), K$_*^+$(A)) 的序理想格，并且 $\phi(I)$ = (K$_*$(I),K$_*^+$(I))。结合命题 4.1 (iii)] 和定理 4.28], 的第 3 段，我们得到:

命题 4.1。设 A 是稳定秩一且实秩零的可分C*-代数，则以下条件等价:

(i) (K$_*$(A),K$_*^+$(A)) 是弱无孔的（参见定义 *1.21*）；*(ii)* (K$_0$(A),K$_0^+$(A)) 是弱无孔的，且 A 是 K-纯。

众所周知，实秩零 A$\mathcal{HD}$ 代数的 K$_*$-群是弱无孔的，因为 A$\mathcal{HD}$ 代数的构件的 K$_*$-群均为弱无孔。结合以下定理可知，实秩零 A$\mathcal{HD}$ 代数构成一个 $\mathcal{DG}$-类。

定理 4.2. ([18, 定理 9.1，注 9.3]) 设 A、B 是两个实秩零 $A\mathcal{HD}$代数。假设存在一个有序标度群的同构

$$\alpha : (\underline{\mathrm{K}}(A), \underline{\mathrm{K}}(A)_+, \Sigma A) \to (\underline{\mathrm{K}}(B), \underline{\mathrm{K}}(A)_+, \Sigma B)$$

保持 *Bockstein* 运算的作用，即 α 是一个有序标度群 Λ-同构。那么存在一个 $*$-同构 φ : $A \to B$，使得K(φ) = α。

—

命题 4.3. 设 A_1、A_2 是 $\mathcal{N}$中的单代数。那么对于任意

$$\alpha^* : (\mathrm{K}_*(A_1), \mathrm{K}_*^+(A_1)) \cong (\mathrm{K}_*(A_2), \mathrm{K}_*^+(A_2)),$$

存在一个

$$\underline{\alpha} : (\underline{\mathrm{K}}(A_1), \underline{\mathrm{K}}(A_1)_+) \cong (\underline{\mathrm{K}}(A_2), \underline{\mathrm{K}}(A_2)_+)$$

其限制为 α^*。

证明。由 UCT（定理 1.18），存在一个 KK-等价 $\alpha \in \mathrm{KK}(A_1, A_2)$，它诱导给定的

$$\alpha^* : (\mathrm{K}_*(A_1), \mathrm{K}_*^+(A_1)) \cong (\mathrm{K}_*(A_2), \mathrm{K}_*^+(A_2)).$$

由 UMCT（定理 1.20）（另见1.2），记 α 为 α 在 Hom$_\Lambda$(K(A_1), K(A_2)) 中的自然像，它是一个 Λ-同构。

由于 A_1 和 A_2 是单的，Dadarlat-Gong 序仅取决于正锥 K$_0^+$(A_1) 和 K$_0^+$(A_2)，这意味着 α 是一个保序的 Λ-同构。 —

□

引理 4.4。 设 A_1、 A_2、 B_1、 $B_2 \in \mathcal{R}$，其中 $\mathcal{R}$ 是C*-代数的一个 $\mathcal{DG}$-类。假设 A_1、 A_2 是含幺单的， B_1、 B_2 是稳定的。给定两个C*-代数的含幺本质扩张

$$e_i \ : \ 0 \to B_i \xrightarrow{\iota_i} (E_i, 1_{E_i}) \xrightarrow{\pi_i} (A_i, 1_{A_i}) \to 0, \quad i = 1, 2$$

对于平凡指标映射，若我们有一个保序同构

$$\alpha : (\mathrm{K}_0(E_1), \mathrm{K}_0^+(E_1), [1_{E_1}]) \to (\mathrm{K}_0(E_2), \mathrm{K}_0^+(E_2), [1_{E_2}]),$$

那么我们便得到如下自然的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(B_1) & \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\iota_1)} & (\mathrm{K}_0(E_1), [1_{E_1}]) & \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\pi_1)} & (\mathrm{K}_0(A_1), [1_{A_1}]) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(B_2) & \xrightarrow[\mathrm{K}_0(\iota_2)]{} & (\mathrm{K}_0(E_2), [1_{E_2}]) & \xrightarrow[\mathrm{K}_0(\pi_2)]{} & (\mathrm{K}_0(A_2), [1_{A_2}]) & \longrightarrow & 0 \ , \end{array}$$

其中 α_0、 α_1 均为带尺度的保序同构。

证明。 我们首先证明，对于任意投影 $p \in B_1$，都有

$$\mathrm{K}_0(\pi_2) \circ \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) = 0.$$

假设 $\mathrm{K}_0(\pi_2) \circ \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) \neq 0$. 由于 A_2 是单且含幺的，因此存在一个足够大的整数 n 满足

$$3 \times [1_{A_2}] \leq n \times \mathrm{K}_0(\pi_2) \circ \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) \ \text{ in } \mathrm{K}_0(A_2).$$

注意到 E_2 具有实秩零。由命题 1.11 (i)(c)，存在一个非零投影 $s \in E_2 \otimes \mathcal{K}$ 使得

$$\mathrm{K}_0(\pi_2)([s]) = n \times \mathrm{K}_0(\pi_2) \circ \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) - 2 \times [1_{A_2}] \in \mathrm{K}_0^+(A_2).$$

因此，

$$\mathrm{K}_0(\pi_2)(n \times \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) - 2[1_{E_2}]) = \mathrm{K}_0(\pi_2)([s]),$$

由第二行的正合性，存在投影 f， $g \in B_2$ 使得

$$[s] = n \times \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) - 2[1_{E_2}] + \mathrm{K}_0(\iota_2)([f]) - \mathrm{K}_0(\iota_2)([g]) \in \mathrm{K}_0^+(E_2),$$

由于扩张 e_1 是含幺的，且 B_1 是稳定的，我们有 $n \times \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) \precsim [1_{E_1}]$。于是

$$n \times \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) \leq \alpha([1_{E_1}]) = [1_{E_2}].$$

由于扩张 e_2 是含幺的，且 B_2 是稳定的，我们有

$$-[1_{E_2}] + \mathrm{K}_0(\iota_2)([f]) \in -\mathrm{K}_0^+(E_2).$$

Then

$$n \times \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) - 2[1_{E_2}] + \mathrm{K}_0(\iota_2)[f] \in -\mathrm{K}_0^+(E_2),$$

$[s] = n \times \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) - 2[1_{E_2}] + \mathrm{K}_0(\iota_2)([f]) - \mathrm{K}_0(\iota_2)([g]) \in -\mathrm{K}_0^+(E_2)$。

因此有 $[s] = 0$，从而，

$$n \times \mathrm{K}_0(\pi_2) \circ \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) = 2 \times [1_{A_2}],$$

这就导致矛盾。

现在，由第二行的正合性，存在唯一的元素 $[t] \in \mathrm{K}_0^+(B_2)$，使得 $\mathrm{K}_0(\iota_2)([t]) = \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p])$。记 α_0 为相应映射的格罗滕迪克映射

$$[p] \mapsto [t].$$

那么， α_0 是从 $\mathrm{K}_0(B_1)$ 到 $\mathrm{K}_0(B_2)$ 的单射保序同态。注意， α 是一个同构；对 α^{-1} 采用相同的步骤，可得 α_0 是一个保序同构。

最后，我们指出，命题 1.11 (i)(c) 保证诱导映射 α_1 也是一个保序同构。

□

推论 4.5. 设 A_1、A_2、B_1、$B_2 \in \mathcal{R}$，其中 $\mathcal{R}$ 是 C^* 代数的一个 $\mathcal{DG}$-类。假设 A_1、A_2 是含幺单的， B_1、B_2 是稳定的。给定两个K-纯含幺本质扩张

$$e_i \ : \ 0 \to B_i \xrightarrow{\iota_i} (E_i, 1_{E_i}) \xrightarrow{\pi_i} (A_i, 1_{A_i}) \to 0, \quad i = 1, 2,$$

如果我们有一个保序且保尺度的 Λ-同构

$$\alpha : (\underline{\mathrm{K}}(E_1), \underline{\mathrm{K}}(E_1)_+, [1_{E_1}]) \to (\underline{\mathrm{K}}(E_2), \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+, [1_{E_2}]),$$

那么我们得到如下具有正合行的自然交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B_1) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(E_1), [1_{E_1}]) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\pi_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(A_1), [1_A]) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B_2) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\iota_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(E_2), [1_{E_2}]) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\pi_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(A_2), [1_A]) & \longrightarrow & 0 \ ,
\end{array}$$

其中 α_0、α_1 也是有序带尺度的 Λ-同构。

证明。 根据假设，我们有以下正合行构成的图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B_1) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(E_1), [1_{E_1}]) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\pi_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(A_1), [1_A]) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B_2) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\iota_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(E_2), [1_{E_2}]) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\pi_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(A_2), [1_A]) & \longrightarrow & 0 \ ,
\end{array}$$

其中 α 是有序带尺度的 Λ-同构。

对于 $(x, \bar{x}) \in \mathrm{K}(\underline{B_1})_+$ 且 $x \in \mathrm{K}_0^+(B_1)$，由引理 4.4，可得

$$\underline{\mathrm{K}}(\pi_2) \circ \alpha \circ \underline{\mathrm{K}}(\iota_1)(x, 0) = (0, 0).$$

根据 Dadarlat-Gong 序 1.3，可得

$$(x, \bar{x}) \in \underline{\mathrm{K}}(I_x \mid B_1).$$

由于 $\mathrm{K}(\underline{\iota_1})$ 和 α 都是保序映射，我们有

$$(y, \bar{y}) =: \alpha \circ \underline{\mathrm{K}}(\iota_1)(x, \bar{x}) \in \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+.$$

由于 $\underline{\mathrm{K}}(\pi_2)$ 也是保序映射，我们有

$$\underline{\mathrm{K}}(\pi_2)(y,\overline{y}) = (0,w) \in \underline{\mathrm{K}}(A_2)_+.$$

于是我们有 $w = 0$。

由 $\mathrm{K}(\iota_2)$ 的单射性，记

$$(z,\overline{z}) =: \underline{\mathrm{K}}(\iota_2)^{-1}(y,\overline{y}).$$

注意，z、y 都是 K_0-群中的正元素，记 I_z，I_y 分别为 B_2 和 E_2 中由 z、y 生成的理想。根据假设，ι_2 是单射，且 $\iota_2(I_z)$ 是 E_2 中的理想，于是由事实 $\mathrm{K}_0(\iota_2)(z) = y$ 可得$\iota_2(I_z) = I_y$，因此有 $\iota_{2I_zI_y} =: \iota_2|_{I_z\to I_y}$ 是一个同构。

现在我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{K}}(I_z) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_{2I_zI_y})} & \underline{\mathrm{K}}(I_y) \\ {\scriptstyle \underline{\mathrm{K}}(\iota_{I_zB_2})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{K}}(\iota_{I_yE_2})} \\ \underline{\mathrm{K}}(B_2) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\iota_2)]{} & \underline{\mathrm{K}}(E_2)\ , \end{array}$$

其中 $\iota_{I_zB_2}$，$\iota_{I_yE_2}$ 是自然包含映射。

由于 $(y,\overline{y}) \in \underline{\mathrm{K}}(I_y \mid E_2)$，因此存在 $(0,\widehat{y}) \in \mathrm{K}(I_y)$、$(0,\widehat{z}) \in \mathrm{K}(I_z)$，使得

$$\underline{\mathrm{K}}(\iota_{I_yE_2})(0,\widehat{y}) = (0,\overline{y}) \quad \text{and} \quad (0,\widehat{z}) = \underline{\mathrm{K}}(\iota_{2I_zI_y})^{-1}(0,\widehat{y}).$$

由交换性可得

$$\underline{\mathrm{K}}(\iota_2) \circ \underline{\mathrm{K}}(\iota_{I_zB_2})(0,\widehat{z}) = (0,\overline{y}).$$

由 $\mathrm{K}(\iota_2)$ 的单射性，$\mathrm{K}(\iota_{I_zB_2})(0,\widehat{z}) = (0,z)$，即 $(z,\bar{z}) \in \mathrm{K}(I_z|B_2)$，因此 $(z,\bar{z}) \in \mathrm{K}(B_2)_+$。

采用引理 4.4 中的类似论证并应用定理 1.6，可知下述映射的格罗滕迪克映射 α_0

$$(x,\overline{x}) \mapsto (z,\overline{z})$$

是从 $\mathrm{K}(B_1)$ 到 $\mathrm{K}(B_2)$ 的保序同构。注意到 A_1, A_2 是单的，总 K-理论上的序由 K_0-群的正锥决定。类似地，我们可以得到所需的保序同构 α_1。

此外，由于两个扩张 e_1，e_2 都是 K-纯的，根据定理 3.6，我们有 E_1, E_2 也都是 K-纯的。然后根据引理 3.1 (iii)，对于每个 $i = 1, 2$，$\mathrm{K}(B_i)$ 可视为通过 $\mathrm{K}(E_i)$ 嵌入 $\mathrm{K}(\iota_i)$ 的子 Λ-模，并且α_0 确实是一个保序的、保持尺度的 Λ-同构；诱导映射 α_1 也如此。□

定义 4.6。设 A, B 是C*-代数。称 e_1 和 e_2 是 A 由 B 扩张得到的两个弱同构扩张，记作 $e_1 \simeq_w e_2$，若存在

同构 ψ_0, ψ, ψ_1 使下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} e_1: & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \psi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_1} & & \\ e_2: & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

定理 4.7。 设 $A, B \in \mathcal{R}$，其中 $\mathcal{R}$ 是C*-代数的一个 $\mathcal{DG}$-类。假设 A 是含幺单的， B 是稳定的。给定两个K-纯扩张，它们是C*-代数的含幺本质扩张

$$e_i \ : \ 0 \to B \xrightarrow{\iota_i} E_i \xrightarrow{\pi_i} A \to 0, \quad i = 1, 2.$$

以下陈述等价:

(i) $E_1 \cong E_2$; (ii) e_1 且 e_2 弱同构; (iii) $(\mathrm{K}(E_1), \mathrm{K}(E_1)_+, [1_{E_1}]) \cong (\mathrm{K}(E_2), \mathrm{K}(E_2)_+, [1_{E_2}])$。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii): 给定一个同构 $\psi : E_1 \to E_2$，根据引理 4.4的证明，对于任意投影 $p \in B$，有

$$\mathrm{K}_0(\pi_2) \circ \alpha \circ \mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) = [\pi_2 \circ \psi \circ \iota_1(p)] = 0.$$

由于 A 的稳定秩为一，因此 $\pi_2 \circ \psi \circ \iota_1(p) = 0$。由正合性，存在唯一的投影 $p' \in B$，使得 $\iota_2(p') = \psi \circ \iota_1(p)$，也就是说，对于$\psi \circ \iota_1(p)$，我们可以定义 $p' = \iota_2^{-1}(\psi \circ \iota_1(p))$。于是 $\iota_2^{-1} \circ \psi \circ \iota_1$ 是 B中投影之间的一个双射。由于 B 由其投影生成，因此$\iota_2^{-1} \circ \psi \circ \iota_1$ 是 B 上的一个自同构，记作 ψ_0。由此可得到 A 上的一个诱导自同构 ψ_1，并且下图交换。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_1} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 平凡。 (iii) $\Rightarrow$ (i): 给定一个含幺保序的 Λ-同构 α。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(E_1), [1_{E_1}]) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\pi_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(A), [1_A]) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\iota_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(E_2), [1_{E_2}]) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\pi_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(A), [1_A]) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

根据推论 4.5以及 $\mathcal{DG}$ 类的定义，我们有两个同态ψ_0， ψ_1 使得下图为交换图，且各行正合

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(E_1),[1_{E_1}]) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\pi_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(A),[1_A]) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{K}}(\psi_0)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{K}}(\psi_1)} & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\iota_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(E_2),[1_{E_2}]) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\pi_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(A),[1_A]) & \longrightarrow & 0\ , \end{array}$$

可转化为

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(E_1),[1_{E_1}]) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\psi_1\circ\pi_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(A),[1_A]) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\iota_2\circ\psi_0)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(E_2),[1_{E_2}]) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\pi_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(A),[1_A]) & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

限制在 K_* 上，我们有

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*(B) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\iota_1)} & (\mathrm{K}_*(E_1),[1_{E_1}]) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\psi_1\circ\pi_1)} & (\mathrm{K}_*(A),[1_A]) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*(B) & \xrightarrow[\mathrm{K}_*(\iota_2\circ\psi_0)]{} & (\mathrm{K}_*(E_2),[1_{E_2}]) & \xrightarrow[\mathrm{K}_*(\pi_2)]{} & (\mathrm{K}_*(A),[1_A]) & \longrightarrow & 0\ , \end{array}$$

其中 α^* 是 α 的限制映射。

由定理 1.22，具有平凡指标映射的含幺本质扩张

$$0 \to B \xrightarrow{\iota_1} E_1 \xrightarrow{\psi_1\circ\pi_1} A \to 0$$

and

$$0 \to B \xrightarrow{\iota_2\circ\psi_0} E_2 \xrightarrow{\pi_2} A \to 0$$

强酉等价。由命题 1.16，我们有 $E_1 \cong E_2$。

□

现在，我们根据总 K-理论提出以下关于由 K-纯扩张得到的 C*-代数类的分类定理。

定理 4.8。设 $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{R}$，其中 $\mathcal{R}$ 是一个 $\mathcal{DG}$-类 C^*-代数。假设 A_1, A_2 是含幺单的， B_1, B_2 是稳定的。给定两个含幺本质的 K-纯扩张，其对象为C*-代数

$$0 \to B_i \xrightarrow{\iota_i} E_i \xrightarrow{\pi_i} A_i \to 0, \quad i = 1, 2.$$

我们有 $E_1 \cong E_2$ 当且仅当 $(\underline{\mathrm{K}}(E_1), \underline{\mathrm{K}}(E_1)_+, [1_{E_1}]) \cong (\underline{\mathrm{K}}(E_2), \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+, [1_{E_2}])$。

证明。 假设我们有 $\alpha : (\underline{\mathrm{K}}(E_1), \underline{\mathrm{K}}(E_1)_+, [1_{E_1}]) \cong (\underline{\mathrm{K}}(E_2), \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+, [1_{E_2}])$，由推论 4.5，我们得到如下正合交换图

rows

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B_1) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(E_1),[1_{E_1}]) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\pi_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(A_1),[1_{A_1}]) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B_2) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\iota_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(E_2),[1_{E_2}]) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\pi_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(A_2),[1_{A_2}]) & \longrightarrow & 0\ , \end{array}$$

其中， α_0, α_1 是保尺度的保序 Λ-同构。将 α_0, α_1提升到 ψ_0, ψ_1，我们得到

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B_1) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\iota_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(E_1),[1_{E_1}]) & \xrightarrow{\underline{\mathrm{K}}(\psi_1\circ\pi_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(A_2),[1_{A_2}]) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{K}}(B_1) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\iota_2\circ\psi_0)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(E_2),[1_{E_2}]) & \xrightarrow[\underline{\mathrm{K}}(\pi_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(A_2),[1_{A_2}]) & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

考虑扩张

$$0 \to B_1 \xrightarrow{\iota_1} E_1 \xrightarrow{\psi_1\circ\pi_1} A_2 \to 0$$

and

$$0 \to B_1 \xrightarrow{\iota_2\circ\psi_0} E_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \to 0.$$

根据假设和定理 4.7，我们有 $E_1 \cong E_2$。

□

推论 4.9。设 $\mathcal{R}$ 是一个带有 $\mathbb{C} \in \mathcal{R}$的 $\mathcal{DG}$-类。对于稳定的 C^*-$\widetilde{\ \ \ }$代数，B_1、$B_2 \in \mathcal{R}$、B_1、B_2 同构当且仅当 $B_1 \cong B_2$，其中$\sim B_i$ 是 B_i的最小单位化，$i = 1,2$。

证明。稳定代数的最小单位化构成一个 K-纯扩张。通过在推论 $A_1 = A_2 = \mathbb{C}$ 中取 4.8，即可完成证明。

□

注 4.10。如果不假设稳定性，上述结论并不成立。例如， $C_0[0,1) \ncong C_0[0,1/2) \oplus C_0(1/2,\ 1]$，但

$$\widetilde{C_0[0,1)} \cong C_0[0,1/2)\widetilde{\oplus C_0}(1/2,1] \cong C[0,1].$$

注 4.11. 如果一个 $\mathcal{DG}$-类 $\mathcal{R}$ 在稳定化和 $\mathbb{C} \in \mathcal{R}$下封闭，则记 $\mathcal{E}$ 为由含幺本质 K-纯扩张产生的 C*-代数 E 所构成的类

$$0 \to B \to E \to A \to 0,$$

或 $E = A$，其中 A，$B \in \mathcal{R}$是含幺单的，A 是稳定的。于是

$$\{A,\ \widetilde{G \otimes \mathcal{K}} |\ A, G \in \mathcal{R},\ A \text{ is unital simple}\} \subset \mathcal{E}.$$

因此，对于任意 E_1，$E_2 \in \mathcal{E}$，根据定理 4.8，我们有 $E_1 \cong E_2$ 当且仅当

$$(\underline{\mathrm{K}}(E_1), \underline{\mathrm{K}}(E_1)_+, [1_{E_1}]) \cong (\underline{\mathrm{K}}(E_2), \underline{\mathrm{K}}(E_2)_+, [1_{E_2}]).$$

5. Classification: the general case

现在我们转向不一定是 K-纯的扩张，并将证明总 Cuntz 半群能够分类由 K-纯代数的一般扩张所产生的 C*-代数类。

5.1.（C*-代数 [13, 11] 的 Cuntz 半群）记 A 中正元素构成的锥为 A_+。令 $a, b \in A_+$。称 a 是 $Cuntz subequivalent$于 b，记作 $a \lesssim_{\mathrm{Cu}} b$，若存在 A 中的序列 (r_n)，使得 $r_n^* b r_n \to a$。若 $a \lesssim_{\mathrm{Cu}} b$ 且 $b \lesssim_{\mathrm{Cu}} a$，则称 a 是 $Cuntz\ equivalent$于 b，记作 $a \sim_{\mathrm{Cu}} b$。若 $a \sim_{\mathrm{Cu}} b$，则 a 和 b 在 A 中生成相同的理想。A 的 $Cuntz\ semigroup$ 定义为 $\mathrm{Cu}(A) = (A \otimes \mathcal{K})_+ / \sim_{\mathrm{Cu}}$。我们将 $a \in (A \otimes \mathcal{K})_+$ 在 $\mathrm{Cu}(A)$ 中的类记为 $\langle a \rangle$。利用同构 $M_2(\mathcal{K}) \cong \mathcal{K}$，可得同构 $\psi: M_2(A \otimes \mathcal{K}) \to A \otimes \mathcal{K}$，记作 $a \oplus b = \psi\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$。于是，$\mathrm{Cu}(A)$ 在配备加法 $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle a \oplus b \rangle$ 和关系：后成为一个正序阿贝尔半群

$$\langle a \rangle \leq \langle b \rangle \Leftrightarrow a \lesssim_{\mathrm{Cu}} b, \quad a, b \in (A \otimes \mathcal{K})_+.$$

5.2. 设 A 是一个 C*-代数，并令 $\mathrm{Lat}(A)$ 表示 A 中理想的集合，其偏序由理想的包含关系给出。若 M 是 $\mathrm{Cu}(A)$ 的一个理想，即 M 是一个保序遗传（对任意 $a, b \in \mathrm{Cu}(A)$，若 $a \leq b$ 且 $b \in M$，则 $a \in M$）子幺半群，且对递增序列的上确界封闭，我们就称之为理想。对于 A 中的任意理想 I，$\mathrm{Cu}(I)$ 都是 $\mathrm{Cu}(A)$ 的一个理想。（更多细节参见 [5, 5.1] 和 [10, 3.1]。）映射 $I \to \mathrm{Cu}(I)$ 在 A 的闭双边理想格 $\mathrm{Lat}(A)$ 与 $\mathrm{Cu}(A)$ 的理想格 $\mathrm{Lat}(\mathrm{Cu}(A))$ 之间定义了一个格同构。

设 A 是一个稳定秩一的 C*-代数。记 $\mathrm{Lat}_f(A)$ 为 $\mathrm{Lat}(A)$ 中由 A 的所有包含满正元素的理想构成的子集。因此，$\mathrm{Lat}_f(A)$ 中的任意理想都是单生成的。对于 $a \in A_+$，我们将 I_a 记为由 a 生成的 A 的理想。定义 $\mathrm{Cu}_f(I) := \{\langle a \rangle \in \mathrm{Cu}(A) \mid I_a = I\}$。换言之，$\mathrm{Cu}_f(I)$ 由 $\mathrm{Cu}(A)$ 中在 $\mathrm{Cu}(I)$ 里满的元素构成。我们还将用 $I_{\langle a \rangle}$ 表示 A 中的理想 I_a。若 $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle$，则有 $I_{\langle a \rangle} \subset I_{\langle b \rangle}$。

以下定义结合了[2]中的定义 3.18 和定理 3.19。另请参见 [2, 定义 3.7]，其中给出了一个等价版本；在该版本中，我们从 Cuntz 的角度考察 KK-理论 [16],，其元素可视为同态的同伦类。

定义 5.3. (总 Cuntz 半群) 设 A 是一个稳定秩一的可分 C*-代数。定义

$$\underline{\mathrm{Cu}}(A) := \coprod_{I \in \mathrm{Lat}_f(A)} \mathrm{Cu}_f(I) \times \mathrm{K}_1(I) \times \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_*(I; \mathbb{Z}_n).$$

若 $x, y \in \mathrm{Cu}(A)$ 且 $x \leq y$，则分别记由 x 和 y 在 $A\otimes\mathcal{K}$ 中生成的理想为 I_x 和 I_y。记 $\iota_{I_xI_y}\colon I_x \to I_y$ 为自然包含，并记 $\delta_{I_xI_y} = \mathrm{K}(\iota_{I_xI_y}) = \mathrm{K}(I_x) \to \mathrm{K}(I_y)$。

我们为 $\mathrm{Cu}(A)$ 配备如下加法和序：对于任意

$$(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \in \mathrm{Cu}_f(I_x) \times \mathrm{K}_1(I_x) \times \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathrm{K}_*(I_x; \mathbb{Z}_n)$$

and

$$(y, \mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1})) \in \mathrm{Cu}_f(I_y) \times \mathrm{K}_1(I_y) \times \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathrm{K}_*(I_y; \mathbb{Z}_n),$$

then

$$(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) + (y, \mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1}))$$

$$= (x+y, \delta_{I_xI_{x+y}}(\mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) + \delta_{I_yI_{x+y}}(\mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1})))$$

and

$$(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \leq (y, \mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1})),$$

if

$$x \leq y \text{ and } \delta_{I_xI_y}(\mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) = (\mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1})),$$

若 A 含幺，我们令

$$\underline{\mathrm{Cu}}_u(A) = (\underline{\mathrm{Cu}}(A), ([1_A], 0, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(0,0))).$$

注5.4。设 A 和 B 是稳定秩一的可分 C*-代数，且 $\psi\colon A \to B$ 是一个 $*$-同态。仍用 ψ 表示 $\psi\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{K}}$。令 $x \in \mathrm{Cu}(A)$ 且 $y \in \mathrm{Cu}(B)$，假设 $\psi(I_x) \subset I_y$，我们将限制映射 $\psi|_{I_x\to I_y}\colon I_x \to I_y$ 记为 $\psi_{I_xI_y}$。

那么 ψ 诱导出两个态射：

$$\underline{\mathrm{K}}(\psi)\colon \underline{\mathrm{K}}(A) \to \underline{\mathrm{K}}(B) \quad \text{and} \quad \underline{\mathrm{K}}(\psi_{I_xI_y})\colon \underline{\mathrm{K}}(I_x) \to \underline{\mathrm{K}}(I_y).$$

一般而言，当 I_x 在 A 中不是 K-纯时，$\mathrm{K}(\psi_{I_xI_y})$ 可能不是 $\mathrm{K}(\psi)$ 的限制，且 $\mathrm{K}(I_x)$ 不是 $\mathrm{K}(A)$ 的子群。

特别地，映射 $\mathrm{Cu}(\psi)\colon \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{Cu}(B)$ 表示为

$$\underline{\mathrm{Cu}}(\psi)(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) = (\mathrm{Cu}(\psi)(x), \underline{\mathrm{K}}(\psi_{I_xI_{\mathrm{Cu}(\psi)(x)}})(\mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1}))).$$

注意，$(\mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1}))$ 与 $(0, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \in \mathrm{K}(I_x)$ 相对应。

于是我们有

$$\underline{\mathrm{Cu}}(\psi)(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \leq (y, \mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1}))$$

当且仅当 Cu(ψ)(x) $\leq y \in$ Cu(B) 且

$$\underline{\mathrm{K}}(\psi_{I_xI_y})(0,\mathfrak{u},\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0},\mathfrak{s}_{n,1}))=(0,\mathfrak{v},\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0},\mathfrak{t}_{n,1}))\in\underline{\mathrm{K}}(I_y).$$

5.5.（范畴 Cu~）（[8, 定义 3.7]）设（$S,\leq$）是一个有序幺半群（不一定是正序的，即对于任意 $x \in S$，我们不要求 $0 \leq x$），使得递增序列的上确界总是在 S中存在。对于 x 和 y 中的元素 S，若对于每个递增序列（y_n），只要该序列在 S 中有上确界，且 $y \leq \sup_{n\geq 1} y_n$，就存在 k 使得 $x \leq y_k$.，我们就称 x 紧包含于 y，记作 $x \ll y$。若 $x \in S$满足 $x \ll x$，则称 x 为紧元。

若 S 具有满足 $0 \ll 0$ 的零元，且满足以下序理论公理，我们就称 S 为范畴 Cu~中的 Cu~-半群:

(O1)： S 中任意递增序列都有上确界。

(O2)：对于任意 $x \in S$，都存在一个 S 中的 $\ll$-递增序列 (x_n)，使得 $\sup_{n\geq 1} x_n = x$。

(O3)：加法与紧包含关系相容。

(O4)：加法与递增序列的上确界相容。

两个 Cu~-半群之间的 Cu~-态射是保持紧包含关系和递增序列上确界的有序幺半群态射。特别地，众所周知的范畴 Cu 是 Cu~ 的全子范畴，由所有这些正序对象组成。

对于任意 Cu~-半群 S，我们用 S_c 表示 S 中的紧元集，并用 Gr(S_c) 表示 S_c的 Grothendieck 构造。设 ϕ 是 Cu~-半群之间的 Cu~-态射，用 ϕ_c 表示 ϕ在紧元集上的限制映射，并用 Gr(ϕ_c) 表示 ϕ_c 的诱导 Grothendieck 映射。

定义 5.6。 ([2, 定义 3.15]) 总 Cuntz 半群范畴 Cu 定义如下:

$$\mathrm{Ob}(\underline{\mathrm{Cu}})=\{\,S\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Cu}^{\sim})\,|\,\mathrm{Gr}(S_c)\text{ is a }\Lambda-\text{module}\,\};$$

设 X, $Y \in$ Ob(Cu)，若映射 ϕ： $X \to Y$ 满足以下两个条件，则称其为 Cu-态射:

(1) ϕ 是一个 Cu~-态射。(2) 诱导的格罗滕迪克映射 Gr(ϕ_c) : Gr(X_c) $\to$ Gr(Y_c) 是 Λ-线性的。

以下结果表明，我们可以从总 Cuntz 半群中恢复总 K-理论；并且在 K-纯和实秩零的条件下，这两个不变量彼此决定。

命题 5.7。([2, 命题 5.3]) 赋值

$$\begin{aligned}\underline{H}:\ \underline{\mathrm{Cu}}_u\text{–category}&\to\Lambda_u\text{–category}\\(S,u)&\mapsto(\mathrm{Gr}(S_c),\rho(S_c),\rho((S_+)_c),\rho(u))\\\phi&\mapsto\mathrm{Gr}(\phi_c)\end{aligned}$$

是一个函子，其中 $\rho:\ S_c \to \mathrm{Gr}(S_c)$ 是自然映射 $(\rho(x)\ = [(x,0)]_{\mathrm{Gr}})$，$S_+ = \{x \in S | \, x \geq 0\}$。函子 H 给出自然等价 $H \circ \mathrm{Cu}_u \simeq \mathrm{K}$，这意味着，对于任意含幺可分 C*-代数 A, B，若其稳定秩为一，且 $\mathrm{Cu}_u(A) \cong \mathrm{Cu}_u(B)$，那么

$$(\underline{\mathrm{K}}(A), \underline{\mathrm{K}}(A)_+, [1_A]) \cong (\underline{\mathrm{K}}(B), \underline{\mathrm{K}}(B)_+, [1_B]).$$

注意，如果我们将“含幺”替换为“具有由投影组成的近似单位”，上述陈述仍然成立。关键在于，我们可以在 [2, 定理 317]中用“足够大”的投影代替单位元。

定理 5.8。 ([2, 定理 5.10]) 限制到稳定秩一且实秩零的含幺可分K-*pure*（或 $A\mathcal{HD}$） C*- 代数类上，有如下函子的自然等价:

$$\underline{H} \circ \underline{\mathrm{Cu}}_u \simeq \underline{\mathrm{K}} \quad and \quad \underline{\gamma} \circ \underline{\mathrm{K}} \simeq \underline{\mathrm{Cu}}_u.$$

因此，对于这些代数，K 是分类函子，当且仅当Cu_u也是分类函子。

考虑一般的扩张情形，我们需要刻画不变量的理想结构。

定义 5.9。 ([9, 第 3] 节) 设 S 是一个 Cu~-半群。子集 $O \subseteq S$称为 *Scott-open*，如果

(i) O 是一个上集，也就是说，对于任意 $y \in S$，$y \geq x \in O$ 蕴含 $y \in O$;

(ii) 对于任意 $x \in O$，存在 $x' \ll x$ 使得 $x' \in O$。等价地，对于任意上确界属于 O的 S 递增序列，该序列中也存在一个元素属于 O。

我们称 S 为 *positively directed*，如果对于任意 $x \in S$，存在 $p_x \in S$使得 $x + p_x \geq 0$。

设 S 是一个正向有向 Cu~-半群，且 M 是 S的子幺半群。若 M 满足以下两个条件，则称其为 *positively stable*：

(i) M 是一个正向有向序幺半群。

(ii) 对于任意 $x \in S$，若 $(x + P_x) \cap M \neq \varnothing$，则 $x \in M$，其中 $P_x : = \{y \in S \mid x + y \geq 0\}$。

设 M 是 S 的一个正向稳定子幺半群。若 M 在 S 中是 Scott闭的，即 $S \backslash M$ 是 Scott 开的，则称 M 是 S 的一个 *ideal*。

采用与酉 Cuntz 半群的命题 3.16] 类似的过程，我们提出以下总版本: [9,

命题5.10。 设 A 是一个稳定秩一的 C*-代数。记$\mathrm{Lat}(\mathrm{Cu}(A))$ 为$\mathrm{Cu}(A)$的所有理想构成的集合。那么映射

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Lat}(A) &\to \mathrm{Lat}(\underline{\mathrm{Cu}}(A)), \\ I &\mapsto \underline{\mathrm{Cu}}(I) \end{aligned}$$

是完备格 $\mathrm{Lat}f(A)$ 到 $\mathrm{Lat}f(\mathrm{Cu}(A))$的同构。特别地， A 是单的，当且仅当 $\mathrm{Cu}(A)$ 是单的。

证明。 根据定义 5.3，$(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \in \mathrm{Cu}(A)$ 属于 $\mathrm{Cu}(I)$，当且仅当 $x \in \mathrm{Cu}(I)$；证明与 [5, 命题 5.1.10] 相同。为方便起见，我们将逆映射写为如下形式：

$$\Psi : \mathrm{Lat}(\underline{\mathrm{Cu}}(A)) \to \mathrm{Lat}(A),$$

$$J \mapsto \{y \in A \mid (\langle yy^* \rangle, 0, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(0, 0)) \in J_+\}$$

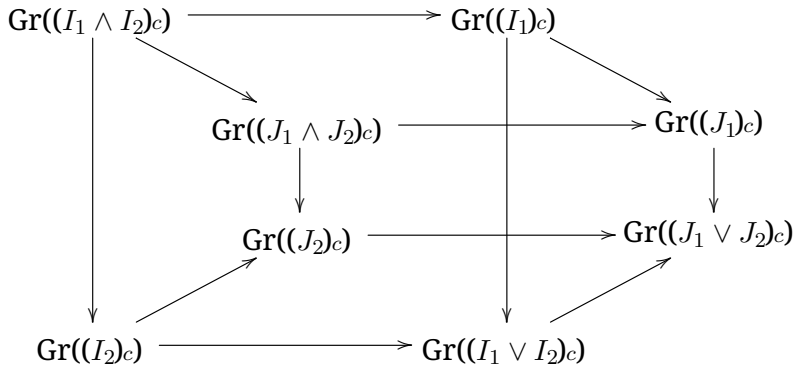
其中， J_+ J的正锥。

□

定义 5.11. 设 $X, Y \in \mathrm{Cu}$，分别使其所有理想构成格。若映射 $\phi : X \to Y$ 是格 Cu-态射，则称其为格 Cu-态射，当且仅当 ϕ满足以下两个条件：

(1) ϕ 是一个 $\mathrm{Cu}^{\sim}$-态射。

(2) 对于 (I_1, J_1)、(I_2, J_2) 这两个 (X, Y) 的理想对，其中 J_i 是 Y 中包含每个 $i = 1,2,$ 的 $\phi(I_i)$ 的理想，我们有以下图表在 Λ-范畴中自然交换。



特别地，如果 $\phi : X \to Y$ 是双射，且 ϕ 和 ϕ^{-1} 都是格 Cu-态射，我们称 X 和 Y 格 Cu-同构，或者称 ϕ 是格 Cu-同构，记作

$$X \cong_L Y.$$

注 5.12。 容易看出，对于任意同态 $\psi : A \to B$，其中 A, B 是稳定秩一的可分 C*-代数，$\mathrm{Cu}(\psi) : \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{Cu}(B)$ 是格同态。

进一步，假设 I 是 A 的一个理想。根据总 Cuntz 半群的定义，无论 I 在 A 中是否 K- 纯，映射 $\mathrm{Cu}(\iota_{IA}) : \mathrm{Cu}(I) \to \mathrm{Cu}(A)$ 都是单射格 Cu- 态射，其中 $\iota_{IA} : I \to A$ 是自然嵌入映射。

以下是我们针对由一般扩张得到的代数所给出的分类定理。

定理 5.13. 设 $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{R}$，其中 $\mathcal{R}$ 是 C*-代数的一个 $\mathcal{DG}$-类。假设 A_1, A_2 是含幺单的，且 B_1, B_2 是稳定的。给定两个具有平凡指标映射的含幺本质扩张（不一定是K-纯的）

$$0 \to B_i \xrightarrow{\iota_i} E_i \xrightarrow{\pi_i} A_i \to 0, \quad i = 1, 2.$$

我们有 $E_1 \cong E_2$ 当且仅当

$$\underline{\mathrm{Cu}}_u(E_1) \cong_L \underline{\mathrm{Cu}}_u(E_2).$$

证明。我们只需证明逆向。设我们有ρ : $\mathrm{Cu}_u(E_1) \to \mathrm{Cu}_u(E_2)$ 是一个格 Cu_u-同构。记 $\rho_{|\mathrm{Cu}}$ 在 Cuntz 半群上的限制映射为:

$$\rho_{|\mathrm{Cu}} : \mathrm{Cu}(E_1) \to \mathrm{Cu}(E_2).$$

由于 E_1, E_2 具有稳定秩一，因此对于投影，Cuntz 等价与 Murray–von Neumann 等价相同。于是，$\rho_{|\mathrm{Cu}}$ 在紧正元素上的限制映射是保序半群同构

$$(\rho_{|\mathrm{Cu}})_c : \mathrm{K}_0^+(E_1) \to \mathrm{K}_0^+(E_2),$$

其诱导的格罗滕迪克映射给出了带尺度的保序群同构

$$\mathrm{Gr}((\rho_{|\mathrm{Cu}})_c) : (\mathrm{K}_0(E_1), \mathrm{K}_0^+(E_1), [1_{E_1}]) \to (\mathrm{K}_0(E_2), \mathrm{K}_0^+(E_2), [1_{E_2}]).$$

记 $\alpha = \mathrm{Gr}((\rho_{|\mathrm{Cu}})_c$，应用引理 4.4，可得如下自然的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(B_1) & \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\iota_1)} & \mathrm{K}_0(E_1) & \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\pi_1)} & \mathrm{K}_0(A_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(B_2) & \xrightarrow[\mathrm{K}_0(\iota_2)]{} & \mathrm{K}_0(E_2) & \xrightarrow[\mathrm{K}_0(\pi_2)]{} & \mathrm{K}_0(A_2) & \longrightarrow & 0\ ,
\end{array}$$

其中 α_0, α_1 也是带尺度的保序同构。

这意味着，由 α 诱导的从 $\mathrm{Lat}(\mathrm{K}_0(E_1))$ 到 $\mathrm{Lat}(\mathrm{K}_0(E_2))$ 的同构会将 $\mathrm{K}_0(B_1)$ 映到 $\mathrm{K}_0(B_2)$。由于 E_1, E_2 具有实秩零，由 $\rho_{|\mathrm{Cu}}$ 诱导的从 $\mathrm{Lat}(\mathrm{Cu}(E_1))$ 到 $\mathrm{Lat}(\mathrm{Cu}(E_2))$ 的同构会将 $\mathrm{Cu}(B_1)$ 映到 $\mathrm{Cu}(B_2)$。现在我们断言，格化的 Cu_u-同构 ρ 会将 $\mathrm{Cu}(B_1)$ 映到 $\mathrm{Cu}(B_2)$。

For any $(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \in \underline{\mathrm{Cu}}(B_1)$, set

$$(y, \mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1})) =: \rho(x, \mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{s}_{n,0}, \mathfrak{s}_{n,1})) \in \underline{\mathrm{Cu}}(E_2);$$

$$(z, \mathfrak{w}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{r}_{n,0}, \mathfrak{r}_{n,1})) =: \rho(x, -\mathfrak{u}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(-\mathfrak{s}_{n,0}, -\mathfrak{s}_{n,1})) \in \underline{\mathrm{Cu}}(E_2).$$

由于 ρ 是保序幺半群态射，因此必有

$$0 \leq \rho(2x, 0, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(0,0)) = (y, \mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1})) + (z, \mathfrak{w}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{r}_{n,0}, \mathfrak{r}_{n,1}))$$

这意味着

$$(\rho_{|\mathrm{Cu}}(2x), 0, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(0,0)) = (y+z, 0, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(0,0)).$$

由于 $\rho_{|\mathrm{Cu}}(2x) \in \mathbf{Cu}(B_2)$，我们有 $y,\ z \in \mathbf{Cu}(B_2)$。特别地，我们有

$$(y, \mathfrak{v}, \bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{t}_{n,0}, \mathfrak{t}_{n,1})) \in \underline{\mathrm{Cu}}(B_2).$$

一般而言，ρ 构成一个 $\mathbf{Cu}^{\sim}$-同构 $\widetilde{\rho}: \mathrm{Cu}(B_1) \to \mathrm{Cu}(B_2)$。此外，根据定义 5.11，$\widetilde{\rho}$ 是一个 $\mathbf{Cu}$-同构。

根据假设，B_1，B_2 有一个由投影组成的近似单位，根据命题 5.7（另见其下方段落），$\widetilde{\rho}$ 诱导出一个保序的 Λ-同构

$$\underline{H}(\widetilde{\rho}): (\underline{\mathrm{K}}(B_1), \underline{\mathrm{K}}(B_1)_+) \cong (\underline{\mathrm{K}}(B_2), \underline{\mathrm{K}}(B_2)_+).$$

根据 $\mathcal{DG}$ 类的定义，存在一个同构 $\phi_0: B_1 \to B_2$ 使得 $\mathbf{K}(\phi_0) = H(\widetilde{\rho})$。仍由定义 5.11，我们得到以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{\mathrm{K}}(B_1) & \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\iota_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(E_1), [1_{E_1}]) & \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\pi_1)} & (\underline{\mathrm{K}}(A_1), [1_{A_1}]) \\
\downarrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{K}}(\phi_0)} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{H}(\rho)} & & \\
\underline{\mathrm{K}}(B_2) & \xrightarrow[\mathrm{K}_0(\iota_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(E_2), [1_{E_2}]) & \xrightarrow[\mathrm{K}_0(\pi_2)]{} & (\underline{\mathrm{K}}(A_2), [1_{A_2}]) .
\end{array}$$

限制到 $\mathbf{K}_*$ 上，我们得到以下具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*(B_1) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\iota_1)} & (\mathrm{K}_*(E_1), [1_{E_1}]) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\pi_1)} & (\mathrm{K}_*(A_1), [1_{A_1}]) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_*(\phi_0)} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{H}(\rho)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*(B_2) & \xrightarrow[\mathrm{K}_*(\iota_2)]{} & (\mathrm{K}_*(E_2), [1_{E_2}]) & \xrightarrow[\mathrm{K}_*(\pi_2)]{} & (\mathrm{K}_*(A_2), [1_{A_2}]) & \longrightarrow & 0 ,
\end{array}$$

其中，$\mathbf{K}_*(\phi_0)$ 由 ϕ_0, $\underline{H}(\rho)^*$ 诱导，$\underline{H}(\rho)$ 是 $\mathbf{K}_*$ 群之间的限制映射，而 ϱ 是由 $\mathbf{K}_*(\phi_0)$ 和 $\underline{H}(\rho)^*$ 得到的诱导映射。

注意，$_*(\phi_0)$ 和 $\underline{H}(\rho)^*$ 都是带标度的保序映射。命题 1.11 表明 ϱ 也是带标度的保序映射。由命题 4.3，我们可以将 ϱ 提升为一个同构 $\phi_1: A_1 \to A_2$。现在我们有如下正合行交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*(B_1) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\iota_1)} & (\mathrm{K}_*(E_1), [1_{E_1}]) & \xrightarrow{\mathrm{K}_*(\phi_1\circ\pi_1)} & (\mathrm{K}_*(A_2), [1_{A_2}]) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{H}(\rho)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*(B_1) & \xrightarrow[\mathrm{K}_*(\iota_2\circ\phi_0)]{} & (\mathrm{K}_*(E_2), [1_{E_2}]) & \xrightarrow[\mathrm{K}_*(\pi_2)]{} & (\mathrm{K}_*(A_2), [1_{A_2}]) & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

也就是说，根据定理 1.22，这两个扩张

$$0 \to B_1 \xrightarrow{\iota_1} E_1 \xrightarrow{\phi_1 \circ \pi_1} A_2 \to 0$$

and

$$0 \to B_1 \xrightarrow{\iota_2 \circ \phi_0} E_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \to 0$$

由命题 1.16可知，它们强酉等价，因而 $E_1 \cong E_2$。

□

结合定理 2.10 和定理 5.13，立即可得：

推论 5.14。对于 E_i、$i = 1$这两个2 在 2.3中构造的代数，有$\mathrm{Cu}(E_1) \ncong_L \mathrm{Cu}(E_2)$。

注 5.15。注意，在 E_1、E_2 中，2.3里的代数 E 属于 [19, 例 4。5]以及一大类 C*-代数均由定理 5.13分类。代数$A_{(t,z)}(z \neq 0)$ 属于 [7, 例 20]，，它们不同构于任何由次齐次 C*-代数的归纳极限，也涵盖在我们的分类定理之中。注意，我们在这里提到的所有具体代数都不是 K-纯的，因此它们的 K_*-群不是弱无孔的。

注 5.16. 一方面，我们已证明，对于一类稳定秩一且实秩零的 C*-代数，总 Cuntz 半群是一个完全不变量；另一方面，若 A 是一个含幺、单、正合、$\mathcal{Z}$-稳定的 C*-代数，且具有稳定秩一，则我们可以从 $\mathrm{Cu}_u(A)$ 中恢复 $\mathrm{Cu}(A)$ 和 $(\mathrm{K}(A), \mathrm{K}(A)_+, [1_A])$，这意味着 $\mathrm{Cu}_u(A)$ 包含了关于

$$\mathrm{Ell}(A) = ((\mathrm{K}_0(A), \mathrm{K}_0^+(A), [1_A]), \mathrm{K}_1(A), \mathrm{T}(A), r_A)$$

（详情请参阅 [28, 注 4.5、推论 6.8] ）。

因此，这种不变量——总 Cuntz 半群——在单情形和实秩零情形中都发挥了良好作用。

Acknowledgements

第一作者受中国国家自然科学基金（编号：12101113）资助。第二作者受中国国家自然科学基金（编号：12101102）资助。

References

[1] Q. An、G. A. Elliott、Z. Li 和 Z. Liu，某些实秩零 ASH C*-代数的分类，《拓扑分析杂志》，14 1 2022 183 202 2 ( ) ( )，–。Q. An 和 Z. Liu，稳定秩一 C*-代[2]数的总 Cuntz 半群，《泛函分析杂志》，284 8 2023 109858 1, 2, 3, 4, 20, 30, 32, 33 ( ) ( )，第 。Q. An 和 Z. Liu，关于稳[3]定秩一且实秩零 C -代数的含幺吸收扩张，arXiv:2303.05897*10，14[4] Q. An、Z. Liu 和 Y. Zhang，关于某些实秩零 C*-代数的分类，《中国科学：数学》，65 4 2022 753 792 2 ( ) ( )，–。[5]R. Antoine、F. Perera 和 H. Thiel，Cuntz 半群的张量积与正则性，《美国数学会回忆录》，251（2018），viii+191。30，34

[6] B. Blackadar，《算子代数：C*-代数与冯·诺伊曼代数理论》，《数学科学百科全书》122。算子代数与非交换几何，III。Springer-Verlag，柏林，2006 13 。L. G. Brown 和 M. Dadarlat，C*-代数的扩张与拟[7]对角性，《伦敦数学会会刊》，53 3 1996 582 600 2, 37 ( ) ( )，–。L. Cantier，稳定秩一 C*-代数的酉半群，[8]《泛函分析杂志》，281 9 2021 109175 32 ( ) ( )，第 。L. Cantier，理想与商的酉 Cuntz 半群，[9]《明斯特数学杂志》，14（ 2 2021 585 606 33 ）( )，–。A. Ciuperca，Cuntz 半群的一些性质及某类非单 C*-代数的同构定理，[10]ProQuest LLC，安娜堡;30密歇根州，2008年。博士论文——多伦多大学（加拿大）。[11] K. T. Coward、G. A. Elliott 和 C. Ivanescu，Cuntz 半群作为 C*-代数的不变量，《纯粹与应用数学杂志》，623 2008 161 193 30 ( )，–。J. Cuntz，由等距算子生成的单[12]C*-代数，《数学物理通讯》，57（2）（ 1977 173 185 6 ），–。J. Cuntz，单 C*-代数上的维数函数，《数学年刊》，233（2）（1978年），145–153。30[14] J. Cuntz，某些 C*-代数的 K-理论，《数学年刊》（第2辑），113（1）（1981年），181–197。6[15] J. Cuntz，某些 C*-代数的 K-理论。II，《算子理论杂志》，5（1）（1981年），101–108。5[16] 1 1 1987 31 51 30 J. Cuntz，重新审视 KK-理论，[17]《K-理论》，( ) ( )，–。M. Dadarlat 和 S. Eilers，在保持理想不变的同时压缩 C*-代数 K-理论中的系数，《K-理论》，14 3 1998 281 304 8, 13, 20 ( ) ( )，–。M. Dadarlat 和 G. Gong[18]，实秩零近似子次10, 12, 23 C*-代数的一个分类结果，《几何与泛函分析》，7（4）（1997年），646–711。2、3、4、6、7，[19] M. Dadarlat 和 T. A. Loring，某些实秩零 C*-代数的扩张，《傅里叶研究所年刊》，44 3 1994 907 925 2, 37 ( ) ( )，–。M. Dadarlat 和 T. A. Loring，Kasparov 群的一[20]个普适多系数定理，《杜克数学杂志》，84 2 1996 355 377 2, 10 ( ) ( )，–。M. Dadarlat 和 T. A. Loring，通过有序[21]模 K-理论对 C*-代数进行分类，《数学年刊》，305 4 1996 601 616 1, 4, 11, 12 ( ) ( )，–。S. Eilers，具有有界挠的 AD 代数的完全不变量[22] K_1，《泛函分析杂志》，139 2 1996 325 348 2 ( ) ( )，–。G. A. Elliott，带挠的维数群，《国际数学杂志》，1（4）[23]（1990年），361–380。10[24] G. A. Elliott，关于实秩零 C*-代数的分类，《纯粹与应用数学杂志》，443 1993 179 219 1, 23 ( )，–。G. A. Elliott 和 G. Gong，关于实秩零 C*-代数的分类。II，《数[25]学年刊》（ 2 144 2 1996 497 610 1, 4, 10, 12, 23 ），( ) ( )，–。G. A. Elliott、G. Gong、H. Lin[26] 和 Z. Niu，关于有限分解秩单可核 C*-代数的分类。II，arXiv：1507 03437 2 1 。v G. A. Elliott、G. Gong 和 H. Su[27]，关于实秩零 C*-代数的分类。IV：归约到二维局部谱，《算子代数及其应用》[ ] 1998 1 C // Fields Inst Commun.。G. A. Elliott、L. Robert 和 L. Santiago[28]，C*-代数上的下半连续迹锥，《美国数学杂志》，133 4 2011 969 1005 37 ( ) ( )，–。G. Gong，实秩零 C*-代数的分类及未悬挂的 E-等价类型[29]，《泛函分析杂志》，152 2 1998 281 329 1 ( ) ( )，–。G. Gong、C. Jiang 和 L. Li，豪斯多夫化代数 - 群及具有理想性质的 C*-代数的不变量[30]，《K理论年刊》，5（1）（2020年），43–78。2 K_1

[31] G. Gong、C. Jiang 和 L. Li，《具有理想性质的归纳极限 C*-代数的分类》，伦敦数学学会汇刊，9 1 2022 158 236 2 ( ) ( )，–。G. Gong、X. Jiang 和 H. Su，[32]《含幺单 C*-代数的 -稳定性的障碍》，加拿大数学通报，$\mathcal{Z}$ 43 4 2000 418 426 1 ( ) ( )，–。G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，《有限单[33]可容 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数的分类 I：具有广义迹秩一的 C*-代数》，加拿大皇家学会数学科学院通讯，42 3 2020 63 450 1 ( ) ( )，–。G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，《有限单可容 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数[34]的分类 II：具有有理广义迹秩一的 C*-代数》，加拿大皇家学会数学科学院通讯，42 4 2020 451 539 1 ( ) ( )，–。K. R. Goodearl，《实秩零 C*-代数的乘子代数》，[35]K-理论，K_0 10 5 1996 419 489 10 ( ) ( )，–。H. Lin，《可容 C*-代数分类导论》。World Scientific[36] Publishing Co. Inc.，美国新泽西州 River Edge，2001 4 。H. Lin 和 M. Rørdam，《圆代数归纳极限的扩张》，[37]伦敦数学会会刊，51 2 1995 603 613 8 ( ) ( )，–。M. Karoubi，《某些算子代数的代数 K 理论》，《算子代数[38]》（P. de la Harpe 编），数学讲义 725，Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约，1979， 254 289 5 页–。M. Rørdam，《核 C*-代数的分类》，《算子代[39]数中的熵》。数学科学百科全书，第 126， 2002 1 卷。Springer，柏林，。J. [40]Rosenberg 和 C. Schochet，《Kasparov 广义 K-函子的 Künneth 定理与泛系数定理》，杜克数学杂志，55 (2) (1987)，431–474。2，[41] C. Schochet，《C*-代数的拓扑方法 IV：模 p 同调》，太平洋数学杂志， 114 2 1984 447 468 2, 5, 6 ( ) ( )，–。G. Skandalis，《关于强 Ext 双函子》，预印本（[42] 1983 10 ）。G. Skandalis，《Kasparov 双变 K-理论及其应用》，数学展望，9 (3) (1991 193 250 10)，–。A. Tikuisis、S. White 和 W. [43]Winter，《核 C*-代数的拟对角性》，数学年刊（[44] 2 185 1 2017 229 284 1 ），( ) ( )，–。C. Wei，《稳定 Ext 群的泛系数定理》，泛函分析杂志，258 (2 2010 650 664 10) ( )，–。C. Wei，[45]《某些 C*-代数含幺扩张的分类》，休斯敦数学杂志，41 (3) (2015[46]年)，965–991。10

School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun, 130024, China*Email address*: qingnanan1024@outlook.com

School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, China*Email address*: lzc.12@outlook.com